

Prof. univ. dr. Ion CRĂCIUN  
Departamentul de Matematică  
Universitatea Tehnică *Gheorghe Asachi* din Iași

# ANALIZĂ MATEMATICĂ

## CALCUL DIFERENȚIAL

IAȘI – 2011



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Noțiuni fundamentale de teoria mulțimilor</b>	<b>7</b>
1.1	Mulțimi	7
1.2	Operații cu mulțimi	9
1.3	Produse carteziene	11
1.4	Relații binare. Funcții. Legi de compoziție	13
1.5	Structuri algebrice. Izomorfism	19
1.6	Mulțimea numerelor reale	22
<b>2</b>	<b>Șiruri și serii de numere reale</b>	<b>35</b>
2.1	Șiruri de numere reale	35
2.2	Șir fundamental în $\mathbb{R}$	46
2.3	Limita superioară și limita inferioară ale unui șir numeric	48
2.4	Puncte limită ale unui șir numeric	50
2.5	Serii de numere reale. Definiții. Exemple	54
2.5.1	Seria geometrică	55
2.5.2	Seria telescopică	56
2.5.3	Seria armonică	57
2.6	Proprietăți generale ale seriilor convergente	57
2.7	Criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice	62
2.8	Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare	63
2.9	Serii numerice absolut convergente și serii semi-convergente	68
2.10	Serii cu termeni pozitivi	74
2.10.1	Seria armonică generalizată	75
2.11	Criterii de convergență și divergență pentru serii cu termeni pozitivi	76
2.11.1	Criterii de comparație	76
2.11.2	Criteriul condensării al lui Cauchy	80
2.11.3	Criteriul logaritmice	82
2.11.4	Criteriul de convergență în $\alpha$	83
2.11.5	Criteriul raportului	84
2.11.6	Criteriul radicalului	86
2.12	Alte criterii de convergență ale seriilor cu termeni pozitivi	89
2.12.1	Criteriul lui Kummer	89
2.12.2	Criteriul lui Raabe	90
2.12.3	Criteriul logaritmice al lui Bertrand	92
2.12.4	Criteriul lui Gauss	94
2.12.5	Criteriul integral al lui Cauchy	98
2.13	Calculul aproximativ al sumei unei serii numerice convergente	100
2.14	Serii numerice remarcabile	101
2.15	Produsul după Cauchy al două serii numerice	106

<b>3</b>	<b>Elemente de teoria spațiilor metrice</b>	<b>109</b>
3.1	Definiția spațiului metric. Proprietăți. Exemple	109
3.2	Definiția spațiului liniar (vectorial). Proprietăți. Exemple	121
3.3	Șiruri de puncte în spații metrice. Șir de funcții	131
3.4	Spații metrice complete. Exemple	134
3.5	Spații vectoriale normate. Spații Banach	136
3.6	Serii în spații Banach. Serii de funcții	147
3.7	Spații prehilbertiene. Spații Hilbert	152
3.8	Principiul contracției	159
3.9	Mulțimi închise și mulțimi deschise într-un spațiu metric	161
3.10	Mulțimi compacte într-un spațiu metric	173
3.11	Mulțimi conexe și mulțimi convexe	180
3.12	Spațiul $\mathbb{R}^n$ și spațiul punctual $\mathbb{E}^n$	185
<b>4</b>	<b>Limite și continuitate</b>	<b>191</b>
4.1	Limita unei funcții într-un punct	191
4.2	Funcții continue	196
4.3	Funcții uniform continue	202
4.4	Funcții continue pe mulțimi compacte	206
4.5	Convergența unui șir de funcții	208
4.6	Homeomorfisme	216
4.7	Conexiune prin arce. Funcții continue pe mulțimi conexe și pe mulțimi convexe	218
4.8	Aplicații liniare între spații vectoriale reale. Izomorfism	226
4.9	Aplicații liniare și continue între spații normate	229
4.10	Aplicații liniare și continue între spații normate finit dimensionale	232
4.11	Forme multiliniare și de gradul $m$ pe $\mathbb{R}^n$	237
<b>5</b>	<b>Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă reală</b>	<b>243</b>
5.1	Derivabilitatea funcțiilor vectoriale de argument real	243
5.2	Derivabilitate laterală și derivate laterale ale funcțiilor vectoriale de variabilă reală	250
5.3	Derivabilitate și derivate de ordin superior ale unei funcții vectoriale de variabilă reală	252
5.4	Derivabilitatea funcțiilor vectoriale compuse de variabilă reală	255
5.5	Diferențiabilitatea unei funcții vectoriale de o variabilă reală	256
5.6	Diferențiabilitate și diferențiale de ordin superior ale funcțiilor vectoriale de argument real	263
5.7	Formula lui Taylor	267
5.8	Drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^m$	270
5.9	Formula lui Taylor pentru o funcție reală de o variabilă reală. Aplicații la studiul local al funcțiilor	281
5.9.1	Tabelarea funcțiilor	285
5.9.2	Convexitatea funcțiilor	285
5.9.3	Contactul de ordin $n$ a două curbe plane	286
5.9.4	Natura punctelor de extrem ale unei funcții reale de o variabilă reală	288
5.9.5	Metoda tangentei	288
<b>6</b>	<b>Diferențiabilitatea și derivabilitatea parțială ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale</b>	<b>291</b>
6.1	Direcție în $\mathbb{R}^n$	291
6.2	Derivata după o direcție a unei funcții reale de variabilă vectorială	292
6.3	Derivabilitatea parțială și derivate parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale	296
6.4	Diferențiabilitatea și diferențiala de ordinul întâi ale unei funcții reale de variabilă vectorială	300
6.5	Condiție suficientă de diferențiabilitate	307
6.6	Derivate parțiale de ordin superior ale unei funcții reale de mai multe variabile reale	310
6.7	Diferențiale de ordin superior ale funcțiilor reale de variabilă vectorială	317
6.8	Formula lui Taylor pentru funcții reale de o variabilă vectorială	324
6.9	Funcții omogene. Identitatea lui Euler	326



<b>7</b>	<b>Teoria diferențiabilității și derivabilității funcțiilor vectoriale de argument vectorial</b>	<b>331</b>
7.1	Derivabilitatea funcțiilor vectoriale de argument vectorial . . . . .	331
7.2	Diferențiabilitatea unei funcții vectoriale de variabilă vectorială . . . . .	335
7.3	Derivate și diferențiale de ordin superior ale funcțiilor vectoriale de mai multe variabile reale . . . . .	339
7.4	Diferențiabilitatea și derivabilitatea funcțiilor vectoriale compuse . . . . .	341
7.5	Prelungirea unei funcții uniform continue . . . . .	349
7.6	Derivatele parțiale ale unei funcții vectoriale pe frontiera domeniului de definiție . . . . .	350
7.7	Pânze parametrice. Suprafețe . . . . .	351
<b>8</b>	<b>Aplicații ale calculului diferențial</b>	<b>363</b>
8.1	Forme biliniare pe $\mathbb{R}^n$ . . . . .	363
8.2	Forme pătratice pe $\mathbb{R}^n$ . . . . .	366
8.3	Extreme locale ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale . . . . .	369
8.4	Funcții definite implicit . . . . .	378
8.5	Extreme locale ale funcțiilor definite implicit . . . . .	395
8.6	Extreme condiționate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange . . . . .	398
8.7	Extremele funcțiilor reale definite pe mulțimi compacte din $\mathbb{R}^n$ . . . . .	410
8.8	Transformări regulate, sau difeomorfisme . . . . .	412
8.9	Dependență și independență funcțională . . . . .	419
8.10	Coordonate curbilinii în plan . . . . .	424
8.10.1	Coordonate polare în plan . . . . .	428
8.10.2	Coordonate polare generalizate în plan . . . . .	430
8.11	Coordonate curbilinii în $\mathbb{R}^3$ . . . . .	432
8.11.1	Coordonate polare în spațiu, sau coordonate sferice . . . . .	437
8.11.2	Coordonate semipolare în spațiu, sau coordonate cilindrice . . . . .	440
	<b>Bibliografie</b>	<b>443</b>
	<b>Index de noțiuni</b>	<b>445</b>



# Capitolul 1

## Noțiuni fundamentale de teoria mulțimilor

### 1.1 Mulțimi

Noțiunea de *mulțime* este o noțiune fundamentală a matematicii moderne. În cele ce urmează, noțiunile de mulțime și element al unei mulțimi sunt considerate noțiuni primare.

O mulțime se consideră definită (dată, precizată) dacă avem un criteriu după care putem deosebi elementele mulțimii de celelalte obiecte, care nu fac parte din mulțime. În acest sens, o mulțime poate fi definită fie numind individual elementele sale, fie specificând o proprietate pe care o au toate elementele sale și pe care nu o au alte obiecte.

Mulțimile se notează cu litere mari ale alfabetului latin:  $A, B, \dots$ , sau  $X, Y, \dots$ , iar elementele se notează cu litere mici ale aceluiași alfabet sau ale altuia. Dacă se cunosc toate elementele mulțimii  $A$ , atunci vom nota  $A = \{a, b, \dots\}$ .

Natura mulțimilor care constituie subiectul cercetărilor matematice este diversă.

În cele ce urmează, examinăm mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  și submulțimi ale acesteia, ca de exemplu mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$ , mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$ , mulțimea numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ , intervale etc., mulțimi de puncte din spațiul Euclidian  $n$ -dimensional precum bile deschise și închise, sfere, intervale  $n$ -dimensionale închise și deschise etc., ca și mulțimi de funcții și, de asemenea, mulțimi ale căror elemente sunt mulțimi.

Partea matematicii care examinează mulțimi arbitrare, fără a se interesa însă de natura elementelor sale, se numește *teoria mulțimilor*.

În acest capitol introducem câteva noțiuni de teoria mulțimilor, necesare înțelegerii celorlalte capitole.

Dacă  $A$  este o mulțime oarecare, notăm  $a \in A$  dacă și numai dacă  $a$  este un element al mulțimii  $A$  și vom citi  $a$  aparține mulțimii  $A$ ; dacă  $b$  nu este element al lui  $A$  atunci această situație se scrie matematic în forma  $b \notin A$  și se citește  $b$  nu aparține mulțimii  $A$ . Elementele unei mulțimi sunt numite deseori *puncte*, afirmațiile *element al mulțimii*  $A$  și *punct al mulțimii*  $A$  având același înțeles.

**Definiția 1.1.1.** Mulțimile  $A$  și  $B$  se numesc **identice** sau **egale** și scriem  $A = B$ , dacă și numai dacă sunt formate din aceleași elemente.

Prin urmare  $A = B$  dacă și numai dacă, pentru fiecare element  $x$ , avem

$$x \in A \iff x \in B.$$

**Definiția 1.1.2.** Mulțimea fără nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează prin  $\emptyset$ .

**Definiția 1.1.3.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Mulțimea  $A$  se numește **submulțime**, sau **parte** a mulțimii  $B$  dacă și numai dacă  $a \in A \implies a \in B$ . În această situație se spune că mulțimea  $A$  este **inclusă** în mulțimea  $B$ , sau că  $B$  **include**  $A$  și scriem corespunzător  $A \subset B$  sau  $B \supset A$ . Dacă, în plus, mulțimea  $A$  nu este identică cu  $B$ , atunci  $A$  se numește **submulțime strictă** a lui  $B$ .

Prin convenție, există o mulțime care este inclusă în toate mulțimile. Aceasta este *mulțimea vidă* și este privită ca o submulțime a oricărei mulțimi:  $\emptyset \subset A$ , oricare ar fi mulțimea  $A$ .

Introducerea mulțimii vide este necesară deoarece adesea definim mulțimea elementelor care satisfac o condiție fără să verificăm că există măcar un element care să îndeplinească această condiție. De exemplu, în teoria polinoamelor, putem introduce noțiunea de mulțime a rădăcinilor reale ale unei ecuații, neținând seama de faptul că nu cunoaștem, în general, dacă există sau nu astfel de rădăcini.

Simbolul  $\subset$  este denumit *incluziune*.

**Propoziția 1.1.1.** Incluziunea mulțimilor are următoarele proprietăți:

$$A \subset A \quad (\text{reflexivitate}); \quad (1.1)$$

$$A \subset B \text{ și } B \subset C \implies A \subset C \quad (\text{tranzitivitate}); \quad (1.2)$$

$$A \subset B \text{ și } B \subset A \implies A = B \quad (\text{antisimetrie}). \quad (1.3)$$

O mulțime nevidă poate avea un număr finit (respectiv infinit) de elemente, caz în care mulțimea se numește *finită* (respectiv *infinită*).

Prin definiție mulțimea vidă este mulțime finită.

O mulțime finită poate fi specificată prin enumerarea elementelor sale; dacă acestea sunt  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , atunci vom scrie  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . În particular,  $\{a\}$  reprezintă mulțimea formată dintr-un singur element  $a$ .

**Definiția 1.1.4.** Se numește **familie de mulțimi**, sau **clasă de mulțimi**, o mulțime  $A$  ale cărei elemente sunt mulțimi. O familie de mulțimi  $A$  se notează  $A = (A_i)_{i \in I}$ , unde  $I$  este o mulțime oarecare care se numește **mulțime de indici**. Când  $I = \mathbb{N}$  familia de mulțimi  $A$  se numește **șir de mulțimi**. Deci, notația pentru un șir de mulțimi este  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definiția 1.1.5.** Șirul de mulțimi  $(A_n)$  se numește

$$\begin{array}{lll} \text{crescător,} & \text{dacă } A_n \subset A_{n+1}, & \text{pentru } n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{descrescător,} & \text{dacă } A_{n+1} \subset A_n, & \text{pentru } n = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

Fie  $a(x)$  o condiție impusă elementelor unei mulțimi  $X$ , adică o expresie cu valoarea de adevăr sau fals dacă un anume element din  $X$  este înlocuit cu  $x$ . Mulțimea tuturor elementelor  $x$  din  $X$  pentru care expresia  $a(x)$  are valoarea de adevăr se notează prin  $\{x \in X : a(x)\}$  sau, mai simplu, prin  $\{x : a(x)\}$ . De exemplu,  $\{x : x^2 = 16\}$  este mulțimea formată din numerele întregi  $-4$  și  $+4$ , iar  $\{x : x^2 + 2x - 35 < 0\}$  este intervalul deschis  $(-7, 5)$ , adică  $\{x : x^2 + 2x - 35 < 0\} = \{x : -7 < x < 5\}$ .

Mulțimea părților unei mulțimi oarecare  $X$  se notează cu  $\mathcal{P}(X)$ . Avem  $A \in \mathcal{P}(X)$  dacă și numai dacă  $A \subset X$ . Evident,  $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$  și  $X \in \mathcal{P}(X)$ . Elemente ale lui  $\mathcal{P}(X)$  pot fi și mulțimi formate din câte un singur element  $x$  din  $X$ .

## 1.2 Operații cu mulțimi

**Definiția 1.2.1.** Se numește **reuniunea** a două mulțimi  $A$  și  $B$ , mulțimea notată  $A \cup B$  formată din toate elementele  $x$  care aparțin cel puțin uneia din mulțimile  $A$  sau  $B$ . Deci, prin definiție

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ sau } x \in B\}.$$

**Definiția 1.2.2.** Se numește **intersecția** sau **partea comună** a mulțimilor  $A$  și  $B$  mulțimea notată cu  $A \cap B$  compusă din toate elementele  $x$  care aparțin atât mulțimii  $A$  cât și mulțimii  $B$ . Prin definiție

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

**Definiția 1.2.3.** Mulțimile  $A$  și  $B$  se numesc **disjuncte** dacă  $A \cap B = \emptyset$ .

**Definiția 1.2.4.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi. Mulțimea

$$A \setminus B = A \setminus B = C_A B = \{x : x \in A \text{ și } x \notin B\} = \{x \in A : x \notin B\}$$

se numește **diferența dintre mulțimea  $A$  și mulțimea  $B$** , sau **complementara mulțimii  $B$  în raport cu mulțimea  $A$** . Când mulțimea  $A$  se subînțelege din context, complementara lui  $B$  față de  $A$  se notează simplu prin  $CB$  și se numește **complementara mulțimii  $B$** .

Prin urmare,  $CB = \{x \in A : x \notin B\}$ .

De asemenea, avem  $CB \in \mathcal{P}(A)$ .

**Teorema 1.2.1.** Pentru orice mulțimi  $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$  au loc afirmațiile:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A; \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\emptyset \cup A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset; \tag{1.6}$$

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A; \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} (A \setminus B) \cap B = \emptyset, \\ A = (A \cap B) \cup (A \setminus B), \\ A \setminus B = A \setminus (A \cap B); \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} A \subset X \implies (X \setminus A) \cup A = X \\ X \setminus (X \setminus A) = A; \end{cases} \quad (1.10)$$

$$A \subset X \implies A \setminus B = A \cap (X \setminus B); \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \\ X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B); \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} A \subset X \text{ și } B \subset X \implies A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)). \end{cases} \quad (1.13)$$

*Demonstrație.* Identitățile (1.4) sunt legile de *comutativitate* ale reuniunii și respectiv intersecției mulțimilor, (1.5) sunt legile de *asociativitate* ale aceluiași operații cu mulțimi, iar identitățile (1.8) reprezintă legile de *distributivitate* ale uneia din operații față de cealaltă.

Identitățile (1.12) și (1.13) se numesc *relațiile lui De Morgan*.

Demonstrația oricărei din egalitățile (1.4) – (1.13) se bazează pe relația (1.3). Se arată că dacă un punct oarecare aparține mulțimii din primul membru al identității, atunci el este element și al mulțimii din membrul drept al identității respective, și reciproc.

Să demonstrăm, de exemplu, prima dintre identitățile (1.8).

Fie  $x \in A \cap (B \cup C)$ , atunci  $x \in A$  și  $x \in B \cup C$ , adică  $x \in B$  sau  $x \in C$ . Se desprind două cazuri.

În primul caz,  $x \in A$  și  $x \in B$ , adică  $x \in A \cap B$ .

În cel de-al doilea caz,  $x \in A$  și  $x \in C$ , adică  $x \in A \cap C$ .

În fiecare din cele două cazuri, rezultă  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , deci are loc incluziunea

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C). \quad (1.14)$$

Reciproc, să considerăm un element arbitrar  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Atunci  $x \in A \cap B$  sau  $x \in A \cap C$ .

În primul caz, rezultă că  $x \in A$  și  $x \in B$ , în cel de-al doilea caz vom avea  $x \in A$  și  $x \in C$ .

Din primul caz urmează că  $x \in A \cap (B \cup C)$ , iar din cel de-al doilea vom avea că  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

Așadar, în ambele cazuri rezultă că  $x \in A \cap (B \cup C)$  ceea ce arată că are loc și incluziunea

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C). \quad (1.15)$$

Incluziunile (1.14), (1.15) și proprietatea (1.3) arată că prima din identitățile (1.8) este adevărată. **q.e.d.**

**Teorema 1.2.2.** Pentru orice mulțimi  $A, B, C, D$ ,

$$A \subset B = B \iff A \cup B = B; \quad (1.16)$$

$$A \subset B \iff A \cap B = A; \quad (1.17)$$

$$A \subset B \iff A \setminus B = \emptyset; \quad (1.18)$$

$$A \subset A \cup B, \quad A \cap B \subset A; \quad (1.19)$$

$$A \subset C \text{ și } B \subset D \iff A \cup B \subset C \cup D \text{ și } A \cap B \subset C \cap D; \quad (1.20)$$

$$A \subset C \quad \text{și} \quad B \subset C \quad \Longleftrightarrow \quad A \cup B \subset C; \quad (1.21)$$

$$C \subset A \quad \text{și} \quad C \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad C \subset A \cap B; \quad (1.22)$$

$$A \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad C \setminus B \subset C \setminus A. \quad (1.23)$$

*Demonstrație.* Fiecare din aceste afirmații se demonstrează ușor utilizând definițiile egalității, reuniunii, intersecției și diferenței a două mulțimi. **q.e.d.**

Noțiunile de reuniune și intersecție a mulțimilor pot fi generalizate la cazul unui număr arbitrar, finit sau infinit, de mulțimi.

Presupunem că  $A_t$  este o mulțime pentru orice  $t$  dintr-o mulțime nevidă  $T$ .

Prin *reuniunea*  $\bigcup_{t \in T} A_t$  (respectiv *intersecția*  $\bigcap_{t \in T} A_t$ ) a mulțimilor  $A_t$ , unde  $t \in T$ , înțelegem mulțimea tuturor punctelor  $x$  care aparțin cel puțin uneia din mulțimile  $A_t$  (respectiv fiecărei mulțimi  $A_t$ ). În simboluri,

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x : \exists t \in T \text{ astfel încât } x \in A_t\}, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \{x : x \in A_t, \forall t \in T\}.$$

Uneori, mențiunea  $t \in T$ , sub semnul  $\bigcup$  sau  $\bigcap$ , se poate omite dacă se subînțeleg valorile lui  $t$ .

În cazul când  $T$  este o submulțime a numerelor naturale  $\mathbb{N}$ , putem folosi notațiile

$$\bigcup_{j=m}^n A_j \text{ sau } A_m \cup A_{m+1} \cup \dots \cup A_n \quad (m \leq n)$$

pentru reuniunea mulțimilor  $A_m, A_{m+1}, \dots, A_n$  și

$$\bigcap_{j=m}^n A_j \text{ sau } A_m \cap A_{m+1} \cap \dots \cap A_n \quad (m \leq n)$$

pentru intersecția aceluiași mulțimi.

În mod similar,

$$\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \text{ sau } A_m \cup A_{m+1} \cup \dots$$

reprezintă reuniunea mulțimilor  $A_m, A_{m+1}, \dots$ , iar

$$\bigcap_{j=m}^{\infty} A_j \text{ sau } A_m \cap A_{m+1} \cap \dots$$

semnifică intersecția acestor mulțimi.

### 1.3 Produse carteziane

**Definiția 1.3.1.** Fie  $p \geq 2$ , număr natural arbitrar, fixat, și  $X_1, X_2, \dots, X_p$  mulțimi oarecare. Mulțimea  $p$ -uplilor ordonate  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , unde  $x_i \in X_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ , se numește **produsul cartezian** al mulțimilor  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , în această ordine, și se notează cu  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p$ .

Așadar,

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad x_i \in X_i, \quad i \in \overline{1, p}\}. \quad (1.24)$$

În particular, produsul cartezian  $X \times Y$  al două mulțimi  $X$  și  $Y$  este mulțimea tuturor perechilor ordonate  $(x, y)$  unde  $x \in X$  și  $y \in Y$ . Deci

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}. \quad (1.25)$$

Deoarece  $(x, y) \neq (y, x)$ , rezultă că

$$X \times Y \neq Y \times X. \quad (1.26)$$

În cazul în care  $X_1 = X_2 = \dots = X_p = X$  produsul cartezian al celor  $p$  mulțimi identice cu  $X$  se notează prin  $X^p$ . Așadar,

$$X^p = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad x_i \in X, \quad i \in \overline{1, p}\}. \quad (1.27)$$

Dacă în (1.27)  $X = \mathbb{R}$ , atunci  $\mathbb{R}^p$  se numește *spațiul aritmetic  $p$ -dimensional*.

**Definiția 1.3.2.** Elementele  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  și  $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  din produsul cartezian  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p$  se numesc **egale** dacă  $x_i = y_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ .

**Teorema 1.3.1.** Produsul cartezian are următoarele proprietăți:

$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \text{ sau } B = \emptyset; \quad (1.28)$$

$$A \subset C \text{ și } B \subset D \implies A \times B \subset C \times D; \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \\ A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C, \\ A \times (B \setminus C) = A \times B \setminus A \times C; \end{cases} \quad (1.30)$$

$$\begin{cases} (A \cup B) \times C = A \times C \cup B \times C, \\ (A \cap B) \times C = A \times C \cap B \times C, \\ (A \setminus B) \times C = A \times C \setminus B \times C; \end{cases} \quad (1.31)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D); \quad (1.32)$$

$$A \times B \setminus C \times D = (A \times (B \setminus D)) \cup ((A \setminus C) \times B); \quad (1.33)$$

$$A \times \bigcup_{t \in T} B_t = \bigcup_{t \in T} (A \times B_t), \quad A \times \bigcap_{t \in T} B_t = \bigcap_{t \in T} (A \times B_t); \quad (1.34)$$

$$\left( \bigcup_{t \in T} A_t \right) \times B = \bigcup_{t \in T} (A_t \times B), \quad \left( \bigcap_{t \in T} A_t \right) \times B = \bigcap_{t \in T} (A_t \times B). \quad (1.35)$$

*Demonstrație.* Fiecare identitate se demonstrează arătând că un punct arbitrar aparținând mulțimii din primul membru aparține și membrului doi al identității respective, și reciproc. **q.e.d.**

Convenim ca produsul cartezian a  $p$  mulțimi să se numească simplu *produs*.



Dacă  $p$  este suma a două numere naturale nenule  $m$  și  $n$ , produsul  $X^p$  din (1.27) poate fi conceput ca produsul mulțimilor  $X^m$  și  $X^n$ .

Acest produs poate fi definit în modul următor.

Se fixează două  $p$ -uple

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_m), \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_n),$$

formate din numere naturale distincte, astfel încât

$$i_1, i_2, \dots, i_m, j_1, j_2, \dots, j_n$$

să fie o permutare a numerelor  $1, 2, \dots, p$ . După definiția permutării de  $p$  elemente, fiecare număr natural mai mic sau egal cu  $p$  apare exact o dată în  $p$ -uplele  $i$  și  $j$ . Orice element

$$p = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in X^p \quad (1.36)$$

poate fi identificat cu elementul

$$(p_1, p_2) \in X^m \times X^n, \quad (1.37)$$

unde

$$p_1 = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) \in X^m, \quad (1.38)$$

$$p_2 = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) \in X^n, \quad (1.39)$$

Spunem atunci că  $X^p$  este produsul  $(i, j)$  al lui  $X^m$  și  $X^n$  și vom scrie

$$p = (p_1, p_2). \quad (1.40)$$

În particular, produsul  $X^{k+1}$  poate fi conceput ca produsul  $X^k \times X$  prin identificarea unui punct

$$(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}) \in X^{k+1}$$

cu punctul  $(p, x_{k+1}) \in X^k \times X$ , unde  $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  și  $x_{k+1} \in X$ .

Cazul particular descris corespunde celui general în care  $i \in \overline{1, k}$  și  $j = k + 1$ .

## 1.4 Relații binare. Funcții. Legi de compoziție

**Definiția 1.4.1.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi și  $G \subset A \times B$ . Se numește **relație binară** sau **corespondență** de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$  terna ordonată  $\mathcal{R} = \{G, A, B\}$ .

Mulțimea  $G$  se numește *graficul relației binare*  $\mathcal{R}$ ,  $A$  se numește *mulțimea de pornire*, iar  $B$  *mulțimea de sosire*.

Spunem că elementele  $a \in A$  și  $b \in B$  sunt în relația  $\mathcal{R}$ , și scriem  $a\mathcal{R}b$ , dacă  $(a, b) \in G$ . Când perechea  $(a, b) \notin G$ , atunci se spune că  $a$  nu este în relația  $\mathcal{R}$  cu  $b$  și scriem  $a \not\mathcal{R}b$ .

Dacă  $A = B$ , o relație binară de forma  $\mathcal{R} = \{G, A, A\}$ , unde  $G \subset A \times A = A^2$ , se numește *relație binară în mulțimea*  $A$  și se notează  $\mathcal{R} = \{G, A\}$ .

De regulă, o relație binară se dă prin specificarea mulțimilor  $A$  și  $B$  precum și a proprietății caracteristice perechilor de elemente care sunt în acea relație, deci care aparțin lui  $G$ .

Mulțimea relațiilor binare de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$  are proprietăți asemănătoare celor din teoria mulțimilor.

Relația  $\mathcal{R}$  este *inclusă* în relația  $\mathcal{R}_1$ , și scriem  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$ , dacă

$$a\mathcal{R}b \implies a\mathcal{R}_1b.$$

Relațiile binare  $\mathcal{R}$  și  $\mathcal{R}_1$ , de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$ , sunt *egale*, și scriem  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ , dacă  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_1$  și  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ .

*Reuniunea* relațiilor binare  $\mathcal{R}$  și  $\mathcal{R}_1$ , ambele de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$ , care se notează cu  $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1$ , este o relație binară de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$  care ne spune că dacă  $a\mathcal{R} \cup \mathcal{R}_1 b$ , atunci sau  $a\mathcal{R}b$  sau  $a\mathcal{R}_1b$  și invers.

*Intersecția*  $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}_1$  a relației binare  $\mathcal{R}$  cu relația binară  $\mathcal{R}_1$ , ambele de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$ , este formată din totalitatea perechilor ordonate  $(a, b)$  cu  $a \in A$  și  $b \in B$  astfel încât  $a\mathcal{R}b$  cât și  $a\mathcal{R}_1b$ .

În afirmațiile referitoare la proprietățile relațiilor binare este posibil ca  $B = A$ , iar o relație de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $A$  se notează  $\mathcal{R} = \{G, A\}$ .

**Definiția 1.4.2.** Relația binară pe mulțimea  $A$ ,  $\mathcal{R} = \{G, A\}$ , se numește:

- (i) **reflexivă**, dacă  $\forall a \in A \implies a\mathcal{R}a$ ;
- (ii) **simetrică**, dacă  $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$ ;
- (iii) **tranzitivă**, dacă  $a\mathcal{R}b$  și  $b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$ ;
- (iv) **antisimetrică**, dacă  $a\mathcal{R}b$  și  $b\mathcal{R}a \implies a = b$ .

**Definiția 1.4.3.** Se numește **relație de echivalență** în mulțimea  $A$  o relație binară  $\mathcal{R} = \{G, A\}$  care este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Dacă  $a\mathcal{R}b$  și  $\mathcal{R}$  este o relație de echivalență în mulțimea  $A$ , atunci scriem simplu  $a \sim b$ .

**Definiția 1.4.4.** Fie  $\mathcal{R} = \{G, A\}$  o relație de echivalență în mulțimea  $A$ , dată. Prin **clasă de echivalență modulo  $\mathcal{R}$**  asociată unui element  $a \in A$  se înțelege mulțimea  $C_a = \{x \in A : x \in A, x\mathcal{R}a\} \subset A$ . Oricare dintre elementele clasei de echivalență  $C_a$  se numește **reprezentant** al ei.

**Teorema 1.4.1.** Clasele de echivalență  $C_a, C_b$ , asociate la două elemente  $a$  și  $b$  din  $A$ , sunt sau identice sau disjuncte.

*Demonstrație.* Să observăm mai întâi că  $\forall a, b \in A$  putem avea fie  $a\mathcal{R}b$ , fie  $a \not\mathcal{R}b$ .

Dacă  $a\mathcal{R}b$ , atunci  $C_a = C_b$ . Într-adevăr, fie  $x \in C_a$  arbitrar; atunci  $x\mathcal{R}a$ . Cum  $a\mathcal{R}b$  și  $\mathcal{R}$  este tranzitivă, rezultă  $x\mathcal{R}b$ , deci  $x \in C_b$ , ceea ce arată că  $C_a \subset C_b$ . La fel se arată că  $C_b \subset C_a$ . Din dubla incluziune a mulțimilor  $C_a$  și  $C_b$  rezultă egalitatea lor.

Dacă  $a \not\mathcal{R}b$ , arătăm că  $C_a \cap C_b = \emptyset$ . Într-adevăr, dacă ar exista  $x \in C_a \cap C_b$  atunci  $x \in C_a$  și  $x \in C_b$ , din care deducem  $x\mathcal{R}a$  și  $x\mathcal{R}b$ . Din proprietățile de simetrie și tranzitivitate ale relației  $\mathcal{R}$  rezultă atunci  $a\mathcal{R}b$ , ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

**Definiția 1.4.5.** Relația  $\mathcal{R} = \{G, A\}$  se numește **relație de ordine** în mulțimea  $A$  dacă  $\mathcal{R}$  este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.

**Observația 1.4.1.** Incluziunea în  $\mathcal{P}(X)$  este o relație de ordine.

**Definiția 1.4.6.** O mulțime  $A$  prevăzută cu o relație de ordine se numește **mulțime ordonată**.

De obicei folosim pentru relația de ordine semnul  $\leq$  și scriem  $x \leq y$  în loc de  $x\mathcal{R}y$ .

Se poate întâmpla ca în mulțimea ordonată  $A$ , în care relația de ordine este  $\leq$ , să existe *elemente incomparabile*, adică elemente  $x$  și  $y$  pentru care nu sunt adevărate nici una din relațiile  $x \leq y$  sau  $y \leq x$ . Dacă însă  $A$  nu are elemente incomparabile, spunem că este o mulțime *total ordonată*.

Afirmația  $x \leq y$  și  $x \neq y$  se scrie de obicei sub forma  $x < y$  sau  $y > x$ .

**Definiția 1.4.7.** Fie date mulțimile nevide  $A$  și  $B$ . Se numește **funcție definită pe  $A$  cu valori în  $B$**  o relație binară  $f = \{G, A, B\}$  care satisface proprietățile:

$$\forall x \in A, \quad \exists y \in B \quad \text{astfel încât} \quad (x, y) \in G \quad (\text{existență}); \quad (1.41)$$

$$\forall (x, y_1) \in G \quad \text{și} \quad \forall (x, y_2) \in G \implies y_1 = y_2 \quad (\text{unicitate}). \quad (1.42)$$

**Observația 1.4.2.** Proprietățile (1.41) și (1.42) se pot scrie împreună astfel: oricare ar fi elementul  $x \in A$ , există un element și numai unul singur  $y \in B$ , astfel încât  $(x, y) \in G$ .

În baza acestei observații, putem formula o definiție echivalentă pentru noțiunea de funcție.

**Definiția 1.4.8.** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide. Prin **funcție definită pe mulțimea  $A$ , cu valori în mulțimea  $B$** , se înțelege orice procedeu, lege, convenție  $f$ , în baza căruia oricărui element  $x \in A$  i se asociază un **unic** element, notat  $f(x)$ , din  $B$ .

Cuvintele *corespondență, aplicație, transformare, operator* sunt sinonime pentru noțiunea de funcție.

O funcție se notează  $f : A \rightarrow B$ . Mulțimea  $A$  se numește *domeniul de definiție*, sau *mulțimea de definiție*, iar  $B$  este *mulțimea în care funcția ia valori*.

Dacă  $A$  și  $B$  din prezentarea unei funcții se înțeleg din context, atunci vom scrie simplu funcția  $f$ .

Pentru o funcție se mai folosesc și notațiile:

$$x \rightarrow f(x), \quad x \in A, \quad f(x) \in B; \quad x \in A \mapsto f(x) \in B \quad \text{sau simplu} \quad x \mapsto f(x).$$

În continuare, funcțiile sunt notate prin literele  $f, g, h, \varphi, \psi, F, G, \phi, \Psi$  etc., eventual prevăzute cu indici.

Elementele mulțimii de definiție  $A$  a unei funcții  $f : A \rightarrow B$  se numesc *surse*. Dacă  $x \in A$  e o sursă, elementul  $y \in B$  care se atașază lui  $x$  se numește *valoarea funcției în  $x$* , *transformatul* lui  $x$  sau *imaginea lui  $x$  prin  $f$* . Se mai spune că  $x$  este *contraimagea* lui  $y$ . Se vede din Definiția 1.4.7 sau Definiția 1.4.8 că nu orice element din  $B$  apare număidecât ca valoare pentru funcția  $f$ .

Este posibil ca o funcție să se noteze prin  $f : A \rightarrow B$  după care sa se menționeze legea după care se calculează imaginile lui  $x \in A$  prin  $f$ .

**Definiția 1.4.9.** Fie  $A_0 \subset A$  și  $f : A \rightarrow B$ . Mulțimea

$$f(A_0) = \{y \in B : \exists x \in A_0 \text{ astfel încât } f(x) = y\} \subset B$$

se numește **imaginea prin funcția  $f$  a mulțimii  $A_0$** . Când  $A_0 = A$ ,  $f(A) = \text{Im } f \subset B$  se numește **mulțimea valorilor funcției  $f$** .

**Definiția 1.4.10.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **surjecție de la mulțimea  $A$  pe mulțimea  $B$**  sau **funcție surjectivă** dacă  $f(A) = B$ .

**Definiția 1.4.11.** Funcțiile  $f_1 : A_1 \rightarrow B_1$  și  $f_2 : A_2 \rightarrow B_2$  se numesc **egale** dacă  $A_1 = A_2$ ,  $B_1 = B_2$  și dacă  $f_1(x) = f_2(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

**Definiția 1.4.12.** Dacă mulțimea  $f(A) \subset B$ , a valorilor funcției  $f : A \rightarrow B$ , conține doar un element al lui  $B$ , atunci  $f$  se numește **funcție constantă**.

O funcție remarcabilă definită pe o mulțime nevidă  $A$  și cu valori în  $A$  este **funcția identică**  $i_A : A \rightarrow A$ , definită prin  $i_A(x) = x$ ,  $\forall x \in A$ .

**Definiția 1.4.13.** Fie funcția  $f : A \rightarrow B$  și  $A_0$  o submulțime nevidă a lui  $A$ . Se numește **restricția funcției  $f$  la submulțimea  $A_0$** , funcția  $g : A_0 \rightarrow B$  ale cărei valori se calculează după legea  $g(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in A_0$ .

**Observația 1.4.3.** O restricție a unei funcții  $f$  se obține dacă se înlătură unele elemente din mulțimea de definiție.

Pentru restricția funcției  $f$  la submulțimea  $A_0 \subset A$  se utilizează notația  $f|_{A_0}$ .

**Definiția 1.4.14.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  cu proprietatea  $f|_{A_0} = g$ , unde  $A_0 \subset A$ , se numește **prelungire la mulțimea  $A$  a funcției  $g : A_0 \rightarrow B$** .

**Definiția 1.4.15.** Funcția  $f : A \rightarrow B$  se numește **injecție de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$**  sau **simplu**, funcție **biunivocă**, dacă totdeauna  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ .

O injecție de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$  se numește **funcție injectivă**.

Prin urmare,  $f : A \rightarrow B$  este funcție injectivă sau biunivocă dacă fiecare element din  $B$  are cel mult o contraimagie în  $A$  sau dacă orice două surse diferite au imagini diferite. De asemenea, funcția  $f$  este injectivă dacă  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ .

**Definiția 1.4.16.** O funcție  $f : A \rightarrow B$  care este simultan injectivă și surjectivă se numește **bijecție de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$**  sau simplu, **funcție bijectivă**.

Dacă  $g$  este o funcție de la mulțimea  $A$  pe mulțimea  $B$  și  $f$  este o funcție de la mulțimea  $B$  în mulțimea  $C$ , în baza Definiției 1.4.1, se constată că  $x \mapsto f(g(x))$  este funcție de la  $A$  în  $C$ .

**Definiția 1.4.17.** Fie funcțiile  $g : A \rightarrow B_0$  și  $f : B \rightarrow C$  cu  $g(A) = B \subset B_0$ . Funcția  $h : A \rightarrow C$ ,  $h(x) = f(g(x))$ ,  $\forall x \in A$ , se numește **funcția compusă** a funcțiilor  $f$  și  $g$ , iar funcția  $(f, g) \mapsto f \circ g$ ,  $(f \circ g)(x) = h(x) = f(g(x))$ ,  $\forall x \in A$ , se numește **compunerea funcției  $f$  cu funcția  $g$** .

Observăm, de asemenea, că  $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ .

Fie  $f$  o aplicație biunivocă de la mulțimea  $A$  pe mulțimea  $B$ . Aceasta înseamnă că  $f(A) = B$  și  $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ . În acest caz, pentru orice element  $y \in B$ , există un element și numai unul singur  $x \in A$ , astfel ca  $f(x) = y$ .

În acest mod putem stabili o corespondență  $f(x) \mapsto x$  de la elementele lui  $B$  la elementele lui  $A$ , care definește o aplicație biunivocă a lui  $B$  pe  $A$ , numită **aplicația reciprocă** sau **funcția inversă a funcției  $f$** , notată cu simbolul  $f^{-1}$ .

**Definiția 1.4.18.** Fie funcția biunivocă  $f : A \rightarrow B$  și  $f(A) = B_0$  imaginea sa. Se numește **funcție inversă a funcției  $f$** , funcția  $f^{-1} : B_0 \rightarrow A$  care asociază fiecărui element  $y \in B_0$  elementul unic  $x \in A$  astfel încât  $y = f(x)$ .

Din Definiția 1.4.15, Definiția 1.4.16 și Definiția 1.4.17 rezultă că pentru orice două elemente  $x \in A$  și  $y \in B_0$ , avem:

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y);$$

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A;$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B_0.$$

Ultimele două afirmații arată că funcțiile compuse  $f^{-1} \circ f$  și  $f \circ f^{-1}$  sunt aplicațiile identice pe  $A$  și respectiv  $B_0$ .

**Observația 1.4.4.** Inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$  a unei funcții bijective  $f : A \rightarrow B$  este, de asemenea, funcție bijectivă și  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

Această afirmație rezultă din Definiția 1.4.15 și Definiția 1.4.17. ■<sup>1</sup>

**Observația 1.4.5.** Dacă  $f : A \rightarrow B$  și  $g : B \rightarrow C$  sunt funcții bijective, atunci  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Definiția 1.4.19.** Fie funcția  $f : A \rightarrow B$  și  $B_0 \subset B, B_0 \neq \emptyset$ . Mulțimea

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : \exists y \in B_0 \text{ astfel încât } f(x) = y\} \subset A,$$

se numește **contraimaginea lui  $B_0$  prin  $f$** .

<sup>1</sup>Simbolul ■, care se va întâlni pe parcurs, semnifică fie sfârșitul unei justificări, fie terminarea rezolvării unui exercițiu.

**Teorema 1.4.2.** Pentru orice funcție  $f : A \rightarrow B$ :

$$A_1 \subset A_2 \subset A \implies f(A_1) \subset f(A_2); \quad (1.43)$$

$$B_1 \subset B_2 \subset B \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2); \quad (1.44)$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \quad (1.45)$$

sau, mai general

$$f\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = \bigcup_{t \in T} f(A_t); \quad (1.46)$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad (1.47)$$

sau, mai general

$$f^{-1}\left(\bigcup_{t \in T} B_t\right) = \bigcup_{t \in T} f^{-1}(B_t); \quad (1.48)$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \quad (1.49)$$

sau, mai general

$$f^{-1}\left(\bigcap_{t \in T} B_t\right) = \bigcap_{t \in T} f^{-1}(B_t); \quad (1.50)$$

$$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2), \quad (1.51)$$

în particular,

$$f^{-1}(C_B B_0) = f^{-1}(B \setminus B_0) = C_A f^{-1}(B_0) = A \setminus f^{-1}(B_0); \quad (1.52)$$

$$f \text{ injectivă} \implies f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2), \quad (1.53)$$

mai general,

$$f\left(\bigcap_{t \in T} A_t\right) \subset \bigcap_{t \in T} f(A_t). \quad (1.54)$$

*Demonstrație.* Incluziunile (1.43) și (1.44) se arată verificând că un element oarecare aparținând primei mulțimi este element și pentru cea de a doua mulțime. Identitățile (1.45) – (1.54) se demonstrează verificând că un element arbitrar aparținând unui membru al identității este element și al celuilalt membru, și reciproc. **q.e.d.**

Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide. Notăm cu  $\mathcal{F}(A, B)$  mulțimea funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $B$ .

Dacă  $B$  este mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale, atunci  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$  se notează prescurtat cu  $\mathcal{F}(A)$  și este mulțimea funcțiilor reale definite pe mulțimea  $A$ .

Dacă  $A$  este o submulțime nevidă a lui  $\mathbb{R}$  și  $f \in \mathcal{F}(A, B)$ , atunci se spune că  $f : A \rightarrow B$  este o funcție de variabilă reală.

În cazul când  $A \subset \mathbb{R}$  și  $B \subset \mathbb{R}$ , funcția  $f$  se numește funcție reală de variabilă reală.

Dacă  $f : A \rightarrow B$  și  $A \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , atunci valoarea  $f(p)$  într-un punct  $p = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$  se notează prin

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.55)$$

și spunem că funcția  $f$  este o funcție de  $n$  variabile. În cazul particular în care  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = \mathbb{R}$  și  $B \subset \mathbb{R}$  vom spune că  $f \in \mathcal{F}(A, B)$  este o funcție reală de  $n$  variabile reale.

Prezenta lucrare are ca principal scop studiul funcțiilor reale de mai multe variabile reale. Dacă se fixează valorile a  $n - 1$  variabile, fie acestea

$$x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, \quad \text{cu } i \in \overline{2, n-1},$$

atunci expresia (1.55) poate fi concepută ca funcție de variabila  $x_i$ , definită pe mulțimea

$$A_i = \{x_i : (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A\} \subset X_i.$$

În calculul diferențial se studiază proprietățile unei funcții în punctele mulțimii de definiție și în puncte vecine acestora. Aceste proprietăți se numesc *proprietăți cu caracter local*. Dacă o proprietate a funcției se referă la întreaga mulțime pe care este definită, atunci aceasta se numește *proprietate globală*.

Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  sunt înzestrate cu unele structuri algebrice, topologice, sau combinate, atunci aceste structuri, în anumite condiții, transmit structuri asemănătoare pe  $\mathcal{F}(A, B)$ , sau pe părți ale acesteia.

**Definiția 1.4.20.** Se numește **lege de compoziție binară internă** pe mulțimea nevidă  $A$ , elementul  $f \in \mathcal{F}(A \times A, A)$ .

Dacă prin legea de compoziție binară internă  $f \in \mathcal{F}(A \times A, A)$ , perechii  $(x, y) \in A \times A$  îi corespunde elementul  $z \in A$ , atunci scriem  $z = f(x, y)$  sau  $z = x * y$  sau  $z = x \circ y$  și  $z$  se numește *compusul* elementelor  $x$  și  $y$ . De multe ori, pentru compusul lui  $x$  cu  $y$  se utilizează notația  $x + y$ ; legea de compoziție binară internă se numește *adunare*, iar  $z = f(x, y) = x + y$  se numește *suma* elementelor  $x$  și  $y$ . De asemenea, putem întâlni notația  $x \cdot y$  sau, simplu,  $xy$  pentru compusul  $z = f(x, y)$  a două elemente  $x \in A$  și  $y \in A$ . În acest caz  $f$  se numește *înmulțire*, iar  $z = f(x, y) = x \cdot y = xy$  se numește *produsul* elementelor  $x$  și  $y$ . Adunarea se mai numește *operație binară internă aditivă*, iar înmulțirea se numește *operație binară internă multiplicativă*.

**Definiția 1.4.21.** Se numește **lege de compoziție externă**, sau **operație externă** a lui  $A$  cu elemente din  $\mathbb{K}$ , o aplicație  $h \in \mathcal{F}(\mathbb{K} \times A, A)$ .

Mulțimea nevidă  $\mathbb{K}$  se numește *mulțimea scalarilor*, sau *domeniu de operatori*, iar pentru  $h(\alpha, x)$ , imaginea prin funcția  $h$  a perechii  $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times A$ , vom utiliza una din notațiile:  $\alpha \cdot x$ ;  $x \cdot \alpha$ ;  $\alpha x$ ;  $x\alpha$ . Operației externe pe  $A$  cu elemente din  $\mathbb{K}$  îi vom spune mai simplu *înmulțire cu scalari* din  $\mathbb{K}$ . Peste tot în cele ce urmează,  $\mathbb{K}$  este mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$ .

## 1.5 Structuri algebrice. Izomorfism

**Definiția 1.5.1.** Se numește **structură algebrică** o mulțime nevidă  $A$  pe care s-a definit cel puțin o lege de compoziție. Structurile algebrice  $A_1$  și  $A_2$  se zic **de același tip algebric** dacă ambele au același număr de operații externe cu același domeniu de operatori  $\mathbb{K}$ .

Dacă unele din funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sunt legi de compoziție binare interne pe mulțimea  $A$ , iar celelalte sunt legi de compoziție externe ale lui  $A$  cu același domeniu de operatori  $\mathbb{K}$ , atunci structura algebrică corespunzătoare se notează cu  $(A, f_1, f_2, \dots, f_p)$ .

**Definiția 1.5.2.** Structurile algebrice  $(A_1, f_1)$  și  $(A_2, f_2)$  se zic **homomorfe** dacă există o funcție  $h : A_1 \rightarrow A_2$ , numită **homomorfism**, sau **morfism**, cu proprietatea:

$$h(f_1(x, y)) = f_2(h(x), h(y)), \quad \forall x, y \in A_1. \quad (1.56)$$

Convenim să spunem că funcția  $h : A_1 \rightarrow A_2$  cu proprietatea (1.56) păstrează operațiile  $f_1$  și  $f_2$  de pe respectiv mulțimile  $A_1$  și  $A_2$ .

**Definiția 1.5.3.** Două structuri algebrice  $(A_1, f_1, \dots, f_p)$  și  $(A_2, g_1, \dots, g_p)$  se zic **izomorfe** dacă există o aplicație bijectivă  $h : A_1 \rightarrow A_2$ , numită **izomorfism**, astfel încât să avem

$$h(f_i(x, y)) = g_i(h(x), h(y)), \quad \forall x, y \in A_1, \quad \forall i \in \overline{1, p}. \quad (1.57)$$

**Definiția 1.5.4.** Fie  $A_1$  și  $A_2$  două structuri algebrice de același tip,  $h : A_1 \rightarrow A_2$  un izomorfism și  $P$  o proprietate a elementelor lui  $A_1$ . Dacă aceeași proprietate o au și elementele  $h(x)$ , unde  $x \in A_1$ , atunci  $P$  se numește **proprietate algebrică**.

**Observația 1.5.1.** Din punctul de vedere al proprietăților algebrice două structuri algebrice sunt identice.

**Definiția 1.5.5.** Mulțimea nevidă  $G$  se numește **grup**, dacă pe  $G$  este definită o lege de compoziție binară internă, notată de obicei aditiv (cu  $+$ ), încât să fie îndeplinite axiomele (proprietățile):

$$x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in G \quad (\text{asociativitate}); \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \exists 0 \in G \text{ astfel încât } x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall x \in G \\ (\text{ existența elementului nul ( neutru)}); \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in G \exists -x \in G \text{ astfel încât } x + (-x) = (-x) + x = 0 \\ (\text{ existența elementului opus (simetrizabil)}). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Dacă, în plus, este îndeplinită proprietatea

$$x + y = y + x, \quad \forall x \in G, \quad \forall y \in G \quad (\text{ comutativitate}), \quad (1.61)$$

atunci grupul  $(G, +)$  se numește **comutativ**, sau **grup aditiv abelian**.

Dacă legea de compoziție binară internă în grupul  $G$  este înmulțirea, notată cu simbolul ” $\cdot$ ”, grupul  $(G, \cdot)$  se numește **grup multiplicativ**. Elementul neutru în grupul multiplicativ se notează cu  $1$  și se numește **element unitate**, iar simetricul elementului  $x$  se notează cu  $x^{-1}$  și se numește **inversul elementului  $x$** .

**Teorema 1.5.1.** Într-un grup  $(G, f)$  elementul neutru  $\theta$  este unic și fiecăru element  $x \neq \theta$  îi corespunde un singur element simetric  $x' \in G$ .

*Demonstrație.* Pentru simplitatea scrierii vom introduce notația  $f(x, y) = x * y$ .

Arătăm întâi că  $x * z = y * z, \quad \forall z \in G \implies x = y$ .

Într-adevăr, fie  $z'$  simetricul lui  $z \neq \theta$ . Atunci,  $(x * z) * z' = (y * z) * z'$  și, folosind proprietățile (1.58) – (1.60), avem:  $(x * z) * z' = x * (z * z') = x * \theta = x$  și  $(y * z) * z' = y * (z * z') = y * \theta = y$ . În consecință,  $x = y$ .

Analog se demonstrează că  $z * x = z * y, \quad \forall z \in G \implies x = y$ .



Dacă  $\theta_1$  și  $\theta_2$  sunt două elemente neutre, atunci aplicând proprietatea demonstrată, am avea  $\theta_1 * x = \theta_2 * x = x$ , ceea ce implică  $\theta_1 = \theta_2$ .

În mod similar, dacă  $x'$  și  $x''$  sunt două elemente simetrice ale aceluiași element  $x \neq \theta$ , atunci  $x' * x = x'' * x = \theta \implies x' = x''$  în virtutea aceleiași proprietăți. **q.e.d.**

**Definiția 1.5.6.** Fie  $(A, +)$  un grup aditiv comutativ. Dacă pe mulțimea  $A$  este definită o încă o lege de compoziție binară internă, notată cu simbolul " $\cdot$ ", numită înmulțire care, pentru orice elemente  $x, y, z \in A$ , verifică proprietățile:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{asociativitate}); \quad (1.62)$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\text{distributivitate la dreapta}); \quad (1.63)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (\text{distributivitate la stânga}), \quad (1.64)$$

atunci structura algebrică  $(A, +, \cdot)$  se numește **inel**.

**Propoziția 1.5.1.** Dacă  $(A, +, \cdot)$  este un inel, atunci:

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0, \quad \forall x \in A. \quad (1.65)$$

*Demonstrație.* Fie  $x \in A$ . Utilizând faptul că  $x + 0 = 0 + x = x$ ,  $\forall x \in A$ , în baza proprietăților (1.63) și (1.64), avem

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \quad (1.66)$$

și

$$0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \quad (1.67)$$

de unde

$$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 \quad (1.68)$$

și

$$0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x. \quad (1.69)$$

Adunând în ambii membri ai relației (1.68) opusul lui  $x \cdot 0$ , iar în relația (1.69) opusul lui  $0 \cdot x$ , se obține

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0.$$

Deoarece  $x \in A$  a fost luat arbitrar, rezultă că (1.65) este adevărată.

**q.e.d.**

**Propoziția 1.5.2. (Regula semnelor)** Dacă  $(A, +, \cdot)$  este un inel și  $x, y \in A$ , atunci au loc relațiile:

$$(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y); \quad (1.70)$$

$$(-x) \cdot (-y) = x \cdot y; \quad (1.71)$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -(x^n), & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases} \quad (1.72)$$

unde prin  $-x$  se înțelege opusul lui  $x$  (simetricul său față de operația de adunare), iar  $n \in \mathbb{N}^*$ .

*Demonstrație.* Din Definiția 1.5.6 avem că  $(A, +)$  este grup comutativ, deci orice element  $x \in A$  are un opus  $-x \in A$ . În baza relațiilor (1.63), (1.64), a Propoziției 1.5.1 și a proprietății (1.60) rezultă că pentru orice  $x, y \in A$ , avem  $x \cdot y + (-x) \cdot y = (x + (-x)) \cdot y = 0 \cdot y = 0$  și  $x \cdot y + x \cdot (-y) = x \cdot (y + (-y)) = x \cdot 0 = 0$ , de unde, folosind Teorema 1.5.1, obținem:  $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ .

Din egalitățile evidente  $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y$ ;  $-(-x) = x$  rezultă  $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ .

Relația (1.72) se demonstrează ușor prin inducție.

**q.e.d.**

**Definiția 1.5.7.** Un inel  $(A, +, \cdot)$  în care înmulțirea are elementul unitate  $1 \neq 0$  se numește **inel cu element unitate**. Dacă înmulțirea este comutativă, atunci inelul se numește **comutativ**.

**Definiția 1.5.8.** O mulțime nevidă  $\mathbb{K}$  se numește **corp** dacă:

- (i)  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  este inel cu element unitate;
- (ii)  $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  astfel încât  $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ .

Dacă inelul  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  din definiția structurii de corp este un inel comutativ, atunci structura algebrică  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  se numește *corp comutativ*, sau *câmp*.

**Observația 1.5.2.** Terna  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  este corp dacă:

- $(\mathbb{K}, +)$  este grup comutativ (abelian);
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  este grup;
- înmulțirea este distributivă la stânga și la dreapta față de adunare.

## 1.6 Mulțimea numerelor reale

În acest paragraf prezentăm un model simplificat de definiție axiomatică a mulțimii numerelor reale precizând că există însă și alte moduri de construcție axiomatică ale acesteia (vezi [22], [14], [17]).

**Definiția 1.6.1.** Fie  $(X, +, \cdot)$  un corp comutativ. Relația binară de ordine totală pe  $X$ ,  $\leq$ , se numește **compatibilă** cu operațiile interne  $+$  și  $\cdot$  din  $X$ , dacă sunt satisfăcute proprietățile:

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z, \quad \forall z \in X; \quad (1.73)$$

$$\begin{cases} 0 < x \\ y \leq z \end{cases} \implies x \cdot y \leq x \cdot z. \quad (1.74)$$

Proprietatea (1.73) exprimă compatibilitatea relației de ordine cu adunarea din  $X$ , în timp ce (1.74) exprimă compatibilitatea relației binare de ordine  $\leq$  față de înmulțirea elementelor lui  $X$ .

**Definiția 1.6.2.** Câmpul  $(X, +, \cdot)$  se numește **corp comutativ total ordonat** dacă este prevăzut cu relația binară de ordine totală  $\leq$  compatibilă cu operațiile interne din mulțimea  $X$ .

**Observația 1.6.1.** Într-un corp comutativ total ordonat  $(X, +, \cdot)$  se pot construi mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$ , mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$  și mulțimea numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ . Între aceste mulțimi există relațiile de incluziune  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset X$ .

Întradevăr, dacă  $0 \in X$  este elementul neutru la adunare (elementul nul), iar  $1$  este elementul unitate din  $X$  cu  $0 \neq 1$  și  $0 < 1$ , atunci în baza proprietăților de corp ale lui  $X$  putem defini elementele:  $2 = 1+1$ ,  $3 = (1+1)+1$ , ... Aceste elemente alcătuiesc o mulțime, notată cu  $\mathbb{N}$ , numită *mulțimea numerelor naturale*.  $\mathbb{N}$  este mulțime *total ordonată* față de relația de ordine  $\leq$  și, de asemenea, este *închisă* față de operațiile din  $X$  în sensul că adunarea și înmulțirea a două numere naturale este tot un număr natural. ■

Mai departe, putem introduce opusele numerelor naturale nenule, notate cu  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , ..., pe care le vom denumi *numere întregi negative*.

Numerele naturale nenule pot fi numite și *numere întregi pozitive*.

Dacă notăm cu  $-\mathbb{N}$  mulțimea numerelor întregi negative, atunci mulțimea  $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ , ordonată crescător

$$\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

se numește *mulțimea numerelor întregi*.

Observăm că  $\mathbb{Z}$  are structură de grup aditiv abelian total ordonat.

Prin  $x - y$  înțelegem  $x + (-y)$ . Adunarea unui număr întreg cu opusul unui alt număr întreg se numește *scăderea* celor două numere.

Mulțimea  $\mathbb{Z}$  este închisă față de operațiile de înmulțire și scădere a numerelor întregi, iar terna  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  este inel comutativ cu unitate, numit *inelul numerelor întregi*.

Un element de forma  $x \cdot y^{-1}$ , unde  $x \in \mathbb{Z}$  și  $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , se numește *număr rațional*, se notează sub formă de fracție, adică cu  $\frac{x}{y}$ , și i se mai spune *câțul* numerelor întregi  $x$  și  $y$ .

Două fracții  $\frac{x}{y}$  și  $\frac{x'}{y'}$  reprezintă același număr rațional dacă și numai dacă  $xy' = x'y$ .

O fracție  $\frac{x}{y}$  se numește *irreductibilă* dacă numerele întregi  $x$  și  $y$  sunt prime între ele.

Oricare număr rațional se poate reprezenta într-un singur mod ca fracție irreductibilă cu numitorul număr natural nenul.

Mulțimea tuturor fracțiilor se numește *mulțimea numerelor raționale* și se notează cu  $\mathbb{Q}$ .

Prin urmare,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \right\}.$$

Putem să considerăm că  $y$  din definiția mulțimii  $\mathbb{Q}$  este număr natural nenul.

Un număr întreg  $p$  se poate scrie ca fracție sub forma  $\frac{p}{1}$ . Prin urmare, numerele întregi sunt în același timp numere raționale ceea ce înseamnă că are loc incluziunea  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

De asemenea, să remarcăm că  $\mathbb{Q}$  este închisă față de operațiile de adunare și înmulțire din  $X$ , în sensul că suma  $r + s$  și produsul  $r \cdot s$  a două numere raționale sunt, de asemenea, numere raționale.

În plus, dacă  $r \in \mathbb{Q}$ , atunci opusul său  $-r$  este tot număr rațional, iar dacă  $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , *inversul* său  $r^{-1} = \frac{1}{r}$  este, de asemenea, număr rațional.

Apoi, două numere raționale oarecare  $\frac{x_1}{y_1}$  și  $\frac{x_2}{y_2}$ , unde  $x_1 \in \mathbf{Z}$ ,  $x_2 \in \mathbf{Z}$ , iar  $y_1 \in \mathbf{N}^*$ ,  $y_2 \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ , sunt în relația de ordine  $\frac{x_1}{y_1} \leq \frac{x_2}{y_2}$ , când  $x_1 y_2 \leq x_2 y_1$ , sau în relația de ordine  $\frac{x_2}{y_2} \leq \frac{x_1}{y_1}$  atunci când  $x_2 y_1 \leq x_1 y_2$ .

Dacă  $x_1 y_2 < x_2 y_1$ , atunci  $\frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2}$ .

Rezultă că terna  $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$  este corp comutativ total ordonat.

Mai mult, spre deosebire de  $\mathbf{Z}$ , mulțimea  $\mathbf{Q}$  este *densă* în sensul că între orice două numere raționale  $a < b$  există o infinitate de numere raționale deoarece

$$a < \frac{m \cdot a + n \cdot b}{m + n} < b, \quad \forall m \in \mathbf{N}^*,$$

Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere raționale, atunci  $b - a = b + (-a)$  și  $\frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}$  (dacă  $a \neq 0$ ) sunt numere raționale, deci ecuațiile

$$a + x = b \quad \text{și} \quad a \cdot x = b \quad (\text{dacă } a \neq 0)$$

au soluții în  $\mathbf{Q}$  și acestea sunt respectiv  $x = b - a$  și  $x = \frac{b}{a}$ .

Ecuația  $x^2 = a$ , unde  $a \in \mathbf{Q}$ , nu mai are însă totdeauna soluție rațională. De exemplu, ecuația  $x^2 = 2$  nu are soluție rațională căci nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2, demonstrația acestei afirmații făcându-se prin reducere la absurd.

Într-adevăr, dacă există un număr rațional  $r = \frac{p}{q}$ , unde  $p$  și  $q$  sunt numere întregi fără nici un alt divizor comun afară de 1 și  $-1$ , care să verifice ecuația dată, atunci trebuie să avem  $p^2 = 2q^2$ , ceea ce înseamnă că  $p^2$  este un număr par, lucru posibil numai dacă  $p = 2m$  adică și  $p$  este număr par.

Egalitatea  $p^2 = 2q^2$  se scrie în forma  $4m^2 = 2q^2$ , de unde  $2m^2 = q^2$ . Rezultă că  $q^2$  este un număr par, deci și  $q$  este un număr par, adică  $q = 2n$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ .

Așadar,  $p$  și  $q$  au pe 2 ca divizor comun și astfel presupunerea că există un număr rațional  $r$  cu  $r^2 = 2$  conduce la o contradicție.

Acest exemplu demonstrează că  $\mathbf{Q} \subset X$ , incluziunea fiind strictă. ■

Structura algebrică astfel definită peste o mulțime oarecare  $X$  este destul de bogată în proprietăți.

Pe baza axiomelor de corp comutativ total ordonat se poate defini operația de *scădere* a două elemente oarecare ale mulțimii  $X$ , de *împărțire* a două elemente, cu condiția ca cel de-al doilea să fie diferit de elementul neutru la adunare, și de *ridicare la o putere întreagă* a unui element din  $X$ .

Dacă  $x \in X$  și  $n \in \mathbf{N}^*$ , atunci prin  $x^n$  înțelegem  $x \cdot x \cdot \dots \cdot x$ , de  $n$  ori, apoi  $x^0 = 1$ , iar  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .

Structura definită pe  $X$  are inconveniente deoarece axiomele sale nu permit definirea operației inverse operației de ridicare la puterea întreagă  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , numită operație de *extragere a rădăcinii de un ordin oarecare*  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $n \geq 2$ .

De exemplu, nu putem stabili în acest cadru axiomatic formulele de determinare a soluțiilor ecuației de gradul doi  $ax^2 + bx + c = 0$ , unde  $a, b, c \in X$ .

Pentru satisfacerea unor astfel de cerințe este necesar să introducem noțiuni noi care să permită definirea unei structuri suficient de generale pentru a descrie mulțimea numerelor reale.

**Definiția 1.6.3.** Fie  $A \subset X$  o submulțime nevidă arbitrară a lui  $X$ . Spunem că mulțimea  $A$  este majorată, sau mărginită superior dacă există un element  $b \in X$ , numit majorant al mulțimii  $A$ , astfel încât

$$x \leq b, \quad \forall x \in A. \quad (1.75)$$

**Observația 1.6.2.** O mulțime majorată  $A \subset X$  are o infinitate de majoranți.

Într-adevăr, dacă  $b$  este majorant pentru  $A$  și dacă  $b' \in X$  este astfel încât  $b \leq b'$ , din (1.75) și proprietatea de tranzitivitate a relației de ordine totală  $\leq$ , rezultă că  $b'$  este majorant. ■

Dacă există un majorant în mulțimea  $A$ , acesta se numește *maximul* mulțimii  $A$  și se notează  $\max A$ .

**Definiția 1.6.4.** Fie  $A$  o submulțime nevidă majorată a corpului comutativ total ordonat  $(X, +, \cdot)$ . Se numește *margină superioară* a mulțimii  $A$ , notată  $\sup A$ , cel mai mic majorant.

**Observația 1.6.3.** Este posibil ca  $X$  să fie astfel încât marginea superioară a unei submulțimi  $A \subset X$  să nu aparțină lui  $X$ , ceea ce poate conduce la imposibilitatea rezolvării unor probleme practice concrete.

Într-adevăr, dacă luăm  $X = \mathbb{Q}$  și  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ , se constată că  $\sup A \notin X$ . Spre exemplu, lungimea diagonalei unui pătrat cu latura de mărime  $\ell \in \mathbb{Q}$  nu aparține lui  $\mathbb{Q}$  deoarece nu se poate scrie sub forma  $p/q$  cu  $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$ . ■

Din Observația 1.6.3 deducem că în mulțimea numerelor reale este necesară o astfel de proprietate care să asigure existența marginii superioare a unei mulțimi majorate. În acest sens, completăm axiomele de corp comutativ total ordonat cu încă una și anume:

**Axioma de existență a marginii superioare.** Orice submulțime nevidă majorată  $A$  a unui corp comutativ total ordonat  $X$  admite un cel mai mic majorant.

Această axiomă este cunoscută și sub numele de *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor<sup>2</sup>–Dedekind<sup>3</sup>*.

**Definiția 1.6.5.** Se numește **mulțime a numerelor reale** un corp comutativ total ordonat în care orice submulțime nevidă majorată admite un cel mai mic majorant. O astfel de mulțime se notează cu  $\mathbb{R}$ .

Mulțimea definită cu ajutorul fracțiilor zecimale infinite satisface Definiția 1.6.5 și furnizează o metodă de construcție a mulțimii numerelor reale (vezi [22], [17]).

În baza construcției lui  $\mathbb{R}$  cu ajutorul fracțiilor zecimale putem afirma că mulțimea  $\mathbb{R}$  există.

Se pune însă întrebarea: este unică o astfel de mulțime  $\mathbb{R}$ ?

Răspunsul îl găsim în următoarea teoremă pe care o dăm fără demonstrație.

**Teorema 1.6.1.** Dacă  $S_1$  și  $S_2$  sunt două corpuri comutative total ordonate care satisfac axioma de existență a marginii superioare, atunci există o aplicație bijectivă  $f : S_1 \rightarrow S_2$  astfel încât

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x) + f(y), & f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y), \\ f(0_{S_1}) &= 0_{S_2}, & f(1_{S_1}) &= 1_{S_2}, \end{aligned}$$

unde  $0_{S_1}$  și  $0_{S_2}$  sunt elementele neutre în raport cu adunarea în  $S_1$ , respectiv  $S_2$ , iar  $1_{S_1}$ , respectiv  $1_{S_2}$  sunt elementele neutre în raport cu înmulțirea în  $S_1$ , respectiv  $S_2$ . În plus, dacă  $x \leq y$ , atunci  $f(x) \leq f(y)$ .

Rezultă așadar că  $f$  este izomorfism de corpuri care păstrează relația de ordine și, în baza Observației 1.5.1,  $S_1$  și  $S_2$  sunt identice.

Axiomele ce definesc  $\mathbb{R}$  caracterizează această mulțime până la un izomorfism, adică  $\mathbb{R}$  este unică până la un izomorfism.

Cea de a treia problemă care se pune în legătură cu construcția axiomatică a numerelor reale  $\mathbb{R}$ , pe lângă cea a existenței și unicității lui  $\mathbb{R}$ , este aceea a noncontradicției axiomei care o definesc.

<sup>2</sup>Cantor, Georg (1845–1918), renumit matematician german.

<sup>3</sup>Dedekind, Richard (1831–1917), matematician german.

Se poate arăta că sistemul de axiome care definește mulțimea  $\mathbb{R}$  este necontradictoriu [17].

Creator al teoriei numerelor reale poate fi considerat Eudoxus<sup>4</sup>. Ideile sale, inspirate din geometrie, au fost preluate de Weierstrass<sup>5</sup> și Dedekind și dezvoltate prin metode aritmetice și analitice moderne. Lui Weierstrass îi aparține definiția numerelor reale printr-un șir descrescător de intervale. Dedekind a introdus numerele reale ca tăieturi în mulțimea numerelor raționale, iar Cantor le-a construit cu ajutorul *șirurilor fundamentale*, cunoscute și sub denumirea de *șiruri Cauchy*<sup>6</sup>.

Mulțimile obținute prin aceste metode diferite sunt izomorfe, astfel încât se poate afirma că mulțimea numerelor reale este, ca structură algebrică, unică.

**Propoziția 1.6.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime majorată. Atunci,  $b = \sup A$  dacă și numai dacă

$$(i) \quad x \leq b, \quad \forall x \in A;$$

$$(ii) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A, \text{ astfel încât } b - \varepsilon < x_\varepsilon.$$

*Demonstrație.* Mai întâi demonstrăm teorema directă.

Fie  $b = \sup A$ .

Din Definiția 1.6.3 rezultă că  $b$  este un majorant al mulțimii  $A$ , deci condiția (i) este satisfăcută. De asemenea, avem că  $b$  este cel mai mic majorant al mulțimii  $A$ , deci  $\forall c < b$  rezultă că  $c$  nu majorează  $A$ ; ca urmare, există  $x_c \in A$  care nu este majorat de  $c$ , adică  $c < x_c$ . Luând acum  $c = b - \varepsilon$ , unde  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, și notând  $x_c$  corespunzător cu  $x_\varepsilon$  rezultă (ii).

Reciproc, din (i) și (ii), raționând similar, rezultă că  $b = \sup A$ .

**q.e.d.**

**Propoziția 1.6.2.** Dacă  $A \subset B \subset \mathbb{R}$  și  $B \subset \mathbb{R}$  sunt mulțimi nevide majorate și  $A \subset B$ , atunci

$$a = \sup A \leq \sup B = b.$$

*Demonstrație.* Prin reducere la absurd. Presupunem că  $a > b$ . Luând  $\varepsilon = \frac{1}{2}(a - b)$ , conform Propoziției 1.6.1 există  $x_0 \in A$  astfel încât  $x_0 > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$  deci  $x_0 \geq b$ , adică  $x_0 \in A$  și  $x_0 \notin B$ , ceea ce contrazice incluziunea  $A \subset B$ .

**q.e.d.**

**Definiția 1.6.6.** Submulțimea nevidă  $A \subset \mathbb{R}$  se numește **minorată** dacă există un  $a \in \mathbb{R}$ , care se numește **minorant** al mulțimii  $A$ , cu proprietatea

$$a \leq x, \quad \forall x \in A.$$

<sup>4</sup>Eudoxus (408 î.Hr.–355 î.Hr.), matematician grec

<sup>5</sup>Weierstrass, Karl Theodor (1815–1897), proeminent matematician german, considerat fondatorul analizei matematice moderne.

<sup>6</sup>Cauchy, Augustin Louis (1789–1857), ilustru matematician și inginer francez. A demarat un proiect important de reformulare și demonstrare riguroasă a teoremelor de algebră, a fost unul dintre pionierii analizei matematice și a adus o serie de contribuții și în domeniul fizicii. Datorita perspicacității și rigurozității metodelor sale, Cauchy a avut o influență extraordinară asupra contemporanilor și predecesorilor săi. Catolic și roialist fervent, a manifestat o prezență socială activă.

**Definiția 1.6.7.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime nevidă minorată. Elementul notat  $\inf A$ , definit ca fiind cel mai mare minorant, se numește **marginea inferioară** a mulțimii  $A$ .

**Propoziția 1.6.3.** Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  este o submulțime minorată, atunci  $\inf A \in \mathbb{R}$ .

*Demonstrație.* Submulțimea  $B \subset \mathbb{R}$  definită de  $B = \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\}$  este mărginită superior, un majorant al lui  $B$  fiind elementul  $-a \in \mathbb{R}$  care are proprietatea că opusul său,  $a$ , este minorant pentru  $A$ . Din axioma de existență a marginii superioare rezultă că există  $\sup B \in \mathbb{R}$ . Se vede că  $-\sup B = \inf A$ . **q.e.d.**

**Propoziția 1.6.4.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime minorată. Atunci,  $a = \inf A \iff$

$$1^0. a \leq x, \quad \forall x \in A;$$

$$2^0. \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A, \text{ astfel încât } x_\varepsilon < a + \varepsilon.$$

*Demonstrație.* Fie  $a = \inf A$ . Din Definiția 1.6.6 și Definiția 1.6.7 rezultă că  $a$  este un minorant al mulțimii  $A$ , deci are loc  $1^0$ . Apoi,  $a$  fiind cel mai mare minorant rezultă că, indiferent de  $\varepsilon > 0$ , numărul real  $a + \varepsilon$  nu minorează  $A$  deci există cel puțin un element  $x_\varepsilon \in A$  care nu este minorat de  $a + \varepsilon$  ceea ce înseamnă că are loc și  $2^0$ .

Reciproc, din  $1^0$  și  $2^0$ , raționând ca mai sus, rezultă că  $a = \inf A$ . **q.e.d.**

Deosebit de importante sunt următoarele submulțimi de numere reale:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad (\text{interval deschis});$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad (\text{interval închis, sau segment});$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad (\text{interval semideschis la dreapta});$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad (\text{interval semideschis la stânga}),$$

unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale arbitrare cu  $a < b$ .

**Observația 1.6.4.** Mulțimea numerelor reale verifică **Axioma lui Arhimede**<sup>7</sup>: Pentru orice două numere reale  $x$  și  $y$ , cu  $x > 0$  și  $y \geq 0$ , există un număr natural  $n$  astfel încât  $y \leq nx$ .

<sup>7</sup>Arhimede din Siracuză (287 î.Hr.–212 î.Hr.), unul dintre cei mai de seamă învățați ai lumii antice cu realizări în matematică, fizică, astronomie, inginerie și filozofie. Carl Friederich Gauss considera că Arhimede și Isaac Newton au fost cei mai mari oameni de știință din întreaga istorie a civilizației umane. Arhimede a pus bazele și a explicat legea pârghiilor. A proiectat numeroase invenții inclusiv mașini de asalt și mașini capabile să scoată corăbiile din apă și să le dea foc folosind un sistem de oglinzi. Este autorul invenției șurubul fără sfârșit. Arhimede este în general considerat a fi unul din cei mai mari matematicieni ai antichității și unul dintre cei mai mari a tuturor timpurilor. El a folosit metoda epuizării pentru a calcula aria unui arc de parabolă prin determinarea sumei unei serii numerice, precum și calculul aproximativ al numărului  $\pi$  cu o acuratețe remarcabilă pentru acele timpuri. De asemenea a definit spirala care-i poartă numele, formule de calcul a volumelor și al suprafețelor corpurilor de revoluție, precum și un sistem foarte ingenios de exprimare a numerelor foarte mari. Arhimede a murit în timpul asediului Siracuzei (localitatea natală din Sicilia, pe atunci colonie grecească), în ciuda ordinului primit de a nu-l ucide. Pe piatra funerară a mormântului a fost sculptată o sferă în interiorul cilindrului circumscris, lucru cerut chiar de Arhimede, deoarece el a demonstrat că raportul dintre aria sferei și a cilindrului circumscris este egal cu raportul volumelor corpurilor, având valoarea  $2/3$ .

**Definiția 1.6.8.** O mulțime nevidă  $A \subset \mathbb{R}$  se numește **mărginită** dacă este majorată și minorată, adică dacă există un segment  $[a, b]$  astfel încât  $A \subset [a, b]$ .

**Observația 1.6.5.** Pentru o mulțime mărginită există marginea inferioară,  $\inf A$ , marginea superioară,  $\sup A$  și  $\inf A \leq x \leq \sup A$ ,  $\forall x \in A$ .

**Observația 1.6.6.** Mulțimea  $A$  este formată dintr-un singur element dacă și numai dacă  $\inf A = \sup A$ .

**Definiția 1.6.9.** O submulțime nevidă  $A$  din  $\mathbb{R}$  se numește **mulțime nemărginită superior** dacă nu este majorată. Mulțimea  $A$  se numește **nemărginită inferior** dacă nu este minorată.

O funcție reală de variabilă reală care are un rol important în analiza matematică este *funcția modul*

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } 0 \leq x \\ -x & \text{dacă } x < 0. \end{cases} \quad (1.76)$$

Funcția modul (1.76) are următoarele proprietăți:

$$|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; |x| = 0 \iff x = 0, \quad (1.77)$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (\text{inegalitatea triunghiulară}); \quad (1.78)$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (1.79)$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad (1.80)$$

$$|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad (1.81)$$

$$|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.82)$$

Funcția modul este o funcție pară, căci din (1.76) și (1.80) avem  $|x| = |-x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Propoziția 1.6.5.** Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}$  este mărginită dacă și numai dacă  $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$  astfel încât

$$|x| \leq M, \quad \forall x \in A. \quad (1.83)$$

Mulțimea  $A \subset \mathbb{R}$  este nemărginită dacă și numai dacă

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists x_M \in A \quad \text{astfel încât} \quad |x_M| > M. \quad (1.84)$$



*Demonstrație.* Dacă există  $M > 0$  astfel încât să aibă loc (1.83), atunci  $-M \leq x \leq M, \forall x \in A$ , adică  $A$  este inclusă în intervalul mărginit  $[-M, M]$ , și deci  $A$  este mărginită.

Reciproc, dacă  $A$  este mărginită, există un interval mărginit  $(a, b)$  care include mulțimea  $A$ . Prin urmare, avem  $a \leq x \leq b, \forall x \in A$ .

Să punem  $M = \max\{|a|, |b|\}$ . Atunci,  $b \leq |b| \leq M$  și  $-a \leq |a| \leq M$  deci  $-M \leq -|a| \leq a$ , adică  $-M \leq a \leq b \leq M$ , de unde  $-M \leq x \leq M$ , sau  $|x| \leq M, \forall x \in A$ .

În mod similar se demonstrează și partea a doua a propoziției.

**q.e.d.**

**Observația 1.6.7.** Numerele reale pot fi puse în corespondență biunivocă cu punctele unei drepte  $D$ .

Într-adevăr, să fixăm un punct  $O$  pe dreapta  $D$  care, prin definiție, este corespondentul numărului real  $x = 0$ . Se definește o unitate de lungime, iar dacă  $x \in \mathbb{R}$  și  $0 < x$ , acestui număr îi corespunde pe  $D$  extremitatea din dreapta a segmentului având lungimea egală cu  $x$  unități, extremitatea din stânga fiind punctul  $O$ , numit *origine*. Dacă însă  $x < 0$ , segmentul de lungime  $-x$  se plasează cu extremitatea din dreapta în origine, iar extremitatea cealaltă definește corespondentul numărului real  $x$  pe dreapta  $D$ .

Invers, odată fixat punctul  $P$  pe dreapta  $D$ , lungimea segmentului de dreaptă  $OP$  definește numărul real  $x$ , care este pozitiv dacă  $P$  se situează la dreapta pe  $D$  și negativ în caz contrar. Numărul real  $x$  astfel specificat se numește *abscisa* punctului  $P \in D$ , iar dreapta  $D$ , pe care s-a definit o origine  $O$ , o unitate de măsură și un *sens de parcurs* se numește *dreaptă reală*, sau *axa numerelor reale*. Elementele sale se numesc *puncte*. ■

Prezentarea unitară a unor rezultate fundamentale ale calculului diferențial impune introducerea simbolurilor matematice  $-\infty$  și  $+\infty$  numite *minus infinit* și, respectiv, *plus infinit* (în locul lui  $+\infty$  se obișnuiește și notația  $\infty$ ). Mulțimea

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

se numește *mulțimea extinsă* a numerelor reale.

Relația de ordine totală din  $\mathbb{R}$  se extinde la  $\overline{\mathbb{R}}$  luând prin definiție

$$-\infty < x < +\infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se poate afirma că  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) este cel mai mare (respectiv cel mai mic) element al mulțimii  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Elementele  $+\infty$  și  $-\infty$  nu sunt numere reale deoarece nu verifică toate axiomele care definesc  $\mathbb{R}$ . De exemplu, nu se poate da un sens direct expresiei  $\infty + (-\infty) = \infty - \infty$ .

Operațiile algebrice definite pe  $\mathbb{R}$  se extind numai parțial la  $\overline{\mathbb{R}}$ , după cum urmează:

$$x + \infty = +\infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}; \quad x + (-\infty) = x - \infty = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\};$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & x > 0 \\ +\infty, & x < 0 \end{cases}; \quad x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases};$$

$$x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & x > 1 \\ \infty, & 0 < x < 1 \end{cases}; \quad x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & x > 1 \\ 0, & 0 < x < 1 \end{cases}; \quad \infty^x = \begin{cases} \infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases};$$

$$0^{\infty} = 0.$$

Următoarele operații, care se numesc *operații fără sens*, sau *cazuri de nedeterminare*, nu sunt definite pe  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\infty + (-\infty); \quad 0 \cdot (\pm\infty); \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; \quad 0^0; \quad 1^{\pm\infty}; \quad \infty^0.$$

Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  este neminorată, respectiv nemajorată, prin definiție

$$\inf A = -\infty \quad \text{respectiv} \quad \sup A = +\infty.$$

O altă funcție reală, dar de două variabile reale, care trebuie introdusă, este

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1.85)$$

Din (1.76) – (1.78) și (1.80) rezultă că funcția  $d$ , introdusă în (1.85), are următoarele proprietăți:

$$d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad (1.86)$$

denumită *proprietatea de nenegativitate*;

$$d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (\text{simetrie}); \quad (1.87)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (1.88)$$

cunoscută ca *inegalitatea triunghiulară*.

O astfel de funcție se numește *distanță*, sau *metrică* pe  $\mathbb{R}$ . Numărul  $d(x, y)$  este lungimea segmentului  $PQ$  unde  $P$  și  $Q$  sunt punctele de pe dreapta reală  $D$  ce corespund respectiv numerelor reale  $x$  și  $y$ .

Pe lângă submulțimile remarcabile ale lui  $\mathbb{R}$  introduse mai sus semnalăm și mulțimile nemărginite:

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}; & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}; \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}; & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \end{aligned}$$

numite corespunzător: *semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta*; *semidreaptă închisă nemărginită la dreapta*; *semidreaptă deschisă nemărginită la stânga*; *semidreaptă închisă nemărginită la stânga*.

Acestor mulțimi le vom spune *intervale nemărginite*.

Mulțimea numerelor reale însăși poate fi considerată un interval nemărginit atât la stânga cât și la dreapta și anume  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ . Tot în acest context putem afirma că  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \leq +\infty\}$ .

**Definiția 1.6.10.** Numerele reale care nu sunt raționale se numesc **numere iraționale**.

**Observația 1.6.8.** Mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  este reuniunea mulțimii numerelor raționale  $\mathbb{Q}$  cu mulțimea numerelor iraționale.

**Definiția 1.6.11.** Se numește **număr algebric** orice număr care este soluție a unei ecuații algebrice de forma

$$a_0 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

cu coeficienții  $a_0, a_1, \dots, a_n$  numere întregi.

**Definiția 1.6.12.** Două mulțimi  $A$  și  $B$  se numesc **echipotente**, și se scrie  $A \sim B$ , dacă pot fi puse în corespondență biunivocă, adică dacă există o aplicație biunivocă a lui  $A$  pe  $B$ .

**Definiția 1.6.13.** O mulțime  $A$  se numește **numărabilă** dacă este echipotentă cu mulțimea  $\mathbb{N}$  a numerelor naturale.

**Observația 1.6.9.** Mulțimea  $A$  este numărabilă dacă și numai dacă elementele sale pot fi așezate în forma

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

**Observația 1.6.10.** O mulțime  $A$  este finită și are  $n$  elemente dacă este echipotentă cu mulțimea  $\{1, 2, \dots, n\}$  a primelor  $n$  numere naturale.

**Definiția 1.6.14.** O mulțime este **cel mult numărabilă** dacă este finită, sau numărabilă.

**Exemplul 1.6.1.** Mulțimea numerelor naturale este numărabilă.

Într-adevăr, remarca are loc deoarece  $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ . ■

**Exemplul 1.6.2.** Mulțimea numerelor naturale pare  $\{2, 4, \dots, 2n, \dots\}$  este numărabilă.

Într-adevăr, corespondența biunivocă din Definiția 1.6.12 este  $n \rightarrow 2n$ . ■

**Exemplul 1.6.3.** Mulțimea numerelor naturale impare

$$\{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$$

este numărabilă.

**Exemplul 1.6.4.** Mulțimea numerelor reale nu este numărabilă.

**Exemplul 1.6.5.** Orice interval deschis nu este o mulțime numărabilă.

**Exemplul 1.6.6.** Mulțimea numerelor iraționale  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nu este numărabilă.

**Observația 1.6.11.** Mulțimile finite  $A$  și  $B$  sunt echipotente dacă și numai dacă au același număr de elemente.

Într-adevăr, fie  $n$  numărul elementelor mulțimii  $A$ . Aceasta înseamnă că avem  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ . Dar  $A \sim B$ , deci  $B \sim \{1, 2, \dots, n\}$ , ceea ce arată că  $B$  are tot  $n$  elemente.

Reciproc, dacă  $A$  și  $B$  au  $n$  elemente, atunci avem:  $A \sim \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $B \sim \{1, 2, \dots, n\}$ , deci  $A \sim B$ . ■

**Definiția 1.6.15.** Numerele reale care nu sunt algebrice se numesc **numere transcendente**.

**Observația 1.6.12.** Numerele  $e$  și  $\pi$  sunt transcendente. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă.

**Definiția 1.6.16.** Fie  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Se numește **vecinătate** a lui  $x_0$  orice mulțime  $V \subset \mathbb{R}$  pentru care există un interval deschis  $(a, b)$  cu proprietatea  $x_0 \in (a, b) \subset V$ .

**Observația 1.6.13.** Orice interval deschis  $(a, b)$  care conține punctul  $x_0$  este o vecinătate a lui  $x_0$ .

**Definiția 1.6.17.** O vecinătate a lui  $x_0$  de forma  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  se numește **vecinătate simetrică**, sau **bilă deschisă de rază  $\varepsilon$  centrată în  $x_0$** .

**Definiția 1.6.18.** O mulțime  $V \subset \mathbb{R}$  se numește **vecinătate a lui  $+\infty$** , respectiv a simbolului  $-\infty$ , dacă  $V$  include o semidreaptă  $(a, +\infty)$ , respectiv o semidreaptă  $(-\infty, a)$ .

O vecinătate a lui  $x_0$  se notează prin  $V_{x_0}$ , sau prin  $V(x_0)$ , iar mulțimea tuturor vecinătăților elementului  $x \in \mathbb{R}$  se notează cu  $\mathcal{V}(x)$ .

**Teorema 1.6.2. (Proprietatea de separație Hausdorff<sup>8</sup> a mulțimii  $\mathbb{R}$ )** Pentru orice două elemente  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq y$ , există vecinătățile  $V_x$  și  $V_y$  care au intersecție vidă, adică  $V_x \cap V_y = \emptyset$ .

*Demonstrație.* Dacă  $x, y \in \mathbb{R}$  și  $x < y$ , iar  $\varepsilon = d(x, y) = |x - y| > 0$ , atunci mulțimile  $V_x = \left(x - \frac{\varepsilon}{3}, x + \frac{\varepsilon}{3}\right)$  și  $V_y = \left(y - \frac{\varepsilon}{3}, y + \frac{\varepsilon}{3}\right)$  sunt vecinătăți ale lui  $x$  și respectiv  $y$  care nu se intersectează (au intersecție vidă).

Dacă  $x = -\infty$  și  $y = +\infty$ , atunci mulțimile  $V_x = (-\infty, 0)$  și  $V_y = (0, \infty)$ , care sunt vecinătăți ale lui  $x$  și respectiv  $y$ , au intersecție vidă.

Dacă  $x = -\infty$  și  $y \in \mathbb{R}$ , atunci mulțimile  $V_x = (-\infty, y - |y|)$  și  $V_y = (y - |y|, y + |y|)$  sunt vecinătăți pentru  $x$  și respectiv  $y$  care nu au elemente comune. Analog se demonstrează cazul  $x \in \mathbb{R}$  și  $y = +\infty$ . **q.e.d.**

<sup>8</sup>Hausdorff, Felix (1868 - 1942), matematician german, considerat unul din fondatorii topologiei moderne

**Observația 1.6.14.** Dacă  $x_0 \in \mathbb{R}$  și  $V_{x_0} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  este o vecinătate simetrică a lui  $x_0$ , atunci

$$x \in V_{x_0} \iff |x - x_0| < \varepsilon.$$

**Observația 1.6.15.** Oricare ar fi vecinătatea  $V(a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , există o vecinătate simetrică  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  astfel încât  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V(a)$ .

Într-adevăr, dacă  $V(a)$  este vecinătate, din Definiția 1.6.16 rezultă că există intervalul deschis  $(\alpha, \beta) \subset V(a)$  astfel încât  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ . Luând  $\varepsilon = \min\{a - \alpha, \beta - a\}$ , deducem că  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset V(a)$ . ■



## Capitolul 2

# Șiruri și serii de numere reale

În acest capitol se studiază un caz particular de funcție reală de o variabilă reală. Particularitatea constă în aceea că domeniul de definiție a unei astfel de funcție este sau mulțimea numerelor naturale, sau o submulțime a mulțimii numerelor naturale.

### 2.1 Șiruri de numere reale

**Definiția 2.1.1.** Se numește **șir de numere reale**, sau **șir numeric**, orice funcție de forma  $f : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k, k \in \mathbb{N}\}$ .

Punând  $f(n) = a_n$ , șirul se notează prin  $(a_n)_{n \geq k}$ . În mod uzual se ia  $k = 1$ , uneori  $k = 0$ . În cazul  $k = 1$  vom scrie prescurtat  $(a_n)$ . Numărul real  $a_n$  se numește **termenul de rang  $n$**  al șirului, sau *termen general*. Elementele  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  se numesc *termenii șirului*, iar mulțimea  $\{a_n : n \in \mathbb{N}_k\}$  se numește *mulțimea valorilor șirului*. Șirul  $(a_n)$  se numește **șir constant** dacă mulțimea valorilor sale este formată dintr-un singur element, adică  $a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , unde  $c \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 2.1.2.** Fie șirul de numere reale  $(a_n)$ . Elementul  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  se numește **limită** a șirului  $(a_n)$  și scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{sau} \quad a_n \rightarrow a, \quad (2.1)$$

dacă pentru orice  $V \in \mathcal{V}(a)$  avem  $a_n \notin V$  pentru un număr finit de valori ale lui  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Observația 2.1.1.** Șirul  $(a_n)$  are limita  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  dacă în afara oricărei vecinătăți  $V \in \mathcal{V}(a)$  rămân un număr finit de termeni ai șirului.

**Definiția 2.1.3.** Dacă  $a \in \mathbb{R}$  are proprietatea (2.1), atunci șirul  $(a_n)$  se numește **convergent**.

**Definiția 2.1.4.** Dacă  $a = +\infty$ , respectiv  $a = -\infty$ , satisface (2.1), șirul  $(a_n)$  se numește **divergent cu limita egală cu  $+\infty$** , respectiv **divergent cu limita egală cu  $-\infty$** .

**Definiția 2.1.5.** Dacă nu există  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  astfel încât să aibă loc (2.1), atunci șirul  $(a_n)$  se numește **șir fără limită, sau șir oscilant**.

**Observația 2.1.2.** Numărul termenilor șirului  $(a_n)$ , cu limita  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , care rămân în afara vecinătății  $V(a)$ , depinde de această vecinătate. În particular, pot exista vecinătăți  $V \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât mulțimea  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin V\}$  să fie mulțimea vidă, care este mulțime finită.

**Teorema 2.1.1.** Șirul numeric  $(a_n)$  este convergent dacă și numai dacă există  $a \in \mathbb{R}$  cu proprietatea:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.2)$$

*Demonstrație.* Dacă  $(a_n)$  este șir convergent, atunci există  $a \in \mathbb{R}$  care satisface proprietatea din Definiția 2.1.2. Dacă luăm  $V(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , unde  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, atunci pentru un număr finit de valori ale lui  $n \in \mathbb{N}^*$  care, fiind dependent de vecinătatea  $V(a)$ , deci de  $\varepsilon$ , îl notăm cu  $N(\varepsilon)$ , avem  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că numerele naturale pentru care  $a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  sunt primele  $N(\varepsilon)$ ; deci pentru  $n > N(\varepsilon)$  avem  $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  ceea ce este echivalent cu  $|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ , adică (2.2) este adevărată.

Invers, să presupunem că numărul real  $a$  are proprietatea (2.2). De aici deducem că în afara intervalului simetric centrat în  $a$  de lungime  $2\varepsilon$  se găsesc termenii  $a_1, a_2, \dots, a_{N(\varepsilon)}$ . Cum orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(a)$  include o vecinătate simetrică a lui  $a$ , rezultă că și în afara lui  $V$  se găsesc un număr finit de termeni ai șirului (cel mult  $N(\varepsilon)$ ), de unde, folosind Definiția 2.1.2, deducem că  $a_n \rightarrow a$ . **q.e.d.**

**Teorema 2.1.2.** Șirul numeric  $(a_n)$  are limita  $+\infty$  (respectiv  $-\infty$ ) dacă și numai dacă

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ a.î } a_n > M \text{ (resp. } a_n < -M) \forall n > N(M).$$

*Demonstrație.* Dacă  $a_n \rightarrow +\infty$ , atunci în afara vecinătății  $(M, \infty)$ ,  $M > 0$ , a punctului de la infinit, rămân un număr finit de termeni ai șirului; fie aceștia  $a_1, a_2, \dots, a_{N(M)}$ . Atunci,  $\forall n > N(M)$  avem  $a_n > M$ .

Reciproc, dacă  $a_n > M, \forall n > N(M)$ , atunci în afara intervalului  $(M, +\infty)$  rămân un număr finit de termeni ai șirului, deci  $a_n \rightarrow +\infty$ .

În mod similar se demonstrează și cazul  $a_n \rightarrow -\infty$ . **q.e.d.**

**Observația 2.1.3.** Oricare din condițiile din Teorema 2.1.1 și Teorema 2.1.2 poate fi luată, după caz, ca definiție a limitei unui șir de numere reale.



**Teorema 2.1.3.** *Limita unui șir, dacă există, este unică.*

*Demonstrație.* Prin reducere la absurd. Se face separat pentru cazul șirului convergent și pentru cazul șirului divergent la  $+\infty$ , sau la  $-\infty$ . În toate cazurile se presupune ca  $(a_n)$  are două limite distincte și apoi se utilizează Teorema 1.6.2 și Definiția 2.1.2. **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.1. (Criteriul majorării)** Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale. Dacă există un număr real  $a$  și un șir de numere reale  $(b_n)$  convergent la zero astfel încât termenii șirurilor  $(a_n)$  și  $(b_n)$  să satisfacă condiția

$$|a_n - a| \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

eventual cu excepția unui număr finit de termeni, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Dacă există șirul numeric  $(b_n)$  cu limita egală cu  $+\infty$ , respectiv  $-\infty$ , și

$$a_n \geq b_n, \text{ respectiv } a_n \leq b_n,$$

cu excepția eventuală a unui număr finit de termeni, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \text{ respectiv } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

*Demonstrație.* Se aplică Teorema 2.1.1 și Teorema 2.1.2.

**q.e.d.**

**Corolarul 2.1.1.** Șirul numeric  $(a_n)$  este convergent la  $a \in \mathbb{R}$  dacă și numai dacă șirul de numere nenegative  $(d(a_n, a))$ ,  $d(a_n, a) = |a_n - a|$ , este convergent la zero.

**Teorema 2.1.4.** Dacă șirurile  $(a_n), (b_n)$  sunt convergente și au limitele  $a$  și respectiv  $b$  și dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sunt numere reale arbitrare, atunci șirul  $(\alpha a_n + \beta b_n)$  este convergent și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (2.3)$$

*Demonstrație.* Considerăm mai întâi cazul  $\alpha \cdot \beta \neq 0$ . Din Teorema 2.1.1 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  și  $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}, \quad \forall n > N_1(\varepsilon); \quad (2.4)$$

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon). \quad (2.5)$$

Să evaluăm acum diferența  $|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)|$ . Avem

$$|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| \leq |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b|. \quad (2.6)$$

Din (2.4) – (2.6), rezultă

$$|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}, \quad (2.7)$$

care, împreună cu Teorema 2.1.1, arată că (2.3) are loc.

Dacă  $\alpha \cdot \beta = 0$ , atunci cu mici adaptări ale demonstrației de mai sus se vede că (2.3) este de asemenea adevărată. **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.2. (Monotonie)** Fie șirurile numerice  $(a_n)$  și  $(b_n)$ . Dacă  $a_n \geq b_n$  și dacă există  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$  atunci  $a \geq b$ .

*Demonstrație.* Considerăm doar cazul când șirurile sunt convergente, celelalte situații fiind evidente. Fie  $(c_n)$  cu  $c_n = a_n - b_n$ . Evident că  $c_n \geq 0$ . După Teorema 2.1.4, avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a - b$ . Să presupunem că  $a - b < 0$ .

Atunci pentru  $\varepsilon = \frac{1}{2}|a - b| > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|c_n - (a - b)| < \frac{|a - b|}{2} \quad \forall n \geq N_1,$$

din care deducem

$$c_n < a - b + \frac{|a - b|}{2} = a - b + \frac{b - a}{2} < 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

**Definiția 2.1.6.** Șirul de numere reale  $(a_n)$  se numește **mărginit**, respectiv **nemărginit**, dacă mulțimea valorilor sale  $f(\mathbb{N}^*) = \{a_n : n \geq 1\}$  este mărginită, respectiv nemărginită.

**Observația 2.1.4.** Șirul  $(a_n)$  este mărginit dacă  $\exists M > 0$  astfel încât  $|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Șirul  $(a_n)$  este nemărginit dacă  $\forall M > 0 \exists n_M \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|a_{n_M}| > M$ .

**Propoziția 2.1.3.** Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir cu limită se obține un șir care are aceeași limită.

*Demonstrație.* Fie  $a_n \rightarrow a, a \in \overline{\mathbb{R}}$  și fie  $(b_n)$  șirul obținut din șirul  $(a_n)$  prin schimbarea ordinii termenilor.

Poziția pe axa reală a termenilor șirului  $(a_n)$  nu depinde de rangul lor, ci numai de valoarea lor numerică. Cum  $a_n \rightarrow a$ , după Definiția 2.1.2, avem că în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$  și, totodată, același număr finit de termeni ai șirului  $(b_n)$ , deci șirul  $(b_n)$  are tot limita  $a$ . **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.4.** *Dacă la un șir cu limita egală cu  $a$  se adaugă, sau se înlătură un număr finit de termeni, șirul obținut are aceeași limită.*

*Demonstrație.* Dacă  $a_n \rightarrow a$ , atunci în afara oricărei vecinătăți a lui  $a$  se află un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ , iar după adăugarea, sau înlăturarea unui număr finit de termeni, în afara fiecărei vecinătăți a lui  $a$  se află tot un număr finit de termeni ai șirului obținut, deci și acesta are limita egală cu  $a$ . **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.5.** *În mulțimea șirurilor convergente au loc următoarele proprietăți:*

- (i)  $a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R} \implies |a_n| \rightarrow |a|$ ;
- (ii)  $|a_n| \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow 0$ ;
- (iii)  $a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R} \implies (a_n)$  șir mărginit;
- (iv)  $a_n \rightarrow 0$  și  $(b_n)$  șir mărginit  $\implies a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ ;
- (v)  $a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R}$  și  $b_n \rightarrow b, b \in \mathbb{R} \implies a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ ;
- (vi)  $b_n \rightarrow b, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \implies \left(\frac{1}{b_n}\right)$  șir mărginit și  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ ;
- (vii)  $a_n \rightarrow a, a \in \mathbb{R}$  și  $b_n \rightarrow b, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \implies \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$ ;
- (viii)  $a_n \rightarrow a, a \neq 0$  și  $k \in \mathbb{N} \implies a_n^{-k} \rightarrow a^{-k}$ .

*Demonstrație.* (i) Din (1.79) deducem inegalitatea

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Folosind ipoteza din (i) și Teorema 2.1.1, obținem

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon, n > N(\varepsilon).$$

Folosind din nou Teorema 2.1.1, aplicată șirului  $(|a_n|)$ , deducem  $a_n \rightarrow a$ .

(ii) În adevăr,

$$|a_n| \rightarrow 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |a_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon),$$

iar aceasta din urmă înseamnă că  $a_n \rightarrow 0$ .

Implicația inversă rezultă din (i).

(iii) Luând  $M = |a|$ , avem  $-M < a < M$ , deci intervalul  $(-M, M)$  este o vecinătate a lui  $a$ .

Deoarece în afara acestei vecinătăți se află un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ , există un număr natural  $N$  astfel încât să avem  $a_n \in (-M, M), \forall n > N$ .

Notând  $M_1 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, M\}$ , deducem  $|a_n| \leq M_1$  care, după Observația 2.1.4 și Definiția 2.1.6, arată că șirul  $(a_n)$  este mărginit.

Prin negație, din (iii) deducem că orice șir nemărginit este fie divergent, fie oscilant.

(iv) Deoarece șirul  $(b_n)$  este mărginit, după Observația 2.1.4, există  $M > 0$  astfel încât să avem  $|b_n| \leq M$ , pentru toți termenii  $b_n$ , deci

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie  $\varepsilon > 0$ . Deoarece  $a_n \rightarrow 0$ , există un număr natural  $N(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Urmează că  $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq N(\varepsilon)$ , adică  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .

(v) Șirurile  $a_n$  și  $b_n$  se pot scrie în forma  $a_n = a + \alpha_n$  și  $b_n = b + \beta_n$  și, după Teorema 2.1.4, avem că  $\alpha_n \rightarrow 0$  și  $\beta_n \rightarrow 0$ . Atunci, notând  $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ , avem

$$a_n \cdot b_n = (a + \alpha_n) \cdot (b + \beta_n) = a \cdot b + \alpha_n \cdot \beta_n + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n = a \cdot b + \gamma_n.$$

Dar  $\alpha_n \cdot \beta_n \rightarrow 0$ ,  $a \cdot \beta_n \rightarrow 0$  și  $b \cdot \alpha_n \rightarrow 0$ , deci  $\gamma_n \rightarrow 0$ , deci  $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ .

Prin inducție completă se demonstrează că *suma și produsul unei familii finite de șiruri convergente sunt de asemenea șiruri convergente și limita sumei este egală cu suma limitelor, iar limita produsului este egală cu produsul limitelor*. În particular, luând  $k$  șiruri convergente egale cu  $(a_n)$ , deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^k) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k.$$

(vi) Deoarece  $b \neq 0$  putem presupune că toți termenii  $b_n$  sunt nenuli, deci șirul  $(\frac{1}{b_n})$  este bine definit. Să luăm, de exemplu,  $\alpha = \frac{|b|}{2} > 0$ . Avem  $|b_n| \rightarrow |b| > \alpha$ . Urmează că există un număr natural  $N$  cu proprietatea că începând de la termenii cu rangul  $N + 1$  avem inegalitatea  $|b_n| > \alpha$ . Atunci,

$$\frac{1}{b_n} < \frac{1}{\alpha}, \quad \forall n > N.$$

Luând  $M = \max\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_N|}, \frac{1}{\alpha}\}$ , avem  $|\frac{1}{b_n}| \leq M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul  $(\frac{1}{b_n})$  este mărginit. De aici deducem cu ușurință:

$$b_n \rightarrow 0 \text{ și } b_n \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \rightarrow \left(\frac{1}{b_n}\right) \text{ șir nemărginit.}$$

Pentru demonstrația părții a doua să observăm că avem

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n \cdot b} = \frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b} \cdot (b - b_n).$$

Dar  $b - b_n \rightarrow 0$ , deci  $\frac{1}{b} \cdot (b - b_n) \rightarrow 0$ . Din partea precedentă rezultă că șirul  $(\frac{1}{b_n})$  este mărginit, deci  $\frac{1}{b_n} \cdot \frac{1}{b} \cdot (b - b_n) \rightarrow 0$ . Așadar  $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$ , adică  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . În plus, deducem că dacă  $b_n \rightarrow 0$ , șirul  $(\frac{1}{b_n})$  nu este convergent deoarece este nemărginit.

(vii) Termenul general al șirului cât  $(\frac{a_n}{b_n})$  se poate scrie sub forma produsului  $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ , iar șirul  $(\frac{1}{b_n})$  este convergent. Urmează că șirul produs  $(a_n \cdot \frac{1}{b_n})$  este convergent, deci șirul cât  $(\frac{a_n}{b_n})$  este convergent. Folosind acum cele demonstrate anterior, avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Această proprietate poate fi formulată în cuvinte astfel: *limita câtului este egală cu raportul limitelor*.

(viii) Într-adevăr  $a_n^k \rightarrow a^k \neq 0$ , deci  $\frac{1}{a_n^k} \rightarrow \frac{1}{a^k}$ , adică  $a_n^{-k} \rightarrow a^{-k}$  și propoziția este complet demonstrată. **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.6.** În mulțimea șirurilor cu limită au loc următoarele proprietăți:

- (a)  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (b)  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ , dacă  $b > 0$  și  $a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ , dacă  $b < 0$ ;
- (c)  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (d)  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ , dacă  $b > 0$  și  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ , dacă  $b < 0$ ;
- (e)  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow +\infty \implies a_n + b_n \rightarrow +\infty$  și  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (f)  $a_n \rightarrow -\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty \implies a_n + b_n \rightarrow -\infty$  și  $a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$ ;
- (g)  $a_n \rightarrow +\infty$  și  $b_n \rightarrow -\infty \implies a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (h)  $a_n \rightarrow +\infty$ , sau  $a_n \rightarrow -\infty \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ ;
- (i)  $a_n \rightarrow 0$  și  $a_n > 0$  (resp.  $a_n < 0$ )  $\implies \frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$  (resp.  $\frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$ ).

*Demonstrație.* Vom face demonstrația pentru ultimele două proprietăți.

După Teorema 2.1.2, rezultă că  $\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N}$  a.î  $a_n > M, \forall n > N(M)$ , din care găsim  $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{M}, \forall n > N(M)$ . Fie acum  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Atunci, există  $M > 0$  așa încât să avem  $\varepsilon < \frac{1}{M}$ . Din inegalitățile de mai sus deducem  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $0 < \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$  care, după Teorema 2.1.1, arată că șirul  $(\frac{1}{a_n})$  este convergent și are limita egală cu 0.

În mod asemănător se demonstrează că  $a_n \rightarrow -\infty \implies \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ .

Pentru a demonstra ultima proprietate plecăm de la Teorema 2.1.2 care, în baza faptului că  $a_n \rightarrow 0$ , conduce la  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $|a_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ . Considerăm cazul  $a_n > 0$ . Atunci, din ultima inegalitate găsim  $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N(\varepsilon)$ . Dacă  $M > 0$ , atunci există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $\frac{1}{\varepsilon} \geq M$ . Considerând că  $\varepsilon$  s-a ales astfel, din cele de mai sus rezultă:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } \frac{1}{a_n} > M, \forall n > N(M),$$

ceea ce, după Teorema 2.1.2, arată că șirul  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ . La fel se demonstrează cea de a doua implicație din (i). Celelalte proprietăți se demonstrează la fel de ușor dacă se folosește Teorema 2.1.1 și Teorema 2.1.2. **q.e.d.**

**Definiția 2.1.7.** Șirul numeric  $(a_n)$  se numește **monoton** dacă diferența  $a_{n+1} - a_n$  păstrează semn constant  $\forall n > N_0$ , unde  $N_0 \in \mathbb{N}$ .

Dacă  $a_{n+1} - a_n \geq 0$ , respectiv  $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n > N_0$ , șirul numeric  $(a_n)$  se numește **monoton crescător**, respectiv **monoton strict crescător**.

Dacă  $a_{n+1} - a_n \leq 0, \forall n > N_0$ , respectiv  $a_{n+1} - a_n < 0, \forall n > N_0$ , șirul numeric  $(a_n)$  se numește **monoton descrescător**, respectiv **monoton strict descrescător**.

Un șir numeric se numește **monoton** dacă este sau monoton crescător, sau monoton descrescător.

**Observația 2.1.5.** După Propoziția 2.1.4 putem considera că  $N_0$  din Definiția 2.1.7 este egal cu 0.

**Observația 2.1.6.** Dacă  $a_n > 0$ , studiul monotoniei șirului  $(a_n)$  se poate face evaluând raportul a doi termeni consecutivi ai șirului. Dacă  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , șirul este monoton crescător, iar dacă  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ , șirul este monoton descrescător.

**Teorema 2.1.5. (Weierstrass)** Orice șir numeric monoton  $(a_n)$  are limită în  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Dacă șirul numeric  $(a_n)$  este monoton crescător, respectiv monoton descrescător, limita sa este egală cu marginea superioară, respectiv marginea inferioară, a mulțimii valorilor șirului.

*Demonstrație.* Să presupunem mai întâi că  $(a_n)$  este șir monoton crescător și mărginit. Conform axiomei de existență a marginii superioare mulțimea valorilor șirului admite un cel mai mic majorant pe care îl vom nota cu  $a$ . Deoarece  $a$  este majorant al mulțimii  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  rezultă  $a_n \leq a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Din Propoziția 1.6.1 rezultă

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a_{N(\varepsilon)} \text{ astfel încât } a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a.$$

Fiindcă șirul  $(a_n)$  este crescător,

$$a_n \geq a_{N(\varepsilon)}, \forall n > N(\varepsilon),$$

deci

$$a - \varepsilon < a_{N(\varepsilon)} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Prin urmare,

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon) \iff |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon).$$

Din Teorema 2.1.1 rezultă că  $(a_n)$  este convergent și are limita  $a$ .

Dacă presupunem că șirul  $(a_n)$  este monoton crescător și nemărginit superior, atunci  $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\} = +\infty$ , deci  $\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N}$  cu proprietatea  $a_{N(M)} \geq M$ . Cum pentru orice  $n > N(M)$  avem  $a_n \geq a_{N(M)}$ , deducem că avem și  $a_n \geq M \forall n > N(M)$ , ceea ce, după Teorema 2.1.2, arată că  $a_n \rightarrow +\infty$ .

În sfârșit, dacă  $(a_n)$  este șir monoton descrescător și mărginit inferior, atunci șirul  $(b_n)$ , unde  $b_n = -a_n$ , este monoton crescător și mărginit superior, deci are limita egală cu  $b = \sup\{b_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ . Dar

$$\sup\{b_n : n \in \mathbb{N}^*\} = \sup\{-a_n : n \in \mathbb{N}^*\} = -\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

și cum  $b_n = -a_n$ , deducem că  $a_n \rightarrow a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ .

În mod asemănător, se arată că dacă  $(a_n)$  este monoton descrescător și mărginit inferior limita șirului  $(a_n)$  este  $-\infty$ . q.e.d.

**Teorema 2.1.6. (Lema intervalelor incluse a lui Cantor)** Dacă  $(I_n)_{n \geq 0}$ ,  $I_n = [a_n, b_n]$ ,  $a_n < b_n$ , este un șir descrescător de intervale astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , atunci există un singur punct  $c$  comun tuturor

intervalelor închise  $I_n$ , adică  $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = c$ .

*Demonstrație.* Odată precizate intervalele, se pun în evidență șirurile extremităților  $(a_n)_{n \geq 0}$  și  $(b_n)_{n \geq 0}$ , ai căror termeni satisfac inegalitățile  $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0$ .

Fiindcă  $(a_n)_{n \geq 0}$  este șir monoton crescător, mărginit superior (de exemplu de  $b_0$ ), după Teorema 2.1.5, rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ .

Șirul  $(b_n)$  este monoton descrescător și mărginit inferior și are limita  $c_1 = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Din  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , rezultă  $c = c_1$ .

Din faptul că  $a_n \leq c \leq b_n$  rezultă că  $c$  aparține tuturor intervalelor  $I_n$ .

**q.e.d.**

Ca aplicații la Teorema 2.1.5 și Teorema 2.1.6 prezentăm două exemple de șiruri de numere reale remarcabile care le vom folosi mai târziu la serii numerice.

**Exemplul 2.1.1. (Numărul  $e$ )** Șirul numeric  $(a_n)$  având termenul general dat de  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \geq 1$ , este monoton strict crescător și majorat, deci convergent; limita sa se notează cu  $e$  și avem  $2 < e < 3$ .

Într-adevăr, ținând seama de inegalitatea lui Bernoulli

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

rezultă mai întâi

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1, \end{aligned}$$

deci  $a_{n+1} > a_n$ , deci șirul  $(a_n)$  este monoton strict crescător.

Fie apoi șirul  $(b_n)$  cu termenul general  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . Folosind din nou inegalitatea lui Bernoulli, deducem  $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ , din care tragem concluzia că șirul  $(b_n)$  este monoton strict descrescător.

Evident,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  avem

$$0 < b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{b_n}{n} \leq \frac{b_1}{n} \rightarrow 0,$$

deci, folosind Teorema 2.1.6, putem afirma că șirurile  $a_n$  și  $b_n$  sunt convergente și limitele lor sunt egale; să notăm această limită cu  $e$ . Este clar că

$$2 = a_1 < e < b_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} < 3.$$

Din cele deduse mai sus putem scrie inegalitățile:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Logaritmând aceste inegalități, obținem inegalitățile

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.8)$$

pe care le vom folosi în exemplul care urmează. ■

**Exemplul 2.1.2. (Constanta lui Euler<sup>1</sup>  $c$ )** Șirul  $(a_n)$  cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad (2.9)$$

este monoton strict descrescător și minorat de zero, deci convergent; limita sa, numită constanta lui Euler, se notează cu  $c$  și avem  $0 < c < 1$ .

Într-adevăr, din (2.8) avem:

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (2.10)$$

Sumăm acum membru cu membru inegalitățile (2.10) scrise pentru toate valorile lui  $k$  de la 1 până la  $n$  și obținem:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ținând cont de expresia termenului general al șirului pe care îl studiem, se vede că inegalitățile de mai sus se pot scrie în forma:

$$a_{n+1} - 1 + \ln(n+1) < \ln(n+1) < a_n + \ln n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Din aceste inegalități și inegalitatea dedusă la sfârșitul exemplului precedent deducem că șirul considerat este monoton strict descrescător și mărginit, toate valorile șirului fiind cuprinse în intervalul  $(0, 1)$ . Din Teorema 2.1.5 rezultă că șirul este convergent; fie  $c$  limita sa. Evident avem  $0 < c < 1$ . ■

**Definiția 2.1.8.** Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale și  $(k_n)$  un șir strict crescător de numere naturale. Șirul  $(b_n)$ , unde  $b_n = a_{k_n}$ , se numește **subșir** al șirului  $(a_n)$ .

**Observația 2.1.7.** Un șir are o infinitate de subșiruri.

**Propoziția 2.1.7.** Șirul  $(a_n)$  are limita  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  dacă și numai dacă orice subșir al său are limita egală cu  $a$ .

*Demonstrație.* Fie mai întâi  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrar și  $a_{k_n}$ , un subșir arbitrar al șirului  $(a_n)$ . Atunci, există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât (2.2) să aibă loc. Din Definiția 2.1.8 și (2.2) rezultă evident  $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ , ceea ce demonstrează că  $a$  este limita subșirului  $(a_{k_n})_{n \geq 1}$ .

Dacă  $a = +\infty$ , atunci folosind Teorema 2.1.2 avem:

$$\forall M > 0 \exists N(M) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } a_n > M, \quad \forall n > N(M).$$

Cum  $k_n \geq n$  vom avea și  $a_{k_n} > M$ ,  $\forall n > N(M)$ , ceea ce arată că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = +\infty$ .

În mod analog se arată că dacă  $a_n \rightarrow -\infty$ , atunci orice subșir al șirului  $(a_n)$  are de asemenea limita egală cu  $-\infty$ .

Reciproc, dacă orice subșir al șirului  $(a_n)$  are limita egală cu  $a$ , atunci șirul  $(a_n)$  are, de asemenea, limita  $a$ , fiindcă  $(a_n)$  însuși este unul din subșirurile sale. **q.e.d.**

**Exercițiul 2.1.1.** Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \right) = \ln k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq 2, \quad k \text{ fixat.}$$

<sup>1</sup>Euler, Leonard (1707–1783), mare matematician și fizician elvețian care a adus numeroase și însemnate contribuții în diverse domenii ale matematicii și fizicii (geometrie analitică, trigonometrie, calcul diferențial, teoria numerelor etc.). Euler este considerat a fi fost forța dominantă a matematicii secolului al XVIII-lea și unul dintre cei mai remarcabili matematicieni și savanți multilaterali ai omenirii. Alături de influența considerabilă pe care a exercitat-o asupra matematicii și matematizării științelor stau atât calitatea și profunzimea, cât și prolificitatea extraordinară a scrierilor sale, opera sa exhaustivă, dacă ar fi publicată vreodată integral, putând cu ușurință umple între 70 și 80 de volume de dimensiuni standard.



**Soluție.** Pentru determinarea acestei limite se trece la limită în relația evidentă

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} = a_{kn} - a_n + \ln k, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad k \geq 2,$$

și se ține cont că  $(a_{kn})_{n \geq 1}$  este un subșir al șirului  $(a_n)$  din (2.9). ■

**Exercițiul 2.1.2.** Să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

**Soluție.** Pentru determinarea acestei limite se trece la limită în relația evidentă

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} + 1, \quad n > 1$$

și se ține cont de faptul că șirul (2.9) este convergent. ■

**Corolarul 2.1.2.** Dacă șirul  $(a_n)$  are două subșiruri având limitele distincte  $b$  și  $c$ , atunci șirul  $(a_n)$  nu are limită.

*Demonstrație.* Prin reducere la absurd. Dacă șirul  $(a_n)$  are limită, atunci după Propoziția 2.1.7 toate subșirurile acestuia au aceeași limită și prin urmare rezultă  $b = c$ , ceea ce contrazice ipoteza. **q.e.d.**

**Propoziția 2.1.8. (Lema lui Cesaro<sup>2</sup>)** Orice șir numeric mărginit conține un subșir convergent.

*Demonstrație.* Fie  $(a_n)$  un șir numeric mărginit. Atunci, mulțimea  $\{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  este mărginită și prin urmare orice submulțime a sa este de asemenea mărginită. Dacă  $A_k = \{a_n : n \geq k, k \in \mathbb{N}^*\}$  și  $c_k = \sup A_k$ , atunci avem că  $c_k \in \mathbb{R}$ , iar din faptul că  $A_k \supset A_{k+1}$  și Propoziția 1.6.2 rezultă  $c_k \geq c_{k+1}$ , ceea ce arată că șirul  $(c_k)$  este descrescător. Totodată, șirul  $(c_k)$  este și mărginit deoarece  $A_k \subset A_1$  și  $A_1$  este mulțime mărginită. După Teorema 2.1.5, rezultă că șirul  $(c_k)$  are limită finită.

Dacă  $c_k \in A_k, \forall k \in \mathbb{N}^*$ , atunci există  $n_k \geq k$  astfel încât  $c_k = a_{n_k}$ .

Aplicând șirului  $(n_k)$  Propoziția 2.1.2 deducem  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ . Conform Propoziției 2.1.6, din șirul  $(n_k)$  putem extrage un subșir monoton strict crescător cu limita  $+\infty$  și astfel se obține un subșir al șirului  $(a_n)$  care are limită finită, deci convergent.

Presupunem acum că există un indice  $l \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $c_l$  să nu aparțină mulțimii  $A_l$ . Deoarece  $c_l = \sup A_l$ , pentru orice  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , deci  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , există  $k_n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât (vezi Propoziția 1.6.1)

$$c_l - \frac{1}{n} < a_{l+k_n} \leq c_l < c_l + \frac{1}{n},$$

adică

$$|a_{l+k_n} - c_l| < \frac{1}{n}. \quad (2.11)$$

<sup>2</sup>Cesàro, Ernesto (1859 – 1906), matematician italian.

Din (2.11) și Propoziția 2.1.1 rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{l+kn} = c_l.$$

Dacă șirul  $(b_n)$ , unde  $b_n = a_{l+k_n}$ , nu conține un subșir al șirului  $(a_n)$ , șirul  $(k_n)$  trebuie să fie mărginit, deci există  $N_0$  astfel încât  $k_n = k_{N_0}$ , pentru toți  $n \geq N_0$ . Dar,  $|a_{l+k_{N_0}} - c_l| \leq \frac{1}{n}$  pentru toți  $n > N_0$ , deci  $a_{l+k_{N_0}} = c_l$  și  $c_l \in A_l$ , ceea ce am exclus.

Astfel, am demonstrat că în orice caz există un subșir al șirului  $(a_n)$  care are limită finită.

**q.e.d.**

**Observația 2.1.8.** *Lema lui Cesaro se poate extinde astfel: din orice șir de numere reale se poate extrage un subșir care are limită.*

Într-adevăr, dacă șirul  $(a_n)$  este nemărginit superior, atunci

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n_k \in \mathbb{N}^*, \quad \text{astfel încât} \quad a_{n_k} > k,$$

din care deducem  $a_{n_k} \rightarrow \infty$ , pentru  $k \rightarrow \infty$ .

Șirul de numere naturale  $(n_k)$  fiind divergent, cu limita  $+\infty$ , se poate extrage din el un subșir  $(p_n)$ , cu  $p_n \geq n$  și  $p_n < p_{n+1}$ , care are limita egală cu  $+\infty$ . Atunci,  $(a_{p_n})$  este un subșir al șirului  $(a_n)$  care are limita egală cu  $+\infty$ .

Asemănător se studiază cazurile  $(a_n)$  șir nemărginit inferior și  $(a_n)$  șir nemărginit. ■

## 2.2 Șir fundamental în $\mathbb{R}$

**Definiția 2.2.1.** Șirul numeric  $(a_n)$  se numește **șir fundamental** sau *șir Cauchy* dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.12)$$

**Observația 2.2.1.** Inegalitatea (2.12) este echivalentă cu

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.13)$$

**Observația 2.2.2.** Deoarece în (2.12) și (2.13) nu se precizează poziția lui  $m$  față de  $n$ , putem considera  $m > n$ , deci există  $p \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $m = n + p$ .

Această observație sugerează o formulare echivalentă pentru Definiția 2.2.1.

**Definiția 2.2.2.** Șirul numeric  $(a_n)$  se numește **șir fundamental în  $\mathbb{R}$**  sau, simplu, *șir fundamental* dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (2.14)$$

sau

$$d(a_{n+p}, a_n) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (2.15)$$

**Propoziția 2.2.1.** *Orice șir numeric convergent este fundamental.*

*Demonstrație.* Fie șirul numeric  $(a_n)$  convergent la  $a \in \mathbb{R}$ . Atunci, după Teorema 2.1.1,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât să avem simultan

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad (2.16)$$

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > N(\varepsilon). \quad (2.17)$$

Pe de altă parte,

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a|. \quad (2.18)$$

Din (2.16), (2.17) și (2.18), rezultă că relația (2.12) este satisfăcută, deci  $(a_n)$  este șir fundamental. **q.e.d.**

**Propoziția 2.2.2.** *Orice șir numeric fundamental este mărginit.*

*Demonstrație.* Șirul  $(a_n)$  fiind fundamental, din Definiția 2.2.1, avem că pentru  $\varepsilon = 1$  există  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|a_m - a_n| < 1, \quad \forall m > N_0 \quad \text{și} \quad \forall n > N_0. \quad (2.19)$$

Se observă apoi că

$$|a_n| \leq |a_n - a_m| + |a_m|. \quad (2.20)$$

Luând în (2.20)  $m = N_0 + 1$  și ținând cont de (2.19), obținem

$$|a_n| < 1 + |a_{N_0+1}|, \quad \forall n > N_0. \quad (2.21)$$

Fie acum

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_0}|, 1 + |a_{N_0+1}|\}. \quad (2.22)$$

Atunci, din (2.21) și (2.22) obținem  $|a_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , ceea ce arată că șirul  $(a_n)$  este mărginit. **q.e.d.**

**Teorema 2.2.1.** *Orice șir numeric fundamental este convergent.*

*Demonstrație.* Dacă  $(a_n)$  este șir numeric fundamental, din Propoziția 2.2.2, rezultă că șirul este mărginit. Folosind Propoziția 2.1.7, deducem că șirul  $(a_n)$  admite un subșir  $(a_{k_n})$  convergent la un punct  $a \in \mathbb{R}$ .

Arătăm că  $a_n \rightarrow a$ . Pentru aceasta, evaluăm diferența  $a_n - a$ . Avem mai întâi

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a|. \quad (2.23)$$

Din  $a_{k_n} \rightarrow a$  și Teorema 2.1.1, rezultă că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  cu proprietatea că  $\forall n > N_1(\varepsilon)$  (amintim că  $k_n \geq n$  și deci  $k_n > N_1(\varepsilon)$ ), avem

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.24)$$

Deoarece șirul  $(a_n)$  este fundamental, pentru același  $\varepsilon$ , după Definiția 2.2.1, există  $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon). \quad (2.25)$$

Luând acum  $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ , din (2.23), (2.24) și (2.25), deducem

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.26)$$

Din Teorema 2.1.1 și (2.5) obținem  $a_n \rightarrow a$ .

**q.e.d.**

Propoziția 2.2.1 și Teorema 2.2.1 pot fi reunite într-o singură teoremă.

**Teorema 2.2.2. (Criteriul general al lui Cauchy de convergență a șirurilor reale)** *Un șir numeric este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental.*

## 2.3 Limita superioară și limita inferioară ale unui șir numeric

Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale mărginit și fie  $[\alpha, \beta]$  intervalul închis din  $\mathbb{R}$  care conține toți termenii șirului.

Notăm

$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Avem:

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \text{ și } A_n \subset [\alpha, \beta], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Notăm:

$$a'_n = \inf A_n, \quad a''_n = \sup A_n,$$

care, după axioma de existență a marginii superioare a unei mulțimi de numere reale și Propoziția 1.6.3, sunt numere reale. În plus, din Propoziția 1.6.2 și  $A_n \supset A_{n+1}$ , deducem  $a'_n \leq a'_{n+1}$  și  $a''_n \geq a''_{n+1}$ . De asemenea, avem  $a'_n \in [\alpha, \beta]$ ,  $a''_n \in [\alpha, \beta]$ ,  $a'_n \leq a''_n$ .

Prin urmare, șirul  $(a'_n)$  este monoton crescător, iar  $(a''_n)$  este șir monoton descrescător.

Fiind monotone și mărginite, șirurile  $(a'_n)$  și  $(a''_n)$  sunt convergente.

Dacă  $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$  și  $a'' = \lim_{n \rightarrow \infty} a''_n$ , atunci  $a' \leq a''$ .

**Definiția 2.3.1.** Numărul real  $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\inf A_n)$  se numește **limita inferioară** a șirului  $(a_n)$ , iar numărul real  $a'' = \lim_{n \rightarrow \infty} a''_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup A_n)$  se numește **limita superioară** a șirului  $(a_n)$ .

Limita inferioară a șirului  $(a_n)$  se notează  $\liminf a_n$ , iar limita superioară a aceluiași șir se notează  $\limsup a_n$ . Se mai utilizează și notațiile  $\liminf a_n$  și  $\limsup a_n$  pentru respectiv numerele reale  $\liminf a_n$  și  $\limsup a_n$ .

**Exemplul 2.3.1.** Pentru șirul numeric  $(a_n)$  având termenul general  $a_n = (-1)^{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $A_n = \{-1, +1\}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci  $a'_n = -1$  și  $a''_n = +1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Prin urmare  $\liminf a_n = -1$  și  $\limsup a_n = +1$ .

**Exemplul 2.3.2.** Șirul numeric  $(a_n)$ , unde  $a_n = \sin n \frac{\pi}{4}$ , are mulțimea punctelor limită

$$A_n = \{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

deci  $a'_n = -1$  și  $a''_n = 1$ . Prin urmare,  $\liminf a_n = -1$ , iar  $\limsup a_n = 1$ .

**Definiția 2.3.2.** Dacă șirul  $(a_n)$  nu este mărginit superior limita superioară este  $+\infty$  (scriem  $\overline{\lim} a_n = +\infty$ ) și dacă șirul  $(a_n)$  nu este mărginit inferior limita sa inferioară este  $-\infty$  (scriem  $\underline{\lim} a_n = -\infty$ ).

**Teorema 2.3.1.** Fie  $(a_n)$  un șir numeric mărginit.

Atunci,  $\underline{\lim} a_n$  are următoarele proprietăți:

(1<sup>0</sup>)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a_n > \underline{\lim} a_n - \varepsilon$ , când  $n > N(\varepsilon)$ ;

(2<sup>0</sup>)  $\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall N \in \mathbb{N}^* \exists n(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n(\varepsilon, N) > N$  și  $a_{n(\varepsilon, N)} > \underline{\lim} a_n + \varepsilon$ .

Reciproc, dacă numărul real  $a' \in \mathbb{R}$  are proprietățile (1<sup>0</sup>) și (2<sup>0</sup>), atunci  $a' = \underline{\lim} a_n$ .

Analog,  $\overline{\lim} a_n$  are următoarele proprietăți:

(i)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a_n < \overline{\lim} a_n + \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ ;

(ii)  $\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall N \in \mathbb{N}^* \exists n(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n(\varepsilon, N) \geq N$  și  $a_{n(\varepsilon, N)} > \overline{\lim} a_n - \varepsilon$ .

Reciproc, dacă  $a'' \in \mathbb{R}$  are proprietățile (i) și (ii), atunci  $a'' = \overline{\lim} a_n$ .

*Demonstrație.* Prin definiție,  $\underline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$ , unde  $a'_n = \inf A_n$  și  $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ .

Șirul numeric  $(a'_n)$  este crescător, mărginit și, fiind convergent, rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$a'_n > \underline{\lim} a_n - \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Deoarece  $a'_n \leq a_{n+p}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ , rezultă

$$a_{n+p} > \underline{\lim} a_n - \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

deci pentru  $n > N(\varepsilon)$  avem  $a_n > \underline{\lim} a_n - \varepsilon$  și concluzia (1<sup>0</sup>) este verificată.

Considerăm acum  $\varepsilon > 0$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ . Avem

$$a'_N \leq \underline{\lim} a_n < \underline{\lim} a_n + \varepsilon,$$

deci  $\inf A_N < \underline{\lim} a_n + \varepsilon$  și din Propoziția 1.6.4 rezultă că există  $a_{N+p} \in A_N$  astfel încât  $a_{N+p} < \underline{\lim} a_n + \varepsilon$ , deci  $N + p = n(\varepsilon, N) \geq N$  are proprietatea (2<sup>0</sup>).

Fie acum  $a' \in \mathbb{R}$  cu proprietățile (1<sup>0</sup>) și (2<sup>0</sup>). Deoarece  $a_n \geq a' - \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ , rezultă că toate elementele din  $A_{N(\varepsilon)}$  sunt minorate de  $a' - \varepsilon$ , deci  $\inf A_{N(\varepsilon)} > a' - \varepsilon$ .

Deoarece pentru  $n \geq N(\varepsilon)$  avem  $A_n \subset A_{N(\varepsilon)}$ , rezultă cu atât mai mult  $\inf A_n > a' - \varepsilon$  pentru  $n \geq N(\varepsilon)$ , deci  $\underline{\lim} a_n > a' - \varepsilon$ .

Din (2) rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  și  $N \in \mathbb{N}^*$  există  $a_{n(\varepsilon, N)} < a' + \varepsilon$  și  $n(\varepsilon, N) \geq N$ , deci  $\inf A_N < a' + \varepsilon$ .

Fiindcă  $\inf A_N < a' + \varepsilon, \forall N \in \mathbb{N}^*$  rezultă  $\lim_{N \rightarrow \infty} (\inf A_N) \leq a' + \varepsilon$ . În definitiv,  $\forall \varepsilon > 0$  avem

$$a' - \varepsilon < \underline{\lim} a_n \leq a' + \varepsilon,$$

adică  $\underline{\lim} a_n = a'$ .

Analog se demonstrează și cea de a doua parte a teoremei relativă la  $\overline{\lim} a_n$ .

**q.e.d.**

Teorema de mai sus arată că pentru orice  $\varepsilon > 0$  în intervalele  $(a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)$  și  $(a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$  se află o infinitate de termeni ai șirului mărginit  $(a_n)$ , iar în afara intervalului  $(a' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)$  se află un număr finit de termeni ai șirului.

Altfel spus:

- mulțimea  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \in (a' - \varepsilon, a' + \varepsilon)\}$  este infinită;
- mulțimea  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \in (a'' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)\}$  este infinită;
- mulțimea  $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin (a' - \varepsilon, a'' + \varepsilon)\}$  este finită.

**Teorema 2.3.2.** Șirul numeric  $(a_n)$  are limită dacă și numai dacă limitele sale inferioară și superioară sunt egale. Dacă șirul  $(a_n)$  are limita  $a$ , atunci

$$a = a' = \underline{\lim} a_n = a'' = \overline{\lim} a_n.$$

*Demonstrație.* Fie  $(\lambda, \mu) = V(a)$ , o vecinătate a punctului  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ . după Definiția 2.1.2, în afara vecinătății  $V(a)$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului. Deci avem  $a_n \leq \lambda$  și  $a_n \geq \mu$  pentru cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ . În același timp avem  $a_n > \lambda$  și  $a_n > \mu$  pentru o infinitate de termeni ai șirului considerat. Prin urmare, după Teorema 2.3.1, rezultă  $a = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$ .

Reciproc, fie  $a = \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$  și  $(\lambda, \mu)$  o vecinătate oarecare a lui  $a$ . După Teorema 2.3.1, mulțimea indicilor  $n$  pentru care  $a_n \leq \lambda$  și  $a_n \geq \mu$  este cel mult finită, deci în afara vecinătății  $(\lambda, \mu)$  a lui  $a$  se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului  $(a_n)$ . Aceasta arată că  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . **q.e.d.**

## 2.4 Puncte limită ale unui șir numeric

Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale.

**Definiția 2.4.1.** Elementul  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$  se numește **punct limită** al șirului  $(a_n)$ , dacă orice vecinătate a lui  $\xi$  conține o infinitate de termeni ai șirului.

Altfel spus,  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$  se este punct limită al șirului  $(a_n)$  dacă orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\xi)$  conține  $a_n$  pentru o infinitate de valori ale lui  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Observația 2.4.1.** Dacă un șir are un subșir constant, cu termenii egali cu  $c$ , atunci  $c$  este punct limită al șirului respectiv.

**Observația 2.4.2.** Dacă  $\xi$  este punct limită al unui șir, atunci în afara oricărei vecinătăți a lui  $\xi$  pot exista o infinitate de termeni ai acelui șir.

De exemplu, șirul  $((-1)^{n-1})$ , după Observația 2.4.1, are pe  $1$  drept punct limită și în afara vecinătății  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  a lui  $1$  se află o infinitate de termeni ai șirului, și anume toți termenii egali cu  $-1$ . ■

**Observația 2.4.3.** Un șir poate avea mai multe puncte limită.

De exemplu, șirul  $((-1)^{n-1})$  are două puncte limită, și anume  $-1$  și  $1$ . ■

**Observația 2.4.4.** *Există șiruri care au o infinitate de puncte limită.*

De exemplu, șirul  $0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , are o infinitate de puncte limită și anume orice număr natural este punct limită al acestui șir deoarece oricare ar fi numărul natural  $p$  există un subșir constant ai cărui termeni sunt egali cu  $p$ . De asemenea,  $+\infty$  este punct limită fiindcă orice vecinătate a sa conține o infinitate de numere naturale. ■

**Observația 2.4.5.** *Există șiruri pentru care mulțimea punctelor limită este dreapta reală încheiată.*

Într-adevăr, deoarece mulțimea numerelor raționale poate fi pusă în corespondență bijectivă cu mulțimea numerelor naturale, adică este mulțime *numărabilă* (vezi [26, p. 21–24], putem așeza toate numerele raționale într-un șir

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$$

Fie  $\xi$  un număr real oarecare și  $(\alpha, \beta)$  o vecinătate oarecare a lui  $\xi$ . Orice interval conține o infinitate de numere raționale, deci vecinătatea  $(\alpha, \beta)$  a lui  $\xi$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(\xi_n)$ . Cum  $\xi$  a fost ales arbitrar, rezultă că orice  $\xi \in \mathbb{R}$  este punct limită al șirului  $(\xi_n)$ .

De asemenea,  $+\infty$  și  $-\infty$  sunt puncte limită ale șirului  $(\xi_n)$ . ■

**Observația 2.4.6.** *Există șiruri care nu au nici un punct limită finit.*

De exemplu, șirul numerelor naturale  $(n)_{n \geq 0}$ , care nu are nici un punct limită finit. Singurul punct limită al acestui șir este  $+\infty$ . ■

**Teorema 2.4.1. (Caracterizarea punctelor limită cu subșiruri)** *Un element  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$  este punct limită pentru șirul  $(a_n)$  dacă și numai dacă există un subșir al său  $(a_{k_n})$  care să aibă limita egală cu  $\xi$ .*

*Demonstrație.* Presupunem că  $\xi \in \mathbb{R}$  este punct limită pentru șirul numeric  $(a_n)$  și fie vecinătatea  $(\xi - 1, \xi + 1) = V_1 \in \mathcal{V}(\xi)$ . Aici sunt o infinitate de termeni ai șirului. Alegem  $a_{k_1} \in V_1$ , unde  $k_1 \in \mathbb{N}^*$ .

În vecinătatea  $V_2 = (\xi - \frac{1}{2}, \xi + \frac{1}{2})$ , se află o infinitate de termeni ai șirului  $(a_n)$ . Fie  $a_{k_2}$  unul din aceștia astfel încât  $k_2 \geq 2$ ,  $k_2 > k_1$  și putem continua astfel încât în vecinătatea  $(\xi - \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n}) = V_n$  să putem alege  $a_{k_n} \in V_n$  așa încât  $k_n > k_{n-1}$  și  $k_n \geq n$ . Faptul că  $a_{k_n} \in V_n$  se traduce prin  $|a_{k_n} - \xi| < \frac{1}{n}$ .

Din  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  și Propoziția 2.1.1 rezultă  $a_{k_n} \rightarrow \xi$ .

Dacă punctul limită este  $+\infty$ , atunci în demonstrația de mai sus, se ia  $V_n = (n, +\infty)$  și raționamentul se repetă găsind în final un subșir al șirului considerat care să aibă ca limită pe  $+\infty$ .

Similar se procedează în cazul  $\xi = -\infty$  când se alege vecinătățile  $V_n, n \in \mathbb{N}^*$ , de forma  $V_n = (-\infty, n)$ .

Reciproc, dacă există un subșir  $(a_{k_n})$  al șirului  $(a_n)$  care să aibă limita egală cu  $\xi$ , atunci în fiecare vecinătate a lui  $\xi$  se află o infinitate de termeni ai subșirului  $(a_{k_n})$ , deci ai șirului  $(a_n)$ . După Definiția 2.4.1, rezultă că  $\xi$  este punct limită al șirului  $(a_n)$ . **q.e.d.**

**Teorema 2.4.2.** *Limita inferioară și limita superioară ale șirului numeric  $(a_n)$ , sunt puncte limită ale șirului dat și, oricare ar fi un alt punct limită  $\xi$  al șirului, avem*

$$\lim a_n \leq \xi \leq \overline{\lim} a_n.$$

*Demonstrație.* Presupunem  $a' = \lim a_n \in \mathbb{R}$ .

În intervalul  $(a' - 1, a' + 1)$ , care este vecinătate a punctului  $a'$ , după Teorema 2.2.1, se află o infinitate de termeni ai șirului  $(a_n)$ , deci există posibilitatea găsirii lui  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a_{k_1} \in (a' - 1, a' + 1)$ .

În intervalul  $(a' - \frac{1}{2}, a' + \frac{1}{2})$  se află, de asemenea, o infinitate de termeni ai șirului  $(a_n)$ , ca atare avem posibilitatea alegerii lui  $k_2 \in \mathbb{N}, k_2 \geq 2$  și  $k_1 < k_2$  așa încât  $a_{k_2} \in (a' - \frac{1}{2}, a' + \frac{1}{2})$ .

Procedând similar, în intervalul  $(a' - \frac{1}{n}, a' + \frac{1}{n})$  există posibilitatea găsirii lui  $a_{k_n}$ , unde  $k_n \geq n$  și  $k_n > k_{n-1}$ .  
Procedeul continuă.

Șirul  $(a_{k_n})$  astfel determinat este subșir al șirului  $(a_n)$  și are proprietatea  $|a_{k_n} - a'| < \frac{1}{n}$ . Folosind Propoziția 2.1.1 și Corolarul 2.1.1, deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a'.$$

Prin urmare, după Teorema 2.4.1, rezultă că  $a'$  este punct limită al șirului  $(a_n)$ .

În mod similar se face demonstrația în cazurile:  $a' = -\infty, a'' \in \mathbb{R}; a'' = +\infty$ .

Dacă  $\xi \in \overline{\mathbb{R}}$  este punct limită al șirului  $(a_n)$ , atunci din Teorema 2.4.1 rezultă existența subșirului  $(a_{k_n})$  astfel încât  $a_{k_n} \rightarrow \xi$ , când  $n \rightarrow \infty$ .

Evident,  $\xi$  nu poate fi în afara intervalului  $[\lim a_n, \overline{\lim} a_n]$ , căci dacă s-ar întâmpla ca, de exemplu,  $\overline{\lim} a_n < \xi$ , ar exista (în cazul  $\xi \in \mathbb{R}$ ) o vecinătate de forma  $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$  astfel încât  $\xi - \varepsilon > \overline{\lim} a_n$ , cu proprietatea că în afara sa rămân un număr finit de termeni ai șirului, ceea ce ar însemna că la dreapta lui  $\overline{\lim} a_n$ , mai precis la dreapta lui  $\xi - \varepsilon$ , s-ar afla un număr infinit de termeni ai șirului  $(a_n)$  ceea ce ar contrazice rezultatul stabilit în Teorema 2.3.1.

q.e.d.

**Corolarul 2.4.1.** *Un șir numeric are limită dacă și numai dacă are un singur punct limită.*

*Demonstrație.* Rezultă imediat din Teorema 2.3.2 și Teorema 2.4.2.

q.e.d.

**Observația 2.4.7.** *Din lema lui Cesaro (vezi Propoziția 2.1.8), Observația 2.1.7 și Teorema 2.4.1 rezultă că un șir numeric are cel puțin un punct limită. În plus, dacă șirul este mărginit, atunci are cel puțin un punct limită finit.*

**Observația 2.4.8.** *Limita inferioară a unui șir de numere reale este cel mai mic punct limită al șirului respectiv, iar limita superioară a sa este cel mai mare punct limită al șirului considerat.*



**Observația 2.4.9.** Când mulțimea punctelor limită ale unui șir de numere reale este nemărginită inferior, prin definiție limita inferioară este  $-\infty$  și când această mulțime este nemărginită superior, limita superioară a șirului considerat este prin definiție  $+\infty$ .

**Observația 2.4.10.** Pentru a determina practic limita superioară și limita inferioară ale unui șir de numere reale se determină toate subșirurile cu limită ale șirului. Dacă există un subșir cu limita  $+\infty$ , atunci  $\overline{\lim} a_n = +\infty$ . Dacă există un subșir al șirului dat cu limita egală cu  $-\infty$ , atunci  $\underline{\lim} a_n = -\infty$ , iar dacă toate subșirurile sunt convergente și  $A$  este mulțimea punctelor limită, atunci din 2.4.2 deducem că cel mai mare element al lui  $A$  este limita superioară a șirului, iar cel mai mic element al mulțimii  $A$  este limita inferioară a șirului considerat.

**Teorema 2.4.3.** Fie  $(a_n)$  un șir de numere reale pozitive. Atunci, au loc inegalitățile:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

*Demonstrație.* Fie  $l = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  și  $L = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Dacă  $l = 0$  sau  $L = +\infty$ , inegalitățile din teoremă sunt evidente.

Presupunem că  $l > 0$  și  $L < +\infty$  și fie  $\varepsilon > 0$  fixat, dar arbitrar. Atunci, după Teorema 2.3.1,  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât să avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

deci

$$a_{N(\varepsilon)+p} < (L + \varepsilon)^p a_{N(\varepsilon)+1}, \quad \forall p \geq 2,$$

de unde rezultă

$$^{N(\varepsilon)+p}\sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+p}} < (L + \varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot ^{N(\varepsilon)+p}\sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+1}}, \quad \forall p \geq 2.$$

Deducem apoi

$$\begin{aligned} \overline{\lim} \sqrt[p]{a_n} &= \overline{\lim} \sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+p}} \leq \overline{\lim} ((L + \varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot ^{N(\varepsilon)+p}\sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+1}}) = \\ &= (\overline{\lim} (L + \varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}}) \cdot (\overline{\lim} ^{N(\varepsilon)+p}\sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+1}}) = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} (L + \varepsilon)^{\frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot \lim_{p \rightarrow \infty} ^{N(\varepsilon)+p}\sqrt[p]{a_{N(\varepsilon)+1}} = \\ &= (L + \varepsilon)^{\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{N(\varepsilon)+p}} \cdot (a_{N(\varepsilon)+1})^{\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{N(\varepsilon)+p}} = L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Așadar,  $\overline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \leq L + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$ .

Deoarece  $\overline{\lim} \sqrt[p]{a_n}$  nu are cum să depindă de  $\varepsilon$ , deducem  $\overline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \leq L$ .

În cea de a doua parte a demonstrației, considerăm  $\varepsilon > 0$  fixat astfel încât  $0 < l - \varepsilon < l$ . Conform Teoremei 2.3.1, există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  așa încât  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq l - \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon)$ , din care deducem  $a_{N(\varepsilon)+p} \geq (l - \varepsilon)^p \cdot a_{N(\varepsilon)+1}, \quad \forall p \geq 2$ .

Procedând ca în prima parte a demonstrației, obținem  $\underline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \geq l - \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$ , ceea ce arată că  $\underline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \geq l$ .

Inegalitatea  $\underline{\lim} \sqrt[p]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[p]{a_n}$  este evidentă.

**q.e.d.**

## 2.5 Serii de numere reale. Definiții. Exemple

**Definiția 2.5.1.** Se numește **serie de numere reale**, sau **serie numerică**, ansamblul șirurilor numerice  $\{(a_n), (s_n)\}$  unde  $(a_n)$  este un șir de numere reale arbitrar, iar  $(s_n)$  este un șir numeric ca termenul general

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.27)$$

Elementele care intră în Definiția 2.5.1 au următoarele semnificații:

- $(a_n)$  se numește *șirul termenilor seriei*;
- $a_n$  este *termenul general al seriei*, sau *termenul de rang  $n$  al seriei*;
- $(s_n)$  se numește *șirul sumelor parțiale* al seriei;
- $s_n$  este *suma parțială de rang  $n$  a seriei*.

Pentru că notația sugerată de Definiția 2.5.1 este anevoioasă, convenim să notăm o serie numerică prin

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

sau, folosind simbolul sumă, prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (2.28)$$

drept pentru care unei serii adeseori i se spune *sumă infinită*, deși această denumire nu este pe deplin justificată (vezi comentariul de mai jos). Dacă primul termen al șirului termenilor seriei este  $a_p$ , unde  $p \in \mathbb{N}$ , atunci seria numerică corespunzătoare se notează prin

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n.$$

Când  $p = 1$ , seria numerică corespunzătoare se notează simplu prin

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Notația (2.28) pentru o serie numerică se justifică după prezentarea definiției următoare.

**Definiția 2.5.2.** *Seria numerică (2.28) se numește **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale  $(s_n)$ , unde  $s_n$  are expresia (2.27), este convergent în  $\mathbb{R}$ .*

**Definiția 2.5.3.** *Dacă seria numerică (2.28) este convergentă, atunci numărul real*

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \quad (2.29)$$

*se numește **suma seriei**.*

Când seria numerică (2.28) este convergentă, scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s; \quad (2.30)$$

**Definiția 2.5.4.** *Seria numerică (2.28) se numește **divergentă** și are suma  $+\infty$ , respectiv  $-\infty$ , dacă șirul sumelor parțiale (2.27) are limita  $+\infty$ , respectiv  $-\infty$ .*

**Definiția 2.5.5.** *Seria (2.28) se numește **oscilantă** dacă șirul sumelor parțiale (2.27) nu are limită.*

Dacă avem în vedere (2.29), atunci justificarea notației (2.28) pentru o serie numerică poate fi explicată prin suprimarea simbolului  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  în membrul drept al lui (2.29) cu condiția înlocuirii lui  $n$ , limita superioară a indicelui de sumare, cu  $\infty$ , ceea ce înseamnă că (2.29) devine

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Cum indicele de sumare se poate nota cu orice simbol, se ajunge la notația (2.28) pentru o serie.

**Observația 2.5.1.** *În studiul seriei numerice (2.28) rolul principal îl are șirul sumelor parțiale cu termenul general (2.27).*

Se poate afirma că teoria seriilor este o *combinație* între studiul sumelor finite și al limitelor de șiruri.

Prezentarea unei serii numerice ca sumă infinită este eronată deoarece în mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  se poate defini doar o sumă finită de numere.

Seriile numerice au proprietăți diferite de sumele finite. Mai precis, vom vedea că nu întotdeauna au loc proprietățile de comutativitate, asociativitate, etc. ale adunării unui număr infinit de numere reale.

**Definiția 2.5.6.** *Prin **natura** unei serii numerice înțelegem calitatea sa de a fi convergentă, divergentă, sau oscilantă.*

**Exemplul 2.5.1.** *Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)}$  este oscilantă.*

Într-adevăr, deoarece  $s_{2n} = 0$  și  $s_{2n-1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , după Corolarul 2.1.1, rezultă că șirul  $(s_n)$  nu are limită. Din Definiția 2.5.2 deducem că seria dată este oscilantă. ■

În studiul unei serii numerice problema principală este determinarea naturii sale și, în caz de convergență, evaluarea exactă, sau aproximativă, cu o eroare prestabilită, a sumei seriei respective.

### 2.5.1 Seria geometrică

**Definiția 2.5.7.** *Dacă termenul general al seriei (1.57) are proprietatea că există  $q \in \mathbb{R}$  astfel încât*

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.31)$$

*atunci seria se numește **serie geometrică** cu **rația**  $q$  și **primul termen** egal cu  $a_1$ .*

Să studiem natura seriei geometrice cu termenul general (2.31). Șirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_1 \cdot q^{n-1}, \quad (2.32)$$

dacă  $q \neq 1$ , și

$$s_n = a_1 \cdot n, \quad (2.33)$$

dacă  $q=1$ .

Din (2.33) deducem că în cazul  $q = 1$  șirul sumelor parțiale are limita  $+\infty$  dacă  $a_1 > 0$  și  $-\infty$  dacă  $a_1 < 0$ , deci seria geometrică (2.31) este divergentă pentru  $q = 1$ .

Dacă  $|q| < 1$ , atunci  $q^n \rightarrow 0$  și din (1.61) deducem  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ , ceea ce arată că în acest caz seria geometrică este convergentă și are suma egală cu raportul dintre primul termen și numărul real  $1 - q$ .

Dacă  $q > 1$ , din (2.32) deducem  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 \cdot (+\infty)$ , deci seria geometrică corespunzătoare este divergentă și are suma  $+\infty$  dacă  $a_1 > 0$  și divergentă având suma  $-\infty$  dacă  $a_1 < 0$ .

În sfârșit, dacă  $q \leq -1$ , seria geometrică este oscilantă deoarece subșirurile de rang par și respectiv de rang impar ale șirului sumelor parțiale au limite diferite.

În acest mod am studiat natura seriei geometrice cu termenul general (2.31) pentru toate valorile reale ale lui  $q$  și  $a_1$ . ■

## 2.5.2 Seria telescopică

**Exemplul 2.5.2.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  este convergentă și are suma 1.

Într-adevăr, termenul de rang  $k$  al seriei date este egal cu  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , de unde

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Prin urmare,  $s_n \rightarrow 1$ , ceea ce arată că seria este convergentă și are suma 1. ■

**Observația 2.5.2.** Din exemplul de mai sus vedem că termenul general  $a_n$  al seriei se scrie sub forma

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad (2.34)$$

natura șirului  $(\alpha_n)$  este cunoscută.

**Definiția 2.5.8.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cu proprietatea că termenul general de rang  $n$  se poate scrie sub forma (2.34) se numește **serie telescopică**.

**Propoziția 2.5.1.** Seria telescopică  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1})$  este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(\alpha_n)$  este convergent.

Într-adevăr, afirmațiile de mai sus rezultă din faptul că suma parțială de rang  $n$  a seriei telescopice este  $s_n = \alpha_1 - \alpha_{n+1}$  și din Definiția 2.5.2. ■

**Observația 2.5.3.** Studiul naturii șirului numeric dat  $(\alpha_n)$  poate fi redus la studiul naturii seriei

$$\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) + \dots$$

pentru care șirul sumelor parțiale este chiar șirul  $(\alpha_n)$ .

În felul acesta, utilizând anumite procedee pentru determinarea naturii unei serii ne vom putea pronunța asupra naturii anumitor șiruri.

### 2.5.3 Seria armonică

**Exemplul 2.5.3.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , numită **seria armonică**, este divergentă și are suma egală cu  $+\infty$ .

Denumirea *armonică* atribuită seriei se datorează faptului că termenul general  $a_n = \frac{1}{n}$  este *media armonică* a termenilor  $a_{n-1}$  și  $a_{n+1}$ , adică

$$\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Arătăm că șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  al acestei serii nu este șir fundamental. Atunci, după Teorema 2.2.2, rezultă că  $(s_n)$  nu este convergent. Pentru aceasta, fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $p \geq n$ . Avem

$$|s_n - s_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, există  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$  astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists p \in \mathbb{N}^*$  așa încât  $|s_n - s_{n+p}| > \frac{1}{2}$ , ceea ce asigură că  $(s_n)$  nu este șir fundamental, de unde rezultă că seria armonică este divergentă. Fiindcă  $(s_n)$  este șir monoton strict crescător, limita sa este  $+\infty$ , deci suma seriei armonice este  $+\infty$ . ■

În exemplele de mai sus am putut să ne pronunțăm asupra naturii unor serii numerice, ba chiar am determinat și sumele lor, întrucât am reușit să găsim o formă convenabilă pentru termenul general al șirului sumelor parțiale al fiecărei serii. În general, asemenea situații sunt rare și ca atare se impune dezvoltarea unei teorii calitative a seriilor care să permită deciderea naturii unei serii în funcție de comportarea termenului ei general, fără a găsi efectiv suma seriei.

## 2.6 Proprietăți generale ale seriilor convergente

Din Definiția 2.5.2, Teorema 2.1.4 și Propoziția 2.1.2, deducem cu ușurință următoarele proprietăți ale seriilor numerice.

**Teorema 2.6.1.** Dacă seriile numerice  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt convergente și au respectiv sumele  $s$  și  $t$ , atunci seriile:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  – seria sumă a celor două serii;

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  – seria diferență a celor două serii;
- $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$  – seria produsul cu o constantă  $\lambda \in \mathbb{R}$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , sunt convergente și au respectiv sumele:  $s + t$ ,  $s - t$  și  $\lambda \cdot s$ .

*Demonstrație.* Fie  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  și  $t_n = \sum_{k=1}^n b_k$ , sumele parțiale de rang  $n$  ale respectiv seriilor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Deoarece  $s_n \rightarrow s$ , iar  $t_n \rightarrow t$  rezultă că  $\sigma_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n)$  converge la  $s + t$ , ceea ce arată că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  este convergentă și  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t$ .

Suma parțială a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$  este  $\tau_n = s_n - t_n$  și evident  $\tau_n \rightarrow s - t$ , ceea ce arată că această serie este convergentă și are suma  $s - t$ .

Deoarece suma parțială de rang  $n$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$  este  $\lambda \cdot s_n$  și  $\lambda \cdot s_n \rightarrow \lambda \cdot s$ , rezultă că și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$  este convergentă și are suma  $\lambda \cdot s$ . q.e.d.

**Observația 2.6.1.** Dacă seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt divergente, sau oscilante este posibil ca seria sumă să fie convergentă.

Într-adevăr, dacă se consideră seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ , ambele oscilante după Exemplit 2.5.1, dar seria  $\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{n-1} + (-1)^n)$ , care este *seria identic nulă*, este convergentă. ■

**Observația 2.6.2.** Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este divergentă, sau oscilantă, atunci seria sumă poate fi divergentă, sau oscilantă.

Într-adevăr, dacă, prin absurd, seria sumă ar fi convergentă, atunci după Teorema 2.6.1, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + b_n) - a_n)$  ar fi convergentă, adică  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ar fi convergentă, ceea ce ar contrazice ipoteza teoremei. ■

**Corolarul 2.6.1.** Dacă  $\lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , atunci seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$  au aceeași natură.

Într-adevăr, în cazul când seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă, afirmația a fost demonstrată în Teorema 2.6.1. Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă, sau oscilantă rezultă că  $(s_n)$  este un șir divergent, sau oscilant, ceea ce evident antrenează că șirul  $(\lambda \cdot a_n)$  cu  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , este divergent, sau oscilant, deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  este divergentă, sau oscilantă. Cealaltă parte a corolarului se obține din prima înlocuind  $\lambda$  cu  $\frac{1}{\lambda}$ . ■

**Teorema 2.6.2.** *Dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă și are suma  $s$ , atunci seria obținută prin schimbarea ordinii unui număr finit de termeni ai seriei este convergentă și are aceeași sumă. Dacă seria este divergentă și are suma  $+\infty$ , sau  $-\infty$ , atunci seria obținută prin același procedeu este, de asemenea, divergentă și are aceeași sumă.*

*Demonstrație.* Să notăm cu  $s_n$  suma parțială de rang  $n$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și cu  $\sigma_n$  suma parțială de rang  $n$  a seriei obținute din seria dată prin schimbarea ordinii termenilor  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$ , unde  $p \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă clar că pentru  $n > \max\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$  avem  $s_n = \sigma_n$  și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n. \quad (2.35)$$

Din Definiția 2.5.2 și egalitatea (2.35) rezultă toate afirmațiile teoremei.

q.e.d.

**Observația 2.6.3.** *Dacă schimbarea ordinii afectează o mulțime infinită de termeni ai unei serii, afirmațiile din Teorema 2.6.2 nu mai sunt în general adevărate.*

**Teorema 2.6.3.** *Dacă la o serie numerică se adaugă, sau se înlătură un număr finit de termeni, seria obținută are aceeași natură cu seria dată. Dacă seria dată este convergentă, seria modificată nu are în general aceeași sumă. Dacă seria dată este divergentă și are suma  $+\infty$ , sau  $-\infty$ , seria modificată are aceeași sumă.*

*Demonstrație.* Fie seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Din Teorema 2.6.1 putem considera că termenii înlăturați sunt primii  $p$  de la început. Dacă  $s_n$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei date, atunci avem

$$\sigma_n = s_{n+p} - s_p, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.36)$$

unde  $(\sigma_n)$  este șirul sumelor parțiale al seriei modificate.

Din relația (2.36) constatăm că șirul  $(\sigma_n)$  are aceeași natură cu șirul  $(s_n)$ . Dacă prima serie este convergentă, atunci la fel este și seria modificată și, mai mult, suma ei  $\sigma$  este dată de

$$\sigma = s - s_p. \quad (2.37)$$

Relația (2.37) arată că, în general, sumele celor două serii nu coincid.

Dacă însă în (2.37),  $s = +\infty$ , respectiv  $-\infty$ , atunci  $\sigma = +\infty$ , respectiv  $\sigma = -\infty$ .

Dacă adăugăm un număr finit de termeni seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , obținem seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Atunci, putem considera că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se obține din seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  prin înlăturarea unui număr finit de termeni, deci, conform primei părți a demonstrației, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  are aceeași natură ca și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . **q.e.d.**

**Observația 2.6.4.** Deoarece termenii nuli nu au influență asupra comportării seriei, chiar dacă sunt în număr infinit, putem totdeauna să-i înlăturăm și să considerăm că seria este formată numai din termeni diferiți de zero.

**Definiția 2.6.1.** Seria de numere reale  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **serie cu termeni oarecare** dacă mulțimile  $N_1 = \{n \in \mathbb{N}^* : a_n > 0\} \subset \mathbb{N}$  și  $N_2 = \{n \in \mathbb{N}^* : a_n < 0\} \subset \mathbb{N}$  sunt infinite. Dacă  $N_2$  este mulțimea vidă, sau mulțime finită, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **serie cu termeni pozitivi**.

**Definiția 2.6.2.** Numim **rest de ordin  $p$ ,  $R_p$** , al seriei numerice  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , seria  $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ .

**Teorema 2.6.4.** Seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă pentru orice  $p \in \mathbb{N}$ , restul de ordin  $p$ ,  $R_p$ , este o serie convergentă. În plus, dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă, atunci șirul resturilor seriei  $(R_p)_{p \geq 0}$  este un șir convergent la zero.

*Demonstrație.* Prima parte a teoremei rezultă din Teorema 2.6.3. Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă și are suma  $s$ , atunci avem:

$$R_p = s - s_p, \quad p \in \mathbb{N}^*; \quad R_0 = s. \quad (2.38)$$

Trecând la limită în (2.38) pentru  $p \rightarrow \infty$  și ținând cont că  $s_p \rightarrow s$ , când  $p \rightarrow \infty$ , deducem că șirul resturilor  $(R_p)_{p \geq 0}$  este convergent la zero. **q.e.d.**

**Teorema 2.6.5. (Condiție necesară de convergență)** Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă, atunci  $a_n \rightarrow 0$ .



*Demonstrație.* Din (2.35) deducem  $s_n = s_{n-1} + a_n$ ,  $n \geq 2$ , deci  $a_n = s_n - s_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . Din ipoteză avem că  $s_n \rightarrow s$  și  $s_{n-1} \rightarrow s$ .

Trecând la limită în ultima egalitate și ținând cont de cele afirmate mai sus, deducem  $a_n \rightarrow 0$ . **q.e.d.**

**Corolarul 2.6.2.** Dacă șirul termenilor seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este un șir fără limită, sau este un șir cu limită nenulă, seria nu este convergentă. În acest caz, seria este fie divergentă, fie oscilantă.

*Demonstrație.* Afirmția se dovedește ușor folosind metoda reducerii la absurd și Teorema 2.6.5. **q.e.d.**

**Observația 2.6.5.** Condiția  $a_n \rightarrow 0$  este necesară, nu și suficientă, pentru convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

În sprijinul acestei afirmații dăm ca exemplu seria armonică. Șirul termenilor acestei serii este convergent la zero, iar seria este divergentă. ■

Ca aplicație la Corolarul 2.6.2 putem considera seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  pe care am studiat-o mai sus. Șirul termenilor acestei serii este oscilant. După Corolarul 2.6.2, seria considerată nu este convergentă; este, după cum am văzut, serie oscilantă.

**Exemplul 2.6.1.** Seriile numerice  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ , unde  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ , nu sunt convergente.

Într-adevăr,  $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = e \neq 0$  și  $\lim n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \neq 0$ . După Corolarul 2.6.2, seriile considerate nu sunt convergente.

Să observăm că prima serie este cu termeni pozitivi, deci nu poate fi oscilantă. Această serie este divergentă și are suma  $+\infty$ .

Cea de a doua serie este cu termeni pozitivi dacă  $a > 1$  și, în cazul  $0 < a < 1$ , seria are toți termenii negativi. În primul caz, seria este divergentă și are suma  $+\infty$ , pe când în cazul  $0 < a < 1$ , seria dată este divergentă și are suma egală cu  $-\infty$ . ■

**Teorema 2.6.6.** Dacă într-o serie numerică convergentă sau divergentă, se asociază termenii în grupe finite, cu păstrarea ordinii, atunci seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ , unde  $b_k$  este suma termenilor din grupa de rang  $k$ , are aceeași natură și aceeași sumă cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Demonstrație.* Fie:

$$b_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i, \quad j \geq 1, \quad n_0 = 0, \quad (2.39)$$

unde  $1 \geq n_1 > n_2 > \dots > n_k > \dots$  și

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \sigma_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k, \quad (2.40)$$

sumele parțiale de rang  $n$  și  $k$  ale respectiv seriilor  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

Din (2.39) și (2.40), deducem

$$\sigma_1 = s_{n_1}, \quad \sigma_2 = s_{n_2}, \quad \dots, \quad \sigma_k = s_{n_k} \quad \dots. \quad (2.41)$$

Egalitățile (2.41) arată că șirul  $(\sigma_k)$  este un subșir al șirului  $(s_n)$  de unde, din Propoziția 2.1.6, rezultă cu ușurință concluzia teoremei. **q.e.d.**

**Observația 2.6.6.** Prin asocierea termenilor unei serii oscilante în grupe finite, cu păstrarea ordinei termenilor, se pot obține serii convergente.

Ilustrăm această afirmație considerând seria din Exemplul 2.5.1 care am văzut că este oscilantă. Dacă în această serie efectuăm asocieri în două moduri diferite, obținem seriile:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots; \quad (2.42)$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) + \dots, \quad (2.43)$$

ambele convergente, prima cu suma zero și a doua cu suma egală cu 1. ■

**Observația 2.6.7.** Dacă avem o serie convergentă ai cărei termeni sunt sume finite, atunci prin disociere (desfacerea parantezelor) se poate obține o serie oscilantă.

Este suficient să considerăm seriile (2.42) și (2.43), ambele convergente, care prin disociere conduc la seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$  studiată în Exemplul 2.5.1 și care este oscilantă. ■

## 2.7 Criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice

În acest paragraf se prezintă o condiție necesară și suficientă de convergență a unei serii numerice. În acest scop se utilizează criteriul general al lui Cauchy de convergență a unui șir numeric, aplicat însă șirului sumelor parțiale al seriei considerate.

**Teorema 2.7.1. (Criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice)** *Seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (2.44)$$

*Demonstrație.* Fie  $(s_n)$  șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Suma a  $p$  termeni consecutivi ai seriei este dată de

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} = s_{n+p} - s_n. \quad (2.45)$$

Concluziile teoremei rezultă rapid din următorul șir de echivalențe logice: seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă  $\iff$  șirul  $(s_n)$  este convergent  $\iff (s_n)$  este șir fundamental  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (2.46)$$

Din (2.45), (2.46) și echivalențele logice menționate, rezultă ambele concluzii ale teoremei.

**q.e.d.**

**Observația 2.7.1.** Negând criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice deducem: seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nu este convergentă dacă  $\exists \varepsilon_0 > 0$  astfel încât  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  să existe  $p \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0.$$

Pentru a ilustra practic Observația 2.7.1 recomandăm consultarea raționamentului din Exemplul 2.5.3. ■

## 2.8 Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare

În acest paragraf se consideră serii cu termeni oarecare pentru care termenul general  $a_n$  este scris în forma

$$a_n = \alpha_n \cdot u_n. \quad (2.47)$$

**Observația 2.8.1.** Termenul general al oricărei serii numerice se poate scrie în forma (2.47), seria corespunzătoare fiind

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n. \quad (2.48)$$

Vom prezenta criterii (condiții suficiente) specifice seriilor de tipul (2.48). Este vorba de criteriul lui Abel<sup>3</sup>, criteriul lui Dirichlet<sup>4</sup> și de criteriul lui Leibniz<sup>5</sup>.

Demonstrațiile acestor criterii necesită întâi anumite inegalități, datorate lui Abel.

<sup>3</sup>Abel, Niels Henrik (1802–1829), celebru matematician norvegian.

<sup>4</sup>Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805–1859), matematician german.

<sup>5</sup>Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646–1716), mare filosof și matematician german.

**Propoziția 2.8.1. (Lema lui Abel)** Dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  are șirul sumelor parțiale  $(\sigma_n)$  mărginit, iar șirul numeric  $(\alpha_n)$  este monoton, atunci

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot u_k \right| \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (2.49)$$

unde  $L$  este un număr real pozitiv cu proprietatea

$$|\sigma_n| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

*Demonstrație.* Fără a restrânge generalitatea, presupunem că  $(\alpha_n)$  este șir monoton descrescător. Ținând cont că  $u_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}, \forall n \geq 2$  și că  $u_1 = \sigma_1$ , obținem  $\left| \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot u_k \right| = |\alpha_1 \cdot \sigma_1 + \alpha_2 \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) + \dots + \alpha_p \cdot (\sigma_p - \sigma_{p-1})|$ . Grupând termenii într-un alt mod, deducem

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot u_k \right| = |(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sigma_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot \sigma_2 + \dots + (\alpha_{p-1} - \alpha_p) \cdot \sigma_{p-1} + \alpha_p \cdot \sigma_p|,$$

de unde avem pe rând:

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot u_k \right| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| \cdot |\sigma_k| + |\alpha_p| \cdot |\sigma_p|;$$

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot u_k \right| \leq L \left( \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) + |\alpha_p| \right) = L(\alpha_1 - \alpha_p + |\alpha_p|) \leq L(|\alpha_1| + 2|\alpha_p|), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

care arată că inegalitatea (2.49) este adevărată.

**q.e.d.**

Inegalitatea (2.49) se numește *prima inegalitate a lui Abel*.

**Corolarul 2.8.1. (A doua inegalitate a lui Abel)** Dacă există  $L > 0$  astfel încât

$$\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k} \right| \leq L, \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$$

și dacă șirul  $(\alpha_n)$  este monoton, atunci

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k} \right| \leq L \cdot (|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|), \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*. \quad (2.50)$$

Într-adevăr, dacă în (2.37) trecem  $u_k$  în  $u_{n+k}$  și  $\alpha_k$  în  $\alpha_{n+k}$  cu  $n \in \mathbb{N}^*$  arbitrar, obținem (2.50). ■

**Teorema 2.8.1. (Criteriul lui Abel)** Dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă, iar șirul de numere reale  $(\alpha_n)$  este monoton și mărginit, atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* Șirul  $(\alpha_n)$  fiind mărginit, există  $M > 0$  astfel încât  $|\alpha_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  fiind convergentă, din Teorema 2.7.1 rezultă că  $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât să avem

$$\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (2.51)$$

Aplicând acum (2.50), unde  $L = \frac{\varepsilon}{3M}$ , și ținând cont de (2.51), obținem

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k} \right| < \frac{\varepsilon}{3M} (M + 2M) = \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*,$$

de unde, în baza criteriului general al lui Cauchy pentru serii numerice, deducem că seria (2.48) este convergentă. **q.e.d.**

**Teorema 2.8.2. (Criteriul lui Dirichlet)** Dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  are șirul sumelor parțiale  $(\sigma_n)$  mărginit, iar  $(\alpha_n)$  este monoton și convergent la zero, atunci seria cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot u_n$  este convergentă.

*Demonstrație.* Din  $(\sigma_n)$  șir mărginit rezultă că  $\exists M > 0$  astfel încât

$$|\sigma_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte,  $\left| \sum_{k=1}^p u_{n+k} \right| = |\sigma_{n+p} - \sigma_n| \leq |\sigma_{n+p}| + |\sigma_n| \leq 2M, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , deci constanta  $L$  din (2.50) este egală cu  $2M$ .

Din  $\alpha_n \rightarrow 0$  și din Teorema 2.1.1, rezultă

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \text{astfel încât} \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{6M}, \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.52)$$

Din (2.50), în care  $L = 2M$ , și (2.52) deducem că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\left| \sum_{k=1}^p \alpha_{n+k} \cdot u_{n+k} \right| < 2M \left( \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{2\varepsilon}{6M} \right) = \varepsilon.$$

Acest rezultat, cuplat cu Teorema 2.7.1, conduce la concluzia că seria (2.48) este convergentă.

**q.e.d.**

**Definiția 2.8.1.** Seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **serie alternată** dacă  $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ , adică produsul oricăror doi termeni consecutivi este număr negativ.

**Observația 2.8.2.** Termenul general al unei serii alternate este de forma (2.47) în care  $\alpha_n > 0$ , iar  $u_n = (-1)^{n-1}$ . Așadar, o serie alternată se poate scrie în forma  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \alpha_n$ , unde  $(\alpha_n)$  este un șir de numere reale pozitive.

**Corolarul 2.8.2. (Criteriul lui Leibniz)** Dacă șirul de numere reale pozitive  $(\alpha_n)$  este monoton descrescător și convergent la zero, atunci seria alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \alpha_n$  este convergentă. Dacă  $s$  este suma seriei alternate convergente, atunci  $|s - s_n| \leq \alpha_{n+1}$ .

*Demonstrație.* În criteriul lui Dirichlet luăm  $u_n = (-1)^{n-1}$ . Atunci, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  are sumele parțiale mărginite de 1. Cum șirul  $(\alpha_n)$  este monoton descrescător și convergent la zero, rezultă că suntem în ipotezele criteriului lui Dirichlet, deci seria alternată este convergentă.

Ne propunem ca pentru o serie alternată convergentă care verifică condițiile criteriului lui Leibniz, să calculăm eroarea pe care o facem luând în locul sumei sale o sumă parțială, adică să evaluăm valoarea absolută a numărului  $s - s_n$ . Deoarece seria este convergentă, șirul sumelor parțiale este convergent și are limita  $s$ , suma seriei. Orice subșir al șirului  $(s_n)$  are aceeași limită  $s$ . Prin urmare, subșirurile  $(s_{2n-1})$  și  $(s_{2n})$  sunt convergente și au aceeași limită  $s$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s. \quad (2.53)$$

Deoarece  $(\alpha_n)$  este un șir monoton descrescător, avem:

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - (\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}) \leq s_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad (2.54)$$

$$s_{2n} = s_{2n-2} + (\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n}) \leq s_{2n-2}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.55)$$

inegalități care arată că șirul sumelor parțiale impare  $(s_{2n-1})$  este descrescător, iar șirul sumelor pare  $(s_{2n})$  este crescător. Din (2.53) – (2.55) și Teorema 2.1.5, deducem

$$\sup\{s_{2n} : n \in \mathbb{N}^*\} = s = \inf\{s_{2n-1} : n \in \mathbb{N}^*\}. \quad (2.56)$$

Egalitățile (2.56) arată că

$$s_{2k} < s < s_{2p-1}, \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*. \quad (2.57)$$

Considerând (2.57) pentru  $k = p - 1 = n$  și apoi pentru  $k = p = n$ , obținem :

$$0 < s - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} = \alpha_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*; \quad (2.58)$$

$$0 > s - s_{2n-1} > s_{2n} - s_{2n-1} = -\alpha_{2n}. \quad (2.59)$$

Din relațiile (2.57) și (2.58) rezultă evident ultima concluzie din Corolarul 2.8.2, care tradusă în cuvinte afirmă că dacă înlocuim suma  $s$  a seriei alternate convergente cu suma parțială de rang  $n$ , atunci eroarea care se comite este mai mică decât primul termen neglijat  $\alpha_{n+1}$ . Eroarea este prin lipsă dacă  $n$  este par, și prin adaos dacă  $n$  este impar. **q.e.d.**

**Exemplul 2.8.1.** *Seria alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$  este convergentă.*

Într-adevăr, șirul numeric cu termenul general  $\frac{1}{n}$  este monoton descrescător și convergent la zero. Dacă plicăm criteriul lui Leibniz, deducem că seria considerată este convergentă.

**Exemplul 2.8.2.** *Seriile cu termeni oarecare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin nx,$$

*sunt convergente oricare ar fi parametrul real  $x$ .*

Într-adevăr, să remarcăm că dacă  $x \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$  prima serie devine  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , care vom dovedi mai târziu că este convergentă, iar cea de a doua serie este seria nulă, deci convergentă, cu suma nulă. În cazul în care  $x \neq 2k\pi$  observăm că prima serie este de forma (2.48) în care  $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$  și  $u_n = \cos nx$ , cea de a doua fiind de același tip, cu același  $\alpha_n$  și  $u_n$  schimbat, mai precis,  $u_n = \sin nx$ . Șirul  $(\alpha_n)$  este monoton descrescător și convergent la zero. Să studiem mărginirea șirurilor sumelor parțiale ale respectiv seriilor  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ .

Trebuie să calculăm sumele parțiale ale lor

$$s_n = \sum_{k=1}^n \cos kx, \quad t_n = \sum_{k=1}^n \sin kx.$$

Înmulțind în ambii membri ai acestor sume cu  $2 \sin \frac{x}{2}$  și folosind formulele de transformare în produse a sumelor de funcții trigonometrice și invers, găsim:

$$s_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \quad t_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Dar valorile funcțiilor trigonometrice sunt mărginite în valoare absolută de 1, astfel că din evaluările de mai sus deducem

$$|s_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \quad |t_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Ultimele inegalități arată că pentru fiecare serie din acest exemplu este îndeplinită și cea de a doua ipoteză din Teorema 2.8.2, deci seriile sunt convergente. ■

**Exemplul 2.8.3.** *Seriile numerice cu termeni oarecare*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \cos nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx,$$

*sunt convergente oricare ar fi parametrul real  $x$ .*

**Indicație.** Se aplică criteriul lui Dirichlet și se folosesc unele rezultate de la exemplul precedent. ■

## 2.9 Serii numerice absolut convergente și serii semi-convergente

**Definiția 2.9.1.** *Seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **absolut convergentă** dacă seria valorilor absolute*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2.60)$$

*este convergentă.*

**Observația 2.9.1.** *Seria (2.60) este serie cu termeni pozitivi.*

**Teorema 2.9.1.** *Dacă seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă, atunci este convergentă.*

*Demonstrație.* Seriei (2.60) i se aplică criteriul general al lui Cauchy și se ține cont de inegalitatea

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}|.$$

Prin urmare, absoluta convergență a unei serii numerice implică convergența acesteia.

**q.e.d.**

**Observația 2.9.2.** *Reciproca din Teorema 2.9.1 nu este în general adevărată.*

Într-adevăr, fie seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  care după Exemplul 2.8.1 este convergentă. Seria modulelor acestei serii este seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  studiată în Exemplul 2.5.3 care am văzut că este divergentă. ■

**Definiția 2.9.2.** *Seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **semi-convergentă** sau **simplu convergentă** dacă ea este convergentă, iar seria modulelor (2.60) este divergentă.*

**Observația 2.9.3.** *Seria alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  este semi-convergentă.*

Într-adevăr, această afirmație rezultă din Exemplul 2.8.1, Definiția 2.9.2 și Exemplul 2.5.3. ■



**Observația 2.9.4.** O serie numerică se poate plasa în una din situațiile: serie absolut convergentă, serie semi-convergentă, serie divergentă și serie oscilantă.

**Observația 2.9.5.** Din Teorema 2.9.1 și Observația 2.9.1 rezultă necesitatea unui studiu suplimentar al seriilor cu termeni pozitivi, care se va efectua în secțiunea următoare.

În mulțimea numerelor reale  $\mathbb{R}$  are loc proprietatea de comutativitate a adunării care afirmă că suma unui număr finit de termeni este independentă de ordinea termenilor sumei. De exemplu,

$$a + b + c + d = c + b + d + a = a + c + d + b = \dots$$

Într-o sumă infinită, deci într-o serie numerică, suma este definită într-un mod nou, mai precis ca limită a unui șir, șirul sumelor parțiale al seriei.

Dorim să investigăm dacă în această extensiune a adunării în  $\mathbb{R}$  a unui număr infinit de termeni, se păstrează proprietatea de independență referitoare la ordinea în care se face adunarea termenilor. De exemplu, să luăm seria armonică alternată

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} + \dots,$$

despre care știm că este simplu convergentă (vezi Observația 2.9.3), și să aranjăm termenii după regula: după primul termen 1 se consideră doi termeni negativi urmați de un termen pozitiv, ș. a. m. d. Se obține, atunci seria

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots$$

Apar în acest mod două întrebări:

1. Este noua serie convergentă?
2. Dacă da, atunci  $\sigma = s$ ?

Notăm suma parțială de rang  $n$  a primei serii cu  $s_n$  și cu  $\sigma_n$  suma parțială de rang  $n$  al celei de a doua serii. Să examinăm  $\sigma_{3n}$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Acum, în prima sumă din ultima expresie scădem termenii pari, de forma  $\frac{1}{2k}$  și, ca să nu se schimbe  $\sigma_{3n}$ , adunăm ce am scăzut și obținem:

$$\begin{aligned} \sigma_{3n} &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{2} s_{2n}. \end{aligned}$$

Deoarece  $s_{2n} \rightarrow s$ , urmează că  $\sigma_{3n} \rightarrow \frac{1}{2}s$ . Însă, orice sumă parțială  $\sigma_n$  a celei de a doua serii diferă de o sumă parțială de rang multiplu de trei cel mult printr-un termen, care atunci când  $n \rightarrow \infty$ , tinde la zero. Prin urmare,  $\sigma_n \rightarrow \frac{1}{2}s$  și scriem

$$\frac{1}{2}s = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

Să remarcăm că putem aranja termenii primei serii și într-un alt mod, după o altă regulă, astfel încât seriile noi obținute să nu mai aibă suma  $\frac{1}{2}s$ , ba chiar să fie divergente. În legătură cu acest aspect demonstrăm în continuare unele teoreme importante, nu înainte de a arăta cum se obține orice altă serie de forma  $\sigma$  pornind de la o serie  $s$ .

**Definiția 2.9.3.** Fie  $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k, k \in \mathbb{N}\}$ . Se numește **permutare** a lui  $\mathbb{N}_k$  orice aplicație bijectivă  $\varphi : \mathbb{N}_k \rightarrow \mathbb{N}_k$ .

După cum am afirmat la începutul acestui capitol, de cele mai multe ori  $k = 1$ , deci  $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}^*$ , însă este posibil să lucrăm și cu  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$ , această situație având loc, de exemplu, pentru seriile de puteri, un caz particular de serii de funcții reale de variabilă reală.

**Definiția 2.9.4.** Seria numerică cu termeni nenuli oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se numește **necondiționat convergentă** dacă pentru orice permutare  $\varphi$  a mulțimii  $\mathbb{N}^*$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , unde  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , este convergentă.

**Teorema 2.9.2.** Dacă seria numerică cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă ea este necondiționat convergentă și pentru orice permutare  $\varphi$  a lui  $\mathbb{N}^*$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , unde  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , este absolut convergentă și are aceeași sumă ca seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  este convergentă, deci are loc Teorema 2.7.1.

Fie  $\varphi$  o permutare a mulțimii  $\mathbb{N}^*$  și

$$N'(\varepsilon) = \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(N(\varepsilon))\},$$

unde  $\varphi^{-1}(j)$  este numărul natural dus în  $j$  prin permutarea  $\varphi$ , iar  $N(\varepsilon)$  este numărul natural din Teorema 2.7.1. Dacă  $n > N'(\varepsilon)$  rezultă  $\varphi(n) > N(\varepsilon)$  căci, în caz contrar, dacă  $\varphi(n)$  ar fi mai mic cel mult egal cu  $N(\varepsilon)$ , am avea  $\varphi(n) = k \leq N(\varepsilon)$ , deci  $n = \varphi^{-1}(k) \leq N'(\varepsilon)$ , ceea ce ar contrazice faptul că  $n > N'(\varepsilon)$ .

Dacă  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , avem

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+p}| = |a_{\varphi(n+1)}| + |a_{\varphi(n+2)}| + \dots + |a_{\varphi(n+p)}|$$

și, dacă  $n > N'(\varepsilon)$ , avem  $\varphi(n+k) > N(\varepsilon)$ ,  $k \in \overline{1, p}$ , deci

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+p}| \leq |a_{N(\varepsilon)+1}| + |a_{N(\varepsilon)+2}| + \dots + |a_{N(\varepsilon)+q}|,$$

unde  $q$  este astfel încât  $N(\varepsilon) + q = \max\{\varphi(n+1), \varphi(n+2), \dots, \varphi(n+p)\}$ .

Se observă că  $q$  depinde de  $n$  dar acest fapt nu influențează demonstrația.

Din absoluta convergență a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și criteriul general al lui Cauchy, deducem

$$|a_{N(\varepsilon)+1}| + |a_{N(\varepsilon)+2}| + \dots + |a_{N(\varepsilon)+q}| < \varepsilon, \quad q \in \mathbb{N}^*,$$

deci

$$|b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

care, după Teorema 2.7.1, arată că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  este convergentă adică seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este absolut convergentă.

Deoarece  $\varphi$  a fost o permutare oarecare a lui  $\mathbb{N}^*$  am demonstrat că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este necondiționat convergentă și că seria obținută prin permutarea, sau rearanjarea termenilor, este tot absolut convergentă.

Să arătăm că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  are aceeași sumă cu seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . În acest sens, fie  $s \in \mathbb{R}$  suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\varphi$  o permutare oarecare a mulțimii  $\mathbb{N}^*$  și  $b_n = a_{\varphi(n)}$ . Din absoluta convergență a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și Teorema 2.7.1 rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte, dacă  $s_n$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , folosind rezultatul de mai sus, avem

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Făcând  $p \rightarrow \infty$  în aceste ultime relații și ținând cont de faptul că  $s_{n+p} \rightarrow s$ , când  $p \rightarrow \infty$ , deducem

$$|s - s_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Fie din nou  $N'(\varepsilon) = \max\{\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(2), \dots, \varphi^{-1}(N(\varepsilon))\}$ ,  $n > N'(\varepsilon)$  și

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

Printre numerele  $b_1, b_2, \dots, b_n$  se află  $a_1, a_2, \dots, a_{N(\varepsilon)}$  deoarece  $a_k = b_{\varphi^{-1}(k)}$  și pentru  $k \leq N(\varepsilon)$  avem  $\varphi^{-1}(k) \leq N'(\varepsilon)$ . Deci, pentru  $n > N'(\varepsilon)$ , putem scrie

$$S_n = s_{N(\varepsilon)+1} + \hat{s}_n,$$

unde  $\hat{s}_n$  este o sumă de termeni de forma  $b_l$ , cu  $l > N(\varepsilon)$ , din care cauză vom avea  $|\hat{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Evaluând acum diferența  $S_n - s$ , găsim

$$|S_n - s| = |s_{N(\varepsilon)+1} + \hat{s}_n - s| \leq |s_{N(\varepsilon)+1} - s| + |\hat{s}_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare  $\forall \varepsilon > 0 \exists N'(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  așa încât

$$|S_n - s| < \varepsilon, \quad \forall n > N'(\varepsilon),$$

ceea ce înseamnă că  $S_n \rightarrow s$ , adică  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = s$ , și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

**Observația 2.9.6.** Teorema 2.9.2 arată că dacă o serie este absolut convergentă, suma ei nu se schimbă dacă efectuăm sumarea termenilor seriei în oricare altă ordine.

Considerăm  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie numerică cu termeni oarecare și notațiile:

$$u_k = \begin{cases} a_k, & \text{dacă } a_k > 0 \\ 0, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases} ; \quad v_k = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -a_k, & \text{dacă } a_k < 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Având în vedere notațiile (2.61), orice sumă parțială  $s_n$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  poate fi scrisă în forma

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n v_k. \quad (2.62)$$

Cu aceste pregătiri prezentăm următorul rezultat important.

**Propoziția 2.9.1.** Dacă seria numerică cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este semi-convergentă, atunci seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt divergente.

*Demonstrație.* Presupunem contrariul, că cel puțin una din cele două serii este convergentă. Pentru fixarea ideilor presupunem că  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este convergentă. Din (2.62), deducem

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n a_k. \quad (2.63)$$

Deoarece ambele sume din membrul doi al relației (2.63) au limită când  $n \rightarrow \infty$ , la fel se întâmplă și cu suma din membrul întâi, adică există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_k = V \in \mathbb{R}. \quad (2.64)$$

Relația (2.64) arată că seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  este convergentă și are suma  $V$ . Pe de altă parte,

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=1}^n v_k. \quad (2.65)$$

Folosind (2.64) și (2.65), deducem  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  convergentă, ceea ce, după Definiția 2.9.1, arată că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este

absolut convergentă, fapt ce constituie contradicție. Prin urmare, seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt divergente. **q.e.d.**

Acum avem totul pregătit pentru a evidenția o proprietate interesantă a seriilor semi-convergente.

**Teorema 2.9.3.** Dacă seria cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este simplu convergentă, există o permutare  $\varphi$  a lui  $\mathbb{N}^*$  astfel încât seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , unde  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , să fie divergentă; pentru orice  $A \in \mathbb{R}$  există o permutare  $\varphi$  a lui  $\mathbb{N}^*$  așa încât seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  să fie convergentă și să aibă suma  $A$ .

*Demonstrație.* Notăm  $U_n = \sum_{k=1}^n u_k$  și  $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$ . Din Propoziția 2.9.1 rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = +\infty$ . Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă, din Teorema 2.6.5, deducem  $a_n \rightarrow 0$ , de unde rezultă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0. \quad (2.66)$$

Notăm cu  $(M_n)$  un șir cu limita  $+\infty$  și construim o permutare  $\varphi$  a mulțimii  $\mathbb{N}^*$  în modul următor:

- adunăm termeni  $u_k$  până obținem o sumă superioară lui  $M_1$ , lucru posibil deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = +\infty$ , și adunăm apoi  $-v_k$ ;
- adunăm în continuare termeni  $u_k$  până obținem o sumă superioară lui  $M_2$  și adunăm apoi  $-v_k$ ; continuăm în același mod.

Pentru  $k$  suficient de mare avem  $v_k < 1$ , deoarece avem (2.66). De aici, deducem că putem să construim un șir de sume parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  care să majoreze pe  $M_n - 1$ , deci un subșir al șirului sumelor parțiale asociat seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  care are limita  $+\infty$ . În acest mod, seria determinată  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este divergentă.

Demonstrăm acum partea a doua a teoremei. Observăm mai întâi că seriile asociate  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ , cu termeni pozitivi, sunt ambele divergente, având fiecare suma egală cu  $+\infty$ . Pentru o mai bună înțelegere a modului de construcție al seriei rearanjate care să fie convergentă și să aibă suma  $A$ , presupunem  $A > 0$ . Modul de construcție al acestei serii este următorul:

- Formăm succesiv sumele parțiale ale seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  până când obținem prima sumă parțială mai mare decât  $A$ . Acest lucru este posibil având în vedere că  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty$ , deci șirul  $(\sum_{k=1}^n u_k)$  are limita  $+\infty$ .
- La rezultatul obținut la pasul precedent scădem sume parțiale ale seriei cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  până când ajungem la prima sumă care scăzută din rezultatul anterior ne situează sub  $A$ .
- La rezultatul obținut la pasul doi adăugăm alți termeni ai seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  până când obținem ca rezultat un număr mai mare decât  $A$ . Procedul continuă apoi ca la pasul (ii).

Acest procedeu generează o serie convergentă cu suma egală cu  $A$ .

Într-adevăr, având în vedere că  $u_n \rightarrow 0$  și  $v_n \rightarrow 0$ , sumele obținute după diverși pași diferă de  $A$ , fie printr-un termen  $u_k$ , fie printr-un termen  $v_k$ .

Procedeul de determinare al sumelor fiind continuu, iar  $v_n \rightarrow 0$  și  $u_n \rightarrow 0$ , deducem că abaterea de la  $A$  este din ce în ce mai mică. Această abatere tinde la zero odată ce numărul de pași tinde la  $+\infty$ , ceea ce arată că sumele parțiale astfel construite tind către  $A$ . **q.e.d.**

**Observația 2.9.7.** *Teorema 2.9.3 scoate în evidență faptul că seriile semiconvergente au comportare diferită față de cea a sumelor finite.*

Pentru seriile absolut convergente, proprietatea menționată în Teorema 2.9.3 nu mai are loc. Mai precis, avem (vezi [14, p. 189])

**Teorema 2.9.4.** *Dacă seria cu termeni oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă, atunci seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  sunt convergente.*

## 2.10 Serii cu termeni pozitivi

Așa după cum s-a menționat mai sus, rezultatul stabilit în Teorema 2.9.1 impune un studiu detaliat al seriilor numerice cu termeni pozitivi.

**Teorema 2.10.1.** *Seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  al seriei este mărginit.*

*Demonstrație.* În primul rând să observăm că șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  al unei serii cu termeni pozitivi este monoton strict crescător. Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă șirul  $(s_n)$  este convergent. Din Teorema 2.1.5, deducem că  $(s_n)$  este convergent dacă și numai dacă

$$\sup\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k : n \in \mathbb{N}^*\} < +\infty,$$

adică șirul sumelor parțiale al seriei este mărginit.

**q.e.d.**

**Observația 2.10.1.** *O serie cu termeni pozitivi nu poate fi oscilantă. O astfel de serie este fie convergentă, fie divergentă cu suma egală cu  $+\infty$ .*

Într-adevăr, din Teorema 2.1.5 rezultă că  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup\{s_n : n \in \mathbb{N}^*\}$  și, ori  $s \in \mathbb{R}$  dacă  $(s_n)$  este mărginit, caz în care seria este convergentă, ori  $s = +\infty$  când  $(s_n)$  este nemărginit, caz în care seria este divergentă și are suma egală cu  $+\infty$ . ■

**Observația 2.10.2.** Dacă șirul sumelor parțiale al seriei cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  admite un subșir cu limita egală cu  $+\infty$ , atunci seria corespunzătoare este divergentă.

### 2.10.1 Seria armonică generalizată

**Exemplul 2.10.1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , numită seria lui Riemann<sup>6</sup>, sau seria armonică generalizată. Să se arate că această serie este convergentă dacă  $\alpha > 1$  și divergentă dacă  $\alpha \leq 1$ .

Într-adevăr, fie mai întâi  $\alpha > 1$  și  $S_m$  suma parțială de rang  $m \in \mathbb{N}^*$  a seriei lui Riemann. Alegem  $n \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $2^n - 1 > m$ . Pentru aceasta este suficient să considerăm că  $n > [\log_2(m+1)] \in \mathbb{N}$ , unde  $[f]$  este funcția partea întreagă a funcției  $f$ . Din  $(S_n)$  șir monoton strict crescător rezultă evident  $S_m < S_{2^n-1}$ .

Determinăm un majorant al mulțimii de numere reale  $\{S_{2^n-1} : n \in \mathbb{N}^*\}$ . Pentru aceasta grupăm termenii sumei  $S_{2^n-1}$  după cum urmează:

$$S_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n-1)^\alpha}\right).$$

Grupurile de termeni din parantezele de mai sus sunt în număr de  $n-1$ . În grupul de ordin  $k$ ,  $k \in \overline{1, n-1}$ , se află  $2^k$  termeni. Ținând cont că fiecare termen din grupul de ordin  $k$  se poate majora prin  $\frac{1}{(2^k)^\alpha}$ , obținem pentru  $S_{2^n-1}$  următoarea majorare:

$$S_{2^n-1} < 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^{n-1})^\alpha}\right).$$

Cum în gruparea de ordin  $k$  de mai sus se află  $2^k$  termeni egali, după adunarea acestora și efectuarea simplificărilor ce se impun, obținem:

$$S_{2^n-1} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \dots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^{n-1}}.$$

Membrul doi al inegalității obținute este suma primilor  $n$  termeni a unei progresii geometrice cu rația  $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$ , deci

$$S_{2^n-1} < \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} = \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} - 1} = \text{constant}.$$

Prin urmare, în cazul  $\alpha > 1$ ,  $(S_m)_{m \geq 1}$  este șir mărginit și, după Teorema 2.10.1, seria armonică generalizată este convergentă.

Să presupunem că  $\alpha \leq 1$ . Arătăm că seria armonică generalizată corespunzătoare este divergentă. Pentru aceasta să observăm mai întâi că  $n^\alpha \leq n$ . Apoi, grupând termenii lui  $S_{2^n}$  după o regulă asemănătoare celei din cazul  $\alpha > 1$ , avem

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \dots + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{n-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{(2^n)^\alpha}\right).$$

Minorând fiecare termen al unei grupări cu ultimul termen al grupării respective, obținem

<sup>6</sup>Riemann, Bernhard (1826–1866), matematician german cu importante contribuții în analiza matematică și geometria diferențială, unele dintre ele deschizând ulterior drumul spre teoria relativității generalizate.

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}\right).$$

În gruparea de ordin  $k$ ,  $k \in \overline{1, n-1}$ , sunt  $2^k$  termeni și după adunarea acestora și efectuarea simplificărilor, ajungem la

$$S_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Acest rezultat arată că subșirul  $(S_{2^n})$  al șirului sumelor parțiale al seriei lui Riemann este divergent la  $+\infty$ , ceea ce, după Observația 2.10.2, arată că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  este divergentă în cazul  $\alpha \leq 1$ . ■

## 2.11 Criterii de convergență și divergență pentru serii cu termeni pozitivi

Prezentăm acum un grup de criterii pentru serii cu termeni pozitivi care rezultă din criteriul general al lui Cauchy. Aceste criterii sunt condiții suficiente cu ajutorul cărora cunoașterea naturii unei serii poate fi utilizată la studiul naturii unei alte serii atât timp cât între termenii generali ai celor două serii există o anumită relație. Natura precisă a acestei relații este precizată în propozițiile care urmează. Denumirea comună a acestor propoziții este aceea de criterii de comparație. În același timp, acestea sunt criterii de absolută convergență pentru serii cu termeni oarecare.

### 2.11.1 Criterii de comparație

**Definiția 2.11.1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  două serii de numere reale pozitive. Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este **majorată** de seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , sau că  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este **serie majorantă** pentru seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (2.67)$$

dacă există  $M \in \mathbb{R}_+^*$  și  $N \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$a_n \leq M \cdot b_n, \quad n \geq N. \quad (2.68)$$

Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este majorată de  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este majorată de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , spunem că cele două serii sunt **echivalente** și scriem

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Spunem că cele două serii au **aceeași natură** dacă ambele sunt convergente, sau divergente.

**Observația 2.11.1.** Dacă folosim Teorema 2.6.3, putem considera că  $N$  din Definiția 2.11.1 este egal cu 1.



**Propoziția 2.11.1. (Primul criteriu al comparației)** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  două serii cu termeni pozitivi cu proprietatea (2.67). Atunci, au loc afirmațiile:

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serie convergentă} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serie convergentă;} \\ (ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serie divergentă} &\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ serie divergentă.} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Din Definiția 2.11.1, Observația 2.11.1 și ipotezele primei părți din Propoziția 2.11.1 rezultă că există  $M > 0$  așa încât să aibă loc (2.68) în care  $N = 1$ . Cum  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este convergentă, din Teorema 2.10.1 și (2.68), obținem

$$\sup\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k : n \in \mathbb{N}^*\} \leq M \cdot \sup\{t_n = \sum_{k=1}^n b_k : n \in \mathbb{N}^*\} < +\infty. \quad (2.69)$$

rezultat care arată că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

Cea de a doua parte a propoziției se demonstrează prin reducere la absurd. Presupunem contrariul, că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este convergentă. Atunci, în baza primei părți a propoziției rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă ceea ce contrazice ipoteza. q.e.d.

**Exemplul 2.11.1.** Să se studieze natura seriei  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ .

**Soluție.** Seria dată este serie majorantă pentru seria armonică  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  deoarece avem  $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ . Cum seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, din Propoziția 2.11.1, punctul (ii), rezultă că seria dată este divergentă. ■

**Corolarul 2.11.1.** Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sunt serii cu termeni oarecare astfel încât seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  este serie majorantă pentru seria  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este absolut convergentă, atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă.

Într-adevăr, afirmația de mai sus rezultă din Propoziția 2.11.1, punctul (i), aplicat seriilor cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ . ■

**Propoziția 2.11.2.** (Al doilea criteriu de comparație) Fie seriile numerice cu termeni pozitivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Atunci, au loc următoarele afirmații:

- (1)  $\overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$
- (2)  $\underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$
- (3)  $0 < \underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

*Demonstrație.* (1). Fie  $L = \overline{\lim} \frac{a_n}{b_n}$  și  $c$  fixat astfel încât  $L < c < +\infty$ . Conform Teoremei 2.3.1, la dreapta lui  $c$  se află un număr finit de termeni ai șirului  $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq 1}$ . Prin urmare, există  $N_c \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\frac{a_n}{b_n} \leq c, \forall n \geq N_c$ , de unde deducem  $a_n \leq c \cdot b_n, \forall n \geq N_c$  și deci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Desigur că de aici înainte se aplică Propoziția 2.11.1.

(2). Fie  $l = \underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} > 0$  și  $0 < c < l$ , fixat. Atunci, din Teorema 2.3.1 deducem că există  $N_c \in \mathbb{N}^*$  așa fel încât  $\frac{a_n}{b_n} \geq c, \forall n \geq N_c$ , adică  $b_n \leq \frac{1}{c} \cdot a_n, \forall n \geq N_c$  ceea ce arată că  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și din acest loc se aplică din nou Propoziția 2.11.1.

(3). Rezultă din (1) și (2).

**q.e.d.**

**Corolarul 2.11.2.** Dacă pentru seriile cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$ , atunci au loc afirmațiile:

- a)  $A < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$
- b)  $A > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n;$
- c)  $0 < A < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$
- d)  $A = 0$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  serie convergentă  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- e)  $A = +\infty$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  serie divergentă  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă.

**Exemplul 2.11.2.** Să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

$$\begin{aligned} & 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{2^n}, \quad a \in \mathbb{R}; \\ & 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos an}{n^2}, \quad a \in \mathbb{R}; \quad 5. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}; \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

**Soluție 1.** Se aplică Corolarul 2.11.2 cu  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$  și  $b_n = \frac{1}{n}$ . Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

deci seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  au aceeași natură. Dar  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă. Prin urmare seria de la primul punct este divergentă.

2. Deoarece  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$  rezultă că seria de la punctul 2 este echivalentă cu seria armonică generalizată în care  $\alpha = \frac{3}{2}$ , despre care știm din Exemplul 2.10.1 că este convergentă. Așadar, seria de la punctul 2 este convergentă.

3. Avem evident  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin an}{2^n} \right| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  serie convergentă deoarece este serie geometrică cu rația  $q = \frac{1}{2}$ . Prin urmare seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin an}{2^n}$  este absolut convergentă  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

4. Evident  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos an}{n^2} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  serie convergentă fiindcă este serie armonică generalizată cu  $\alpha = 2 > 1$ . Rezultă deci că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos an}{n^2}$  este absolut convergentă  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

5. Seria dată la acest punct este o serie majorantă a seriei  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  deoarece, pentru  $n \geq 2$ , are loc inegalitatea

$\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$ . Deoarece seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$  este divergentă pentru că șirul termenilor seriei nu are limita egală cu

zero, din Propoziția 2.11.1 rezultă că seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$  este divergentă.

6. Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \in (0, +\infty)$ , rezultă că seria dată are aceeași natură cu seria armonică general-

izată în care  $\alpha = \frac{1}{2}$ , despre care se cunoaște că este divergentă. ■

**Propoziția 2.11.3. (Criteriul de comparație de speța a treia)** Fie seriile numerice cu termeni pozitivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dacă există  $N \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n \geq N, \quad (2.70)$$

atunci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

*Demonstrație.* Din (2.70) rezultă  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ ,  $\forall n \geq N$ , din care, pentru  $n \geq N+1$ , deducem

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{a_N}{b_N} = M,$$

adică  $a_n \leq M \cdot b_n$ ,  $\forall n \geq N$ , care arată că  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**q.e.d.**

**Corolarul 2.11.3.** Fie  $a_n$  serie numerică cu termeni pozitivi. Dacă  $\exists N \in \mathbb{N}^*$  și  $\exists \rho \in (0, 1)$  (respectiv  $\rho \geq 1$ ) astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho \quad \text{respectiv} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \rho, \quad n \geq N, \quad (2.71)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă (respectiv divergentă).

*Demonstrație.* Se aplică Propoziția 2.11.3 luând  $b_n = \rho^n$ . Pentru această alegere a lui  $(b_n)$  rezultă că (2.70) este satisfăcută, deci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Dacă adăugăm faptul că seria geometrică  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n$  este convergentă dacă rația  $\rho$  este subunitară și respectiv divergentă dacă  $\rho \geq 1$ , rezultă evident concluziile corolarului.

**q.e.d.**

## 2.11.2 Criteriul condensării al lui Cauchy

**Definiția 2.11.2.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$  se numește **seria condensată** a seriei cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Teorema 2.11.1. (Criteriul condensării al lui Cauchy)** Dacă  $(a_n)$  este un șir de numere reale pozitive monoton descrescător, atunci seriile numerice cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$  au aceeași natură.

*Demonstrație.* Din Teorema 2.6.6 rezultă că seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  are aceeași natură cu seria  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$ ,

unde  $b_m = \sum_{j=2^m}^{2^{m+1}-1} a_j$ . Deoarece termenul general al seriei  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$  are  $2^{m+1} - 2^m$  termeni, care sunt  $2^m$  termeni

consecutivi ai seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  începând cu  $a_{2^m}$  și deoarece  $a_i \geq a_{i+1}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ , rezultă

$$\frac{1}{2}(2^{m+1} a_{2^{m+1}}) = 2^m a_{2^{m+1}} \leq b_m \leq 2^m a_{2^m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aceste inegalități, împreună cu Definiția 2.11.1, conduc la concluziile  $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{m+1} a_{2^{m+1}} \ll \sum_{m=0}^{\infty} b_m \ll \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ .

Aplicând acum Propoziția 2.11.1, deducem că seriile  $\sum_{m=0}^{\infty} b_m$  și  $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$  au aceeași natură, prin urmare seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  au aceeași natură. q.e.d.

**Exemplul 2.11.3.** Utilizând criteriul condensării al lui Cauchy să se studieze natura următoarelor serii cu termeni pozitivi:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \quad (b) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n};$$

$$((c) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad (d) \quad \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \dots \ln^{(p)} n},$$

unde  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ,  $\ln^{(2)} x = \ln(\ln x)$ , ...,  $\ln^{(p)} x = \ln \ln^{(p-1)} x$ , iar  $n_0$  este ales astfel încât  $\ln^{(p)} n$  să aibă sens pentru orice  $n \geq n_0$ .

**Soluție** (a) Pentru  $\alpha \leq 0$  seria armonică generalizată (vezi Exemplul 2.10.1) este divergentă deoarece termenul general nu tinde la zero. Pentru  $\alpha > 0$  șirul termenilor seriei armonic generalizate este monoton strict descrescător, deci seria dată are aceeași natură cu seria condensată  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ . Dar această serie este serie geometrică cu rația  $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} > 0$ .

Dacă  $q < 1$ , ceea ce înseamnă  $\alpha > 1$ , seria geometrică  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  este convergentă și prin urmare seria armonică generalizată este convergentă.

Dacă  $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$ , adică  $\alpha \leq 1$ , seria geometrică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$  este divergentă. Prin urmare, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  este, de asemenea, divergentă.

(b) Întrucât șirul numeric  $(\frac{1}{n \ln n})_{n \geq 2}$  este monoton strict descrescător rezultă că seria de la acest punct are aceeași natură cu seria condensată

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2},$$

care este divergentă fiindcă este comparabilă cu seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , care este divergentă.

(c) Seria condensată a seriei de la acest punct este  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^\alpha n^\alpha}$  care este comparabilă cu seria lui Riemann, deci pentru  $0 < \alpha \leq 1$  seria dată este divergentă, iar pentru  $\alpha > 1$  este convergentă.

(d) Seria în cauză are aceeași natură cu seria condensată

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n \dots \ln^{(p)} 2^n}.$$

Pentru  $p = 1$ , obținem seria de la punctul precedent care este divergentă.

Demonstrăm prin inducție că seria de la acest punct este divergentă.

Pentru aceasta presupunem că seria  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\ln n \ln(\ln n) \dots \ln^{(p-1)} n}$  este divergentă.

Deoarece  $\ln 2^n = n \ln 2 < n$ , găsim  $\ln^{(p)} 2^n = \ln^{(p-1)}(\ln 2^n) < \ln^{(p-1)} n$  și deci

$$\frac{1}{\ln 2^n \ln^{(2)} 2^n \dots \ln^{(p)} 2^n} > \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n) \dots \ln^{(p-1)} n}, \quad n \geq n_0.$$

Aplicând primul criteriu de comparație, criteriul condensării al lui Cauchy și inducția matematică după  $p$ , rezultă că seria de la punctul 3 este divergentă. ■

### 2.11.3 Criteriul logaritm

**Propoziția 2.11.4. (Criteriul logaritm)** Fie seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(i) Dacă există  $\alpha > 1$  și  $N_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_1 > 1$  astfel încât

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq \alpha, \quad \forall n \geq N_1, \quad (2.72)$$

atunci seria dată este convergentă;

(ii) dacă există  $\alpha \leq 1$  și  $N_2 \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_2 > 1$  așa încât

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leq 1, \quad \forall n \geq N_2, \quad (2.73)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.

*Demonstrație.* Afirmațiile de mai sus rezultă din faptul că (2.72) este echivalentă cu  $a_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\forall n \geq N_1$ , iar (2.73) este echivalentă cu  $a_n \geq \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\forall n \geq N_2$ . De fapt (2.72) arată că  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  pe când (2.73) spune că  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Dacă la acestea adăugăm rezultatele referitoare la seria armonică generalizată din Exemplul 2.10.1, precum și Propoziția 2.11.1, vedem că ambele afirmații din Propoziția 2.11.4 sunt adevărate. **q.e.d.**

În aplicațiile practice însă se folosește formularea cu limită a criteriului logaritm care se deduce ușor din Propoziția 2.11.4.

**Corolarul 2.11.4. (Formularea cu limită a criteriului logaritm)** Dacă pentru seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  există limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lambda,$$

atunci au loc următoarele implicații:

$$\begin{aligned} \lambda > 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă;} \\ \lambda < 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă;} \\ \lambda = 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ poate fi serie convergentă, sau divergentă.} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Fie mai întâi  $\lambda > 1$ . Atunci, există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $\alpha = \lambda - \varepsilon > 1$ . Este de ajuns să luăm pe  $\varepsilon$  astfel încât  $0 < \varepsilon < \lambda - 1$ .

În afara vecinătății simetrice  $(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$  rămân un număr finit de termeni ai șirului  $\left(\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\right)_{n \geq 2}$ . Prin urmare, există  $N_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $N_1 \geq 2$  astfel încât să aibă loc (2.72). După Propoziția 2.11.4,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

În mod asemănător se arată că are loc și concluzia a doua.

Pentru justificarea ultimei părți, considerăm seria de la punctul (c) din Exemplul 2.11.3 pentru care

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha \ln \ln n}{\ln n}\right) = 1, \quad \forall \alpha > 0,$$

de unde rezultă afirmația a treia a corolarului.

**q.e.d.**

## 2.11.4 Criteriul de convergență în $\alpha$

**Corolarul 2.11.5. (Criteriul de convergență în  $\alpha$ )** Fie seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.74}$$

Dacă există  $\alpha > 1$  astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot a_n = A, \tag{2.75}$$

și  $A \in [0, +\infty)$ , seria (2.74) este convergentă, iar dacă există  $\alpha \leq 1$  așa încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \cdot a_n = A \tag{2.76}$$

și  $A \in (0, +\infty]$ , atunci seria (2.74) este divergentă.

*Demonstrație.* Într-adevăr, să observăm mai întâi că (2.75) este echivalentă cu existența numărului natural  $N_1$  cu proprietatea

$$a_n < \frac{A_1}{n^\alpha}, \quad n \geq N_1, \quad (2.77)$$

iar (2.76) este echivalentă cu existența lui  $N_2 \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\frac{A_2}{n^\alpha} < a_n, \quad n \geq N_2. \quad (2.78)$$

Inegalitatea (2.77) arată că  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  și (2.78) exprimă că  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ll \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Din Propoziția 2.11.1 și Exemplul 2.10.1 rezultă concluziile de mai sus.

**q.e.d.**

### 2.11.5 Criteriul raportului

**Teorema 2.11.2.** (Criteriul raportului a lui D'Alembert<sup>7</sup> cu limite extreme) Fie seria de numere reale pozitive  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $L = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  și  $l = \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Atunci, au loc următoarele implicații:

$$\begin{aligned} (i) \quad L < 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă;} \\ (ii) \quad l > 1 & \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă;} \\ (iii) \quad l \leq 1 \leq L & \implies \text{seria } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ poate fi oricum, ca natură.} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Fie  $L < 1$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $\rho = L + \varepsilon < 1$ . Atunci, după Teorema 2.3.1, există  $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \rho, \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon). \quad (2.79)$$

Convergența seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  rezultă din Corolarul 2.11.3 și (2.79).

Dacă  $l > 1$ , există  $\varepsilon > 0$  cu proprietatea  $\rho = l - \varepsilon > 1$ . Din Teorema 2.3.1 rezultă că la stânga lui  $l - \varepsilon$  se află un număr finit de termeni ai șirului  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ , deci există  $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  cu proprietatea

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \rho, \quad n \geq N_2(\varepsilon) \quad (2.80)$$

Ținând cont acum de Corolarul 2.11.3 și de relația (2.80), deducem că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.

Pentru a justifica afirmația din ultima parte a teoremei să considerăm seria

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{2}{3^\alpha} + \dots \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.81)$$

<sup>7</sup>D'Alembert, Jean le Rond (1717–1783), filosof și matematician francez.



Seria (2.81) provine din operații aritmetice asupra seriei armonice generalizate.

Dacă  $t$  este suma seriei (2.81), iar  $s$  este suma seriei armonice generalizate, atunci  $t = s + 2(s - 1) = 3s - 1$ .

Prin urmare, natura seriei (2.81) este aceeași cu cea a seriei armonice generalizate: convergentă pentru  $\alpha > 1$ ; divergentă dacă  $\alpha \leq 1$ . Pe de altă parte:

$$l = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad L = \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

de unde constatăm că în cazul  $l \leq 1$ , sau  $L \geq 1$ , natura seriei poate fi oricum. În această situație spunem că seria dată se plasează în *caz de dubiu*. **q.e.d.**

**Corolarul 2.11.6.** Fie seria numerică cu termeni nenuli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

$$l = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{și} \quad L = \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Atunci, au loc următoarele implicații:

- (1)  $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este serie absolut convergentă;
- (2)  $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este serie divergentă, sau oscilantă;
- (3)  $l \leq 1$ , sau  $L \geq 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se plasează în caz de dubiu.

*Demonstrație.* Implicațiile (1) și (3) sunt evidente după cum rezultă din Teorema 2.11.2. Pentru demonstrația celui de al doilea punct al corolarului să observăm că dacă  $l > 1$ , atunci șirul termenilor seriei date nu poate fi convergent la zero și, după Corolarul 2.6.2, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nu este convergentă. În ce privește (3) se procedează ca în Teorema 2.11.2. **q.e.d.**

**Corolarul 2.11.7. (Formularea cu limită a criteriului raportului)** Fie seria de numere reale pozitive cu proprietatea că există  $r \in [0, +\infty]$  astfel încât

$$r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (2.82)$$

Atunci, au loc implicațiile:

- (i)  $r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- (ii)  $r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- (iii)  $r = 1 \Rightarrow$  caz de dubiu.

Într-adevăr, afirmațiile de mai sus rezultă din Teorema 2.11.2 și din faptul că din (2.82) avem  $l = L = r$ . ■

**Observația 2.11.2.** Rezultatele din Corolarul 2.11.7 se transpun corespunzător și seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , unde  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sunt numere reale nenule cu proprietatea că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ .

## 2.11.6 Criteriul radicalului

Un alt criteriu de convergență care se deduce din criteriile de comparație este *criteriul radicalului al lui Cauchy*. Seria de comparație în acest caz este seria geometrică.

**Teorema 2.11.3. (Criteriul radicalului al lui Cauchy)** Fie seria de numere reale pozitive  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și  $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ . Atunci:

- $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- $L = 1 \Rightarrow$  natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  poate fi oricum.

*Demonstrație.* Dacă  $L < 1$  există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $q = L + \varepsilon < 1$ . Există atunci  $N \in \mathbb{N}^*$  așa încât  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ ,  $\forall n \geq N$ , deci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ . Cum seria geometrică  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  cu rația  $q$  subunitară este convergentă, din

Propoziția 2.11.1 deducem că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

Să presupunem acum că  $L > 1$  și fie  $0 < \varepsilon < L - 1$  fixat. Din Teorema 2.3.1 rezultă că există  $n_1 < n_2 < \dots$  a.î.  $\sqrt[k]{a_{n_k}} \geq L - \varepsilon > 1$ ,  $k \geq 1$  deci  $a_{n_k} \geq 1$  ceea ce arată că  $a_n$  nu converge la zero. Folosind acum Corolarul 2.6.2, deducem că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  nu este convergentă. Fiindcă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este serie cu termeni pozitivi, nu poate fi oscilantă, deci este serie divergentă.

Ca și în alte situații similare, pentru a demonstra ultima parte a teoremei, considerăm seria armonică generalizată  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se vede imediat că  $L = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$ . Dacă la aceasta mai adăugăm faptul că pentru  $\alpha > 1$  seria lui Riemann este convergentă, iar pentru  $\alpha \leq 1$  aceeași serie este divergentă, ajungem să justificăm și partea a treia a teoremei, adică o serie numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , pentru care  $L$  din Teorema 2.11.3 este 1, poate fi convergentă, sau divergentă. **q.e.d.**

**Corolarul 2.11.8.** Fie seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Dacă există numărul  $\rho \in [0, \infty]$  definit de  $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ , atunci:

$$\rho < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă;}$$

$$\rho > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă;}$$

$$\rho = 1 \implies \text{natura seriei } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ poate fi oricum.}$$

*Demonstrație.* Se folosește Teorema 2.11.3 și Teorema 2.3.2.

q.e.d.

**Corolarul 2.11.9.** Fie seria numerică cu termeni nenuli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Atunci, au loc următoarele implicații:

- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serie absolut convergentă;}$
- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ nu este serie convergentă;}$
- $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \implies \text{natura seriei } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ poate fi oricum.}$

**Exemplul 2.11.4.** Să se studieze natura seriilor numerice cu termeni pozitivi:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}};$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{2^n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a^n, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a \cdot n + 1}{n + 2}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R}_+^*;$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n \cdot a^n, \quad a \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Pentru studiul naturii acestor serii, aplicăm criteriul radicalului, fie în *formularea cu limită*, dată de Corolarul 2.11.8, fie în *formularea cu limită superioară*:

$$a) \quad a_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{e} < 1,$$

deci seria de la punctul a) este convergentă;

$$b) \quad a_n = \frac{n^\alpha}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^\alpha}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

convergentă;

$$c) \quad a_n = n \cdot a^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = |a| \sqrt[n]{n} \rightarrow |a| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

este serie absolut convergentă dacă  $|a| < 1$ , divergentă dacă  $a \geq 1$  și oscilantă dacă  $a \leq -1$ ;

$$d) \quad a_n = \left(\frac{a \cdot n + 1}{n + 2}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{a \cdot n + 1}{n + 2} \rightarrow a \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serie convergentă dacă  $0 < a < 1$  și divergentă pentru  $a > 1$ . În cazul  $a = 1$  seria este, de asemenea, divergentă pentru că termenul general al ei nu tinde la zero și este serie cu termeni pozitivi.

$$e) \quad a_n = (3 + (-1)^n)^n \cdot a^n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = (3 + (-1)^n) \cdot |a| \Rightarrow \\ \Rightarrow L = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 4|a|.$$

Prin urmare, dacă  $4|a| < 1$ , adică  $a \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , seria dată este absolut convergentă. Pentru  $a \geq \frac{1}{4}$  seria dată este divergentă, iar pentru  $a \leq -\frac{1}{4}$  seria este oscilantă. ■

**Corolarul 2.11.10.** Dacă există  $N \in \mathbb{N}^*$  și  $\rho \in (0, 1)$  astfel încât

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \rho, \quad \forall n \geq N, \quad (2.83)$$

atunci

$$0 \leq s - s_n \leq \frac{\rho^{n+1}}{1 - \rho}, \quad \forall n \geq N. \quad (2.84)$$

Într-adevăr, din (2.83) deducem  $a_n \leq \rho^n$ , din care rezultă (2.84). ■

**Exemplul 2.11.5.** Să se calculeze, cu o eroare mai mică decât  $10^{-7}$ , valoarea aproximativă a sumei seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ .

**Soluție.** În Exemplul 2.11.4 am arătat că seria de mai sus este convergentă. Apoi, din  $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$  și din Exemplul 2.1.1 deducem că numărul  $\rho$  și  $N$  din Corolarul 2.11.10 au valorile:  $\rho = \frac{1}{2}$ ;  $N = 1$ . Aplicând acum (2.84) obținem că  $0 \leq s - s_n \leq \frac{1}{2^n}$ . Impunând condiția ca eroarea să fie mai mică decât  $10^{-3}$  găsim  $n \geq 10$ .

Așadar, sumând primii 10 termeni ai seriei date obținem valoarea aproximativă a sumei sale cu o eroare mai mică decât  $10^{-3}$ . ■

## 2.12 Alte criterii de convergență ale seriilor cu termeni pozitivi

Din cele prezentate în paragraful anterior se constată că există situații când aplicarea unui criteriu pentru stabilirea naturii unei serii numerice cu termeni pozitivi conduce la caz de dubiu. De aici necesitatea formulării altor criterii, mai puternice, care să poată decide natura seriei în cazul când aplicarea unui anumit criteriu generează incertitudine.

### 2.12.1 Criteriul lui Kummer

**Teorema 2.12.1. (Criteriul lui Kummer<sup>8</sup>)** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie numerică cu termeni pozitivi.

(i) Dacă există un șir de numere reale pozitive  $(b_n)$ , o constantă pozitivă  $\alpha$  și un număr natural  $N$  așa încât

$$c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \geq \alpha, \quad \forall n \geq N, \quad (2.85)$$

atunci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă;

Dacă  $c_n \leq 0, \forall n \geq N$  și seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  este divergentă, atunci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este serie divergentă.

**Formulare alternativă.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , unde  $a_n > 0$ , și  $(c_n)$  șirul numeric al cărui termen general este definit în (2.85). Atunci, au loc următoarele implicații:

(I)  $\lim c_n > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;

(II)  $\overline{\lim} c_n < 0$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  serie divergentă  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă.

*Demonstrație.* (i) Deoarece  $a_{n+1} > 0$ , din (2.85) deducem

$$b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} \geq \alpha \cdot a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Sumând membru cu membru în această inegalitate după valorile lui  $n$  de la  $N$  până la  $N+p$ , obținem

$$b_N \cdot a_N - b_{N+p} \cdot a_{N+p} \geq \alpha \cdot (a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+p})$$

Având în vedere că

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+p} = s_{N+p} - s_N,$$

unde  $s_n$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , din ultima inegalitate deducem

$$s_{N+p} - s_N \leq \frac{1}{\alpha} \cdot (b_N \cdot a_N - b_{N+p} \cdot a_{N+p}) < \frac{1}{\alpha} \cdot a_N \cdot b_N,$$

din care mai apoi găsim  $s_{N+p} < s_N + \frac{1}{\alpha} \cdot b_N \cdot a_N, \quad \forall p \geq 1$ . Acest rezultat arată că șirul sumelor parțiale

$(s_n)$  este mărginit și, după Teorema 2.10.1, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

<sup>8</sup>Kummer, Ernst Eduard, (1810–1893), matematician german.

(ii) Din  $c_n \leq 0$  deducem evident  $b_n \cdot a_n - b_{n+1} \cdot a_{n+1} \leq 0$ ,  $\forall n \geq N$ , rezultat care se mai poate scrie în forma

$$\frac{1}{\frac{b_{n+1}}{1}} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \forall n \geq N.$$

Folosind Propoziția 2.11.3, în care  $a_n$  trece în  $\frac{1}{b_n}$ , iar  $b_n$  trece în  $a_n$ , și ținând cont că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  este , prin ipoteză, divergentă, deducem că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.

(I) Fie  $0 < \ell < \underline{\lim} c_n$ . Atunci, folosind Teorema 2.3.1, rezultă că există  $N \in \mathbb{N}^*$  așa încât  $c_n > \ell$ ,  $\forall n \geq N$ , adică tocmai (2.85). În baza lui (i) rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

(II) Dacă  $\overline{\lim} c_n < 0$ , atunci doar un număr finit de termeni ai șirului  $(c_n)_{n \geq 1}$  se află la dreapta lui 0, prin urmare există  $N \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $c_n \leq 0$ ,  $\forall n \geq N$ . Cum avem și ipoteza că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$  este divergentă rezultă că suntem în ipotezele (ii) de mai sus și prin urmare seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă. **q.e.d.**

## 2.12.2 Criteriul lui Raabe

**Corolarul 2.12.1. (Criteriul lui Raabe<sup>9</sup>)** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie cu termeni pozitivi,  $l = \underline{\lim} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  și

$$L = \overline{\lim} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right).$$

Atunci, au loc afirmațiile:

- $l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- $l \leq 1 \leq L \Rightarrow$  natura seriei poate fi oricum.

*Demonstrație.* În formularea alternativă a criteriului lui Kummer luăm  $b_n = n$  după care, folosind (2.85), determinăm șirul  $c_n$  corespunzător.

Ținând cont că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă, se constată prin calcul că primele două implicații din acest corolar sunt cele din formularea alternativă a criteriului lui Kummer în care  $c_n = -1 + n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$ .

În ce privește partea a treia a corolarului, se procedează ca și până acum: se aleg două serii cu termeni pozitivi diferite ca natură; se determină  $l$  și  $L$  din enunțul corolarului; pentru ambele serii se constată că ori  $l \leq 1$ , ori  $L \geq 1$ . **q.e.d.**

<sup>9</sup>Raabe, Josef, Ludwig (1801–1859), matematician german.

**Corolarul 2.12.2. (Criteriul lui Raabe cu limită)** Fie seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  pentru care presupunem că există

$$\lambda = \liminf_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right). \quad (2.86)$$

Atunci, au loc implicațiile:

- $\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $\lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- $\lambda = 1 \Rightarrow$  nu putem decide asupra naturii seriei.

*Demonstrație.* Implicațiile din enunț sunt consecințe imediate din Corolarul 2.12.1 și (2.86).

**q.e.d.**

**Corolarul 2.12.3. (Criteriu de absolută convergență)** Dacă pentru seria numerică cu termeni nenuli oarecare  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) > 1,$$

atunci seria este absolut convergentă.

*Demonstrație.* Rezultă fără dificultate din Corolarul 2.12.3 și Definiția 2.9.1.

**q.e.d.**

**Exemplul 2.12.1.** Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{(a+x_1)(2a+x_2)\dots(na+x_n)},$$

unde  $a > 0$  și  $(x_n)$  este un șir convergent de numere reale pozitive având limita egală cu  $\alpha$ .

**Soluție.** Avem  $a_n = \frac{n!a^n}{(a+x_1)(2a+x_2)\dots(na+x_n)}$ ,  $n \geq 1$ .

Prin calcul efectiv, găsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{\alpha}{a}.$$

Din Corolarul 2.12.2 rezultă că dacă  $\alpha > a$ , seria considerată este convergentă, iar dacă  $\alpha < a$ , seria este divergentă.

Pentru  $\alpha = a$ , în cazul general, nu putem spune nimic despre natura seriei, ea depinzând de modul în care șirul  $(x_n)$  converge către  $\alpha$ . ■

### 2.12.3 Criteriul logaritmăic al lui Bertrand

**Corolarul 2.12.4. (Criteriul logaritmăic al lui Bertrand<sup>10</sup>)** Fie seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  și elementele din  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\lambda_1 = \underline{\lim} \left( L^{(p)}(n) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - L^{(p)}(n+1) \right); \quad \lambda_2 = \overline{\lim} \left( L^{(p)}(n) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - L^{(p)}(n+1) \right),$$

unde  $L^{(p)}(x) = x \cdot \log_a x \cdot \dots \cdot \log_a^{(p)} x$ ,  $p \geq 1$ ,  $x \in I = (0, \infty)$  este astfel încât există  $\log_a^{(p)} x = \log_a^{(p-1)}(\log_a x)$ , iar  $\log_a^{(0)} x = \log_a x$ .

În aceste ipoteze, au loc următoarele implicații:

$$(i) \quad \lambda_1 > 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă};$$

$$(ii) \quad \lambda_2 < 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă}.$$

*Demonstrație.* Se aplică criteriul lui Kummer luând  $b_n = L^{(p)}(n)$ ,  $n \geq n_0$  și se ține cont de Exemplul 2.11.3 în care s-a arătat că seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{L^{(p)}(n)}$  este divergentă. **q.e.d.**

În aplicațiile practice cel mai adesea se ia  $p = 1, a = e$  și deci  $b_n = \ln n$ ,  $n \geq 2$ .

**Exemplul 2.12.2.** Să se studieze natura seriei cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \right)^2$ .

**Soluție.** Aplicarea criteriului raportului conduce la cazul de dubiu deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = 1.$$

Folosim atunci criteriul lui Raabe. Avem

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n(4n+3)}{(2n+1)^2},$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 1,$$

aceasta însemnând că și criteriul lui Raabe conduce la caz de dubiu.

Aplicăm Corolarul 2.12.4, în care  $p = 1$  și  $a = e$ .

În acest caz, șirul  $(c_n)_{n \geq 1}$  corespunzător din Teorema 2.12.1 are termenul general

$$c_n = n(\ln n) \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1)$$

<sup>10</sup>Bertrand, Joseph L. F. (1822–1900), matematician francez.



și limita acestuia se dovedește că este aceeași cu limita șirului al cărui termen general este

$$\left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n - 1 = -\frac{(n+1) \ln n}{(2n+1)^2} - 1.$$

Un calcul elementar arată că ultimul șir are limita  $-1$ . Conform Corolarului 2.12.4, seria considerată este divergentă. ■

**Observația 2.12.1.** Din calculele efectuate în Exemplul 2.12.2 se vede că, în cazul  $p = 1, a = e$  și  $b_n = n \ln n, n \geq 2$ , criteriul logaritm al lui Bertrand se poate enunța într-o altă formă prezentaă în corolarul care urmează.

**Corolarul 2.12.5.** Fie seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  cu proprietatea că există

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \ln n.$$

Atunci, au loc afirmațiile:

- $\mu > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $\mu < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- $\mu = 1 \Rightarrow$  caz de dubiu.

*Demonstrație.* Se folosește Corolarul 2.12.4 în cazul particular specificat în Observația 2.12.1 și se ține cont că  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \rightarrow e$ . q.e.d.

**Corolarul 2.12.6.** Dacă pentru seria de numere reale pozitive  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , există

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \ln n,$$

atunci au loc următoarele implicații:

$$\begin{aligned} \gamma > 0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie convergentă;} \\ \gamma < 0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este serie divergentă.} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Se aplică criteriul general al lui Kummer cu  $b_n = \ln n$ .

**q.e.d.**

## 2.12.4 Criteriul lui Gauss

**Corolarul 2.12.7. (Criteriul lui Gauss<sup>11</sup>)** Dacă  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este o serie numerică cu termeni pozitivi și raportul  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  se poate pune sub forma  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}}$ ,  $\forall n \geq N$ , unde  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\alpha > 0$ , iar  $(\theta_n)$  este un șir numeric mărginit, atunci au loc următoarele implicații:

$$\begin{aligned} \lambda > 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n && \text{este serie convergentă;} \\ \lambda = 1 \text{ și } \mu > 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n && \text{este serie convergentă;} \\ \lambda < 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n && \text{este serie divergentă;} \\ \lambda = 1 \text{ și } \mu \leq 1 &\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n && \text{este serie divergentă.} \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Deoarece  $\alpha > 0$ , iar  $(\theta_n)$  este șir mărginit, rezultă că  $\frac{\theta_n}{n^{1+\alpha}} \rightarrow 0$ . Prin urmare  $\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow \lambda$  de unde, folosind Corolarul 2.11.7, deducem că dacă  $\lambda > 1$  seria este convergentă, iar dacă  $\lambda < 1$  ea este divergentă. Dacă  $\lambda = 1$ , atunci  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mu + \frac{\theta_n}{n^\alpha} \right) = \mu$ . Din Corolarul 2.12.2 deducem că în acest caz seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă  $\mu > 1$  și divergentă dacă  $\mu < 1$ .

A rămas de cercetat cazul  $\lambda = 1$  și  $\mu = 1$ .

Vom aplica criteriul logaritm al lui Bertrand și pentru aceasta, în Corolarul 2.12.4, luăm  $p = 1$ .

$$\text{Avem } c_n = n(\ln n) \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) = (n+1) \ln \frac{n}{n+1} + \frac{\theta_n}{n^\alpha} \cdot \ln n.$$

$$\text{Dar, } 0 < \frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\ln n}{n^\alpha} < \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{n^{\frac{\alpha}{2}}}{n^\alpha} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}. \text{ Deci, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n^\alpha} \cdot \ln n = 0.$$

$$\text{Pe de altă parte, } \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \ln \frac{n}{n+1} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} = - \ln e = -1.$$

Așadar,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1 < 0$ , de unde rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.

**q.e.d.**

<sup>11</sup>Gauss, Karl Friedrich (1777–1855), matematician, fizician și astronom german celebru pentru lucrările despre integralele multiple, teoria numerelor, statistică matematică, analiză matematică, geometrie diferențială, geodezie, geofizică, electrostatică, magnetism și optică.

**Exemplul 2.12.3.** Să se studieze natura seriilor cu termeni pozitivi:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}, \quad p > 0, q > 0; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{q(q+1)\dots(q+n)} \cdot \frac{1}{n^p}, \quad p > 0, q > 0;$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) + \dots + (\alpha+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^a}, \quad \alpha > 0, a \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** (a) Termenul general al seriei și raportul a doi termeni consecutivi sunt:

$$a_n = \left( \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

Se vede că  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ , deci nu putem decide asupra naturii seriei cu ajutorul criteriului raportului. Folosim criteriul lui Raabe. Avem

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left( \left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)^p \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^q - 1 \right).$$

Pentru a finaliza acest exercițiu avem nevoie de dezvoltarea după puterile lui  $x$  a funcției  $(1+x)^p$ , pe care o vom prezenta fără demonstrație. Pentru  $p > 0$  seria de puteri ale lui  $x$

$$1 + \frac{p}{1!} \cdot x + \frac{p(p-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots,$$

numită *serie binomială*, este absolut convergentă pentru  $x \in [-1, +1]$  și are suma  $(1+x)^p$ . Prin urmare, pe intervalul  $[-1, +1]$  are loc egalitatea [15, p. 143]

$$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!} \cdot x + \frac{p(p-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{p(p-1) \cdot \dots \cdot (p-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots \quad (2.87)$$

Folosind acum seria binomială (2.87) găsim că

$$n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q + \frac{p \cdot n}{2n+1} + \frac{p \cdot q}{2n+1} + \frac{p(p-1)n}{2!(2n+1)^2} + \frac{q(q-1)}{2!n} + \dots, \quad (2.88)$$

care arată că  $n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \rightarrow q + \frac{p}{2}$ . Atunci, după criteriul lui Raabe, avem:

- $q + \frac{p}{2} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $q + \frac{p}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă;
- $q + \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  se plasează în caz de dubiu.

În ultimul caz se aplică criteriul lui Gauss. Pentru aceasta, în (2.88) facem înlocuirea  $p = 2(1-q)$  și aducem raportul  $\frac{a_n}{a_{n+1}}$  la forma din criteriul lui Gauss. Se găsește:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

unde  $(\theta_n)$  este un șir mărginit deoarece este convergent. Fiindcă suntem în cazul  $\lambda = \mu = 1$ , din Corolarul 2.12.7, deducem că seria este divergentă.

Să remarcăm un alt studiu al seriei de mai sus, mult mai simplu de altfel, care utilizează inegalitățile simple

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

ușor de demonstrat prin metoda inducției matematice și criteriul de comparație de prima speță (exercițiu!).

(b) Avem  $a_n = \frac{n!}{q(q+1)\dots(q+n)n^p}$ , din care găsim

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1 + \frac{q}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p = \\ &= \left(1 + \frac{q}{n+1}\right) \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!n^k} + \dots + \frac{1}{n^p}\right) = \\ &= 1 + \frac{p}{n} + \frac{q}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{p(p-1)}{2n^2} + \frac{pq}{n^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \dots \end{aligned}$$

Însă

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots$$

Prin urmare,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p+q}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

unde  $(\theta_n)$  este un șir convergent, deci și mărginit.

Aplicând acum criteriul lui Gauss deducem:

- $p+q > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $p+q \leq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă.

(c) Procedând ca la celelalte exemple din acest paragraf, găsim

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a+1-\alpha}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

din care deducem:

- $a > \alpha \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie convergentă;
- $a < \alpha \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  serie divergentă.

■

**Observația 2.12.2.** Din Teorema 2.4.3, Teorema 2.11.2 și Teorema 2.11.3 desprindem concluzia că dacă prin criteriul raportului reușim să determinăm natura seriei cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , atunci același lucru se realizează și prin criteriul rădăcinii. Reciproc nu este în general adevărat. În acest sens dăm exemplul următor.

**Exemplul 2.12.4.** Să se studieze natura seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots$$

și să se remarce că deși criteriul rădăcinii este concludent, cel al raportului nu se bucură de aceeași proprietate.

**Soluție.** Efectuând raportul a doi termeni consecutivi găsim:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

ceea ce conduce la concluzia

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty,$$

care, după Teorema 2.11.2, arată că nu putem să decidem natura seriei.

Dacă însă calculăm  $\sqrt[n]{a_n}$ , găsim:

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{dacă } n \text{ este par;} \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

de unde tragem concluzia că  $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$  și după Teorema 2.11.3 rezultă că seria dată este convergentă. ■

**Observația 2.12.3.** Dacă în urma aplicării criteriului radicalului nu putem decide natura unei serii cu termeni pozitivi, atunci și criteriul raportului conduce la aceeași imposibilitate.

Afirmația rezultă imediat din Teorema 2.4.3, Teorema 2.11.2 și Teorema 2.11.3. ■

**Observația 2.12.4.** Fie seria cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Dacă șirul numeric  $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \geq 1}$  are limita  $\ell$ , atunci și  $(\sqrt[n]{a_n})_{n \geq 1}$  are aceeași limită dar este posibil ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  să existe și  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  să nu existe.

Într-adevăr, prima parte a acestei observații rezultă din Teorema 2.4.3, iar pentru a justifica cea de a doua parte a ei este suficient să considerăm seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , unde  $a_{2n} = \alpha^n \beta^n$ ,  $a_{2n+1} = \alpha^{n+1} \beta^n$  și  $0 < \alpha < \beta$ . Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \sqrt{\alpha\beta} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{\frac{n+1}{2n+1}} \cdot \beta^{\frac{n}{2n+1}}, \text{ adică } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha \cdot \beta.$$

Pe de altă parte,  $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \alpha$ , iar  $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \beta$ , deci  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$ .

De asemenea, avem  $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \beta$  și cum  $\alpha < \beta$  rezultă că nu există  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . ■

**Observația 2.12.5.** Având în vedere Observația 2.12.3 putem afirma: **criteriul radicalului este mai tare (mai eficient) decât criteriul raportului.**

Încheiem acest paragraf cu prezentarea unui ultim criteriu de convergență al seriilor cu termeni pozitivi frecvent aplicat în practică.

### 2.12.5 Criteriul integral al lui Cauchy

**Teorema 2.12.2. (Criteriul integral al lui Cauchy)** Fie  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă, descrescătoare, nenegativă și fie  $a_n = f(n)$ . În aceste ipoteze, seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă dacă și numai dacă șirul numeric  $(F_n)_{n \geq 1}$ , unde  $F_n = \int_1^n f(x)dx$ , este mărginit.

*Demonstrație.* Să remarcăm întâi că  $F_n = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x)dx$ .

Deoarece  $f$  este funcție descrescătoare, are loc implicația

$$k-1 \leq x \leq k \implies f(k) \leq f(x) \leq f(k-1), \quad \forall k \in \overline{2, n}.$$

Integrând aceste inegalități pe intervalul  $[k-1, k]$  și ținând cont că  $f(k) = a_k$ , suntem conduși la:

$$a_k \leq \int_{k-1}^k f(x)dx \leq a_{k-1}, \quad \forall k \in \overline{2, n}.$$

Sumând membru cu membru aceste inegalități după  $k$  de la 2 până la  $n$ , obținem:

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq F_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},$$

sau

$$s_n - a_1 \leq F_n \leq s_{n-1},$$

unde  $s_n$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei din enunțul teoremei.

Dacă șirul  $(F_n)_{n \geq 1}$  este mărginit, rezultă că  $(s_n)_{n \geq 1}$  este șir mărginit și, din Teorema 2.10.1, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă.

Dacă seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă, avem că  $(s_n)_{n \geq 1}$  este șir mărginit deci  $(F_n)_{n \geq 1}$  este , de asemenea, mărginit. **q.e.d.**

**Observația 2.12.6.** Dacă funcția  $f$  satisface ipotezele Teoremei 2.11.2, iar șirul  $(F_n)_{n \geq 1}$ ,  $F_n = \int_1^n f(x)dx$ , este nemărginit, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , unde  $a_n = f(n)$ , este divergentă și reciproc.

**Exemplul 2.12.5.** Să se regăsească rezultatele privind natura seriei armonice generalizate utilizând criteriul integral al lui Cauchy.

**Soluție.** Seria de studiat este  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Pentru  $\alpha \leq 0$ , seria este divergentă pentru că termenul ei general nu tinde la zero.

Pentru  $\alpha > 0$ , termenul general, de rang  $n$ , al seriei este valoarea în  $n$  a funcției

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [1, +\infty).$$

Funcția  $f$  satisface ipotezele din Teorema 2.12.2 și ca atare procedăm la calculul lui  $F_n = \int_1^n f(x)dx$ . Pentru  $\alpha = 1$  găsim  $F_n = \ln n$ . Deoarece șirul  $(\ln n)$  este nemărginit, din Observația 2.12.6 rezultă că seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

Pentru  $\alpha > 0$  și  $\alpha \neq 1$ , avem  $F_n = \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1)$ .

Dacă  $0 < \alpha < 1$ , atunci  $F_n \rightarrow +\infty$ , deci seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este divergentă.

Dacă  $\alpha > 1$ , urmează că  $F_n \rightarrow \frac{1}{\alpha-1}$ .

Deoarece șirul  $(F_n)$  este convergent,  $(F_n)$  este mărginit, deci seria armonică generalizată cu  $\alpha > 1$  este convergentă. ■

Funcția  $\zeta : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  definită prin  $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha > 1$  se numește *funcția zeta a lui Riemann*. Această funcție se utilizează la calculul aproximativ al sumelor unor serii numerice [14, pp. 492–501].

**Exemplul 2.12.6.** Să se studieze natura seriilor cu termeni pozitivi:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

unde  $e^x$  este funcția exponențială cu baza numărul  $e$ .

**Soluție.** Pentru studiul naturii acestor serii, aplicăm criteriul integral al lui Cauchy. La fiecare serie vom preciza funcția  $f$  din enunțul criteriului, calculăm  $F_n$  și studiem natura șirului  $(F_n)$ .

a) Funcția

$$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}$$

satisface ipotezele din criteriul integral al lui Cauchy. Apoi,

$$F_n = \int_1^n \frac{\ln x}{x\sqrt{x}} dx = -2 \int_1^n \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right)' \ln x dx = -2 \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x \Big|_1^n - \int_1^n x^{-\frac{3}{2}} dx \right) = 2 \left( 2 - \frac{\ln n}{n} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right),$$

de unde rezultă că șirul  $(F_n)$  este convergent și are limita 4, deci este mărginit.

Conform Teoremei 2.12.2, seria de la punctul a) este convergentă.

b) Pentru această serie funcția  $f$  este definită de  $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$  și satisface ipotezele Teoremei 2.12.2. Atunci,

$$F_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx = -e^{\frac{1}{x}} \Big|_1^n = e - e^{\frac{1}{n}} \rightarrow e,$$

deci seria este convergentă.

c) Pentru  $\alpha \leq 0$ , seria este divergentă fiindcă termenul ei general nu tinde la zero.

În cazul  $\alpha > 0$ , se vede că funcția  $f$  este

$$f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)(\ln \ln x)^\alpha},$$

Observând că  $f$  este derivata funcției

$$F : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \frac{1}{1-\alpha} (\ln \ln x)^{1-\alpha},$$

deducem  $F_n = F(n) - F(2)$ , deci

$$F_n = \frac{1}{1-\alpha} \left( (\ln \ln n)^{1-\alpha} - (\ln \ln 2)^{1-\alpha} \right). \quad (2.89)$$

Pentru  $\alpha > 1$  șirul  $(F_n)$ , cu termenul general dat de (2.89), este convergent.

Prin urmare, seria de la punctul c) este convergentă.

În cazul  $\alpha < 1$ ,  $(F_n)$  este șir divergent ceea ce implică faptul că este nemărginit. După Observația 2.12.6, seria dată este divergentă.

Pentru  $\alpha = 1$  funcția  $F$  de mai sus este dată de

$$F(x) = \ln \ln x, \quad x \in [2, +\infty),$$

deci  $F_n = F(n) = \ln \ln n - \ln \ln 2$ .

Se vede ușor că  $F_n \rightarrow +\infty$ , ceea ce arată că șirul  $(F_n)$  este și de această dată nemărginit.

Prin urmare, seria  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$  este divergentă. ■

## 2.13 Calculul aproximativ al sumei unei serii numerice convergente

Să punem acum în evidență un lucru important pentru aplicațiile practice și anume acela al calculului aproximativ al sumei  $s$  a unei serii numerice convergente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  care este de fapt o altă consecință dedusă din Teorema 2.11.2.

**Corolarul 2.13.1.** Fie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o serie numerică cu termeni pozitivi, convergentă, pentru care există  $0 \leq r < 1$  astfel încât  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Atunci, pentru orice  $q \in (r, 1)$  există  $N \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea

$$0 \leq s - s_n \leq \frac{a_N \cdot q^{n-N+1}}{1-q}, \quad \forall n > N. \quad (2.90)$$

unde  $s_n$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei.

*Demonstrație.* Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$  deducem că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  luat astfel încât  $r + \varepsilon = q < 1$ , există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  cu proprietatea

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad (2.91)$$

de unde găsim  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r + \varepsilon = q \in (r, 1)$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $N$  fiind primul număr natural de după  $N(\varepsilon)$  care satisface (2.91).

Să considerăm  $n \in \mathbb{N}^*$  arbitrar dar superior lui  $N$ . Avem

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \leq q \cdot q \cdots q \cdot a_N = q^{n-N} \cdot a_N,$$

adică

$$a_n \leq q^{n-N} \cdot a_N, \quad n > N. \quad (2.92)$$



Diferența  $s - s_n$ , adică restul de ordinul  $n$  al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , este

$$s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots \quad (2.93)$$

Folosind (2.92) în (2.93) găsim

$$s - s_n \leq a_N \cdot q^{n-N+1} + a_N \cdot q^{n-N+2} + \dots + a_N \cdot q^{n-N+p} + \dots, \quad \forall n > N,$$

din care deducem (2.90).

**q.e.d.**

**Exemplul 2.13.1.** Să se arate că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$  este absolut convergentă, să se evalueze restul de ordin  $n$  al seriei și să se determine suma acesteia cu o aproximație de  $10^{-5}$ .

**Soluție.** Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = r < 1$ , din Corolarul 2.11.7 și Observația 2.11.1 deducem că seria dată este absolut convergentă. Luând  $q$  arbitrar între  $\frac{1}{2}$  și 1 avem că  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) \leq q$  dacă  $n \geq \frac{1}{2q-1} \geq [\frac{1}{2q-1}] = n \in \mathbb{N}^*$ .

Valoarea absolută a restului de ordin  $n$ ,  $R_n$ , unde  $n > N$ , este

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2^k} \right| \leq \frac{|a_N| q^{n-N+1}}{1-q}.$$

Dacă de exemplu,  $q = \frac{3}{5}$ , atunci  $[\frac{1}{2q-1}] = 5$  și  $N = 5$ . Cum  $|a_5| = \frac{5}{2^5} = 0,15625$ , din evaluarea de mai sus deducem că valoarea absolută a restului de ordin  $n$ , cu  $n > 5$ , satisface limitarea  $|R_n| = |s - s_n| \leq 0,390625 \cdot (\frac{3}{5})^{n-4}$ .

Impunem acum condiția  $0,390625 \cdot (\frac{3}{5})^{n-4} < 10^{-5}$ , din care se găsește  $n \geq 25$ .

Așadar, suma parțială de rang 25, adică  $s_{25}$  aproximează suma  $s$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{2^n}$  cu mai puțin de  $10^{-5}$ , ceea ce este echivalent cu a afirma că adunând primii 25 de termeni ai seriei, valoarea obținută reprezintă aproximarea lui  $s$  cu o eroare mai mică decât  $10^{-5}$ . ■

## 2.14 Serii numerice remarcabile

În această secțiune urmează să prezentăm un set de serii numerice remarcabile ce vor fi studiate folosind rezultatele stabilite anterior.

**Propoziția 2.14.1.** Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ , este absolut convergentă și are suma  $\frac{1}{(1-a)^2}$ , dacă  $|a| < 1$ , divergentă, dacă  $a \geq 1$ , și oscilantă pentru  $a \leq -1$ .

*Demonstrație.* Vom folosi Definiția 2.5.2 și Definiția 2.5.7.

Suma parțială de rang  $n$  a seriei de studiat,  $s_n(a)$ , este derivata sumei parțiale de rang  $n+1$  a seriei geometrice de rație  $a$  și primul termen egal cu 1. Știind că această sumă parțială este, pentru  $a \neq 1$ ,  $\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ ,

deducem că  $s_n(a) = \frac{1+na^{n+1}-(n+1)a^n}{(1-a)^2}$ ,  $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  și  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Dacă  $|a| < 1$ , avem  $na^n \rightarrow 0$ , deci  $s_n(a) \rightarrow \frac{1}{(1-a)^2}$ .

Prin urmare, în cazul  $|a| < 1$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$  este convergentă și  $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$ .

Dacă  $a \geq 1$ , șirul termenilor seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$  nu converge la zero, deci seria dată este divergentă și are suma  $+\infty$ .

În sfârșit, dacă  $a \leq -1$ , șirul sumelor parțiale al seriei are două subșiruri cu limite diferite, deci  $s_n$  este șir oscilant, de unde rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} na^{n-1}$  este oscilantă. q.e.d.

**Corolarul 2.14.1.** *Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$  este convergentă și are suma  $\frac{a}{(1-a)^2}$ , dacă  $|a| > 1$ .*

*Demonstrație.* Luăm  $b = \frac{1}{a}$ . Avem  $|b| < 1$ . Atunci,  $\sum_{n=1}^{\infty} nb^n = b \sum_{n=1}^{\infty} nb^{n-1} = \frac{b}{(1-b)^2} = \frac{a}{(1-a)^2}$ . q.e.d.

**Propoziția 2.14.2.** *Dacă pentru seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  există un șir convergent de numere reale  $(f(n))$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $a_n = f(n+p) - f(n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este serie convergentă și are suma  $s = p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - \sum_{k=1}^p f(k)$ .*

*Demonstrație.* Fie  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , suma parțială de rang  $n \in \mathbb{N}^*$  a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Atunci, pentru orice număr natural  $n > p$ , avem:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n k = 1^n (f(k+p) - f(k)) = \sum_{i=p+1}^n f(i) - \sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{i=p+1}^n f(i) + \sum_{i=n+1}^{n+p} f(i) - \left( \sum_{i=1}^p f(i) + \sum_{i=p+1}^n nf(i) \right) = \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} f(i) - \sum_{i=1}^p pf(i) = \sum_{k=1}^p f(n+k) - \sum_{k=1}^p f(k), \end{aligned}$$

de unde, prin trecere la limită, obținem  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = p \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} f(j) - \sum_{k=1}^p f(k)$ .

Prin urmare, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este convergentă și are suma  $s$ .

q.e.d.

**Observația 2.14.1.** Dacă în Propoziția 2.14.2, valoarea lui  $p$  este 1, cu notația  $f(n) = \alpha_n$ , seria  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  devine seria telescopică introdusă în Definiția 2.5.8, iar suma sa este  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(1)$ .

**Exemplul 2.14.1.** Să se arate că seriile următoare sunt convergente și au sumele indicate alăturat:

$$\begin{aligned}
 1^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \cdot \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*; & 6^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1; \\
 2^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}; & 7^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{1}{2}; \\
 3^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}; & 8^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{(q+1)(q+2)\dots(q+n)} = \frac{p+1}{q-p-1}, \\
 4^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)! + n!} = 1; & 9^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}; \\
 5^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2}; & 10^0. \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

**Soluție.** Tuturor seriilor li se aplică Propoziția 2.14.2.

De fiecare dată prezentăm doar funcția  $f$ , dedusă din termenul general al seriei corespunzătoare, aranjat într-o formă adecvată.

Așadar, avem:

$$1^0. \quad a_n = \frac{1}{p} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \right) \text{ de unde rezultă că } f(x) = -\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [1, \infty). \text{ Observăm că } a_n = f(n+p) - f(n);$$

$$2^0. \quad a_n = \frac{n!}{(n+k)!} = \frac{1}{k-1} \left( \frac{n!}{(n+k-1)!} - \frac{(n+1)!}{(n+k)!} \right) \Rightarrow f(n) = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{n!}{(n+k-1)!}. \text{ Se observă că } a_n = f(n+1) - f(n);$$

$$3^0. \quad \text{Fie } b_n = \frac{n!k!}{(n+k)!}. \text{ Observăm că } b_n = k!a_n, \text{ unde } a_n \text{ este termenul general al seriei de la punctul precedent, convergentă cu suma } \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k!}.$$

Conform Teoremei 2.6.1, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  este, de asemenea, convergentă și are suma  $k! \cdot \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{k-1}$ ;

$$4^0. \quad a_n = \frac{1}{(n-1)! + n!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow f(n) = -\frac{1}{n!}. \text{ Observăm că } a_n = f(n+1) - f(n);$$

$$5^0. \quad a_n = \frac{n}{(2n+1)!!} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(2n-1)!!} - \frac{1}{(2n+1)!!} \right). \text{ Luând } f(n) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2n-1)!!}, \text{ atunci } a_n = f(n+1) - f(n);$$

$$6^0. \quad a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = f(n+1) - f(n), \text{ unde } f(n) = -\frac{1}{n!};$$

$$7^0. \quad a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} - \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}, \text{ de unde rezultă } f(n) = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!};$$

$$8^0. \quad a_n = \frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{(q+1)(q+2)\dots(q+n)} = \frac{q!}{p!} \cdot \frac{(p+n)!}{(q+n)!} = f(n+1) - f(n), \text{ unde}$$

$$f(n) = \frac{1}{p-q+1} \cdot \frac{q!}{p!} \cdot \frac{(p+n)!}{(q+n)!};$$

$$9^0. \quad a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1} - \operatorname{arctg} \frac{n-1}{n}, \text{ deci } f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}, \quad x \in [1, +\infty);$$

$$10^0. \quad a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = f(n+1) - f(n), \text{ unde } f(x) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \in [1, +\infty). \blacksquare$$

**Propoziția 2.14.3. (Leibniz)** *Seria armonică alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$  este semi-convergentă și are suma  $\ln 2$ .*

*Demonstrație.* Faptul că seria armonică alternată este semi-convergentă s-a dovedit în Exemplul 2.8.1 și Exemplul 2.5.3. Rămâne să determinăm suma  $s$  a seriei. Fie atunci  $s_n$  suma parțială de rang  $n$  a seriei. Șirul  $(s_n)$  este convergent și are limita  $s$ . Orice subșir al șirului  $(s_n)$  are aceeași limită  $s$ . În particular, șirul  $(s_{2n})$  are limita egală cu  $s$ . Să remarcăm acum că are loc identitatea evidentă

$$s_{2n} = a_{2n} - a_n + \ln 2,$$

unde  $a_n$  este termenul general al șirului din (2.9) care are ca limită constanta  $c$  a lui Euler. Trecând la limită în ultima egalitate și ținând cont de cele spuse mai sus, rezultă ca  $s = \ln 2$ . **q.e.d.**

**Propoziția 2.14.4. (Euler)** *Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$  este convergentă și are suma egală cu constanta  $c$  a lui Euler.*

*Demonstrație.* Fie  $s_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right)$ . Evident avem  $\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = \ln \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \ln(n+1)$ ,

deci  $s_n = a_n - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$ , unde  $a_n$  este termenul general al șirului ce are drept limită constanta  $c$  a lui Euler.

Din ultima egalitate, după trecere la limită, obținem  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = c$ . **q.e.d.**

**Propoziția 2.14.5. (Euler)** *Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  este convergentă și are suma egală cu numărul  $e$ .*

*Demonstrație.* Fie  $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$  o sumă parțială a seriei date și  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$  termenul general al șirului studiat în Exemplul 2.1.1 care am văzut că este convergent către numărul  $e$ . Dar șirul  $(s_n)$  este monoton strict crescător, deci are limită finită, sau egală cu  $+\infty$ . Notăm această limită cu  $e'$ . Aplicând formula de ridicare la putere a unui binom, deducem că  $a_n$  se scrie în forma

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \frac{1}{2!} + \dots + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \cdot \dots \cdot \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right) \frac{1}{n!}. \quad (2.94)$$

Având în vedere că pentru  $k \in \overline{1, n-1}$ , avem  $1 - \frac{k}{n} < 1$ , vedem că  $a_n < s_n$ , de unde, prin trecere la limită, obținem

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e'. \quad (2.95)$$

Notăm cu  $a_n(k)$  suma primilor  $k$  termeni ai expresiei (2.94) a termenului general  $a_n$  al seriei. Avem evident  $a_n(k) \leq a_n$ , de unde prin trecere la limită, obținem

$$s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e. \quad (2.96)$$

Trecând la limită în (2.96) pentru  $k \rightarrow \infty$ , deducem

$$e' = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \leq e. \quad (2.97)$$

Din (2.95) și (2.97) rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  este convergentă și are suma  $e$ .

**q.e.d.**

**Corolarul 2.14.2.** Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  au loc inegalitățile

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}. \quad (2.98)$$

*Demonstrație.* Fie  $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ . Se vede că numărul pozitiv  $e - s_n$  admite majorarea

$$e - s_n < \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right). \quad (2.99)$$

Seria din membrul drept al lui (2.99) este o serie geometrică cu rația subunitară și pozitivă  $q = \frac{1}{n+1}$ , deci convergentă și are suma  $\frac{1}{1-q} = \frac{n+1}{n}$ . Folosind aceste rezultate în (2.99) deducem (2.98). **q.e.d.**

**Corolarul 2.14.3.** Numărul  $e$  este irațional.

*Demonstrație.* Din Corolarul 2.14.2 rezultă că  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \theta_n \in (0, 1)$  astfel încât

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}. \quad (2.100)$$

Presupunem  $e$  rațional, deci  $\exists p, q \in \mathbb{N}^*$ , prime între ele, cu  $p/q = e$ . Înlocuind în (2.100) pe  $e$  cu  $p/q$ , unde  $n = q$ , deducem  $\exists \theta = \theta(q) \in (0, 1)$  astfel încât

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta(q)}{q!q},$$

deci  $\theta(q) = q!p - q!q \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right)$ , de unde rezultă că  $\theta(q)$  este număr întreg, ceea ce este absurd. Prin urmare,  $e$  este irațional. **q.e.d.**

**Observația 2.14.2.** Utilizând inegalitățile (2.98), putem calcula valoarea aproximativă a numărului  $e$ .

**Exemplul 2.14.2.** Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului  $e$  cu o eroare mai mică cel mult egală cu  $10^{-7}$ , deci cu 6 zecimale exacte.

**Soluție.** Admitem drept valoare aproximativă a numărului  $e$  o sumă parțială  $s_n$  a seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  și anume cea diferență pentru care  $e - s_n < 10^{-7}$ . Folosim în acest scop (2.98). Prin urmare, trebuie să rezolvăm inecuația  $\frac{1}{n!n} < 10^{-7}$ . Se găsește că  $n \geq 10$  ceea ce înseamnă

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!}, \quad (2.101)$$

eroarea fiind mai mică decât  $10^{-7}$ . Efectuând calculele în (2.101), găsim că valoarea aproximativă a numărului  $e$ , cu 6 zecimale exacte, este 2,718083. ■

**Exemplul 2.14.3.** Să se arate că seriile  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$  și  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$  sunt convergente și să se determine sumele lor.

**Soluție.** Seriile sunt convergente în baza criteriului raportului cu limită.

Deoarece  $n^2 = n(n-1) + n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , avem  $\frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$ ,  $\forall n \geq 2$ , deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{4}{2!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 3 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2 + 2e.$$

Prin același procedeu vom calcula și suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ . Pentru aceasta să observăm că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ . Folosind această identitate, deducem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = \frac{1^3}{1!} + \frac{2^3}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^3}{n!} = 5 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 5e.$$

## 2.15 Produsul după Cauchy al două serii numerice

Fie șirurile de numere reale  $(u_n)_{n \geq 0}$  și  $(v_n)_{n \geq 0}$ .

**Definiția 2.15.1.** Șirul numeric  $(w_n)_{n \geq 0}$ , unde

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}, \quad (2.102)$$

se numește **convoluția** șirurilor  $(u_n)_{n \geq 0}$  și  $(v_n)_{n \geq 0}$ .

**Definiția 2.15.2.** Seria  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ , a cărei termen general  $w_n$  este definit de (2.102), se numește **seria produs** a seriilor  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ , sau **produsul în sens Cauchy** al celor două serii.

**Teorema 2.15.1.** Dacă seriile numerice cu termeni oarecare  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$  sunt absolut convergente, atunci seria produs  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  este absolut convergentă și suma sa este egală cu produsul sumelor celor două serii.

*Demonstrație.* Trebuie studiată natura șirului cu termenul general  $\sum_{k=0}^n |w_k|$ . Un calcul simplu arată că

$$\sum_{k=0}^n |w_k| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \cdot \sum_{k=0}^n |v_k|. \quad (2.103)$$

Deoarece seriile  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$  sunt convergente, șirurile sumelor parțiale ale lor sunt convergente, deci și mărginite. Prin urmare există  $M > 0$  și  $L > 0$  astfel încât

$$\sum_{k=0}^n |u_k| \leq M \text{ și } \sum_{k=0}^n |v_k| \leq L, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.104)$$

Din (2.103) și (2.104), deducem

$$\sum_{k=0}^n |w_k| \leq M \cdot L, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.105)$$

Inegalitatea (2.105) arată că șirul sumelor parțiale al seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$  este mărginit și, după Teorema 2.10.1, seria

$\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|$  este convergentă ceea ce arată că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  este absolut convergentă.

Rămâne să mai arătăm că suma seriei produs  $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$  este egală cu produsul sumelor seriilor  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

Din criteriul general al lui Cauchy aplicat seriilor convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$  avem că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $\forall n \geq \lceil \frac{1}{2} N(\varepsilon) \rceil$

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2V}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad (2.106)$$

și

$$|v_{n+1}| + |v_{n+2}| + \dots + |v_{n+p}| < \frac{\varepsilon}{2U}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad (2.107)$$

unde

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|, \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|. \quad (2.108)$$

Pe de altă parte, putem arăta că

$$\sum_{k=0}^n w_k - \left( \sum_{j=0}^n u_j \right) \left( \sum_{l=0}^n v_l \right) = \sum_{j+l>n, 0 \leq j, l \leq n} u_j v_l \leq \sum_{j+l>n, 0 \leq j, l \leq n} |u_j| |v_l|. \quad (2.109)$$

Dacă  $n > N(\varepsilon)$  și  $j + l > n$ , cel puțin unul din indicii  $j$  și  $l$  este superior lui  $\frac{1}{2}N(\varepsilon)$ , deci

$$\begin{aligned} \sum_{j+l>n, 0 \leq j, l \leq n} |u_j| |v_l| &\leq \left( |u_{\lfloor \frac{1}{2}N(\varepsilon) \rfloor + 1}| + \dots + |u_n| \right) \cdot \left( |v_0| + |v_1| + \dots + |v_n| \right) + \\ &+ \left( |v_{\lfloor \frac{1}{2}N(\varepsilon) \rfloor + 1}| + \dots + |v_n| \right) \cdot \left( |u_0| + |u_1| + \dots + |u_n| \right). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Folosind acum (2.106) – (2.108), din (2.110), obținem

$$\sum_{j+l>n, 0 \leq j, l \leq n} |u_j| |v_l| < \frac{\varepsilon}{2V} \cdot V + \frac{\varepsilon}{2U} \cdot U = \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (2.111)$$

Din (2.109) și (2.111), deducem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^n w_k - \left( \sum_{j=0}^n u_j \right) \left( \sum_{l=0}^n v_l \right) \right) = 0$ , din care obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n w_k = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n u_j \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n v_l \right). \quad (2.112)$$

Relația (2.112) demonstrează ultima parte a teoremei.

**q.e.d.**

**Observația 2.15.1.** În definiția seriei produs am folosit o notație diferită pentru termenii seriilor, în care indicele de sumare pornește de la zero. Această notație este mai convenabilă în definiția convoluției și nu modifică nimic din teoria generală dezvoltată anterior.

Teorema 2.15.1 rămâne valabilă și în cazul când una din seriile factor este absolut convergentă.

**Teorema 2.15.2.** (Mertens<sup>12</sup>) *Produsul după Cauchy al seriilor convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ , dintre care cel puțin una este absolut convergentă, este serie convergentă cu suma egală cu produsul sumelor seriilor factor.*

**Definiția 2.15.3.** Se numește **cătul în sens Cauchy** al seriilor numerice  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  și  $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ , în această ordine,

seria numerică  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  cu proprietatea că produsul după Cauchy al acesteia cu cea de a doua serie este prima

serie, adică  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \right)$ . Se obișnuiește să se scrie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} u_n}{\sum_{n=0}^{\infty} v_n}$ .

<sup>12</sup>Mertens, Franz (1840 – 1927), matematician german.



## Capitolul 3

# Elemente de teoria spațiilor metrice

### 3.1 Definiția spațiului metric. Proprietăți. Exemple

Fie  $X$  o mulțime nevidă oarecare ale cărei elemente sunt notate cu litere mici ale alfabetului latin, eventual prevăzute cu indici, și

$$X \times X = \{(x, y) : x \in X, y \in X\},$$

produsul cartezian al mulțimii  $X$  cu ea însăși.

**Definiția 3.1.1.** Aplicația, funcția,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **distanță**, sau **metrică** pe  $X$ , dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăți numite și **axiome**:

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x), \quad \forall (x, y) \in X \times X$$

(proprietatea de **simetrie** a distanței);

$$(M_3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall (x, y, z) \in X \times X \times X$$

(**inegalitatea triunghiului**).

**Observația 3.1.1.** Metrica  $d$  pe mulțimea nevidă  $X$  este o funcție reală de două variabile definită pe produsul cartezian  $X^2 = X \times X$ . Mai mult, mulțimea valorilor unei metrici  $d$  pe mulțimea nevidă  $X$  este în  $\mathbb{R}_+$ .

Într-adevăr, luând  $z = x$  în  $(M_3)$  și ținând cont de axiomele  $(M_1)$  și  $(M_2)$ , obținem  $0 \leq 2d(x, y)$ . Dacă, în plus,  $x \neq y$ , din  $d(x, y) \geq 0$  și axioma  $(M_1)$  rezultă evident  $d(x, y) > 0$ . ■

**Observația 3.1.2.** Deoarece  $d(x, y) \geq 0$ , oricare ar fi punctele  $x, y \in X$ , unde  $(X, d)$  este un spațiu metric, axiomei  $M_1$  din Definiția 3.1.1 i se spune **nenegativitate**.

**Definiția 3.1.2.** Fie  $d$  o distanță pe mulțimea nevidă  $X$ .

- (i) Numărul real nenegativ  $d(x, y)$  se numește **distanța** dintre  $x$  și  $y$ .
- (ii) Perechea  $(X, d)$  se numește **spațiu metric**.
- (iii) Elementele unui spațiu metric se numesc **puncte**.

**Definiția 3.1.3.** Se numește **subspațiu metric** al unui spațiu metric  $(X, d)$  perechea  $(X', d')$ , unde  $X'$  este o submulțime nevidă a lui  $X$ , iar  $d'$  este restricția lui  $d$  la mulțimea  $X' \times X'$ .

**Observația 3.1.3.** Dacă  $A \subset X$  este o submulțime nevidă a spațiului metric  $(X, d)$ , atunci cuplul  $(A, d_{/A \times A})$  este spațiu metric.

Într-adevăr, restricția funcției  $d \in \mathcal{F}(X)$  la mulțimea  $A \times A$

$$d_{/A \times A} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_{/A \times A}(x, y) = d(x, y), \quad \forall (x, y) \in A \times A,$$

satisface axiomele  $(M_1) - (M_3)$  din Definiția 3.1.1, deci  $d_{/A \times A}$  este o metrică pe mulțimea  $A$ . Atunci, după Definiția 3.1.2, perechea  $(A, d_{/A \times A})$  este spațiu metric. ■

**Observația 3.1.4.** Pe o mulțime nevidă  $X$  pot fi definite mai multe distanțe. Dacă  $d_1$  și  $d_2$  sunt două metrici diferite pe  $X$ , atunci spațiile metrice  $(X, d_1)$  și  $(X, d_2)$  sunt distincte.

**Propoziția 3.1.1.** Dacă  $(X, d)$  este un spațiu metric și

$$x_1, x_2, \dots, x_n, x, y, z$$

sunt puncte arbitrare din  $X$ , atunci au loc relațiile:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n); \quad (3.1)$$

$$|d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4)| \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4); \quad (3.2)$$

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \quad (3.3)$$

*Demonstrație.* Inegalitatea (3.1) este o generalizare a inegalității triunghiului  $(M_3)$ .

Pentru  $n = 2$ , (3.1) este banală, iar pentru  $n = 3$  este chiar inegalitatea triunghiulară  $(M_3)$ . Pentru  $n \geq 2$ , demonstrația se face prin inducție matematică.

Să aplicăm acum inegalitatea (3.1) punctelor  $x_1, x_2, x_3, x_4$  din  $X$ . Avem

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2),$$

de unde, ținând cont și de  $(M_3)$ , deducem  $d(x_1, x_2) - d(x_3, x_4) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4)$ .

Schimbând rolurile perechilor de puncte  $(x_1, x_2)$  și  $(x_3, x_4)$  și ținând cont iarăși de  $(M_2)$ , din ultima inegalitate găsim

$$d(x_3, x_4) - d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_2, x_4).$$

Ultimele două inegalități conduc la (3.2).

Inegalitatea (3.3) este consecință imediată a inegalității (3.2).

Într-adevăr, dacă în (3.2) luăm  $x = x_1$ ,  $y = x_3$  și  $x_2 = x_4 = z$  și ținem cont de axioma  $(M_1)$ , obținem (3.3).  
**q.e.d.**

**Observația 3.1.5.** Dacă  $X$  reprezintă mulțimea punctelor unui plan și dacă, date două puncte  $x$  și  $y$  ale acestui plan, prin  $d(x, y)$  înțelegem lungimea segmentului de dreaptă care are cele două puncte ca extremități, atunci  $(M_3)$  împreună cu (3.3) exprimă un adevăr bine cunoscut din geometria Euclidiană și anume: **lungimea oricărei laturi a unui triunghi este cel puțin egală cu valoarea absolută a diferenței celorlalte două laturi și cel mult egală cu suma acestora.** De asemenea, și (3.2) poate fi interpretată geometric: într-un patrulater oarecare din plan, valoarea absolută a diferenței lungimilor a două din laturi este cel mult egală cu suma lungimilor celorlalte două.

Din motivul expus în partea a doua din Observația 3.1.5, inegalitatea (3.2) se numește *inegalitatea patrulaterului*.

**Definiția 3.1.4.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$ . Se numește **diametrul** mulțimii  $A$  elementul

$$\text{diam } A \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{diam } A = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}.$$

Prin definiție, mulțimea vidă  $\emptyset$  are diametrul egal cu zero, deci  $\text{diam } \emptyset = 0$ .

**Propoziția 3.1.2.** Fie  $A$  și  $B$  submulțimi ale spațiului metric  $(X, d)$ . Dacă  $A \subset B$ , atunci  $\text{diam } A \leq \text{diam } B$ .

*Demonstrație.* Afirmatia de mai sus rezultă imediat din Definiția 3.1.4 și Propoziția 1.6.2.

**q.e.d.**

**Definiția 3.1.5.** Submulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  se numește **mărginită**, respectiv **nemărginită**, dacă  $\text{diam } A < +\infty$ , respectiv  $\text{diam } A = +\infty$ .

**Observația 3.1.6.** Orice submulțime a unei mulțimi mărginite este mărginită.

Într-adevăr, afirmația rezultă din Definiția 3.1.5 și Propoziția 3.1.2. ■

**Definiția 3.1.6.** Se numește **distanța** dintre submulțimile nevide  $A$  și  $B$  ale spațiului metric  $(X, d)$  numărul nenegativ  $\text{dist}(B, A) \in [0, +\infty]$ ,  $\text{dist}(B, A) = \inf\{d(x, y) : x \in B, y \in A\}$ . Dacă una din mulțimile  $A$  și  $B$  este mulțimea vidă, convenim să spunem ca  $\text{dist}(B, A) = +\infty$ .

Avem evident  $\text{dist}(B, A) = \text{dist}(A, B)$ .

Dacă  $B = \{x_0\}$ , adică  $B$  are un singur element, atunci în loc de  $\text{dist}(B, A)$  scriem  $\text{dist}(x_0, A)$ , deci

$$\text{dist}(x_0, A) = \inf\{d(x_0, x) : x \in A\}.$$

Dacă  $A$  este mulțime nevidă, atunci  $0 \leq \text{dist}(x_0, A) < +\infty$ , iar dacă  $A = \emptyset$  convenim ca  $\text{dist}(x_0, \emptyset) = +\infty$ .

Numărul nenegativ  $\text{dist}(x_0, A)$  poate fi numit în același timp și *distanța* de la punctul  $x_0$  la submulțimea de puncte  $A$ .

**Propoziția 3.1.3.** Fie mulțimile

$$\{x_0, x_1, x_2\} \subset X, \quad A \subset X, \quad B \subset X$$

și spațiul metric  $(X, d)$ . Atunci, au loc următoarele afirmații:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{dist}(x_0, A) \leq +\infty; \\ A \subset B &\implies \text{dist}(x_0, B) \leq \text{dist}(x_0, A); \\ \text{dist}(x_0, \{x\}) &= d(x_0, x); \\ \text{dist}(x_0, A \cup B) &= \min\{\text{dist}(x_0, A), \text{dist}(x_0, B)\}; \\ \text{dist}(x_0, A) &= 0 \iff x_0 \in A; \\ A \neq \emptyset &\implies |\text{dist}(x_1, A) - \text{dist}(x_2, A)| \leq d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

*Demonstrație.* Primele cinci afirmații sunt evidente dacă avem în vedere Definiția 3.1.7.

Să demonstrăm ultima afirmație. În acest sens, fie  $x \in A$ , arbitrar.

Din inegalitatea evidentă  $\text{dist}(x_1, A) \leq d(x_1, x)$  și axioma  $(M_3)$ , deducem

$$\text{dist}(x_1, A) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, A).$$

Schimbând rolurile lui  $x_1$  și  $x_2$  în această ultimă inegalitate și folosind  $(M_2)$ , obținem

$$\text{dist}(x_2, A) \leq d(x_1, x_2) + \text{dist}(x_1, A).$$

Ultimele două inegalități demonstrează și cea de-a cincea afirmație de mai sus.

**q.e.d.**

**Definiția 3.1.7.** Fie  $x_0 \in X, \varepsilon > 0$  și  $(X, d)$  spațiu metric. se numește **bilă deschisă**, sau simplu **bilă**, cu centrul în  $x_0$  și rază egală cu  $\varepsilon$ , submulțimea  $B(x_0, \varepsilon)$  a lui  $X$  definită prin

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

**Propoziția 3.1.4.** Orice bilă și, în consecință, orice submulțime a unei bile sunt mulțimi mărginite.

Reciproc, orice mulțime mărginită  $A$  este o submulțime a unei bile având centru într-un punct arbitrar  $x_0$ , iar raza  $\varepsilon$  orice număr mai mare decât  $\text{dist}(x_0, A) + \text{diam } A$ .

*Demonstrație.* Dacă  $x_1, x_2 \in B(x_0, \varepsilon)$ , atunci

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_0) + d(x_2, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

care, împreună cu Definiția 3.1.4, dovedește că  $\text{diam } B(x_0, \varepsilon) \leq 2\varepsilon$ . Prin urmare, după Definiția 3.1.5, mulțimea  $B(x_0, \varepsilon)$  este mărginită.

Faptul că orice submulțime a unei bile este mulțime mărginită rezultă din Observația 3.1.6.

Fie acum  $x$  și  $y$  două puncte arbitrare din mulțimea mărginită  $A \subset X$  și  $x_0 \in X$ , arbitrar, dar fixat. Deoarece pentru orice  $x \in A$  avem

$$d(x, x_0) \leq d(x, y) + d(y, x_0) \leq \text{diam } A + d(y, x_0),$$

rezultă că

$$d(x, x_0) \leq \text{diam } A + \text{dist}(x_0, A) < \varepsilon,$$

ceea ce arată că  $A \subset B(x_0, \varepsilon)$ , unde  $\varepsilon$  este orice număr mai mare decât  $\text{diam } A + \text{dist}(x_0, A)$ .

**q.e.d.**

**Definiția 3.1.8.** Fie  $(X, d)$  spațiu metric,  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$ . Prin **bilă închisă** de rază  $\varepsilon$  și centru  $x_0$ , înțelegem mulțimea  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset X$  definită de

$$\overline{B(x_0, \varepsilon)} = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}.$$

**Propoziția 3.1.5.** Într-un spațiu metric  $(X, d)$  au loc următoarele afirmații:

$$x \in B(x_0, \varepsilon) \iff d(x, x_0) < \varepsilon; \quad x \in \overline{B(x_0, \varepsilon)} \iff d(x, x_0) \leq \varepsilon;$$

$$B(x_0, \varepsilon) \subset \overline{B(x_0, \varepsilon)}; \quad 0 < \varepsilon' < \varepsilon \implies B(x_0, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon).$$

*Demonstrație.* Aceste afirmații sunt evidente în baza definițiilor de mai sus.

**q.e.d.**

**Definiția 3.1.9.** Două metrici  $d_1$  și  $d_2$  pe aceeași mulțime  $X$  se numesc **metrici echivalente**, și scriem  $d_1 \sim d_2$ , dacă  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon), \quad \forall x_0 \in X$$

și  $\forall \lambda > 0 \exists \mu(\lambda) > 0$  astfel încât

$$B_{d_2}(x_0, \mu(\lambda)) \subset B_{d_1}(x_0, \lambda), \quad \forall x_0 \in X.$$

**Observația 3.1.7.** Din definiția metricilor echivalente și proprietățile operațiilor cu mulțimi, rezultă că relația  $\sim$  în mulțimea metricilor echivalente pe mulțimea nevidă  $X$  este o relație binară reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci este o relație de echivalență în mulțimea metricilor pe mulțimea  $X$ .

**Propoziția 3.1.6.** O condiție suficientă ca două metrici  $d_1$  și  $d_2$  pe aceeași mulțime nevidă  $X$  să fie echivalente este ca să existe constantele  $0 < a \leq b$  astfel încât

$$ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq bd_1(x, y), \quad \forall (x, y) \in X \times X. \quad (3.4)$$

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$ . Dacă  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{b}$ , din partea a doua a inegalității (3.4) și  $x \in B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon))$  rezultă  $d_2(x_0, x) < \varepsilon$ , adică  $x \in B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$ , de unde tragem concluzia că  $B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$ .

Pentru a obține cea de a doua incluziune din Definiția 3.1.9 este destul să luăm  $\mu(\lambda) = a\lambda$ . Într-adevăr, dacă  $x \in B_{d_2}(x_0, \mu(\lambda))$ , atunci  $d_1(x_0, x) \leq \frac{1}{a}d_2(x_0, x) < a\mu(\lambda) = \lambda$ , adică  $x \in B_{d_1}(x_0, \lambda)$ . **q.e.d.**

**Observația 3.1.8.** Inegalitățile (3.4) reprezintă doar condiții suficiente pentru ca două metrici  $d_1$  și  $d_2$  pe aceeași mulțime nevidă  $X$  să fie echivalente. Se pot da exemple de metrici echivalente pentru care dubla inegalitate din (3.4) să nu aibă loc.

Într-adevăr, să considerăm  $X = \mathbb{R}$  și aplicațiile:

$$d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = |x - y|, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R};$$

$$d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Este simplu de demonstrat că aceste două aplicații sunt metrici pe  $\mathbb{R}$ . În acest sens, relațiile (1.85) – (1.88) și Definiția 3.1.1 rezolvă problema în privința lui  $d_1$ .

În ceea ce privește aplicația  $d_2$ , se arată relativ ușor că satisface axiomele  $(M_1) - (M_3)$  din Definiția 3.1.1. Evident

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

astfel că pentru a avea incluziunea  $B_{d_1}(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$  putem lua  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Pe de altă parte, se observă că

$$d_2(x, y) < 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

ceea ce conduce la afirmația evidentă

$$B_{d_2}(x_0, \rho) = \mathbb{R}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall \rho \geq 1.$$

Dacă  $0 < \rho < 1$ , din  $x \in B_{d_2}(x_0, \rho)$  rezultă  $\frac{|x - x_0|}{1 + |x - x_0|} < \rho$ , din care deducem  $|x - x_0| < \frac{\rho}{1 - \rho}$ , deci  $x \in B_{d_1}(x_0, \frac{\rho}{1 - \rho})$ .

În sfârșit, pentru a avea satisfăcută și cea de a doua incluziune din Definiția 3.1.9 este destul să luăm  $\mu(\lambda)$ , astfel încât  $\frac{\mu(\lambda)}{1 - \mu(\lambda)} < \lambda$ , aceasta însemnând că  $\mu(\lambda)$  poate fi orice număr pozitiv subunitar cu proprietatea  $\mu(\lambda) < \frac{\lambda}{1 + \lambda}$ .

Prin urmare, am demonstrat că cele două metrici sunt echivalente.

Deși aceste metrici sunt echivalente, prima din dubla inegalitate (3.4) nu are loc căci, în caz contrar, având în vedere că  $d_2(x, y) < 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$ , au loc relațiile

$$d_1(x, y) \leq \frac{1}{a}d_2(x, y) < \frac{1}{a}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

De aici, rezultă inegalitatea

$$d_1(x, y) < \frac{1}{a}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

care este falsă. ■

**Observația 3.1.9.** Dacă dubla inegalitate (3.4) are loc, atunci o formă echivalentă a acestora este

$$\alpha d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d_2(x, y), \quad (x, y) \in X \times X,$$

unde  $\alpha = \frac{1}{b}$ ,  $\beta = \frac{1}{a}$ , iar  $a$  și  $b$  sunt numerele pozitive din (3.4).

**Definiția 3.1.10.** Se numește **vecinătate** a punctului  $x_0$  din spațiul metric  $(X, d)$ , o submulțime  $V$  a lui  $X$  care include o bilă deschisă cu centrul în  $x_0$  și rază  $r > 0$ .

**Observația 3.1.10.** Mulțimea  $V \subset X$  este vecinătate a punctului  $x_0$  din spațiul metric  $(X, d)$  dacă  $\exists \varepsilon > 0$  astfel încât  $B(x_0, \varepsilon) \subset V$ .

O vecinătate a lui  $x_0$  se notează cu  $V(x_0)$ , sau cu  $V_{x_0}$ .

Mulțimea vecinătăților punctului  $x_0$  se numește **sistemul de vecinătăți** a lui  $x_0$  și se notează cu  $\mathcal{V}(x_0)$ .

**Teorema 3.1.1.** Dacă  $(X, d)$  este un spațiu metric și  $x_0 \in X$  este un punct arbitrar, atunci au loc proprietățile:

$$(V_1) \quad V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ și } \forall U \subset X \text{ astfel încât } V \subset U \implies U \in \mathcal{V}(x_0);$$

$$(V_2) \quad \forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0) \implies V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0);$$

$$(V_3) \quad \forall V \in \mathcal{V}(x_0) \implies x_0 \in V;$$

$$(V_4) \quad \forall V \in \mathcal{V}(x_0) \exists W \in \mathcal{V}(x_0), W \subset V, \text{ astfel încât } \forall y \in W \implies V \in \mathcal{V}(y).$$

*Demonstrație.* Să arătăm  $(V_1)$ .

Fie  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  și  $V \subset U$ . Din Definiția 3.1.10 și Observația 3.1.10 rezultă că există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $B(x_0, \varepsilon) \subset V$ . Cum avem și  $V \subset U$ , deducem că  $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ , ceea ce implică  $U \in \mathcal{V}(x_0)$ .

Demonstrăm  $(V_2)$ .

Fie  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ , arbitrare. Atunci, există bilele deschise  $B(x_0, \varepsilon_1) \subset V_1$  și  $B(x_0, \varepsilon_2) \subset V_2$ .

Bila deschisă  $B(x_0, \varepsilon)$ , unde  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , este inclusă atât în  $V_1$  cât și în  $V_2$ . Prin urmare,  $B(x_0, \varepsilon) \subset V_1 \cap V_2$ , ceea ce înseamnă că  $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ .

Din Definiția 3.1.10 se vede imediat că  $(V_3)$  este îndeplinită.

Pentru a demonstra  $(V_4)$ , fie  $\forall V \in \mathcal{V}(x_0)$ . Atunci,

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ astfel încât } B(x_0, \varepsilon) \subset V.$$

Este suficient să considerăm drept  $W$  chiar pe  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Dacă  $y \in W$ , întrucât  $d(y, x_0) < \varepsilon$ , luând  $\varepsilon'$  astfel încât  $0 < \varepsilon' < \varepsilon - d(x_0, y)$ , se observă că  $B(y, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon) \subset V$ , care, după Observația 3.1.10, conduce la concluzia dorită. **q.e.d.**

**Propoziția 3.1.7.** Oricare bilă deschisă dintr-un spațiu metric este vecinătate pentru orice punct al ei.

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $B(x_0, \varepsilon)$  este o astfel de bilă deschisă și  $y \in B(x_0, \varepsilon)$ , atunci bila deschisă  $B(y, \varepsilon')$ , având raza astfel încât  $0 < \varepsilon' < d(x_0, y)$ , are proprietatea:  $B(y, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon)$  care, după Definiția 3.1.10 și Observația 3.1.10, arată că  $B(x_0, \varepsilon) \in \mathcal{V}(y)$ . **q.e.d.**

O noțiune deosebit de importantă pentru analiza matematică este și aceea de *sistem fundamental de vecinătăți*, sau *bază locală*, noțiune care permite ca într-o serie de proprietăți în care intervin vecinătățile unui punct  $x_0$  să se considere elementele unei subfamilii a lui  $\mathcal{V}(x_0)$ , subfamilie care are mai puține elemente, fără ca proprietățile considerate să-și schimbe conținutul.

**Definiția 3.1.11.** Fie  $x_0 \in (X, d)$  și  $\mathcal{V}(x_0)$  sistemul vecinătăților punctului  $x_0$ . Se spune că o familie  $\mathcal{U}(x_0)$  de părți ale lui  $X$  formează un **sistem fundamental de vecinătăți**, sau o **bază locală** pentru punctul  $x_0$ , dacă satisface proprietățile:

- $\mathcal{U}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$ ;
- $\forall V \in \mathcal{V}(x_0) \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$  astfel încât  $U \subset V$ .

**Observația 3.1.11.** Mulțimea bilelor deschise cu centrul într-un punct  $x_0$  formează un sistem fundamental de vecinătăți al lui  $x_0$ .

Într-adevăr, după Propoziția 3.1.7, familia  $\mathcal{U}(x_0) = \{B(x_0, \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$  are prima proprietate din Definiția 3.1.11. Pe de altă parte, din Definiția 3.1.10, rezultă că  $\forall V \in \mathcal{V}(x_0) \exists B(x_0, \varepsilon) \subset V$  și luând  $U = B(x_0, \varepsilon)$  deducem că și cea de a doua proprietate din Definiția 3.1.11 este satisfăcută.

**Observația 3.1.12.** Am demonstrat anterior că perechea  $(\mathbb{R}, d)$ , unde

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R},$$

este spațiu metric.

Familia  $\mathcal{U}(x_0) = \{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$  constituie un sistem fundamental de vecinătăți al lui  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Observația 3.1.13.** Într-un spațiu metric  $(X, d)$ , familia de bile deschise  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0) = \{B(x_0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^*\}$  formează un sistem fundamental de vecinătăți pentru  $x_0 \in X$ . Mai mult, elementele lui  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$ , adică mulțimea  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  este numărabilă.

Într-adevăr, avem  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0) \subset \mathcal{V}(x_0)$  și

$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0) \exists \varepsilon > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B(x_0, \varepsilon) \subset V.$$

Dar, după axioma lui Arhimede (Observația 3.184), (vezi Sect. 1.6)  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât să avem  $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Atunci, se vede imediat că  $B(x_0, \frac{1}{n_0}) \subset B(x_0, \varepsilon) \subset V$ , ceea ce arată că  $\forall V \in \mathcal{V}(x_0) \exists U = B(x_0, \frac{1}{n_0}) \in \tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  așa fel încât  $U \subset V$ . Deci  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  constituie un sistem fundamental de vecinătăți pentru punctul  $x_0$ . În particular, dacă  $X = \mathbb{R}$  și  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , atunci

$$\tilde{\mathcal{U}}(x_0) = \left\{ \left( x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$



formează un sistem fundamental de vecinătăți pentru  $x_0 \in \mathbb{R}$ , arbitrar. Evident, elementele familiei  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  pot fi puse în corespondență biunivocă cu mulțimea  $\mathbb{N}^*$ , deci  $\tilde{\mathcal{U}}(x_0)$  este numărabilă.

**Definiția 3.1.12.** O mulțime nevidă abstractă  $X$  se numește **spațiu topologic** dacă fiecărui punct al ei  $i$  se poate atașa o familie de vecinătăți cu proprietățile  $(V_1) - (V_4)$ .

**Definiția 3.1.13.** Spațiul topologic  $(X, \tau)$  satisface **axioma I a numărabilității**, sau **axioma  $(C_1)$**  dacă pentru orice  $x \in X$  se poate indica un sistem fundamental numărabil de vecinătăți ale lui  $x$ .

**Teorema 3.1.2.** Orice spațiu metric  $(X, d)$  satisface axioma I a numărabilității.

*Demonstrație.* Rezultă simplu din rezultatele anterioare.

q.e.d.

**Teorema 3.1.3. (Teorema de separare a spațiilor metrice)** Pentru orice două puncte distincte  $x$  și  $y$  ale spațiului metric  $(X, d)$  există vecinătățile  $V_x$  și  $V_y$  astfel încât  $V_x \cap V_y = \emptyset$ .

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon = d(x, y)$ . Din  $(M_1)$  rezultă  $\varepsilon > 0$ . Atunci,  $V_x = B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right)$  și  $V_y = B\left(y, \frac{\varepsilon}{3}\right)$  sunt vecinătăți ale lui  $x$  și respectiv  $y$ . Aceste vecinătăți sunt disjuncte căci, în caz contrar, dacă  $V_x \cap V_y \neq \emptyset$ , ar exista  $z \in V_x \cap V_y$ , adică ar exista  $z \in V_x$  și  $z \in V_y$ . Prin urmare,  $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{3}$  și  $d(y, z) < \frac{\varepsilon}{3}$ . În acest caz am avea

$$\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3},$$

ceea ce ar conduce la contradicția  $1 < \frac{2}{3}$ .

q.e.d.

În continuare prezentăm exemple de spații metrice frecvent utilizate pe parcurs.

Până acum am definit spațiul metric  $(\mathbb{R}, d)$ , unde  $d$  este metrica obișnuită pe  $\mathbb{R}$ .

Intenționăm să prezentăm structuri de spațiu metric ale mulțimii  $\mathbb{R}^n$ .

Menționăm că, de aici înainte, un element al mulțimii  $\mathbb{R}^n$ , de forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se notează prin  $\mathbf{x}$ . Prin urmare,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**Exemplul 3.1.1. (Spațiul metric  $\mathbb{R}^n$ ).** Funcția  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad (3.5)$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sunt elemente arbitrare din  $\mathbb{R}^n$ , este metrică pe  $\mathbb{R}^n$ , deci perechea  $(\mathbb{R}^n, d)$  este spațiu metric.

**Soluție.** Să arătăm că aplicația  $d$  definită de (3.5) satisface axiomele  $(M_1) - (M_3)$  din Definiția 3.1.1.

În primul rând se vede că  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  și  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Apoi:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff (x_k = y_k, k \in \overline{1, n}) \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Așadar, funcția  $d$  din (3.5) satisface axioma  $(M_1)$ .

În privința lui  $(M_2)$ , lucrurile stau foarte simplu pentru că

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Să demonstrăm acum  $(M_3)$ . Trebuie să arătăm că  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , unde  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , avem

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \quad (3.6)$$

adică

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2}. \quad (3.7)$$

Dacă notăm  $a_k = x_k - z_k$ ,  $b_k = z_k - y_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , atunci  $x_k - y_k = a_k + b_k$  și inegalitatea (3.7) este echivalentă cu

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}, \quad (3.8)$$

sau cu

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad (3.9)$$

care, mai departe, este echivalentă cu

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (3.10)$$

Vom demonstra inegalitatea:

$$|\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (3.11)$$

Mai întâi, să remarcăm că dacă  $a_k = 0$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , inegalitatea (3.11) este satisfăcută ca egalitate.

Pentru a demonstra (3.11) când nu toți  $a_i$ , ( $i \in \overline{1, n}$ ), sunt nuli, pornim de la funcția  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cdot t - b_k)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se observă că

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Dar,

$$\varphi(t) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)t^2 - 2\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right)t + \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

ceea ce arată că  $\varphi$  este funcție de gradul al doilea cu coeficientul termenului de gradul doi, pozitiv. Atunci, (3.12) este echivalentă cu  $\Delta \leq 0$ , unde

$$\frac{\Delta}{4} = \left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k\right)^2 - \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

din care, după trecerea unui grup de termeni în membrul al doilea și extragerea rădăcinii pătrate, rezultă (3.11).

Deoarece funcția modul are proprietatea  $x \leq |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , din (3.11) rezultă (3.10).

Să observăm că (3.11) este *inegalitatea Cauchy–Buniakowski<sup>1</sup>–Schwarz<sup>2</sup>* așa cum a fost prezentată în manualul de algebră elementară.

Raționamentul făcut mai sus arată că axioma ( $M_3$ ) este satisfăcută, deci aplicația  $d$  din (3.5) este metrică pe  $\mathbb{R}^n$ , adică  $(\mathbb{R}^n, d)$  este spațiu metric. Aplicația  $d$  se numește *metrica Euclidiană* pe  $\mathbb{R}^n$ .

În cazul  $n = 1$ , metrica Euclidiană devine  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ , adică *metrica obișnuită* pe  $\mathbb{R}$ , iar în cazul  $n = 2$ , având în vedere corespondența între punctele unui plan și perechile de numere reale  $(x_1, x_2) = \mathbf{x}$ , elemente ale lui  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , rezultă că  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , este distanța Euclidiană dintre punctele  $M_1(x_1, x_2)$  și  $M_2(y_1, y_2)$ . ■

**Exercițiul 3.1.1.** (Metrici echivalente pe  $\mathbb{R}^n$ ) Să se arate că aplicațiile:

$$d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_k - y_k| : k \in \overline{1, n}\};$$

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|,$$

în care  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , sunt metrici pe  $\mathbb{R}^n$ . Arătați apoi că  $d, d_1$  și  $d_2$  sunt metrici echivalente pe  $\mathbb{R}^n$ , iar în cazul  $n = 2$  să se reprezinte grafic, în același reper cartezian din plan, mulțimile:  $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ ;  $B_1(\mathbf{0}, \varepsilon)$ ;  $B_2(\mathbf{0}, \varepsilon)$ ;  $\overline{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ ;  $\overline{B}_1(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ ;  $\overline{B}_2(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$  și să se pună în evidență concluziile din Propoziția 3.1.6.

**Indicație.** Se verifică cu ușurință că  $d_1$  și  $d_2$  satisfac axiomele ( $M_1$ )–( $M_3$ ) și apoi se arată că au loc inegalitățile:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

oricare ar fi punctele  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din  $\mathbb{R}^n$ .

În ce privește reprezentările grafice ale mulțimilor indicate, acestea se pot face lesne cu ajutorul cunoștințelor elementare de geometrie analitică. ■

**Definiția 3.1.14.** Fie spațiul metric  $(X, d)$ , mulțimea nevidă  $A$  și  $\mathcal{F}(A, X)$ , mulțimea funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $X$ . Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$  se numește **mărginită** dacă mulțimea valorilor sale,  $f(A) = \text{Im } f \subset X$ , este o mulțime mărginită în spațiul metric  $(X, d)$ .

**Exemplul 3.1.2.** (Spațiul metric al funcțiilor mărginite). Fie  $A$  o mulțime nevidă oarecare,  $(X, d)$  un spațiu metric arbitrar și  $\mathcal{F}(A, X)$  mulțimea funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $X$ . Introducem mulțimea

$$\mathcal{M}(A, X) = \{f \in \mathcal{F}(A, X) : f - \text{funcție mărginită}\}.$$

Aplicația

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M}(A, X) \times \mathcal{M}(A, X) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \rho(f, g) &= \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in A\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

este o metrică pe mulțimea  $\mathcal{M}(A, X)$ , numită **metrica convergenței uniforme**, sau **metrica lui Cebășev<sup>3</sup>**.

<sup>1</sup>Buniakowski, Victor Iakovlevici (1804–1889), matematician rus.

<sup>2</sup>Schwarz, Karl Herman Amandus (1843–1921), matematician german, cunoscut mai ales pentru contribuțiile sale în analiza complexă.

<sup>3</sup>Cebășev, Nikolai Petrovici (1869–1947), matematician rus, cunoscut mai ales pentru contribuțiile sale în analiza funcțiilor complexe.

**Soluție.** Mai întâi, din (3.13) se vede că

$$\rho(f, g) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{M}(A, X), \quad \forall g \in \mathcal{M}(A, X),$$

iar

$$\begin{aligned} \rho(f, g) = 0 &\iff d(f(x), g(x)) = 0, \quad \forall x \in A \iff \\ &\iff f(x) = g(x), \quad \forall x \in A \iff f = g, \end{aligned}$$

deci axioma  $(M_1)$  este îndeplinită.

Din (3.13) rezultă

$$\rho(f, g) = \rho(g, f), \quad \forall f, g \in \mathcal{M}(A, X),$$

ceea ce arată că și  $(M_2)$  este satisfăcută.

Fie elementele arbitrare  $f, g$  și  $h$  din  $\mathcal{M}(A, X)$ . Din faptul că  $d$  este metrică pe  $X$ , iar  $f(x), g(x), h(x), \forall x \in A$ , sunt puncte ale lui  $X$ , rezultă

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)), \quad \forall x \in A.$$

Dar, pentru orice  $x \in A$ , avem:

$$d(f(x), h(x)) \leq \sup\{d(f(x), h(x)) : x \in A\} = \rho(f, h);$$

$$d(h(x), g(x)) \leq \sup\{d(h(x), g(x)) : x \in A\} = \rho(h, g).$$

Prin urmare,

$$d(f(x), g(x)) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g), \quad \forall x \in A,$$

din care rezultă

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g),$$

ceea ce arată că aplicația  $\rho$  din (3.13) satisface  $(M_3)$ . Deoarece  $\rho$  are proprietățile  $(M_1) - (M_3)$ , rezultă că este o metrică pe  $\mathcal{M}(A, X)$ , deci cuplul  $(\mathcal{M}(A, X), \rho)$  este spațiu metric. ■

**Exemplul 3.1.3. (Spațiul metric al funcțiilor reale mărginite).** Fie  $A$  o mulțime nevidă oarecare și  $\mathcal{B}(A)$  mulțimea tuturor funcțiilor reale definite pe  $A$ , mărginite, adică funcții de forma  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că mulțimea  $f(A) = \text{Im } f \subset \mathbb{R}$  este mărginită în spațiul metric  $(\mathbb{R}, d)$ ,  $d(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,  $y_2 \in \mathbb{R}$ , ceea ce arată că  $\forall f \in \mathcal{B}(A) \exists \sup\{|f(x)| : x \in A\} < +\infty$ . Atunci, aplicația

$$\rho : \mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\} \quad (3.14)$$

este o distanță pe  $\mathcal{B}(A)$ .

**Soluție.** Într-adevăr, dacă facem observația că  $\mathcal{B}(A)$  este un caz particular de mulțime  $\mathcal{M}(A, X)$ , atunci faptul că  $\rho$  din (3.13) este metrică pe  $\mathcal{B}(A)$  rezultă din Exemplul 3.1.2. În particular, dacă  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$  și  $C([a, b]) \subset \mathcal{B}([a, b])$  este mulțimea funcțiilor reale continue definite pe compactul  $[a, b]$ , metrica indusă pe  $C[a, b]$ , notată tot cu  $\rho$ , este

$$\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}, \quad \forall f, g \in C([a, b]),$$

aceasta fiind astfel datorită teoremei lui Weierstrass pentru funcții reale de variabilă reală și pe care o vom relua într-un context mai general în capitolul următor. ■

<sup>3</sup>Cebâșev, Pafnuti Lvovici (1821–1894), renumit matematician rus.

**Exercițiul 3.1.2.** Fie spațiile metrice  $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ ,

$$X = X_1 \times \dots \times X_n,$$

produsul cartezian al mulțimilor  $X_1, \dots, X_n$ , iar  $x = (x_1, \dots, x_n)$  și  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , elemente ale lui  $X$ .

Să se arate că aplicațiile

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, y_i)};$$

$$d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d'(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : (i = \overline{1, n})\};$$

$$d'' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d''(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i);$$

$$d''' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d'''(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \cdot \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)},$$

sunt metrice pe mulțimea  $X$ .

Ce devin aceste metrice când  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = \mathbb{R}$  și metricile  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sunt identice cu metrica obișnuită din  $\mathbb{R}$ ?

**Indicație.** Folosind inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz și proprietățile funcției  $\max$ , se demonstrează că proprietățile  $(M_1) - (M_3)$  sunt satisfăcute de către oricare din funcțiile  $d, d', d''$  și  $d'''$ .

În cazul particular menționat, se compară rezultatele obținute după înlocuiri cu cele din Exemplitul 3.1.1.

Metrica  $d'''$  se va relua într-un alt exemplu. ■

## 3.2 Definiția spațiului liniar (vectorial). Proprietăți. Exemple

Fie  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  un corp comutativ, sau câmp ale cărui elemente sunt notate cu litere mici ale alfabetului grec, eventual prevăzute cu indici inferiori și al cărui element neutru la adunare este  $0$ , iar  $1$  este elementul unitate. Elementele lui  $\mathbb{K}$  se numesc *scalari*, iar câmpul  $\mathbb{K}$  *domeniu de operatori*. Fie, de asemenea,  $V$  o mulțime nevidă ale cărei elemente sunt notate cu litere ale alfabetului latin, supraliniate, și prevăzute eventual cu indici inferiori.

**Definiția 3.2.1.** Mulțimea nevidă  $V$  se numește **spațiu liniar peste câmpul de scalari  $\mathbb{K}$** , sau **spațiu vectorial peste câmpul de scalari  $\mathbb{K}$** , dacă pe  $V$  sunt definite două legi de compoziție, una binară internă, numită **adunarea** elementelor lui  $V$ , notată cu  $+$ , cu proprietatea că perechea  $(V, +)$  este grup abelian și cealaltă, externă, numită **produsul** elementelor lui  $V$  cu scalari din  $\mathbb{K}$ , notată cu  $\cdot$ , și care are proprietățile:

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad 1 \in \mathbb{K}; \quad (3.15)$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha\beta \mathbf{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall \mathbf{u} \in V; \quad (3.16)$$

$$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \forall \mathbf{u} \in V; \quad (3.17)$$

$$\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.18)$$

Relațiile (3.15), (3.16), (3.17), (3.18), în această ordine, au următoarele interpretări:

- *identitate*;
- *asociativitatea scalarilor*;
- *distributivitatea* produsului elementelor mulțimii  $V$  cu scalari din  $\mathbb{K}$  față de adunarea elementelor din  $\mathbb{K}$ ;
- *distributivitatea* produsului elementelor mulțimii  $V$  cu scalari din  $\mathbb{K}$  față de adunarea elementelor lui  $V$ .

Deși operațiile din  $K$  și operațiile din  $V$  sunt notate cu aceleași simboluri, nu se poate face confuzie între acestea.

Perechii  $(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{K} \times V$  i se asociază în mod unic, prin legea de compoziție externă pe  $V$  cu domeniul de operatori  $\mathbb{K}$ , elementul  $\alpha \cdot \mathbf{u} \in V$ , dar acesta se poate scrie fie în forma  $\alpha \mathbf{u}$ , fie  $\mathbf{u} \cdot \alpha$ , fie  $\mathbf{u}\alpha$ .

Elementele unui spațiu liniar  $V$  peste câmpul  $\mathbb{K}$  se numesc *vectori*, iar lui  $V$  i se mai spune *spațiu vectorial* peste câmpul de scalari  $\mathbb{K}$ .

Elementul nul  $\mathbf{0}$  al grupului abelian aditiv  $(V, +)$  se numește *vectorul nul*, iar elementul simetric elementului  $\mathbf{u} \in V$  în raport cu adunarea din  $V$ , notat cu  $-\mathbf{u}$ , se numește *opusul vectorului  $\mathbf{u}$* .

Dacă avem  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , atunci spațiul vectorial corespunzător  $V$  se numește *spațiu vectorial real*; când  $\mathbb{K}$  este corpul comutativ al numerelor complexe, spațiul liniar corespunzător se numește *spațiu vectorial complex*. Ori de câte ori nu se precizează în mod explicit câmpul  $\mathbb{K}$  se subînțelege că este  $\mathbb{R}$ .

Un spațiu liniar  $V$  peste câmpul de scalari  $\mathbb{K}$  se va numi, mai simplu,  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar  $V$  sau, și mai simplu, spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$ .

**Observația 3.2.1.** Într-un  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar  $V$ , vectorul nul  $\mathbf{0}$  este unic, iar opusul  $-\mathbf{u}$  al unui vector  $\mathbf{u} \in V$  este, de asemenea, unic.

Într-adevăr, această afirmație rezultă din Teorema 1.5.1. ■

**Observația 3.2.2.** Un corp comutativ  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  este spațiu vectorial peste el însuși. În particular,  $\mathbb{R}$  este spațiu liniar real.

Într-adevăr, dacă analizăm axiomele care definesc structura algebrică de corp comutativ, și anume Definiția 1.5.8, constatăm că cele care definesc spațiul liniar peste câmpul  $\mathbb{K}$  se regăsesc în totalitate printre proprietățile ternei  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ , considerată corp comutativ. ■

**Propoziția 3.2.1.** În spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$  au loc afirmațiile:

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in V; \quad (3.19)$$

$$\alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}; \quad (3.20)$$

$$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in V; \quad (3.21)$$

$$\alpha \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \alpha = 0, \quad \text{sau} \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.22)$$

*Demonstrație.* Din (3.15), (3.17) și axiomele care definesc câmpul  $\mathbb{K}$ , avem egalitățile

$$\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (1 + 0)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \mathbf{u},$$

rezultat care, dacă îl confruntăm cu Observația 3.2.1, arată că  $0\mathbf{u}$  este vectorul nul din  $V$ , deci (3.19) este adevărată.

În mod analog se demonstrează (3.20).

Din (3.15), (3.17), (3.19) și faptul că mulțimea  $\mathbb{K}$  este corp comutativ, deducem:

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

de unde în baza Observației 3.2.1, rezultă (3.21).

Dacă  $\alpha = 0$ , sau  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , rezultă că  $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Să presupunem, în sfârșit, că  $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$  și să arătăm că  $\alpha = 0$ , sau  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Dacă  $\alpha \neq 0$ ,  $\exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$  cu proprietatea  $\alpha\alpha^{-1} = 1 \in K$ . Înmulțind la stânga în  $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$  cu  $\alpha^{-1}$  și folosind (3.16) și (3.15), deducem  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Dacă însă  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , din  $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$  rezultă  $\alpha = 0$ , căci în caz contrar, raționând ca mai sus, deducem  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui  $\mathbf{u}$ . **q.e.d.**

**Teorema 3.2.1.** Dacă  $V$  este  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar, mulțimea

$$V^n = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{\text{de } n \text{ ori}}$$

este, de asemenea, un  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar.

*Demonstrație.* Elementele oarecare  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  ale mulțimii  $V^n$  au formele

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n),$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n),$$

unde  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ , cu  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  sunt  $2n$  vectori din  $V$ .

Definim adunarea în  $V$  prin

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^n \times V^n \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v},$$

unde

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n), \quad \mathbf{u} \in V^n, \mathbf{v} \in V^n.$$

Din modul cum a fost definită adunarea în  $V^n$  deducem că aceasta este lege de compoziție binară internă pe  $V^n$ , adică

$$+ : V^n \times V^n \rightarrow V^n.$$

Se constată imediat că  $(V^n, +)$  este grup abelian deoarece adunarea în  $V^n$  satisface axiomele care definesc noțiunea de grup abelian.

Elementul nul în  $V^n$  este  $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ , iar opusul elementului  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \in V^n$  este  $-\mathbf{u} = (-\mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2, \dots, -\mathbf{u}_n)$  care se vede că este, de asemenea, element al lui  $V^n$ .

Definim operația de înmulțire a elementelor lui  $V^n$  cu scalari din  $\mathbb{K}$ , prin

$$\forall (\alpha, \mathbf{u}) \in \mathbb{K} \times V^n \mapsto \alpha\mathbf{u}, \quad \text{unde} \quad \alpha\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{u}_1, \alpha\mathbf{u}_2, \dots, \alpha\mathbf{u}_n),$$

din care rezultă că operația de înmulțire a elementelor lui  $V^n$  cu scalari din  $\mathbb{K}$  este o lege de compoziție externă pe  $V^n$ , cu domeniu de operatori  $\mathbb{K}$ .

Din modul cum s-a definit această lege și folosind faptul că  $V$  este spațiu vectorial peste câmpul  $\mathbb{K}$ , deducem cu ușurință că (3.15) – (3.18) sunt verificate, deci  $V^n$  este spațiu liniar peste câmpul  $\mathbb{K}$ . **q.e.d.**

**Observația 3.2.3.** Mulțimea  $\mathbb{K}^n$  este  $\mathbb{K}$ -spațiu vectorial. În particular,  $\mathbb{R}^n$  este spațiu vectorial real.

Într-adevăr, aceste afirmații rezultă din Observația 3.2.2 și Teorema 3.2.1. ■

**Definiția 3.2.2.** Submulțimea nevidă  $S \subset V$  se numește **subspațiu liniar** al spațiului liniar  $V/\mathbb{K}$  dacă cele două legi de compoziție care definesc pe  $V$  ca spațiu liniar, induc pe  $S$  o structură algebrică de  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar.

Se poate demonstra fără dificultate ([9, p. 40]) rezultatul următor.

**Teorema 3.2.2.** Fie  $V$  un  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar și  $S$  o submulțime nevidă a lui  $V$ . Mulțimea  $S$  este subspațiu liniar al lui  $V$  dacă și numai dacă

$$\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in S, \forall \mathbf{v} \in S.$$

**Exemplul 3.2.1. (Spațiul vectorial  $s$  al șirurilor de numere reale)** Mulțimea  $s$  a tuturor șirurilor de numere reale este spațiu vectorial.

**Soluție.** Definim adunarea în  $s$  în modul următor: fie  $\mathbf{a} = (a_n)$  și  $\mathbf{b} = (b_n)$  două șiruri numerice arbitrare; prin suma celor două șiruri se înțelege șirul  $\mathbf{c} = (c_n)$  al cărui termen general este  $c_n = a_n + b_n$ ,  $n \geq 1$ . Prin urmare, adunarea este lege de compoziție binară internă pe  $s$  și, se constată ușor că, cuplul  $(s, +)$  este grup abelian.

Produsul dintre șirul  $\mathbf{a} = (a_n)$  și numărul real  $\lambda$  este șirul  $\mathbf{b} = (b_n)$  al cărui termen general este  $b_n = \lambda \cdot a_n$ ,  $\forall n \geq 1$ . Din nou constatăm cu ușurință că operația de înmulțire a elementelor lui  $s$  cu scalari din  $\mathbb{R}$  satisface (3.15) – (3.18). Prin urmare, după Definiția 3.2.1,  $s$  este  $\mathbb{R}$ -spațiu liniar.

Dacă notăm cu  $m$  submulțimea lui  $s$  formată din toate șirurile mărginite și aplicăm Teorema 3.2.2, constatăm că aceasta este subspațiu liniar al lui  $s$ .

Fie acum  $c_0$  submulțimea lui  $m$  alcătuită din toate șirurile convergente la zero. Din nou, folosind rezultatele din primul paragraf al capitoului al doilea și Teorema 3.2.2, constatăm că  $c_0$  este subspațiu liniar al lui  $m$ , deci și al lui  $s$ . ■

**Exercițiul 3.2.1.** Să se arate că submulțimea  $l_2$  a lui  $s$  dată de:

$$l_2 = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1} : a_n \in \mathbb{R} \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty\}$$

este subspațiu liniar al lui  $s$ .

**Soluție.** Aplicăm Teorema 3.2.2. Dacă  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in l_2$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$  sunt elemente arbitrare, atunci  $\lambda \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b}$  este șirul care are termenul general  $\lambda \cdot a_n + b_n$ . Pentru a arăta că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_n + b_n)^2$  este convergentă, aplicăm criteriul general de convergență al unei serii numerice al lui Cauchy din Teorema 2.7.1. Pentru aceasta calculăm

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda \cdot a_k + b_k)^2. \text{ Avem}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda \cdot a_k + b_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 + 2\lambda \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \cdot b_k + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2,$$



din care, dacă folosim inegalitatea (3.11) a lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz, obținem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda \cdot a_k + b_k)^2 \leq \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 + 2|\lambda| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2} + \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2. \quad (3.23)$$

Deoarece  $\mathbf{a} = (a_n) \in l_2$ ,  $\mathbf{b} = (b_n) \in l_2$ , deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  așa fel încât

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k^2 < \frac{\varepsilon}{4\lambda^2}, \quad \forall n > N_1(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.24)$$

Pentru același  $\varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k^2 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall n > N_2(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.25)$$

Atunci, pentru  $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ , (3.24) și (3.25) au loc simultan, iar din (3.23) – (3.25) deducem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} (\lambda a_k + b_k)^2 < \lambda^2 \frac{\varepsilon}{4\lambda^2} + 2\lambda \frac{\varepsilon}{2\lambda} \frac{\varepsilon}{2\lambda} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \quad (3.26)$$

Relația (3.26), împreună cu criteriul general al lui Cauchy de convergență a unei serii numerice, demonstrează că seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + b_n)^2 < +\infty$ , deci  $\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b} \in l_2$ , care, după Teorema 3.2.2, arată că  $l_2$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $s$ . ■

**Exemplul 3.2.2. (Spațiul vectorial  $\mathcal{F}(A, V)$ )** Fie  $A$  o mulțime nevidă arbitrară,  $V/\mathbb{K}$  un spațiu vectorial și  $\mathcal{F}(A, V)$  mulțimea funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $V$ . Atunci,  $\mathcal{F}(A, V)$  este  $\mathbb{K}$ –spațiu vectorial.

**Soluție.** Într-adevăr, dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, V)$ , atunci definim suma lor, notată  $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ , ca fiind funcția definită pe  $A$  ale cărei valori se determină după legea

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \quad \forall x \in A.$$

Deoarece  $\mathbf{f}(x) \in V$  și  $\mathbf{g}(x) \in V$  rezultă  $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \in V$ , deci  $(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) \in V$ ,  $\forall x \in A$ , ceea ce arată că  $\mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, V)$ . În baza faptului că  $(V, +)$  este grup abelian rezultă că  $(\mathcal{F}(A, V), +)$  este, de asemenea, grup abelian. Elementul nul al acestui grup este funcția nulă  $\mathbf{0} : A \rightarrow V$  definită prin  $\mathbf{0}(x) = \mathbf{0} \in V$ ,  $\forall x \in A$ , iar opusul elementului  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V)$  este elementul  $-\mathbf{f} : A \rightarrow V$  definit de  $(-\mathbf{f})(x) = -\mathbf{f}(x)$ ,  $\forall x \in A$ .

Definim produsul elementului  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V)$  cu scalarul  $\lambda \in \mathbb{K}$ , elementul notat prin  $\lambda \mathbf{f}$ , dat de  $(\lambda \mathbf{f})(x) = \lambda \mathbf{f}(x)$ ,  $\forall x \in A$ . Rezultă că  $\lambda \mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  și  $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V)$  și că operația externă astfel introdusă satisface (3.15) – (3.18). Prin urmare,  $\mathcal{F}(A, V)$  este  $\mathbb{K}$ –spațiu vectorial. În particular, dacă  $V = \mathbb{R}$ , mulțimea  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(A)$  este spațiu liniar real. ■

**Definiția 3.2.3.** Fie  $V$  un  $\mathbb{K}$ –spațiu liniar și  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v} \in V$ . Spunem că vectorul  $\mathbf{v}$  este **combinație liniară** a vectorilor  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$  dacă există  $p$  scalari  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ,  $i \in \overline{1, p}$ , astfel încât

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i.$$

**Definiția 3.2.4.** Fie spațiul vectorial  $V/\mathbb{K}$ . Sistemul de vectori  $S_p = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\} \subset V$  se numește **liniar dependent**, sau vectorii  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$  se numesc **liniar dependenți** dacă există scalarii  $\lambda_j \in \mathbb{K}$ ,  $j \in \overline{1, p}$ , nu toți nuli, așa fel încât

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

**Definiția 3.2.5.** Dacă egalitatea (3.27) are loc atunci și numai atunci când  $\lambda_j = 0$ ,  $j \in \overline{1, p}$ , sistemul de vectori  $S_p = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$  se numește **liniar independent**. În această situație, vectorii  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$  se numesc **liniar independenți**.

**Definiția 3.2.6.** Un sistem infinit de vectori din  $\mathbb{K}$ –spațiul vectorial  $V$  se numește **liniar independent** dacă orice subsistem finit al său este liniar independent.

**Definiția 3.2.7.**  $\mathbb{K}$ –spațiul liniar  $V$  se numește **finit dimensional** dacă există numărul natural  $n = \dim V$  cu proprietatea că numărul maxim de vectori liniar independenți din  $V$  este  $n$ . Numărul natural  $n = \dim V$  se numește **dimensiunea**  $\mathbb{K}$ –spațiului vectorial finit dimensional  $V$ .

Dacă  $V = \{\mathbf{0}\}$ , atunci  $\dim V = 0$ . Dacă  $S \subset V$  este subspațiu liniar al  $\mathbb{K}$ –spațiului vectorial  $V$ , atunci  $\dim S \leq \dim V$ .

Putem afirma că spațiul liniar  $V$  peste câmpul  $\mathbb{K}$  este finit dimensional și are dimensiunea egală cu  $n$  dacă există  $n$  vectori liniar independenți și orice sistem format din  $n + 1$  vectori ai lui  $V$  este liniar dependent.

**Definiția 3.2.8.** Se numește **bază** în spațiul liniar nenul  $n$ –dimensional  $V/\mathbb{K}$ , orice sistem format din  $n$  vectori din  $V$ , liniar independenți.

**Teorema 3.2.3.** Condiția necesară și suficientă ca sistemul finit de vectori  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$  să fie bază a spațiului liniar  $V/\mathbb{K}$  este ca orice vector  $\bar{\mathbf{x}} \in V$  să se exprime în mod unic ca o combinație liniară de vectorii sistemului  $\mathcal{B}$ , de forma

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_n \mathbf{u}_n, \quad (3.28)$$

unde  $x_i \in \mathbb{K}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ .

**Demonstrație. Necesitatea.** Dacă  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  este bază în spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$ , atunci din Definiția 3.2.7 și Definiția 3.2.8 rezultă că sistemul de vectori  $S_{n+1} = \{\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset V$ , unde  $\mathbf{x}$  este vector arbitrar din  $V$ , este liniar dependent. Atunci, după (3.27), există scalarii  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  din  $\mathbb{K}$ , nu toți nuli, astfel încât

$$\lambda \mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \quad (3.29)$$

Scalarul  $\lambda \in \mathbb{K}$  din (3.29) nu poate fi nul căci în caz contrar, ar rezulta că  $\mathcal{B}$  este sistem de vectori liniar dependent. Notând  $x_i = -\lambda^{-1} \lambda_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , din (3.29) obținem (3.28).

Să aratăm că scrierea (3.28) este unică. Presupunem contrariul și anume că vectorul  $\mathbf{x}$  se poate scrie și în forma

$$\mathbf{x} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + \dots + y_n \mathbf{u}_n. \quad (3.30)$$

Atunci, din (3.28), (3.30) și Propoziția 3.2.1, deducem

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \mathbf{u}_i = \mathbf{0}. \quad (3.31)$$

Deoarece  $\mathcal{B}$  este bază, din (3.31), Definiția 3.2.8 și Definiția 3.2.5 rezultă  $y_i - x_i = 0$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , adică  $y_i = x_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , ceea ce arată că scrierea (3.28) este unică.

**Suficiența.** Dacă orice vector  $\mathbf{x} \in V/\mathbb{K}$  se exprimă în mod unic în forma (3.28), vectorul nul  $\mathbf{0}$  are aceeași proprietate, deci egalitatea

$$\mathbf{0} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n \quad (3.32)$$

coroborată cu egalitatea

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \dots + 0\mathbf{u}_n,$$

evidentă în baza lui (3.19), conduce la concluzia  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

Cu alte cuvinte, (3.32) are loc dacă și numai dacă toți scalarii  $\lambda_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  sunt nuli ceea ce, după Definiția 3.2.5, atrage că  $\mathcal{B}$  este sistem de vectori liniar independent.

Cum, în baza lui (3.28), nu pot exista  $n + 1$  vectori ai lui  $V$ , liniar independenți, rezultă că  $\mathcal{B}$  este bază în  $V/\mathbb{K}$ . **q.e.d.**

**Definiția 3.2.9.** Dacă  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  este o bază în spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$  de dimensiune  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $\mathbf{x} \in V$ , atunci scalarii unic determinați  $x_1, x_2, \dots, x_n$  astfel încât să aibă loc (3.29) se numesc **coordonatele** vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$  și scriem acest fapt fie în forma (3.28), fie în forma

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}.$$

**Propoziția 3.2.2.** Dacă  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$  sunt doi vectori arbitrari din spațiul vectorial  $n$ -dimensional  $V/\mathbb{K}$ , iar  $\lambda \in \mathbb{K}$  este un scalar arbitrar, atunci

$$\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)_{\mathcal{B}}, \\ \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)_{\mathcal{B}}. \end{cases} \quad (3.33)$$

*Demonstrație.* Egalitățile (3.33) rezultă imediat în baza afirmațiilor de mai sus.

**q.e.d.**

**Observația 3.2.4.** Dacă în spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$ , finit dimensional, este fixată o bază, atunci operațiile din  $V$  se dau prin operații corespunzătoare pe coordonate.

**Definiția 3.2.10.** Spațiul vectorial  $V$  peste câmpul de scalari  $\mathbb{K}$  se numește **infini dimensional** dacă există un sistem infinit de vectori, liniar independent. În acest caz  $\dim V = +\infty$ .

**Definiția 3.2.11.** Se numește **bază infinită** într-un spațiu liniar  $V/\mathbb{K}$  un sistem infinit liniar independent de vectori din  $V$ .

**Observația 3.2.5.** Spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$  este infinit dimensional dacă are o bază infinită. Spațiul liniar  $V/\mathbb{K}$  are dimensiunea finită  $n \in \mathbb{N}^*$  dacă în el există o bază formată din  $n$  vectori.

**Observația 3.2.6.** Se poate demonstra că în orice spațiu vectorial nenul  $V/\mathbb{K}$  există cel puțin o bază și că dată o bază în  $V$  se pot construi alte baze [9, p. 49], numărul acestora fiind infinit. De asemenea, oricare două baze ale aceluiași spațiu vectorial, de dimensiune finită, conțin același număr de vectori, număr care este dimensiunea spațiului respectiv.

**Observația 3.2.7.** Dimensiunea  $\mathbb{K}$ -spațiului liniar  $V$  este cardinalul bazelor sale.

**Observația 3.2.8.** Dacă  $\mathcal{B}$  și  $\mathcal{B}'$  sunt două baze ale  $\mathbb{K}$ -spațiului vectorial  $V$ , atunci ele sunt cardinal echivalente în sensul că există o aplicație bijectivă  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ .

**Observația 3.2.9.** Într-un spațiu vectorial  $n$ -dimensional  $V/\mathbb{K}$  în care o bază este  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ , exprimarea (3.28) a unui vector  $\mathbf{x} \in V$  în baza  $\mathcal{B}$  se poate scrie, cel puțin formal, în modul:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} X, \quad (3.34)$$

unde  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) \in V^n$ ,  $X$  este matricea coloană și cu  $n$  linii având ca elemente coordonatele vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ , iar prin produsul dintre vectorul  $\mathbf{u} \in V^n$  și matricea unicolonară  $X$  înțelegem desigur vectorul  $\mathbf{x} \in V$  dat de membrul doi al lui (3.28), adică

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} X = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i.$$

**Exemplul 3.2.3.** (Spațiul liniar al matricelor de același tip) Mulțimea  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ , a matricelor de același tip  $m \times n$ , cu elemente din câmpul  $\mathbb{K}$ , este  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar de dimensiune  $m \cdot n$ .

**Soluție.** O matrice de tipul  $m \times n$  cu elemente din  $\mathbb{K}$  este o aplicație  $f : M \times N \rightarrow \mathbb{K}$ , unde  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  și  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Se vede că mulțimea  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  a tuturor matricelor de același tip  $m \times n$  cu elemente din  $\mathbb{K}$  este de fapt mulțimea  $\mathcal{F}(M \times N, \mathbb{K})$  care este spațiu liniar peste câmpul  $\mathbb{K}$  dacă avem în vedere rezultatele din Exemplul 3.2.2 și Observația 3.2.2.

Deoarece mulțimea valorilor lui  $f \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  se poate organiza sub forma unui tabel dreptunghiular alcătuit din  $m$  linii și  $n$  coloane, astfel încât la intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$  să se găsească valoarea funcției  $f$  în perechea  $(i, j) \in M \times N$ , o matrice se poate nota prin  $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Indicele  $i$  este evident indice de linie al matricei,  $j$  este indice de coloană, iar  $a_{ij}$  se numește **elementul de pe linia  $i$  și coloana  $j$**  al matricei  $A$ .

Să arătăm acum că  $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$ . Pentru aceasta introducem sistemul  $\mathcal{B}$  de matrice

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{mn}\} \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \quad (3.35)$$

unde matricea  $E_{ij} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  are toate elementele egale cu zero cu excepția celui de pe linia  $i$  și coloana  $j$  care este egal cu  $1 \in \mathbb{K}$ . Evident,  $\mathcal{B}$  are  $m \cdot n$  elemente.

Sistemul de matrice  $\mathcal{B}$  din (3.35) este liniar independent deoarece combinația liniară

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot E_{ij} = O \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

are loc dacă și numai dacă  $\lambda_{ij} = 0 \in \mathbb{K}, \forall i \in \overline{1, m} \forall j \in \overline{1, n}$ .

Pe de altă parte, orice matrice  $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  se scrie în mod unic în forma

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} E_{ij}.$$

Acum, din Teorema 3.2.3 rezultă că  $\mathcal{B}$  din (3.35) este bază în  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ , iar din Observația 3.2.5 deducem că  $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$ . Baza  $\mathcal{B}$  din (3.35) se numește *baza canonică*, sau *baza standard* din  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ . ■

**Exercițiul 3.2.2.** (Spațiul liniar  $\mathbb{K}^n$ ) Să se arate că mulțimea  $\mathbb{K}^n$  este  $\mathbb{K}$ -spațiu liniar de dimensiune  $n$ .

**Soluție.** Din Definiția 3.2.3 avem că mulțimea  $\mathbb{K}^n$  este într-adevăr spațiu liniar peste câmpul  $\mathbb{K}$ .

Să arătăm că are dimensiunea egală cu  $n$ .

Pentru aceasta, fie sistemul de vectori

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{K}^n,$$

unde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1) \quad (3.36)$$

Se constată simplu că sistemul de vectori din (3.36) este liniar independent și dacă  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , atunci

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) = \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Prin urmare, avem

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e} X, \quad (3.37)$$

unde  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$  și  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , elementele singurei sale coloane fiind  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Rezultatele stabilite permit să afirmăm că mulțimea de vectori  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , unde  $\mathbf{e}_i, i \in \overline{1, n}$  sunt dați în (3.36), este o bază în  $\mathbb{K}^n$  și deci  $\dim \mathbb{K}^n = n$ .

Baza  $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}^n$  ale cărei elemente sunt (3.36) se numește *baza canonică*, sau *baza standard* din  $\mathbb{K}^n$ . Dacă un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$  se scrie în forma  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , conform lui (3.37) subînțelegem că  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt coordonatele lui  $\mathbf{x}$  în baza canonică din  $\mathbb{K}^n$ .

În particular, considerând  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , deducem că mulțimea  $\mathbb{R}^n$  este spațiu vectorial real. ■

**Exercițiul 3.2.3.** Să se arate că spațiul liniar  $s$  al șirurilor de numere reale este infinit dimensional.

**Soluție.** Considerăm mulțimea infinită de șiruri

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \dots\}, \quad (3.38)$$

unde șirul  $\mathbf{e}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ , are toți termenii egali cu  $0 \in \mathbb{R}$  cu excepția termenului de rangul  $i$  care este  $1 \in \mathbb{R}$ . Utilizând Definiția 3.2.6 și Definiția 3.2.5, constatăm că mulțimea de vectori  $\mathcal{B}$  din (3.38) este un sistem infinit de vectori din  $\mathcal{S}$ , liniar independent, deci este bază în  $\mathcal{S}$ . Prin urmare, după Observația 3.2.5, rezultă că  $\mathcal{S}$  este spațiu liniar real infinit dimensional. ■

**Exercițiul 3.2.4.** Care din următoarele mulțimi de vectori sunt baze în  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{u}_2 = (1, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)\};$
- (b)  $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{f}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{f}_3 = (1, 1, 1)\};$
- (c)  $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1 = (-1, 1, 1), \mathbf{g}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{g}_3 = (1, 1, -1)\};$
- (d)  $\mathcal{H} = \{\mathbf{h}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{h}_2 = (1, 0, -1), \mathbf{h}_3 = (-1, 0, 1)\}.$

**Soluție.** Vectorii sunt exprimați în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}.$$

Notăm  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)^3$  și  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) \in (\mathbb{R}^3)^3$ . Atunci,

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}C, \quad (3.39)$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Coloanele matricei  $C$  sunt coordonatele vectorilor  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$  în baza canonică  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ . Cu ajutorul acestei matrice, practic, se face *trecerea* de la sistemul vectorilor bazei la sistemul  $\mathcal{U}$  de vectori. Din acest motiv matricei  $C$  i se spune *matricea de trecere* de la baza  $\mathcal{B}$  la sistemul  $\mathcal{U}$  de vectori.

Pentru ca  $\mathcal{U}$  să fie bază în  $\mathbb{R}^3$ , trebuie ca vectorii care alcătuiesc sistemul să fie liniar independenți, deci combinația liniară

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \lambda_3 \mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

să aibă loc numai când  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Folosind Observația 3.2.9, constatăm că egalitatea (3.40) se scrie în forma

$$\mathbf{u}\Lambda = \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

unde membrul drept este vectorul nul din  $\mathbb{R}^3$ , iar  $\Lambda$  din membrul întâi este matrice coloană, cu trei linii de elemente  $\lambda_1, \lambda_2$  și  $\lambda_3$ , respectiv.

Înlocuind pe  $\mathbf{u}$  din (3.39) în (3.41), obținem

$$\mathbf{e}(C\Lambda) = \mathbf{0}. \quad (3.42)$$

Ținând cont acum că  $\mathcal{B}$  este bază în  $\mathbb{R}^3$ , din (3.42) deducem

$$C\Lambda = \mathbf{O}, \quad (3.43)$$

unde, în membrul doi,  $\mathbf{O}$  este matricea unicolonară cu trei linii, cu elementele egale cu zero.

Însă (3.43) este un sistem liniar și omogen de trei ecuații cu trei necunoscute  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; acesta are numai soluția banală dacă și numai dacă

$$\det C \neq 0. \quad (3.44)$$

Calculând determinantul matricei  $C$ , găsim  $\det C = -1$ , ceea ce arată că (3.43) are numai soluția banală.

Aceeași afirmație este adevărată și pentru (3.40) și prin urmare  $\mathcal{U}$  este bază în  $\mathbb{R}^3$ .

În mod asemănător se studiază celelalte puncte.

De exemplu, la sistemul de vectori de la punctul (b) matricea de trecere are determinantul nul ceea ce atrage faptul că sistemul (3.43) are soluții nebanale și prin urmare combinația (3.40) are loc și când nu toți scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sunt nuli. Aceasta înseamnă că vectorii  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$  sunt liniar dependenți, deci  $\mathcal{F}$  nu este bază în  $\mathbb{R}^3$ . ■

Analiza acestui exercițiu sugerează o teoremă importantă a algebrei liniare (vezi [7], [9, p. 96]) pe care o dăm fără demonstrație.

**Teorema 3.2.4.** Fie  $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  o bază în spațiul  $n$ -dimensional  $V/\mathbb{K}$  și  $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ , matricea de trecere de la baza  $\mathcal{B}$  la sistemul de vectori

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n\}.$$

Necesar și suficient ca  $\mathcal{U}$  să fie bază în  $V$  este ca matricea de trecere  $C$  să fie nesingulară, sau echivalent, determinantul matricei de trecere să fie diferit de zero.

### 3.3 Șiruri de puncte în spații metrice. Șir de funcții

În acest paragraf vom extinde noțiunea de șir la alte mulțimi de elemente.

Pentru a putea transpune unele rezultate de la șirurile numerice, studiate în Cap.2, este nevoie ca aceste mulțimi să fie înzestrate cu o asemenea structură încât să permită introducerea noțiunii de vecinătate. Acesta este cazul spațiilor metrice. Vom constata că majoritatea proprietăților expuse în Cap. 2 se extind în mod natural la spații metrice, dar vom vedea, pe de altă parte, că există și unele proprietăți care nu se mai conservă în cadrul spațiilor metrice. Astfel, vom observa că nu orice șir fundamental de puncte dintr-un spațiu metric este convergent, ceea ce impune considerarea unui noi noțiuni, aceea de *spațiu metric complet*, un spațiu de puncte în care noțiunile de șir convergent și de șir fundamental coincid. Această categorie de spații metrice este de o deosebită importanță în analiza matematică, fapt de care ne vom putea convinge în continuare.

**Definiția 3.3.1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric oarecare. Se numește **șir de puncte** în  $X$  aplicația, funcția

$$f : \mathbb{N}_k \rightarrow X, \quad \text{unde} \quad \mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Punând  $f(n) = x_n$ , unde  $x_n \in X$ , șirul se notează prin  $(x_n)_{n \geq k}$ . Uzual se ia  $k = 1$ , uneori  $k = 0$ . În cazul  $k = 1$ , se scrie prescurtat  $(x_n)$ .

**Definiția 3.3.2.** Fie șirul de puncte  $(x_n)$ .

- Punctele  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  se numesc **termenii șirului**  $(x_n)$ .
- Mulțimea  $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subset X$  se numește **mulțimea valorilor șirului**.
- Punctul  $x_n \in X$  se numește **termenul general**, sau **termenul de rang  $n$  al șirului**  $(x_n)$ .

Evident, nu excludem cazul în care  $X$  este în același timp și spațiu vectorial, caz în care șirului de puncte i se spune *șir de vectori*. Un astfel de șir se notează prin  $(\mathbf{x}_n)$ , unde  $\mathbf{x}_n \in X$  și  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definiția 3.3.3.** Spunem că șirul de puncte  $(x_n)$  din spațiul metric  $(X, d)$  are **limita**  $x \in X$  dacă în afara oricărei vecinătăți  $V \in \mathcal{V}(x)$  rămân un număr finit de termeni ai șirului sau, altfel spus, dacă mulțimea valorilor lui  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care  $a_n \notin V$  este finită.

Dacă  $x$  este limita șirului de puncte  $(x_n)$  din spațiul metric  $(X, d)$ , atunci scriem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{sau} \quad x_n \rightarrow x$$

și spunem că  $(x_n)$  este *convergent* în  $X$  la  $x$ , sau că șirul de puncte  $(x_n)$  *converge* în  $X$  la (către) punctul  $x$ .

**Definiția 3.3.4.** Șirurile de puncte din spațiul metric  $(X, d)$  care nu sunt convergente se numesc **divergente**, sau **fără limită**.

Având în vedere că noțiunea de vecinătate a punctului  $x \in X$  implică numărul real nenegativ  $d(x, y)$ , unde  $y \in X$ , putem da următoarea teoremă de caracterizare a convergenței unui șir de puncte dintr-un spațiu metric.

**Teorema 3.3.1.** Șirul de puncte  $(x_n), x_n \in (X, d)$ , este convergent la  $x \in X$  dacă și numai dacă șirul de numere reale nenegative  $\left(d(x_n, x)\right)_{n \geq 1}$  este convergent la zero, sau, echivalent:

$$x_n \rightarrow x \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon).$$

*Demonstrație.* Afirmările teoremei se dovedesc simplu folosind atât Definiția 3.3.3, cât și rezultatele stabilite în primele paragrafe din capitolele anterioare. **q.e.d.**

Să remarcăm că Teorema 3.3.1 poate constitui baza afirmației făcută la începutul paragrafului privitoare la extensiuni la șiruri de puncte în spații metrice a rezultatelor stabilite pentru șiruri numerice.

**Definiția 3.3.5.** Fie șirul de puncte  $(x_n), x_n \in X$  și  $(k_n)$  un șir strict crescător de numere naturale. Șirul de puncte  $(y_n)$  cu proprietatea că  $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists k_n$  astfel încât  $y_n = x_{k_n}$ , se numește **subșir** al șirului de puncte  $(x_n)$  din spațiul metric  $(X, d)$ .

Cele mai multe din definițiile și proprietățile șirurilor de numere reale se regăsesc și la șiruri de puncte dintr-un spațiu metric. Astfel, avem:

**Teorema 3.3.2.** În orice spațiu metric  $(X, d)$

- (a) orice șir de puncte are cel mult o limită;
- (b) dacă  $x_n = x, \forall n \geq N_0, N_0 \in \mathbb{N}^*$ , atunci  $x_n \rightarrow x$ ;
- (c) orice subșir de puncte al unui șir convergent la  $x \in X$  converge, de asemenea, la  $x$ ;
- (d) dacă orice subșir al unui șir de puncte conține un subșir convergent la  $x \in X$ , atunci acel șir are limita  $x$ .



*Demonstrație.* Proprietățile (b), (c), (d) rezultă direct din definiția convergenței în  $(X, d)$  și din proprietățile analoge ale șirurilor numerice aplicate șirului de numere nenegative  $(d(x_n, x))$ . Pentru a demonstra (a) presupunem că  $x_n \rightarrow x$  și  $x_n \rightarrow y$ , simultan. În acest fel,

$$0 \leq d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \rightarrow 0,$$

care arată că  $d(x, y) = 0$ , deci  $x = y$ .

**q.e.d.**

**Teorema 3.3.3.** Dacă  $y_n \rightarrow y$  în spațiul metric  $(X, d)$  și  $A$  este o submulțime a spațiului, atunci

$$\text{dist}(y_n, A) \rightarrow \text{dist}(y, A).$$

În particular, dacă  $A = \{x\}$ , atunci

$$d(y_n, x) \rightarrow d(y, x).$$

*Demonstrație.* Prima parte a teoremei este consecință a ultimei inegalități din Propoziția 3.1.3. Partea a doua rezultă din prima luând  $A = \{x\}$ .

**q.e.d.**

**Definiția 3.3.6.** Șirul de puncte  $(x_n)$  din spațiul metric  $(X, d)$  se numește **șir fundamental**, sau **șir Cauchy** dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există numărul natural  $N(\varepsilon)$ , astfel încât

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad (3.45)$$

sau, echivalent,

$$d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.46)$$

**Propoziția 3.3.1.** Orice șir de puncte convergent este șir fundamental.

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x$ , atunci

$$0 \leq d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

care arată că (3.45) este satisfăcută, deci șirul  $(x_n)$  este fundamental.

**q.e.d.**

Reciproca Propoziției 3.3.1 nu este în general adevărată. Se pot da exemple de spații metrice în care există șiruri de puncte divergente care să satisfacă condiția (3.45).

**Definiția 3.3.7.** Numim **șir de funcții** o aplicație  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathcal{F}(A, B))$  unde  $A$  și  $B$  sunt mulțimi nevide arbitrare.

Mai târziu, pentru un șir de funcții  $(f_n)_{n \geq 1}$ , unde  $f_n \in \mathcal{M}(A, X)$ , iar  $(X, d)$  este un spațiu metric, pe lângă convergența în metrica  $\rho$ , care urmează a fi introdusă și care este numită *metrica convergenței uniforme*, convergența numindu-se *convergență uniformă*, se poate introduce și *convergența punctuală* a celui șir de funcții.

### 3.4 Spații metrice complete. Exemple

**Definiția 3.4.1.** *Spațiul metric  $(X, d)$  se numește spațiu metric complet dacă orice șir de puncte fundamental din  $X$  este convergent la un punct din  $X$ .*

**Exemplul 3.4.1.** *Spațiul metric  $(\mathbb{R}, d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|)$  este spațiu metric complet.*

**Soluție.** Într-adevăr, această afirmație rezultă din Teorema 2.2.2. ■

**Teorema 3.4.1.** *Spațiul metric  $(\mathbb{R}^p, d)$ , unde  $d$  este metrica Euclidiană, este spațiu metric complet.*

*Demonstrație.* Amintim că metrica Euclidiană în  $\mathbb{R}^p$  este definită prin  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^p (x_i - y_i)^2}$ , unde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$  sunt vectori oarecare din spațiul liniar  $\mathbb{R}^p$ .

Este suficient să arătăm că are loc reciproca din Propoziția 3.3.1.

Fie în acest sens un șir de puncte arbitrar  $(\mathbf{x}_n)$  din  $\mathbb{R}^p$  care să fie șir fundamental în spațiul metric  $(\mathbb{R}^p, d)$ , aceasta însemnând că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât (3.46) să aibă loc.

Să remarcăm mai întâi că a da un șir de puncte în  $\mathbb{R}^p$ , de fapt un șir de vectori în  $\mathbb{R}^p$ , este echivalent cu a da  $p$  șiruri numerice  $(x_{kn})_{n \geq 1}$ ,  $k \in \overline{1, p}$ , numite *șirurile coordonate*, deoarece termenul general al șirului este o  $p$ -uplă ordonată de numere reale de forma

$$\mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn}).$$

Șirul de puncte  $(\mathbf{x}_n)$  din  $(\mathbb{R}^p, d)$  este fundamental dacă și numai dacă șirurile coordonate  $(x_{kn})_{n \geq 1}$ ,  $k \in \overline{1, p}$ , sunt șiruri fundamentale în  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ . Aceste afirmații rezultă din inegalitățile evidente

$$|x_{i;n+q} - x_{in}| \leq d(\mathbf{x}_{n+q}, \mathbf{x}_n) \leq \sum_{j=1}^p |x_{j;n+q} - x_{jn}|, \quad (3.47)$$

oricare ar fi  $i \in \overline{1, p}$  și oricare ar fi perechea  $(n, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ , la care trebuie să adăugăm Definiția 3.3.6 și rezultatele din Secțiunea 2.1 și Secțiunea 2.2 referitoare la șiruri de numere reale.

Într-adevăr, dacă șirul  $(\mathbf{x}_n)$  din  $(\mathbb{R}^p, d)$  este fundamental, avem

$$d(\mathbf{x}_{n+q}, \mathbf{x}_n) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall q \in \mathbb{N}^*. \quad (3.48)$$

Atunci, din (3.47) și (3.48), deducem

$$|x_{i;n+q} - x_{in}| < \varepsilon, \quad \forall i \in \overline{1, p}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall q \in \mathbb{N}^*,$$

care arată că fiecare din șirurile coordonate  $(x_{in})$ ,  $i \in \overline{1, p}$  este șir numeric fundamental în spațiul metric  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ .

Reciproc, dacă  $(x_{jn})_{n \geq 1, j \in \overline{1, p}}$ , sunt șiruri fundamentale în  $\mathbb{R}$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât să avem

$$|x_{j;n+q} - x_{jn}| < \frac{\varepsilon}{p}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall j \in \overline{1, p}. \quad (3.49)$$

Utilizând (3.49) în partea dreaptă a lanțului de inegalități (3.47), deducem (3.48), adică  $(\mathbf{x}_n)$  este șir fundamental în spațiul metric  $(\mathbb{R}^p, d)$ . Însă, în  $\mathbb{R}$  orice șir fundamental este convergent, deci  $\exists x_j \in \mathbb{R} \ j \in \overline{1, p}$  astfel încât  $x_{jn} \rightarrow x_j, \ n \rightarrow \infty, \ \forall j \in \overline{1, p}$ , aceasta însemnând că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  așa fel încât

$$|x_{jn} - x_j| < \frac{\varepsilon}{p}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall j \in \overline{1, p}. \quad (3.50)$$

Pe de altă parte, din echivalența metricilor  $d, d_1$  și  $d_2$  pe  $\mathbb{R}^p$ , avem (vezi Exercițiul 3.1.1)

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \leq \sum_{j=1}^p |x_{jn} - x_j|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.51)$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ . Din (3.50) și (3.51), deducem  $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon, \ \forall n > N(\varepsilon)$ , ceea ce, după Teorema 3.3.1, arată că  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ . **q.e.d.**

**Teorema 3.4.2.** Șirul de vectori  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}, \ \mathbf{x}_n \in (\mathbb{R}^p, d), \ \mathbf{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{pn})$  are limita  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{p0}) \in \mathbb{R}^p$  dacă și numai dacă șirurile coordonate  $(x_{1n})_{n \geq 1}, (x_{2n})_{n \geq 1}, \dots, (x_{pn})_{n \geq 1}$  au limită în spațiul metric  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$  după cum urmează  $x_{1n} \rightarrow x_{10}, \ x_{2n} \rightarrow x_{20}, \dots, \ x_{pn} \rightarrow x_{p0}$ .

*Demonstrație.* După adăugarea la inegalitatea (3.51), în care în locul vectorului  $\mathbf{x}$  se pune vectorul  $\mathbf{x}_0$  din enunț, a inegalităților evidente

$$|x_{in} - x_{i0}| \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{și} \quad \forall i \in \overline{1, p},$$

demonstrația teoremei este un simplu exercițiu. **q.e.d.**

**Exercițiul 3.4.1.** Să se arate că  $C([a, b])$ , spațiul metric al funcțiilor reale continue pe compactul  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , este complet.

**Soluție.** În Exemplul 3.1.3 am arătat că  $(C([a, b], \rho))$ , unde  $\rho$  este metrica convergenței uniforme, este spațiu metric.

Să arătăm că este spațiu metric complet.

În acest sens, fie  $(f_n)_{n \geq 1}$  un șir fundamental în  $(C([a, b], \rho))$ . Aceasta înseamnă că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există numărul natural  $N(\varepsilon)$ , astfel încât

$$\rho(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Având în vedere că  $\rho(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\}$ , din  $\rho(f_{n+p}, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ , găsim că

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad (3.52)$$

Din (3.52) deducem că  $\forall x \in [a, b]$  șirul numeric  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  este fundamental în spațiul metric  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ , deci  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in [a, b]$  și această limită este număr real. Să definim acum funcția

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.53)$$

și să arătăm că este continuă și că  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

Să considerăm  $x_0$  arbitrar din  $[a, b]$  și să evaluăm diferența  $|f(x) - f(x_0)|$ , unde  $x \in [a, b]$ . Funcția reală de variabilă reală  $f$  este continuă în  $x_0$  dacă diferența  $|f(x) - f(x_0)|$  este foarte mică când numărul  $|x - x_0|$ ,  $x \in [a, b]$ , este foarte mic. Această diferență o putem majora prin

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|, \quad (3.54)$$

unde  $n_0$  este un număr natural arbitrar mai mare decât  $N(\varepsilon)$  de mai sus. În baza celor afirmate referitor de continuitatea funcțiilor reale și folosind faptul că șirurile de numere reale  $(f_n(x))$  și  $(f_n(x_0))$  sunt convergente la respectiv  $f(x)$  și  $f(x_0)$ , putem afirma că inegalitățile:

$$\begin{cases} |f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}; \\ |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}; \\ |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases} \quad (3.55)$$

sunt evidente dacă  $x \in [a, b]$  este astfel încât  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ .

Existența numărului pozitiv  $\delta(\varepsilon)$  este asigurată de continuitatea în  $x_0$  a funcției  $f_{n_0} \in C([a, b])$ .

Folosind acum (3.54) și (3.55), deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  cu proprietatea

$$\forall x \in [a, b] \quad \text{cu} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că funcția  $f$ , definită de (3.53), aparține lui  $C([a, b])$ .

Să arătăm, în sfârșit, că șirul fundamental  $(f_n)_{n \geq 1}$  este convergent în spațiul metric  $(C([a, b]), \rho)$  către funcția  $f$ .

Pentru aceasta, trecem la limită pentru  $p \rightarrow \infty$  în (3.52) și ținem cont de (3.53). Obținem,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon) \text{ și } \forall x \in [a, b],$$

care antrenează  $\max\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ , adică  $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ .

Aceasta demonstrează că  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ , deci  $(C([a, b]), \rho)$  este spațiu metric complet. ■

### 3.5 Spații vectoriale normate. Spații Banach

Fie  $V$  un spațiu vectorial real.

**Definiția 3.5.1.** Aplicația  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **normă** pe spațiul liniar real  $V$  dacă satisface următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} (N_1) \quad & \|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}; \\ (N_2) \quad & \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ și } \forall \mathbf{x} \in V; \\ (N_3) \quad & \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V. \end{aligned}$$

Uneori, pentru proprietățile  $(N_1)$ ,  $(N_2)$ ,  $(N_3)$ , se folosește termenul de *axiome*.

**Observația 3.5.1.** Dacă  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  este o normă pe spațiul vectorial  $V$ , atunci  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$ . În consecință, dacă  $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ , atunci  $\|\mathbf{x}\| > 0$ .

Într-adevăr, luând în  $(N_3)$   $\mathbf{y} = -\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ , unde  $\mathbf{x} \in V$  și ținând cont de Definiția 3.2.1, Propoziția 3.2.1 și de axiomele  $(N_1) - (N_3)$ , obținem  $2\|\mathbf{x}\| \geq 0$ . Mai mult, dacă  $\mathbf{x} \in V \setminus \mathbf{0}$ , atunci din  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$  și axioma  $(N_1)$  deducem  $\|\mathbf{x}\| > 0$ . ■

Acest rezultat justifică denumirea de *axioma de nenegativitate a normei* care se atribuie proprietății  $(N_1)$ . Axioma  $(N_3)$  este cunoscută sub numele de *inegalitatea triunghiulară*.

**Definiția 3.5.2.** Fie  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  o normă pe  $V$ .

- (i) Numărul nenegativ  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\mathbf{x} \in V$ , se numește **norma** sau **lungimea** vectorului  $\mathbf{x}$ .
- (ii) Cuplul  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **spațiu normat**.

**Observația 3.5.2.** Pe un spațiu vectorial real se pot defini mai multe norme. Dacă  $\|\cdot\|_1$  și  $\|\cdot\|_2$  sunt două norme distincte pe  $V$ , atunci spațiile normate  $(V, \|\cdot\|_1)$  și  $(V, \|\cdot\|_2)$  sunt distincte, deci au proprietăți distincte.

**Propoziția 3.5.1.** În spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  au loc inegalitățile:

- (a)  $\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{u}_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \|\mathbf{u}_k\|$ ,  $\forall \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \mathbf{u}_k \in V$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ;
- (b)  $\left| \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\| \right| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ ,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ .

*Demonstrație.* Pentru  $n = 1$  inegalitatea (a) este evidentă, fiind chiar egalitate în baza lui  $(N_2)$ .

Presupunem că (a) este adevărată pentru  $k \in \mathbb{N}^*$ , adică

$$\left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \|\mathbf{u}_i\|, \quad \forall \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}_i \in V, \quad i \in \overline{1, k}, \quad (3.56)$$

și să demonstrăm că are loc pentru  $k+1$  scalari reali și pentru  $k+1$  vectori din  $V$ .

Folosind  $(N_3)$ , (3.56) și  $(N_2)$ , deducem cu ușurință că (a) are loc pentru  $k+1$ .

În baza inducției matematice după  $n$ , rezultă că (a) are loc  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$  și  $\forall \mathbf{u}_i \in V$ ,  $i \in \overline{1, n}$ .

Pentru a demonstra (b), pornim de la inegalitatea

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u} \in V \text{ și } \forall \mathbf{v} \in V, \quad (3.57)$$

care este adevărată în baza identității  $\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{v}$  și a proprietății  $(N_3)$  a normei.

Schimbând rolurile lui  $\mathbf{u}$  cu  $\mathbf{v}$  în (3.57), obținem

$$\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|, \quad (3.58)$$

unde am ținut cont și de axioma  $(N_2)$ . Atunci, din (3.57) și (3.58) se obține (b). **q.e.d.**

**Propoziția 3.5.2.** Dacă  $(V, \|\cdot\|)$  este spațiu normat, atunci aplicația

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \quad (3.59)$$

este o metrică pe  $V$  care are următoarele două proprietăți speciale:

$$d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in V \times V \times V; \quad (3.60)$$

$$d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V. \quad (3.61)$$

*Demonstrație.* Folosind Definiția 3.5.1 se constată ușor că aplicația  $d$  din (3.59) satisface proprietățile  $(M_1)$  și  $(M_2)$ .

Demonstrăm că este satisfăcută și  $(M_3)$ .

Avem,  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ , din care rezultă că și  $(M_3)$  este satisfăcută, deci  $d$  din (3.59) este o metrică pe  $V$ . **q.e.d.**

Metrica  $d$  pe un spațiu normat  $V$  definită ca în (3.59) se numește **metrica indusă de norma**.

**Observația 3.5.3.** Orice spațiu normat poate fi structurat ca spațiu metric.

Reciproca acestei afirmații nu este în general adevărată întrucât pentru definirea noțiunii de metrică nu se cere structură de spațiu liniar pe mulțimea nevidă  $X$ . Dar chiar și în cazul în care  $X$  este spațiu liniar se pot defini metrici care să nu fie induse de norme. Exemplul 3.5.2) este concludent în acest sens.

Dacă o metrică  $d$  pe un spațiu vectorial  $V$  provine însă din norma  $\|\cdot\|$ , atunci norma pe  $V$  este la rândul-i determinată de  $d$  prin

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

**Definiția 3.5.3.** Fie două norme  $\|\cdot\|_1$  și  $\|\cdot\|_2$  pe spațiul liniar  $V$ . Spunem că  $\|\cdot\|_1$  este **echivalentă** cu  $\|\cdot\|_2$  dacă există  $0 < a \leq b$  astfel încât

$$a\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq b\|\mathbf{x}\|_1, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (3.62)$$

**Observația 3.5.4.** Dacă  $\|\cdot\|_1$  este echivalentă cu  $\|\cdot\|_2$ , atunci și  $\|\cdot\|_2$  este echivalentă cu  $\|\cdot\|_1$ .

Într-adevăr, din (3.62), obținem  $\alpha\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \beta\|\mathbf{x}\|_2$ ,  $\forall \mathbf{x} \in V$ , unde numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  sunt astfel încât  $0 < \alpha = \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a} = \beta$ . ■

**Observația 3.5.5.** Dacă  $\|\cdot\|_1$  și  $\|\cdot\|_2$  sunt două norme echivalente pe  $V$ , atunci metricile induse de aceste norme  $d_1$  și  $d_2$  sunt, de asemenea, echivalente.

Într-adevăr, din (3.62) și (3.59), deducem

$$ad_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq bd_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$$

care, după Propoziția 3.1.6, arată că afirmația făcută este adevărată. ■

**Observația 3.5.6.** Dacă  $(V, \|\cdot\|)$  este un spațiu normat, după Propoziția 3.5.2 și Observația 3.5.2 este și spațiu metric, deci bilele deschise și închise de centru  $\mathbf{x}_0$  și rază  $\varepsilon > 0$  sunt, respectiv,

$$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in V : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\},$$

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in V : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}.$$

**Propoziția 3.5.3.** Submulțimea  $A$  din spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  este mărginită dacă și numai dacă există  $M > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{x}\| < M, \quad \forall \mathbf{x} \in A, \quad (3.63)$$

sau, echivalent, pentru orice  $\mathbf{x}_0 \in V$  există  $M_1 > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < M_1, \quad \forall \mathbf{x} \in A. \quad (3.64)$$

*Demonstrație.* Fie  $A \subset V$ ,  $A$  mulțime mărginită. Cum  $V$  este și spațiu metric, având metrica indusă de normă, folosind rezultatele din primul paragraf al acestui capitol, deducem că există  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  astfel încât  $A \subset B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ .

Fie  $M > 0$  cu proprietatea  $M > \|\mathbf{y}_0\| + \varepsilon$  și fie, de asemenea,  $\mathbf{x} \in A$ , arbitrar. Atunci,  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ , deci  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon$ , din care deducem

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon + \|\mathbf{y}_0\| < M.$$

Reciproc, dacă (3.63) are loc, aceasta înseamnă că  $A \subset B(\mathbf{0}, M)$ , deci  $\text{diam} A \leq \text{diam} B(\mathbf{0}, M) \leq 2M$  și, după Definiția 3.1.5, rezultă că  $A$  este mărginită.

În mod asemănător se demonstrează și (3.64).

**q.e.d.**

**Observația 3.5.7.** Toate rezultatele de la șiruri de puncte în spații metrice rămân valabile și pentru șiruri de vectori dintr-un spațiu normat  $(V, \|\cdot\|)$ . Există însă particularități caracteristice spațiilor normate pe care le punctăm în continuare.

**Teorema 3.5.1.** Într-un spațiu normat  $(V, \|\cdot\|)$  au loc următoarele implicații:

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \|\mathbf{x}_0\|, \quad \text{reciproc numai în cazul } \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}; \quad (3.65)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}_0 \end{cases} \implies \lambda \mathbf{x}_n + \mu \mathbf{y}_n \rightarrow \lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}; \quad (3.66)$$

$$\forall (\lambda_n) \text{ șir mărginit și } \forall \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0} \implies \lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}; \quad (3.67)$$

$$\forall (\lambda_n) \rightarrow 0 \text{ și } \forall \mathbf{x}_n \text{ șir mărginit} \implies \lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}; \quad (3.68)$$

$$\forall (\lambda_n)_{n \geq 1} \text{ și } \forall \mathbf{x}_n \text{ astfel încât } \lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R} \text{ și } \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \lambda_0 \mathbf{x}_0. \quad (3.69)$$

*Demonstrație.* Implicația din (3.65) rezultă din inegalitatea (b) a Propoziției 3.5.1 scrisă pentru  $\mathbf{x}_n$  și  $\mathbf{x}_0$ , adică din  $\left| \|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}_0\| \right| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|$ .

Dacă  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ , atunci oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Din ultimele două inegalități, deducem

$$\left| \|\mathbf{x}_n\| - \|\mathbf{x}_0\| \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

care, după Teorema 2.1.1, arată că  $\|\mathbf{x}_n\| \rightarrow \|\mathbf{x}_0\|$ .

Faptul că reciproca primei afirmații din (3.65) nu este adevărată în general se vede din exemplul următor.

Se ia  $V = \mathbb{R}$ ,  $\|\cdot\| = |\cdot|$  și șirul numeric cu termenul general  $x_n = (-1)^n$ . Șirul numeric  $(x_n)$  astfel ales nu este convergent, deși  $|x_n| \rightarrow 1$ .

Implicația inversă este evidentă însă dacă  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

Pentru demonstrația implicației (3.66) se pornește de la inegalitatea evidentă

$$\|\lambda \mathbf{x}_n + \mu \mathbf{y}_n - (\lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0)\| \leq |\lambda| \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| + \mu \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\|.$$

Cum  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$  și  $\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \rightarrow 0$ , din inegalitatea de mai sus rezultă

$$\|\lambda \mathbf{x}_n + \mu \mathbf{y}_n - (\lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0)\| \rightarrow 0,$$

de unde, folosind reciproca lui (3.65), adevărată în cazul menționat, deducem

$$\lambda \mathbf{x}_n + \mu \mathbf{y}_n \rightarrow \lambda \mathbf{x}_0 + \mu \mathbf{y}_0.$$

În vederea demonstrației proprietăților (3.67) și (3.68), remarcăm că avem fie

$$\|\lambda_n \mathbf{x}_n\| \leq M \|\mathbf{x}_n\|, \quad M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.70)$$

fie

$$\|\lambda_n \mathbf{x}_n\| \leq M |\lambda_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.71)$$

după cum șirul numeric  $(\lambda_n)$  este mărginit sau șirul de vectori  $(\mathbf{x}_n)$  este mărginit.

Dacă la (3.70) adăugăm și cealaltă ipoteză, și anume  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ , atunci deducem  $\|\lambda_n \mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$ , care antrenează desigur  $\lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ .

La aceeași concluzie ajungem dacă pornim de la (3.71) la care adăugăm desigur ipoteza  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

În sfârșit, pentru a dovedi (3.69), să observăm că

$$\|\lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda_0 \mathbf{x}_0\| = \|(\lambda_n - \lambda_0) \mathbf{x}_n + \lambda_0 (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\| \leq |\lambda_n - \lambda_0| \cdot \|\mathbf{x}_n\| + |\lambda_0| \cdot \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|.$$

Dacă în această inegalitate ținem cont că,  $|\lambda_n - \lambda_0| \rightarrow 0$  și  $\|\mathbf{x}_n\| \leq M$  deoarece șirul  $(\mathbf{x}_n)$ , fiind convergent, este mărginit și  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ , deducem  $\|\lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda_0 \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ , din care rezultă desigur  $\lambda_n \mathbf{x}_n \rightarrow \lambda_0 \mathbf{x}_0$ . **q.e.d.**

**Definiția 3.5.4.** Spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **spațiu Banach**<sup>4</sup> dacă  $V$  este spațiu metric complet în metrica indusă de normă.

<sup>4</sup>Banach, Stefan (1892–1945), renumit matematician polonez, fondatorul analizei funcționale moderne.



**Exemplul 3.5.1.** (Spațiul normat  $\mathbb{R}^n$ ) Spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$  este spațiu Banach.

**Soluție.** Din Definiția 3.2.3 și Exercițiul 3.2.2 știm că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu liniar real  $n$ -dimensional.

Să demonstrăm că  $\mathbb{R}^n$  este și normat. Pentru aceasta, fie aplicația

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.72)$$

Din modul cum este definită, se vede că această aplicație satisface proprietățile  $(N_1)$  și  $(N_2)$  din Definiția 3.5.1.

Demonstrăm că este verificată și proprietatea  $(N_3)$  a acestei definiții. Pentru aceasta, pornim de la  $(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)^2$ , unde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , deci  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ . După (3.72), avem

$$(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2. \quad (3.73)$$

Ridicând la pătrat în membrul doi al lui (3.73) și ținând cont de inegalitatea (3.11), obținem

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} + \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

din care, cu ajutorul lui (3.72), deducem că  $(N_3)$  din Definiția 3.5.1 este satisfăcută, prin urmare  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  este spațiu normat.

Pentru a demonstra că  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  este spațiu Banach, arătăm că este spațiu metric complet în metrica indusă de norma (3.72). Dar această metrică este tocmai metrica  $d$  din Exercițiul 3.1.1. Folosind acum Teorema 3.4.1, deducem că  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  este spațiu Banach. ■

**Observația 3.5.8.** Norma (3.72) pe  $\mathbb{R}^n$  poartă denumirea de **normă Euclidiană**, motivația acestei denumiri urmând să se dea mai târziu.

**Exercițiul 3.5.1.** Să se arate că aplicațiile:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \|\mathbf{x}\|_1 &= \max\{|x_k| : k \in \overline{1, n}\}; \\ \|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, & \|\mathbf{x}\|_2 &= \sum_{k=1}^n |x_k|, \end{aligned}$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , sunt norme echivalente pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Indicație.** Se arată că aplicațiile de mai sus satisfac proprietățile normei. ■

**Observația 3.5.9.** Metricile  $d_1$  și  $d_2$  pe  $\mathbb{R}^n$ , introduse în Exemplul 3.1.1, sunt metrici induse de normele  $\|\cdot\|_1$  și  $\|\cdot\|_2$ , definite în Exercițiul 3.5.1.

Într-adevăr, se vede că

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \quad \text{și} \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

oricare ar fi vectorii  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . ■

**Exemplul 3.5.2.** *Funcția*

$$d_3 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}, \quad (3.74)$$

unde  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , este o metrică pe  $\mathbb{R}^n$  care nu provine dintr-o normă.

**Soluție.** Într-adevăr, din (3.74) se vede imediat că  $(M_1)$  și  $(M_2)$  din Definiția 3.1.1 sunt satisfăcute.

Pentru a demonstra  $(M_3)$ , pornim de la implicația

$$b \geq 0, c \geq 0 \text{ și } 0 \leq a \leq b + c \implies \frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}, \quad (3.75)$$

care se poate demonstra simplu.

Dacă în (3.75) luăm

$$a = |x_i - y_i|, \quad b = |x_i - z_i|, \quad c = |z_i - y_i|, \quad i \in \overline{1, n},$$

înmulțim ambii membri cu  $\frac{1}{2^i}$  și apoi sumăm după valorile lui  $i$  de la 1 până la  $n$ , obținem

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_3(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

ceea ce arată că și proprietatea  $(M_3)$  din Definiția 3.1.1 este satisfăcută.

Prin urmare, aplicația  $d_3$  din (3.74) este distanță pe  $\mathbb{R}^n$ .

Dacă  $d$  provine dintr-o normă, conform Observației 3.5.2, aplicația

$$\|\cdot\|_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|\mathbf{x}\|_3 = d_3(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1 + |x_k|}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

trebuie să fie o normă pe  $\mathbb{R}^n$ .

Se vede însă că această aplicație satisface  $(N_1)$  și  $(N_3)$  din Definiția 3.5.1, dar nu satisface  $(N_2)$ , căci

$$\|\lambda \mathbf{x}\|_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\lambda| \cdot |x_k|}{1 + |\lambda| \cdot |x_k|} \neq |\lambda| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k|}{1 + |x_k|} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_3.$$

Prin urmare, aplicația  $d_3$  din (3.74) nu provine dintr-o normă. ■

**Exemplul 3.5.3. (Spațiul normat  $\mathcal{B}(A, V)$ )** Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat,  $A$  o mulțime nevidă arbitrară și  $\mathcal{F}(A, V)$  spațiul vectorial (vezi Exemplul 3.2.2) al funcțiilor vectoriale definite pe  $A$  cu valori în  $V$ . Mulțimea

$$\mathcal{B}(A, V) = \{\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, V) : \sup\{\|\mathbf{f}(x)\| : x \in A\} < +\infty\}$$

este subspațiu liniar al spațiului vectorial  $\mathcal{M}(A, V)$  și aplicația

$$\|\cdot\|_{sup} : \mathcal{B}(A, V) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \|\mathbf{f}\|_{sup} = \sup\{\|\mathbf{f}(x)\| : x \in A\}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{B}(A, V), \quad (3.76)$$

este o normă pe  $\mathcal{B}(A, V)$ , care se numește **norma lui Cebâșev**, sau **norma convergenței uniforme**, deci perechea  $(\mathcal{B}(A, V), \|\cdot\|_{sup})$  este spațiu normat.

**Soluție.** Din definiția lui  $\mathcal{B}(A, V)$  rezultă că mulțimea  $\mathbf{f}(A) = \text{Im } \mathbf{f}$  este mărginită în spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$ , cu alte cuvinte  $\mathcal{B}(A, V)$  este submulțimea funcțiilor mărginite din spațiul vectorial  $\mathcal{F}(A, V)$ . Folosind proprietățile marginii superioare a unei mulțimi de numere reale se constată că dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(A, V)$ ,  $\mathbf{g} \in \mathcal{B}(A, V)$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

atunci  $\alpha \mathbf{f} + \mathbf{g} \in \mathcal{B}(A, V)$ , ceea ce, în baza Teoremei 3.2.2, arată că  $\mathcal{B}(A, V)$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $\mathcal{M}(A, V)$ .

Verificăm axiomele normei  $(N_1)-(N_3)$  din Definiția 3.5.1 pentru aplicația definită în (3.76). Faptul că  $(N_1)$  și  $(N_2)$  sunt satisfăcute de către (3.76) este evident în baza definiției și proprietăților marginii superioare a unei submulțimi din  $\mathbb{R}$ .

Pentru a arăta că  $(N_3)$  este satisfăcută să observăm că avem

$$\|(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x)\| \leq \|\mathbf{f}\|_{sup} + \|\mathbf{g}\|_{sup}, \quad \forall x \in A \text{ și } \forall (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{B}(A, V) \times \mathcal{B}(A, V).$$

Această inegalitate, fiind satisfăcută pentru orice  $x \in A$ , are loc și pentru supremum, prin urmare:

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{g}\|_{sup} \leq \|\mathbf{f}\|_{sup} + \|\mathbf{g}\|_{sup},$$

ceea ce arată că  $(N_3)$  este satisfăcută. ■

**Observația 3.5.10.** Dacă  $(V, \|\cdot\|)$  este spațiu Banach, atunci  $(\mathcal{B}(A, V), \|\cdot\|_{sup})$  este, de asemenea, spațiu Banach. În particular,  $\mathcal{B}(A)$  și  $C([a, b])$  sunt spații Banach.

Într-adevăr, afirmațiile făcute pot fi demonstrate după un raționament analog celui din Exercițiul 3.4.1. A se vedea însă și exemplul următor. ■

**Exercițiul 3.5.2.** Fie  $A$  o mulțime nevidă arbitrară și  $\mathcal{B}(A)$  totalitatea funcțiilor reale definite pe  $A$ , mărginite. Să se arate că:

1<sup>o</sup> mulțimea  $\mathcal{B}(A)$  este subspațiu liniar al spațiului  $\mathcal{M}(A)$ ;

2<sup>o</sup> aplicația

$$\|\cdot\| : \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in A\} \quad (3.77)$$

este o normă pe  $\mathcal{B}(A)$ ;

3<sup>o</sup> perechea  $(\mathcal{B}(A), \|\cdot\|)$  este spațiu Banach.

**Soluție.** Fie  $f \in \mathcal{B}(A)$ . Atunci,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f$  mărginită, ceea ce înseamnă că  $\sup\{|f(x)| : x \in A\} < +\infty$ .

1<sup>o</sup> Să arătăm că  $\mathcal{B}(A)$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $\mathcal{F}(A)$ .

În acest sens, fie  $f, g \in \mathcal{B}(A)$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Avem

$$|(\lambda f + g)(x)| \leq |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in A\} + \sup\{|g(x)| : x \in A\}, \quad \forall x \in A,$$

de unde deducem

$$\sup\{|(\lambda f + g)(x)| : x \in A\} \leq |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in A\} + \sup\{|g(x)| : x \in A\}.$$

Fiindcă  $f$  și  $g$  sunt elemente ale lui  $\mathcal{B}(A)$ , rezultă că există  $M_1$  și  $M_2$  din  $\mathbb{R}_+^*$  astfel încât  $M_1 = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ ,  $M_2 = \sup\{|g(x)| : x \in A\}$ . Atunci, din inegalitatea de mai sus deducem  $\sup\{|(\lambda f + g)(x)| : x \in A\} < |\lambda|M_1 + M_2$ , care spune că  $(\lambda f + g) \in \mathcal{B}(A)$ . Din Teorema 3.2.2 reiese acum că  $\mathcal{B}(A)$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $\mathcal{M}(A)$ .

2<sup>o</sup> Faptul că funcția (3.77) este normă pe  $\mathcal{B}(A)$  se demonstrează simplu arătând că sunt satisfăcute proprietățile  $(N_1) - (N_3)$ .

3<sup>o</sup> Să arătăm că  $\mathcal{B}(A)$  este spațiu metric complet în metrica indusă de norma (3.77), care este funcția reală definită pe  $\mathcal{B}(A) \times \mathcal{B}(A)$  prin

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in A\}, \quad \forall f \in \mathcal{B}(A), \quad \forall g \in \mathcal{B}(A). \quad (3.78)$$

Aceasta revine la a arăta că orice șir de funcții fundamental în spațiul metric  $(\mathcal{B}(A), \rho)$  este convergent.

Din faptul că șirul de funcții reale de variabilă reală  $x \in A$ ,  $(f_n)_{n \geq 1}$  este fundamental, deducem că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\rho(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > N(\varepsilon), \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (3.79)$$

Din (3.78) și (3.79), obținem

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \rho(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A, \quad \forall m, n > N(\varepsilon). \quad (3.80)$$

Inegalitatea (3.80) arată că șirul numeric  $(f_n(x))_{n \geq 1}$ ,  $x \in A$ , este fundamental în spațiul metric  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$  despre care știm că este spațiu metric complet, deci există  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x \in A$ . În acest fel, putem defini funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x \in A, \quad (3.81)$$

pe care convenim să o numim *limita punctuală* a șirului de funcții  $(f_n)$ . Să arătăm acum că  $f$  definită prin (3.81) este element al lui  $\mathcal{B}(A)$  și că  $\rho(f_n, f) \rightarrow 0$ , adică șirul  $(f_n)$  este convergent în metrica  $\rho$  la  $f$ .

Dacă în (3.80) facem  $m \rightarrow \infty$  și ținem cont de (3.81), deducem

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall f \in A, \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (3.82)$$

Să observăm acum că avem

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{N(\varepsilon)+1}(x)| + |f_{N(\varepsilon)+1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M, \quad \forall x \in A, \quad (3.83)$$

unde  $M > 0$  provine din faptul că  $f_{N(\varepsilon)+1} \in \mathcal{B}(A)$ , adică

$$|f_{N(\varepsilon)+1}| \leq M, \quad \forall x \in A.$$

Inegalitatea (3.83) arată că  $f \in \mathcal{B}(A)$ .

Trecând acum în (3.82) la supremum, deducem  $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ , ceea ce arată că șirul  $(f_n)$  este convergent în spațiul metric  $(\mathcal{B}(A), \rho)$ .

Așadar,  $(\mathcal{B}(A), \rho)$  este spațiu metric complet și cum metrica  $\rho$  este indusă de o normă rezultă că  $\mathcal{B}(A)$  este spațiu Banach. ■

**Definiția 3.5.5.** Fie  $A$  este o mulțime nevidă oarecare.

Se numește **șir de funcții reale**, aplicația  $f \in \mathcal{F}(N, \mathcal{F}(A))$ , unde  $\mathcal{F}(A)$  este spațiul vectorial al funcțiilor reale definite pe mulțimea  $A$ .

Dacă  $A \subset \mathbb{R}$ , atunci șirul  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(A)$ , se numește **șir de funcții reale de variabilă reală**, iar dacă  $f \in \mathcal{F}(N, (\mathcal{B}(A), \rho))$ , convergența unui șir de funcții reale în  $(\mathcal{B}(A), \rho)$  se numește **convergență uniformă**.

**Exemplul 3.5.4.** Spațiul liniar  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  este spațiu Banach.

**Soluție** În baza Exemplului 3.2.3, mulțimea  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  este spațiu vectorial real, iar un element oarecare al acestuia este o matrice  $A$  de forma  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$ . Să considerăm aplicația

$$tr : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad tr(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad (3.84)$$

numită *urmă*; numărul real  $tr(A)$  se numește *urma matricei*  $A$ .

Să remarcăm că aplicația  $tr$  are proprietățile:

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}); \quad (3.85)$$

$$tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}); \quad (3.86)$$

$$tr(A^\top) = tr(A), \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}), \quad (3.87)$$

unde  $A^\top \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  se numește *transpusa* matricei  $A$ , cu elementele  $a'_{ij}, i \in \overline{1, n}, j \in \overline{1, m}$ , date de  $a'_{ij} = a_{ji}$ .

Proprietatea (3.85) se numește *aditivitate* a aplicației  $tr$ , în timp ce (3.86) este denumită *omogenitate*. Altfel spus, aplicația  $tr$  este *aditivă* și *omogenă*.

După cum se observă ușor, matricele  $A$  și  $A^\top$  sunt *înlănțuite*, sau *conformabile*, adică se poate efectua produsul matricelor  $A$  și  $A^\top$ , notat  $AA^\top$ , care este o matrice pătratică de ordinul  $m$ , deci  $AA^\top \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ ,

având elementul de pe linia  $i$  și coloana  $j$  egal cu  $\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk}$ .

Prin urmare, putem scrie

$$AA^\top = \left\| \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} \right\|_{m \times m}. \quad (3.88)$$

De asemenea, se poate efectua produsul matricelor  $A^\top$  și  $A$ , întrucât sunt înlănțuite.

Să introducem acum aplicația

$$\|\cdot\| : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\| = \sqrt{tr(AA^\top)}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}). \quad (3.89)$$

Dacă efectuăm calculul în membrul drept al egalității din (3.89) și ținem cont de (3.84) și (3.88), constatăm că numărul real  $\|A\|$  din (3.89) are expresia

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}, \quad (3.90)$$

ceea ce arată că  $\|A\|$  este rădăcina pătrată din suma pătratelor tuturor elementelor matricei  $A$ .

Evident  $\|A\| \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  și  $\|A\| = 0 \iff A = O$ , deci  $(N_1)$  din Definiția 3.5.1 este satisfăcută.

Apoi, folosindu-ne de (3.84) și (3.89), găsim

$$\|\lambda A\| = \sqrt{tr((\lambda A)(\lambda A)^\top)} = \sqrt{tr(\lambda^2 AA^\top)} = |\lambda| \sqrt{tr(AA^\top)} = |\lambda| \cdot \|A\|,$$

oricare ar fi  $\lambda \in \mathbb{R}$  și oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , adică  $(N_2)$  este satisfăcută.

Pentru a arăta că  $(N_3)$  este verificată pornim de la  $\|A+B\|^2$  și efectuăm calculele folosind (3.90) și inegalitatea

$$|tr(AB^\top)| \leq \sqrt{tr(AA^\top)} \sqrt{tr(BB^\top)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad (3.91)$$

care nu este altceva decât inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz ce se poate demonstra la fel ca (3.11) pornind însă de la funcția

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij}t - b_{ij})^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se ajunge la  $\|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$ , de unde, după extragerea radicalului în ambii membri, constatăm că  $(N_3)$  este satisfăcută.

Prin urmare,  $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  este spațiu normat.

Rămâne să mai arătăm că orice șir de matrice fundamental în metrica indusă de norma (3.89), sau (3.90) este convergent.

În acest scop, folosim inegalitățile evidente

$$|a_{kl}| \leq \|A\| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (3.92)$$

care au loc oricare ar fi matricea  $A = \|a_{ij}\|_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  și oricare ar fi perechea de numere naturale  $(k, l) \in M \times N$ , unde  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ , iar  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Considerăm un șir arbitrar de matrice

$$(A_p)_{p \geq 1}, \quad A_p = \|a_{p;ij}\|_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad (3.93)$$

care să fie fundamental în metrica indusă de norma (3.72).

Aceasta înseamnă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există numărul natural  $N(\varepsilon)$  astfel încât

$$\|A_{q+p} - A_q\| < \varepsilon, \quad \forall q > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.94)$$

Din (3.92) – (3.94) deducem că oricare ar fi perechea  $(i, j) \in M \times N$  și oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  așa încât

$$|a_{q+p;ij} - a_{q;ij}| < \varepsilon, \quad \forall q > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.95)$$

Relațiile (3.95) arată că șirurile  $(a_{p;ij})_{p \geq 1}$ ,  $(i, j) \in M \times N$  sunt fundamentale în spațiul metric complet  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ , deci sunt convergente, așa că există  $a_{0;ij} \in \mathbb{R}$  astfel încât

$$\lim_{p \rightarrow \infty} a_{p;ij} = a_{0;ij}, \quad \forall (i, j) \in M \times N. \quad (3.96)$$

Din Teorema 2.1.1 și (3.96) deducem că pentru orice pereche  $(i, j) \in M \times N$  și oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N_{ij}(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât

$$|a_{p;ij} - a_{0;ij}| < \frac{\varepsilon}{m \cdot n}, \quad \forall p > N(\varepsilon). \quad (3.97)$$

Fie  $A_0$  matricea de tipul  $m \times n$  care are elementele  $a_{0;ij}$ ,  $(i, j) \in M \times N$ .

Din partea a doua a inegalității (3.92), scrisă pentru matricea diferență  $A_p - A_0$  și (3.97), obținem

$$\|A_p - A_0\| < \varepsilon, \quad p > N_0(\varepsilon), \quad (3.98)$$

unde  $N_0(\varepsilon) = \max\{N_{ij}(\varepsilon) : (i, j) \in M \times N\} \in \mathbb{N}^*$ , care arată că șirul de matrice  $(A_p)_{p \geq 1}$  este convergent la matricea  $A_0$ , cu alte cuvinte  $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \rho)$  este spațiu Banach. ■

**Exercițiul 3.5.3.** Să se arate că aplicațiile:

$$A \mapsto \|A\|' = \max\{|a_{ij}| : i \in \overline{1, m}; j \in \overline{1, n}\};$$

$$A \mapsto \|A\|_1 = \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i \in \overline{1, m}\right\};$$

$$A \mapsto \|A\|_2 = \max\left\{\sum_{i=1}^m |a_{ij}| : j \in \overline{1, n}\right\},$$

sunt norme echivalente pe  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ , iar perechile

$$\left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|'\right), \quad \left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right), \quad \left(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$$

sunt spații Banach.

### 3.6 Serii în spații Banach. Serii de funcții

Spațiile Banach constituie cadrul natural al teoriei seriilor pentru că în astfel de spații se definesc atât sume finite de vectori cât și limite de șiruri. Prima posibilitate se datorează structurii de spațiu vectorial a unui spațiu Banach în timp ce a doua situație se datorează structurii de spațiu metric.

Până acum s-au studiat serii de numere reale, adică serii în spațiul metric obișnuit  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ . S-a demonstrat că  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$  este spațiu Banach și aceasta pentru că metrica obișnuită  $d(\cdot, \cdot) = |\cdot - \cdot|$  provine din funcția modul  $|\cdot|$  care satisface proprietățile  $(N_1) - (N_3)$  ale normei și orice șir numeric fundamental este convergent.

Ne propunem acum să extindem noțiunea de serie numerică la cazul când termenii seriei sunt vectori dintr-un spațiu normat  $(V, \|\cdot\|)$ , uneori și complet, deci dintr-un spațiu Banach.

**Definiția 3.6.1.** Ansamblul  $\{(\mathbf{a}_n)_{n \geq 1}, (\mathbf{s}_n)_{n \geq 1}\}$ , unde  $(\mathbf{a}_n)_{n \geq 1}$  este un șir arbitrar de vectori din spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$ , iar  $(\mathbf{s}_n)_{n \geq 1}$  este un șir de vectori cu termenul de rang  $n$  dat de

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k, \quad (3.99)$$

se numește **serie de vectori**.

Pentru o serie de vectori se poate utiliza una din notațiile:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n + \dots; \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Elementele care definesc seria de vectori (3.100) au aceleași denumiri și semnificații ca la seriile numerice, și anume:

- $(\mathbf{a}_n)$  se numește *șirul termenilor seriei*;
- $(\mathbf{s}_n)$  este *șirul sumelor parțiale*;
- $\mathbf{a}_n$  se numește *termenul general*, sau *termenul de rang  $n$*  al seriei date;
- $\mathbf{s}_n$  este *suma parțială de rang  $n$*  a seriei (3.100).

**Observația 3.6.1.** *Seria de vectori (3.100) determină în mod unic șirul  $(\mathbf{s}_n)$  al sumelor parțiale. Reciproc, dat șirul de vectori  $(\mathbf{a}_n)$ , se poate determina o serie de vectori care să aibă drept șir al sumelor parțiale tocmai șirul dat. Aceasta este seria*

$$\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2) + \dots + (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}) + \dots = \mathbf{a}_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}), \quad (3.101)$$

numită **seria telescopică** a șirului  $(\mathbf{a}_n)$ .

**Definiția 3.6.2.** *Seria de vectori (3.100) se numește **convergentă**, are suma  $\mathbf{s}$  și scriem  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{s}$ , dacă șirul de vectori  $(\mathbf{s}_n)_{n \geq 1}$  este convergent la  $\mathbf{s} \in V$ . Altfel spus  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{s} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{a}_k = \mathbf{s}$ .*

**Definiția 3.6.3.** *Seria de vectori (3.100) se numește **divergentă** dacă nu este convergentă.*

**Observația 3.6.2.** *Șirul de vectori  $(\mathbf{a}_n)$  este convergent dacă și numai dacă seria telescopică (3.101) este convergentă.*

Observația rezultă din Definiția 3.6.2 și Observația 3.6.1 aplicate seriei (3.101) pentru care avem  $\mathbf{s}_n = \mathbf{a}_n$ . ■

**Teorema 3.6.1. (Criteriul general al lui Cauchy)** *Seria de vectori (3.100) este convergentă dacă și numai dacă oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât*

$$\|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + \dots + \mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.102)$$

*Demonstrație.* Din Definiția 3.6.2 avem că seria de vectori (3.100) este convergentă  $\iff$  șirul sumelor parțiale  $(\mathbf{s}_n)$  este convergent  $\iff (\mathbf{s}_n)$  este șir Cauchy  $\iff$  oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\|\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\| = \|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + \dots + \mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*.$$

În concluzie, seria de vectori (3.100) este convergentă dacă și numai dacă (3.102) are loc.

**q.e.d.**

**Observația 3.6.3.** *Analizând demonstrația din Teorema 3.6.1 vedem că pentru necesitatea condiției enunțate este de ajuns ca spațiul liniar  $V$  să fie normat.*

**Corolarul 3.6.1. (Condiție necesară de convergență)** *Dacă o serie de vectori dintr-un spațiu normat  $V$  este convergentă, atunci șirul termenilor seriei este convergent la vectorul nul  $\mathbf{0}$ .*

*Demonstrație.* Dacă (3.100) este convergentă, atunci luând  $p = 1$  în (3.102) avem că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\|\mathbf{a}_{n+1}\| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ , care exprimă faptul că șirul normelor  $(\|\mathbf{a}_n\|)_{n \geq 1}$  este convergent la  $0 \in \mathbb{R}$ , de unde, folosind Teorema 3.5.1, mai precis reciproca din (3.65), deducem  $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{0}$ . **q.e.d.**

**Corolarul 3.6.2. (Condiție suficientă de divergență)** *Dacă șirul termenilor unei serii de vectori dintr-un spațiu normat  $V$  este divergent sau limita sa, dacă există, nu este vectorul nul, atunci seria respectivă este divergentă.*

Afirmația rezultă prin efectuarea negației în Corolarul 3.6.1. ■



**Definiția 3.6.4.** Seria de vectori (3.100) din spațiul Banach  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **convergentă în normă**, sau **absolut convergentă** dacă seria cu termeni nenegativi  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$ , numită **seria normelor**, este convergentă.

**Observația 3.6.4.** Este evident că termenii egali cu vectorul nul din seria (3.100) pot fi înlăturați fără a schimba natura seriei și nici suma sa în caz de convergență. În consecință, seria normelor se poate considera că este o serie cu termeni pozitivi.

**Teorema 3.6.2.** Dacă seria (3.100) este convergentă în normă, atunci ea este convergentă și, în plus, avem

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|. \quad (3.103)$$

*Demonstrație.* Aplicând criteriul general al lui Cauchy seriei normelor, care este o serie cu termeni pozitivi, deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + \dots + \|\mathbf{a}_{n+p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.104)$$

Pe de altă parte, avem

$$\|\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_{n+2} + \dots + \mathbf{a}_{n+p}\| \leq \|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + \dots + \|\mathbf{a}_{n+p}\|. \quad (3.105)$$

Din (3.104), (3.105) și Teorema 3.6.1 rezultă că seria de vectori (3.100) este convergentă. Avem apoi

$$\|\mathbf{s}_n\| \leq \sigma_n, \quad (3.106)$$

unde  $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{a}_k\|$ .

Trecând la limită în (3.106) pentru  $n \rightarrow \infty$  și ținând cont că limita normei este egală cu norma limitei, afirmație care se va demonstra riguros ulterior, deducem (3.103). **q.e.d.**

**Observația 3.6.5.** Reciproca din Teorema 3.6.2 nu este în general adevărată.

Există serii de vectori într-un spațiu Banach pentru care seriile normelor corespunzătoare să fie convergente fără ca seriile inițiale să fie convergente.

Este de ajuns să dăm ca exemplu seria alternată  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  din spațiul normat complet  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

**Definiția 3.6.5.** Seria de vectori  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n$  din spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  se numește **semi-convergentă**, sau **simplu convergentă** dacă este convergentă, iar seria normelor  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$  este divergentă.

**Teorema 3.6.3. (Criteriul majorării)** Dacă pentru seria de vectori (3.100) din spațiul Banach  $(V, \|\cdot\|)$  există seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ , cu proprietățile:

$$\|\mathbf{a}_n\| \leq \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad (3.107)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \text{convergentă}, \quad (3.108)$$

atunci seria de vectori (3.100) este convergentă în normă.

*Demonstrație.* În primul rând, din (1.83), rezultă

$$\|\mathbf{a}_{n+1}\| + \|\mathbf{a}_{n+2}\| + \dots + \|\mathbf{a}_{n+p}\| \leq \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}. \quad (3.109)$$

Din (1.84) și criteriul general de convergență al lui Cauchy pentru serii numerice rezultă că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p} < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.110)$$

Atunci, din (3.109), (3.110) și criteriul general al lui Cauchy pentru serii numerice rezultă că seria normelor  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{a}_n\|$  este convergentă. **q.e.d.**

Alte două criterii de convergență pentru serii de vectori dintr-un spațiu Banach  $(V, \|\cdot\|)$  se obțin din Teorema 3.6.1 aplicată seriilor de vectori de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n, \quad (3.111)$$

unde  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  și  $\mathbf{u}_n \in V$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pentru  $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  notăm

$$\sigma_{n,p} = \alpha_{n+1} \mathbf{u}_{n+1} + \alpha_{n+2} \mathbf{u}_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p} \mathbf{u}_{n+p}, \quad (3.112)$$

o parte, sau o (bucată a seriei (3.111),

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{u}_k, \quad (3.113)$$

suma parțială de rang  $n$  a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{u}_n, \quad (3.114)$$

și

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathbf{u}_k, \quad (3.115)$$

o bucată a seriei (3.114).

**Propoziția 3.6.1. (Identitatea lui Abel)** Pentru orice serie de vectori din  $(V, \|\cdot\|)$  de forma (3.108) are loc egalitatea

$$\sigma_{n,p} = \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) \mathbf{S}_k + \alpha_{n+p} \mathbf{S}_p, \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*. \quad (3.116)$$

*Demonstrație.* Avem mai întâi

$$\sigma_{n,p} = \alpha_{n+1}\mathbf{S}_1 + \alpha_{n+2}(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) + \dots + \alpha_{n+p}(\mathbf{S}_p - \mathbf{S}_{p-1}). \quad (3.117)$$

Grupând convenabil termenii din (3.117), obținem (3.116).

**q.e.d.**

**Propoziția 3.6.2. (Criteriul lui Abel)** Fie seria de vectori (3.111) cu termeni din spațiul Banach  $(V, \|\cdot\|)$ . Dacă

- (i) seria de vectori (3.114) este convergentă;
- (ii) șirul numeric  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  este monoton și mărginit,

atunci (3.111) este convergentă.

*Demonstrație.* Din (ii) rezultă existența numărului real  $K > 0$  astfel încât să avem

$$|\alpha_n| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.118)$$

Convergența seriei (3.114) implică, după Teorema 3.6.1, că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\|\mathbf{S}_p\| = \|\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\| < \frac{\varepsilon}{3K}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.119)$$

Din (3.117) și (3.119), obținem  $\|\sigma_{n,p}\| \leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}| \|\mathbf{S}_k\| + |\alpha_{n+p}| \|\mathbf{S}_p\|$ , din care, utilizând monotonia șirului  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  și (3.119), deducem

$$\|\sigma_{n,p}\| \leq \frac{\varepsilon}{3K}(|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|), \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.120)$$

Folosind acum (3.118) în (3.120), deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\|\sigma_{n,p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.121)$$

Din (3.121) și Teorema 3.6.1 rezultă că seria de vectori (3.111) este convergentă.

**q.e.d.**

**Propoziția 3.6.3. (Criteriul lui Dirichlet)** Dacă :

- (a) șirul sumelor parțiale  $(\mathbf{s}_n)$  al seriei (3.114) este mărginit;
- (b) șirul numeric  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  este monoton și convergent la zero,

atunci seria de vectori (3.111) este convergentă.

*Demonstrație.* Din ipoteza (a) rezultă existența scalarului real  $M > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{s}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.122)$$

Din (3.116), (3.115) și (3.122), găsim

$$\begin{aligned} \|\sigma_{n,p}\| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{p-1} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}| (\|\mathbf{s}_{n+k}\| + \|\mathbf{s}_n\|) + |\alpha_{n+p}| (\|\mathbf{s}_{n+p}\| + \|\mathbf{s}_n\|) \leq \\ &\leq 2M(|\alpha_{n+1}| + 2|\alpha_{n+p}|). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Din ipoteza (b) deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât oricare ar fi  $n > N(\varepsilon)$  este satisfăcută inegalitatea  $|\alpha_n| < \varepsilon/(6M)$  care, folosită în (3.123), conduce la

$$\|\sigma_{n,p}\| < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.124)$$

Rezultatul (3.124), împreună cu Teorema 3.6.1, demonstrează propoziția.

q.e.d.

**Definiția 3.6.6.** Se numește **serie de funcții vectoriale** o serie de vectori în spațiul liniar  $\mathcal{F}(A, V)$ , unde  $V$  este un spațiu liniar arbitrar, iar  $A$  este o mulțime nevidă arbitrară. Dacă  $V = \mathbb{R}$ , seria de funcții corespunzătoare se numește **serie de funcții reale**. În plus, dacă  $A \subset \mathbb{R}$ , seria de funcții se numește **serii de funcții reale de variabilă reală**.

Prin urmare, o serie de funcții vectoriale are forma  $\sum \mathbf{f}_n$ , unde  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{F}(A, V)$ .

Un caz particular de serii de funcții reale de variabilă reală este cel al *seriilor de puteri* când  $f_n(x) = a_n x^n$ .

Dacă  $V$  este spațiu normat cu norma  $\|\cdot\|$  și  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{B}(A, V)$ , atunci convergența seriei de funcții  $\sum \mathbf{f}_n$ , unde  $\mathbf{f}_n \in \mathcal{B}(A, V)$ , în metrica indusă de metrica lui Cebâșev se numește *convergență uniformă*.

Pe de altă parte, fiecărui  $x \in A$  i se asociază seria de vectori  $\sum \mathbf{f}_n(x)$  cu termeni din  $(V, \|\cdot\|)$ .

Dacă această serie de vectori este convergentă în punctul  $x \in A$ , atunci  $x \in A$  se numește *punct de convergență* al seriei de funcții.

Mulțimea punctelor de convergență ale seriei de funcții  $\sum \mathbf{f}_n$  este o submulțime  $B$  a mulțimii  $A$  care poartă denumirea de *mulțimea de convergență* a seriei de funcții respective.

În ipoteza că  $B$  este mulțime nevidă, fiecărui  $x \in B$  i se poate pune în corespondență un vector din  $V$  prin  $x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k(x)$

Aplicația  $\mathbf{f} : B \rightarrow V$ ,  $\mathbf{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_k(x)$ , se numește *suma punctuală* a seriei de funcții  $\sum \mathbf{f}_n$  pe mulțimea  $B$  și se spune că seria de funcții corespunzătoare este *punctual convergentă* pe mulțimea  $B \subset A$  și are suma  $\mathbf{f} \in \mathcal{B}(B, V)$ .

Așadar, la o serie de funcții întâlnim două tipuri de convergență, una punctuală și cealaltă uniformă.

### 3.7 Spații prehilbertiene. Spații Hilbert

Fie  $H$  un spațiu vectorial real.

**Definiția 3.7.1.** Numim **produs scalar**, sau **tensor metric** pe  $H$  funcția, aplicația  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  care

satisfacă următoarele proprietăți numite **axiomele produsului scalar**:

- ( $PS_1$ )  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$  (simetrie);
- ( $PS_2$ )  $g(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + g(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in H \times H \times H$ ;  
(aditivitate în raport cu primul argument);
- ( $PS_3$ )  $g(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ și } \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$   
(omogenitate în raport cu argumentul întâi);
- ( $PS_4$ )  $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in H; g(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$   
(pozitivă definire a funcției  $g$  când argumentele coincid).

**Definiția 3.7.2.** Valoarea aplicației  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface ( $PS_1$ ) – ( $PS_4$ ), în perechea de vectori  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$ , se numește **produsul scalar** al vectorilor  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ .

**Definiția 3.7.3.** Se numește **spațiu prehilbertian**, sau **spațiu Euclidian** perechea  $(H, g)$ , unde  $H$  este un spațiu vectorial real, iar  $g$  este un tensor metric pe  $H$ . Aplicația  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , care satisface ( $PS_1$ ) – ( $PS_4$ ), definește o **structură Euclidiană** pe  $H$ .

**Propoziția 3.7.1.** Dacă  $(H, g)$  este un spațiu Euclidian, atunci pentru orice vectori  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n \in H$  și orice scalari  $\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$  au loc egalitățile:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2), \quad (3.125)$$

(aplicația  $g$  este aditivă în al doilea argument);

$$g(\mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = \mu g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.126)$$

(aplicația  $g$  este omogenă în argumentul al doilea);

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0; \quad (3.127)$$

$$g\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{y}_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j g(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) \quad (3.128)$$

(aplicația  $g$  este **formă biliniară** pe  $H$ ).

*Demonstrație.* Pentru a demonstra (3.125) și (3.126) folosim ( $PS_1$ ), ( $PS_2$ ) și ( $PS_3$ ). Avem:  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x})$ , în baza lui ( $PS_1$ ); apoi,  $g(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2, \mathbf{x}) = g(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}) + g(\mathbf{y}_2, \mathbf{x})$ , conform lui ( $PS_2$ ); în sfârșit, utilizând din nou ( $PS_1$ ) ajungem la concluzia că (3.125) este adevărată.

Relația (3.126) rezultă din  $g(\mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = g(\mu \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mu g(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mu g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Pentru a demonstra (3.127), vom scrie vectorul nul în forma  $\mathbf{0} = \mathbf{y} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{y} + (-1)\mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in H$ . Atunci,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y} + (-1)\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (-1)g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , prin urmare (3.127) este adevărată.

Egalitatea (3.128) se demonstrează prin inducție matematică după numerele naturale nenule  $m$  și  $n$  folosindu-ne de axiomele  $(PS_1) - (PS_4)$  și de (3.125), (3.126). **q.e.d.**

**Definiția 3.7.4.** Funcția  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **formă biliniară** pe spațiul vectorial  $H$  dacă satisface  $(PS_2)$ ,  $(PS_3)$ , (3.125) și (3.126). Forma biliniară  $g$  pe  $H$  se numește **simetrică** dacă este satisfăcută și axioma  $(PS_1)$ .

**Definiția 3.7.5.** Aplicația  $h : H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in H$ , unde  $g$  este o formă biliniară simetrică pe  $H$ , se numește **formă pătratică** pe  $H$  asociată lui  $g$ .

Forma pătratică  $h$  pe  $H$  se numește **pozitiv definită** dacă :

$$h(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}; h(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

**Observația 3.7.1.** Un produs scalar pe  $H$  este o formă biliniară simetrică pe  $H$  cu proprietatea că forma pătratică asociată ei este pozitiv definită.

**Observația 3.7.2.** Pe un spațiu vectorial se pot defini mai multe produse scalare. Dacă  $g_1$  și  $g_2$  sunt doi tensori metrici pe  $H$ , atunci spațiile Euclidiene  $(H, g_1)$  și  $(H, g_2)$  sunt distincte, deci au proprietăți diferite.

Pentru produsul scalar al vectorilor  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  se obișnuiesc diverse notații cum ar fi:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle; g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} / \mathbf{y} \rangle; g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{xy}; \text{ etc.}$$

În continuare, pentru produsul scalar al vectorilor  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din  $H$  vom folosi notația  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ , sau notația  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{xy}$ , iar pentru aplicația  $g$  vom utiliza un punct centrat.

**Teorema 3.7.1.** Într-un spațiu Euclidian  $(H, \cdot)$  are loc inegalitatea:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad (3.129)$$

cunoscută ca **inegalitatea lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz**. Egalitatea în (3.129) are loc dacă și numai dacă vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt liniar dependenți, deci când există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ .

*Demonstrație.* Dacă  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , sau  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ , (3.129) are loc ca egalitate în baza lui (3.127). Dacă  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  și  $\mathbf{y}$  sunt vectori arbitrari din  $H$ , dar fixați, iar  $t \in \mathbb{R}$  este arbitrar, atunci din  $(PS_4)$  rezultă

$$(t\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (t\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.130)$$

Folosind (3.128) și  $(PS_1)$ , din (3.130), obținem

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})t^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})t + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.131)$$

Deoarece  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , din  $(PS_4)$  avem  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$ , iar membrul întâi din (3.131) este un trinom de gradul al doilea. Trinomul din (3.131) este nenegativ dacă și numai dacă discriminantul său este negativ, cel mult egal cu zero, adică

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}) \leq 0. \quad (3.132)$$

Inegalitatea (3.129) rezultă din (3.132) după trecerea în membrul doi al celui de-al doilea termen urmată de extragerea radicalului din ambii membri.

Dacă vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt liniar dependenți (coliniari), atunci  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  și cei doi membri din (3.129) devin egali cu  $|\alpha|(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})$  și prin urmare (3.129) funcționează ca egalitate.

Reciproc, dacă ambii membri din (3.129) sunt nenuli și egali între ei, atunci trinomul din membrul întâi al lui (3.131) are rădăcina dublă  $t = \alpha$ . În acest caz, membrul întâi al lui (3.130) devine nul pentru  $t = \alpha$ , adică

$$(\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0. \quad (3.133)$$

Folosind acum  $(PS_4)$ , din (3.133) deducem  $\alpha\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$ , deci vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt liniar dependenți. **q.e.d.**

**Corolarul 3.7.1.** Dacă  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt vectori nenuli din  $H$ , atunci:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}} \leq 1;$$

există numărul real  $\varphi \in [0, \pi]$  astfel încât să avem

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}}. \quad (3.134)$$

**Definiția 3.7.6.** Numărul real  $\varphi \in [0, \pi]$  introdus prin (3.134) se numește **unghi neorientat** dintre vectorii nenuli  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din  $(H, \cdot)$ .

**Definiția 3.7.7.** Vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din spațiul Euclidian  $(H, \cdot)$  se numesc **ortogonali** dacă  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

**Observația 3.7.3.** Vectorul nul este ortogonal pe orice vector al spațiului Euclidian  $H$ . Vectorii nenuli  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din spațiul Euclidian  $H$  sunt ortogonali dacă și numai dacă unghiul dintre ei este  $\frac{\pi}{2}$ .

Într-adevăr, aceste afirmații rezultă din (3.127), Definiția 3.7.6 și (3.134). ■

**Teorema 3.7.2.** Orice spațiu prehilbertian  $(H, \cdot)$  este spațiu normat.

*Demonstrație.* Fie aplicația  $\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in H. \quad (3.135)$$

În baza lui  $(PS_4)$ , rezultă că axioma  $(N_1)$  din Definiția 3.5.1 este satisfăcută de către aplicația (3.135). Apoi, șirul de egalități:

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{(\lambda \mathbf{x}) \cdot (\lambda \mathbf{x})} = \sqrt{\lambda^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})} = |\lambda| \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|,$$

adevărate în baza egalităților (3.135),  $(PS_3)$ , (3.126) și din nou (3.135), arată că (3.135) verifică axioma  $(N_2)$  din Definiția 3.5.1. Pentru a demonstra că este satisfăcută axioma  $(N_3)$  din aceeași definiție, pornim de la expresia lui  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2$ . Folosind pe rând (3.135), (3.128),  $(PS_1)$ , din nou (3.135), apoi (3.129) și, la urmă iarăși (3.135), constatăm:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}.$$

Luând în calcul simetria produsului scalar a doi vectori, deducem:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|.$$

Aplicând aici inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, găsim:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2,$$

din care tragem concluzia

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H. \quad (3.136)$$

Inegalitatea (3.136) arată că aplicația definită de (3.135) satisface axioma  $(N_3)$ . Prin urmare, funcția (3.135) este normă pe spațiul Euclidian  $H$ , indusă de produsul scalar, ceea ce atrage că  $(H, \|\cdot\|)$  este spațiu normat. **q.e.d.**

**Definiția 3.7.8.** Fie spațiul Euclidian  $(H, \cdot)$ . Norma indusă de produsul scalar, definită de (3.135), se numește **normă Euclidiană** pe  $H$ .

**Observația 3.7.4.** Deoarece orice normă pe un spațiu vectorial  $H$  induce o metrică  $d$  pe mulțimea  $H$  definită prin  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ , rezultă că norma Euclidiană pe  $H$  induce la rândul ei o metrică pe  $H$  dată de

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H. \quad (3.137)$$

Dacă norma care intervine în (3.136) este normă Euclidiană, atunci inegalitatea corespunzătoare se numește *inegalitatea lui Minkowski*<sup>5</sup>.

Din (3.135) observăm că inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz se scrie în forma

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad (3.138)$$

în care desigur norma din membrul al doilea este norma Euclidiană pe  $H$ .

**Observația 3.7.5.** Dacă avem în vedere cazul în care inegalitatea (3.129) devine egalitate și situația în care un număr real este egal cu modulul său, deducem că în inegalitatea lui Minkowski (3.136) egalitatea are loc dacă și numai dacă  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}$ , cu  $\alpha \geq 0$ , adică cei doi vectori sunt coliniari și de același sens.

<sup>5</sup>Minkowski, Hermann (1864–1906), matematician polonez.



**Definiția 3.7.9.** Un sistem de vectori dintr-un spațiu Euclidian se numește **sistem ortogonal** dacă oricare doi vectori ai sistemului sunt ortogonali; în plus, dacă fiecare vector este versor (are norma egală cu 1), sistemul se numește **ortonormat**.

**Observația 3.7.6.** Faptul că sistemul de vectori  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  din spațiul Euclidian  $(H, \cdot)$  este ortonormat se exprimă prin

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \overline{1, n}, \quad (3.139)$$

unde  $\delta_{ij}$  sunt simbolii lui Kronecker<sup>6</sup> definiți prin:  $\delta_{ij} = 0$ , dacă  $i \neq j$  și  $\delta_{ij} = 1$ , dacă  $i = j$ ,  $(i, j) \in \overline{1, n} \times \overline{1, n}$ .

**Definiția 3.7.10.** O bază  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  a spațiului Euclidian  $n$ -dimensional  $(H, \cdot)$  se numește **bază ortonormată** dacă vectorii care o compun satisfac condițiile (3.139).

**Observația 3.7.7.** Toate proprietățile șirurilor de vectori din spații normate rămân valabile și în cazul spațiilor Euclidiene. Există totuși proprietăți specifice spațiilor Euclidiene. Unele din ele le punem în evidență în continuare.

**Teorema 3.7.3.** Într-un spațiu Euclidian  $(H, \cdot)$  au loc următoarele implicații:

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \text{și} \quad \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}_0 \implies \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0; \quad (3.140)$$

$$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{și} \quad \|\mathbf{y}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \implies \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \rightarrow 0; \quad (3.141)$$

$$\|\mathbf{x}_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{și} \quad \mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n \rightarrow 0. \quad (3.142)$$

*Demonstrație.* Implicația (3.140) se obține evaluând diferența  $\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0$ . Adunând și scăzând  $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_n$ , grupând apoi termenii convenabil și aplicând inegalitatea lui Minkowski, găsim

$$|\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n\| + \|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \quad (3.143)$$

Șirul numeric  $(\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|)_{n \geq 1}$  este convergent la zero, iar  $(\|\mathbf{y}_n\|)_{n \geq 1}$  este șir mărginit. Prin urmare, avem

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n\| \rightarrow 0. \quad (3.144)$$

De asemenea, avem

$$\|\mathbf{x}_0\| \cdot \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_0\| \rightarrow 0. \quad (3.145)$$

Din (3.143) – (3.145) rezultă evident (3.140).

Relațiile (3.141) și (3.142) sunt consecințe directe ale inegalității (3.138) aplicată vectorilor  $\mathbf{x}_n$  și  $\mathbf{y}_n$ . **q.e.d.**

<sup>6</sup>Kronecker, Leopold (1823–1891), matematician german.

**Definiția 3.7.11.** *Un spațiu Euclidian care este complet în metrica Euclidiană se numește spațiu Hilbert<sup>7</sup>.*

Ne interesează care este expresia unui produs scalar  $g$  pe un spațiu vectorial  $n$ -dimensional  $H$ .

Pentru aceasta considerăm mai întâi o bază a spațiului, fie aceasta  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , care nu este neapărat baza canonică. Dacă  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  este un produs scalar pe  $H$  atunci aplicația  $g$  este cunoscută dacă și numai dacă se cunoaște numărul real  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  în orice pereche de vectori  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$ . Dar, după Teorema 3.2.3,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}Y, \quad (3.146)$$

unde  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in H^n$ , iar  $X$ , și  $Y$ , sunt matricele unicolonare cu  $n$  linii care au ca elemente coordonatele lui  $\mathbf{x}$ , respectiv  $\mathbf{y}$ , în baza  $\mathcal{B}$ .

Aplicând acum (3.128) vectorilor  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  din (3.146), deducem

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j g_{ij} = X^\top G Y, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad (3.147)$$

unde s-a făcut notația

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j \in \overline{1, n}, \quad (3.148)$$

iar  $G \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  este matricea pătratică de ordinul  $n$  care are ca elemente cantitățile  $g_{ij}$  din (3.148).

Relația (3.147) arată că  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  este cunoscută dacă și numai dacă sunt cunoscute numerele  $g_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in N \times N$ , unde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , numere care sunt evident legate de baza  $\mathcal{B}$ .

Din  $(PS_1)$  și (3.146) rezultă  $g_{ij} = g_{ji}$ ,  $\forall (i, j) \in N \times N$ , ceea ce arată că  $G = G^\top$ , adică  $G$  este matrice simetrică.

Să vedem acum ce implicație are asupra lui  $G$  axioma  $(PS_4)$ .

Forma pătratică  $h : H \rightarrow \mathbb{R}$  din Definiția 3.7.5 este

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i x_j = X^\top G X, \quad \forall \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X \in H. \quad (3.149)$$

Axioma  $(PS_4)$  este verificată dacă  $h$  este pozitiv definită. Pentru a se întâmpla aceasta, trebuie ca prin grupări convenabile ale termenilor în membrul doi al relației (3.149) să putem realiza, dacă este posibil, o sumă de  $n$  pătrate cu coeficienți pozitivi. Dacă acest lucru se poate realiza, spunem că s-a adus forma pătratică la expresie canonică prin metoda lui Gauss.

Există și alte condiții, cum ar fi de exemplu cele ale lui Sylvester<sup>8</sup>, pe care dacă matricea  $G$  le satisface, atunci pozitivă definire a lui  $h$  este asigurată.

Alteori este convenabil să stabilim dacă  $h$  este pozitiv definită analizând valorile proprii ale lui  $G$ . Acestea sunt rădăcinile ecuației caracteristice ale matricei  $G$ , și anume  $\det(G - \lambda I_n) = 0$ , unde  $I_n = \|\delta_{ij}\| \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  este matricea unitate din  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ .

Se știe că (vezi [9, p. 175]) valorile proprii ale matricei simetrice  $G$  sunt toate reale și, dacă sunt toate pozitive, atunci  $h$  este formă pătratică pozitiv definită.

Reciproc, dacă  $G \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  este o matrice simetrică cu toate valorile proprii pozitive, atunci aplicația  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  care în baza  $\mathcal{B} \subset H$  are forma (7.23) satisface axiomele  $(PS_1) - (PS_4)$ , deci este un produs scalar pe  $H$ . În acest mod am demonstrat

**Teorema 3.7.4.** *Aplicația  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  este produs scalar pe spațiul vectorial  $H$  dacă și numai dacă într-o bază  $\mathcal{B} \subset H$  există o matrice pătratică simetrică  $G$ , de ordinul  $n$ , care are toate valorile proprii pozitive, astfel încât  $g$  să aibă expresia (7.23).*

<sup>7</sup>Hilbert, David (1862)–(1943), remarcabil matematician german.

<sup>8</sup>Sylvester, James Joseph (1814–1897), matematician englez.

**Definiția 3.7.12.** Matricea pătratică simetrică  $G$ , de ordinul  $n$ , cu ajutorul căreia se exprimă în baza  $\mathcal{B} \subset H$  forma biliniară simetrică  $g$  pe spațiul vectorial  $H$ , se numește **matricea formei biliniare simetrice**  $g$ , sau **matricea formei pătratice**  $h$  asociate lui  $g$ .

Am menționat mai sus că pozitivă definire a formei pătratice  $h$  pe spațiul liniar  $H$  poate fi precizată cu condițiile lui Sylvester pe care le dăm fără demonstrație în teorema de mai jos.

**Teorema 3.7.5. (Condițiile lui Sylvester)** Fie  $g : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  un produs scalar pe spațiul liniar  $H$ ,  $h : H \rightarrow \mathbb{R}$  forma pătratică asociată formei biliniare simetrice și  $G$  matricea sa într-o bază  $\mathcal{B} \subset H$ . Atunci, forma pătratică  $h$  este pozitiv definită dacă sunt satisfăcute condițiile lui Sylvester

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad \forall k \in \overline{1, n}. \quad (3.150)$$

**Definiția 3.7.13.** Numărul real  $\Delta_k$  din (3.150) se numește **minor principal de ordin  $k$**  al matricei simetrice  $G \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ .

## 3.8 Principiul contracției

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $T : X \rightarrow X$  o aplicație definită pe mulțimea  $X$  cu valori în  $X$ .

**Definiția 3.8.1.** Elementul  $x \in X$  se numește **punct fix** pentru aplicația (operatorul)  $T$  dacă

$$T(x) = x. \quad (3.151)$$

**Definiția 3.8.2.** Aplicația  $T : X \rightarrow X$  se numește **contracție** pe  $X$  dacă există numărul nenegativ subunitar  $0 \leq q < 1$ , numit **factor de contracție**, astfel încât

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y), \quad \forall x, y \in X. \quad (3.152)$$

Importanța spațiilor metrice complete este pusă în evidență de următorul *principiu al contracției*.

**Teorema 3.8.1. (Picard<sup>9</sup>–Banach)** Dacă  $T : X \rightarrow X$  este o contracție pe spațiul metric complet  $(X, d)$ , atunci  $T$  are un punct fix unic determinat.

<sup>9</sup>Picard, Émile (1856–1941), matematician francez.

*Demonstrație.* Fixăm un punct  $x_0$  arbitrar din  $X$ .

Dacă  $T(x_0) = x_0$ , atunci  $x_0$  este punct fix al contracției  $T$  care vom vedea că este unic.

Dacă  $T(x_0) \neq x_0$ , atunci construim șirul de puncte  $(x_n)_{n \geq 0}$ , conform relației de recurență

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad x_0 \in X \quad \text{dat și} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.153)$$

Arătăm că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șir fundamental în spațiul metric complet  $(X, d)$ .

Pentru aceasta să observăm că relația de recurență (3.153) și inegalitatea (3.152) conduc pe rând la:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq qd(x_n, x_{n-1});$$

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q d(x_n, x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.154)$$

Folosind (3.154), găsim

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.155)$$

Să calculăm  $d(x_{n+p}, x_n)$ . Avem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}). \quad (3.156)$$

Folosind (3.155) în (3.156), obținem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (q^n + q^{n+1} + \dots + q^{n+p-1})d(x_1, x_0). \quad (3.157)$$

După efectuarea sumei progresiei geometrice din membrul doi al inegalității (3.157), găsim

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq q^n \frac{1 - q^p}{1 - q} d(x_1, x_0) = k q^n (1 - q^p), \quad (3.158)$$

unde am făcut notația  $k = \frac{d(x_1, x_0)}{1 - q}$ . Având în vedere că factorul de contracție este nenegativ și subunitar, din (3.158), prin majorare, obținem

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq k q^n, \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \quad (3.159)$$

Ținând cont că  $q^n \rightarrow 0$ , din (3.159), după trecerea la limită pentru  $n \rightarrow \infty$ , deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+p}, x_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.160)$$

Rezultatul (3.160) demonstrează că  $(x_n)_{n \geq 0}$  este șir fundamental în spațiul metric  $(X, d)$ . Cum  $(X, d)$  este spațiu metric complet rezultă că șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  este convergent, deci există un punct  $x \in X$ , astfel încât

$$x_n \rightarrow x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0. \quad (3.161)$$

În baza axiomei  $(M_1)$  din Definiția 3.1.1 și a lui (3.152), deducem

$$0 \leq d(T(x_n), T(x)) \leq qd(x_n, x). \quad (3.162)$$

Trecând la limită în

$$T(x_n) \rightarrow T(x). \quad (3.163)$$

Din (3.161), (3.153), (3.163) și unicitatea limitei unui șir de puncte în spațiul metric  $(X, d)$ , rezultă (3.151).

Unicitatea punctului fix găsit mai sus rezultă imediat, căci dacă există și un alt punct fix al operatorului  $T$ , atunci  $d(x, y) = d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y)$ , de unde rezultă

$$(1 - q)d(x, y) \leq 0. \quad (3.164)$$

Cum  $q < 1$ , din (3.164), găsim

$$d(x, y) \leq 0. \quad (3.165)$$

Dacă la (3.165) adăugăm axioma  $(M_1)$  de nenegativitate a distanței, găsim  $d(x, y) = 0$  de unde, folosind aceeași axiomă  $(M_1)$ , vedem că  $x = y$ , ceea ce arată că punctul fix este unic determinat. **q.e.d.**

Metoda de demonstrație a existenței și unicității punctului fix se numește *metoda aproximațiilor succesive* și a fost dezvoltată de matematicianul francez Émile Picard pentru a demonstra existența și unicitatea soluției ecuației diferențiale  $y' = f(x, y)$  care satisface condiția inițială  $y(x_0) = y_0$ .

Teorema 3.8.1 a fost formulată în anul 1932 de către matematicianul polonez Stephan Banach și demonstrează după metoda sugerată de Picard, de aceea este cunoscută sub numele de *Teorema Picard–Banach*, însă este întâlnită și sub denumirea *Teorema de punct fix a lui Banach*.

Șirul fundamental  $(x_n)_{n \geq 0}$  definit prin (3.153) se numește *șirul aproximantelor* punctului fix, sau *șirul aproximațiilor succesive* ale acestuia.

**Calculul erorii metodei aproximațiilor succesive.** Săa evaluăm eroarea care se comite prin înlocuirea soluției ecuației (3.151) cu o *aproximantă de ordinul  $n$* , adică cu termenul  $x_n$  al șirului definit de (3.153), deci urmărim să evaluăm  $d(x_n, x)$ . În primul rând, din (3.159) și axioma  $(M_3)$  din Definiția 3.1.1, deducem

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq kq^n + d(x_{n+p}, x). \quad (3.166)$$

Dacă în (3.166) fixăm pe  $n$ , facem  $p \rightarrow \infty$  și ținem cont de faptul că

$$\lim_{p \rightarrow \infty} x_{n+p} = x \iff \lim_{p \rightarrow \infty} d(x_{n+p}, x) = 0,$$

obținem

$$d(x_n, x) \leq kq^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.167)$$

Așadar, eroarea care se face înlocuind punctul fix  $x$  al contracției  $T$  pe spațiul metric complet  $(X, d)$  cu aproximanta de ordin  $n$  este mai mică decât  $q^n$ , și dacă dorim că această eroare să fie mai mică decât un  $\varepsilon > 0$  dat, atunci din (3.167) avem  $kq^n < \varepsilon$ , din care deducem

$$n > \log_q \frac{\varepsilon}{k} \geq [\log_q \frac{\varepsilon}{k}] = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}. \quad (3.168)$$

Prin urmare, dacă înlocuim punctul fix cu aproximanta de ordin  $n$ , unde  $n > N(\varepsilon)$ , iar  $N(\varepsilon)$  este partea întreagă a numărului real din (3.168), atunci eroarea care se înfăptuiește când în locul punctului fix  $x$  al contracției  $T$  se ia aproximanta de ordinul  $n$ , unde  $n$  este astfel încât (3.168) să aibă loc, este mai mică decât  $\varepsilon$ .

**Observația 3.8.1.** Pentru demonstrația unicității punctului fix al contracției  $T$  nu este necesar ca spațiul metric  $(X, d)$  să fie complet.

### 3.9 Mulțimi închise și mulțimi deschise într-un spațiu metric

În acest paragraf se scot în evidență tipuri remarcabile de puncte și de submulțimi de puncte ale unui spațiu metric  $(X, d)$  care vor permite un studiu aprofundat al proprietăților locale și globale ale funcțiilor, precum și analiza trecerii la limită.

Fie în acest sens un spațiu metric  $(X, d)$ ,  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$ ,  $\mathcal{V}(x)$  sistemul de vecinătăți al unui punct  $x \in X$  și  $B(x, \varepsilon)$  bila deschisă cu centrul în  $x$  și rază egală cu  $\varepsilon > 0$ .

**Definiția 3.9.1.** Punctul  $x \in X$  se numește **punct aderent în  $X$** , sau **punct de aderență în  $X$**  pentru mulțimea  $A$  dacă orice vecinătate a punctului  $x$  conține cel puțin un punct din  $A$ , adică

$$V_x \cap A \neq \emptyset, \quad \forall V_x \in \mathcal{V}(x). \quad (3.169)$$

**Observația 3.9.1.** Condiția (3.169) este echivalentă cu

$$A \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.170)$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiția 3.1.10, Propoziția 3.1.7 și Definiția 3.9.1. ■

**Observația 3.9.2.** Dacă  $x \in X$  este punct aderent în  $X$  pentru mulțimea  $A$ , atunci poate exista o vecinătate  $V_x \in \mathcal{V}(x)$  astfel încât  $V_x \cap A = \{x\}$ .

De exemplu, pentru mulțimea  $A = \{-1\} \cup (0, 3)$  din spațiul Euclidian  $\mathbb{R}$ , punctul  $x = -1$  este punct aderent în  $\mathbb{R}$  al lui  $A$  și are proprietatea că există vecinătăți ale sale astfel încât  $V_{(-1)} \cap A = \{-1\}$ . O asemenea vecinătate poate fi intervalul deschis  $(-1 - \varepsilon, -1 + \varepsilon)$  cu  $0 < \varepsilon < 1$ . ■

**Observația 3.9.3.** Orice element  $a$  al mulțimii  $A$  este punct aderent în  $X$  pentru  $A$  deoarece intersecția oricărei vecinătăți a acelui element cu mulțimea  $A$  este nevidă.

Într-adevăr, această intersecție conține cel puțin punctul  $a$ . ■

**Observația 3.9.4.** Dacă  $x \in X$  este punct aderent în  $X$  pentru mulțimea  $A$ , atunci putem avea fie  $x \in A$ , fie  $x \notin A$ .

De exemplu, pentru mulțimea  $A = \{1\} \cup (3, 5]$  din spațiul Euclidian  $\mathbb{R}$ , punctul  $x = 3$  este punct aderent în  $\mathbb{R}$  al lui  $A$  și  $3 \notin A$ . ■

Propoziția următoare furnizează o definiție echivalentă a punctului aderent în  $X$ .

**Propoziția 3.9.1.** Punctul  $x \in X$  este punct aderent în  $X$  pentru mulțimea  $A \subset X$  dacă și numai dacă

$$\text{dist}(x, A) = 0. \quad (3.171)$$

*Demonstrație.* Dacă  $x$  este punct aderent în  $X$  pentru mulțimea  $A$ , după Definiția 3.9.1 există  $V \in \mathcal{V}(x)$  astfel încât să aibă loc (3.169), deci mulțimea  $V \cap A$  are cel puțin un element. Dacă  $V \cap A = \{x\}$ , având în vedere că  $d(x, x) = 0$ , rezultă că  $\text{dist}(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$ . Dacă însă  $V \cap A$  are și alte elemente în afara lui  $x$ , de asemenea  $\text{dist}(x, A) = 0$ . Dacă  $x \notin A$ , lucru posibil, după Observația 3.9.1, pentru orice  $\varepsilon > 0 \exists y \in A$  astfel încât  $d(x, y) < \varepsilon$  adică  $\text{dist}(x, A) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$ ; ori aceasta înseamnă tocmai (3.171).

Reciproc, dacă (3.171) are loc, atunci  $\inf\{d(x, y) : y \in A\} = 0$ , ceea ce înseamnă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $z \in A$  astfel încât  $d(x, z) < \varepsilon$ , care arată că  $z \in B(x, \varepsilon)$ . Cu alte cuvinte,  $z \in A \cap B(x, \varepsilon)$ .

Luând  $V = B(x, \varepsilon)$  deducem că are loc (3.169), deci elementul  $x \in X$  este punct de aderență pentru mulțimea  $A$ . q.e.d.

**Propoziția 3.9.2.** Elementul  $x \in X$  este punct aderent în  $X$  pentru mulțimea  $A$  dacă și numai dacă există un șir de puncte  $(x_n)$ ,  $x_n \in A$ , astfel încât

$$x_n \rightarrow x. \quad (3.172)$$

*Demonstrație.* Dacă  $x$  este punct aderent în  $X$  pentru  $A$ , după Definiția 3.9.1, luând  $V = B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  drept vecinătate arbitrară a punctului  $x$ , rezultă că  $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ .

Dacă se întâmplă ca indiferent de  $n$ ,  $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A = \{x\}$ , atunci luând  $x_n = x$ , urmează că șirul de puncte  $(x_n)$  este un șir constant care după Teorema 3.3.2 este convergent la  $x$ . Dacă însă  $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$  are și alte elemente, atunci luând  $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$ , deducem

$$d(x, x_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.173)$$

Folosind acum Propoziția 2.1.1, din (3.173) deducem  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  de unde, după Teorema 3.3.1, rezultă (3.172).

Reciproc, dacă există  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in A$ ,  $x_n \rightarrow x$ , din Definiția 3.3.3 rezultă că în afara oricărei vecinătăți  $V \in \mathcal{V}(x)$  rămân un număr finit de termeni ai șirului și prin urmare  $V \cap A \neq \emptyset$  ceea ce, după Definiția 3.9.1, atrage că  $x$  este punct aderent în  $X$  al lui  $A$ . **q.e.d.**

Evident că și Propoziția 3.9.2 poate constitui o definiție echivalentă a punctului aderent în  $X$ .

**Definiția 3.9.2.** Se numește **închiderea în  $X$** , sau **aderența în  $X$**  mulțimii  $A$  totalitatea punctelor aderente în  $X$  ale sale. Închiderea în  $X$  a mulțimii  $A$  se notează cu  $\overline{A}$ , sau  $cl A$ .

Din Propoziția 3.9.1 și Definiția 3.9.2, avem

**Teorema 3.9.1.** Dacă  $A$  și  $B$  sunt două submulțimi oarecare ale spațiului metric  $(X, d)$ , atunci:

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}; \quad (3.174)$$

$$A \subset \overline{A}; \quad (3.175)$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}; \quad (3.176)$$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A}; \quad (3.177)$$

$$A = \emptyset, \text{ sau } A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \implies \overline{A} = A. \quad (3.178)$$

*Demonstrație.* Demonstrăm întâi (3.174). Pentru aceasta, considerăm  $x$  arbitrar din  $\overline{A}$ . După Propoziția 3.9.2 există  $(x_n)$ ,  $x_n \in A$  astfel încât  $x_n \rightarrow x$ . Cum  $A \subset B$ , vom avea și  $x_n \rightarrow x$ ,  $x_n \in B$ , ceea ce în baza aceleiași propoziții conduce la  $x \in \overline{B}$ .

Incluziunea (3.175) rezultă din Observația 3.9.3.

Dacă  $x \in \overline{A \cup B}$ , din Proprietatea 3.1.3 avem  $\text{dist}(x, A \cup B) = 0$ . De aici, deducem  $\text{dist}(x, A) = 0$ , sau  $\text{dist}(x, B) = 0$ . Folosind Propoziția 3.9.1, avem că  $x \in \overline{A}$ , sau  $x \in \overline{B}$ , adică  $x \in \overline{A \cup B}$ , cu alte cuvinte  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$ .

Incluziunea  $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$  se demonstrează similar.

Din cele două incluziuni rezultă (3.176).

Aplicând (3.175) mulțimii  $\overline{A}$  deducem  $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$ .

Să arătăm că are loc și incluziunea inversă.

Considerând un element arbitrar  $x \in \overline{\overline{A}}$ , din Propoziția 3.9.2, deducem că există  $(x_n)_{n \geq 1}, x_n \in \overline{A}$  cu proprietatea  $x_n \rightarrow x$ . Din  $x_n \in \overline{A}$  și Propoziția 3.9.1 rezultă  $\text{dist}(x_n, A) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Pe de altă parte, din  $x_n \rightarrow x$  și Teorema 3.3.3 avem

$$\text{dist}(x, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(x_n, A) = 0,$$

rezultat care, după Propoziția 3.9.1, arată că  $x \in \overline{A}$ . Prin urmare,  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ .

Incluziunile demonstrate conduc la (3.177).

Demonstrăm acum (3.178). Dacă  $A = \emptyset$ , din Definiția 3.1.6, avem

$$\text{dist}(x_0, \emptyset) = +\infty, \forall x_0 \in X,$$

ceea ce arată că nu există  $x_0 \in X$  astfel încât să aibă loc (3.171) și prin urmare  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ . Dacă  $A = \{x_1\}$ , singurul punct care satisface (3.171) este  $x_1$ , deci  $\overline{A} = \{x_1\} = A$ .

Demonstrația se face similar când  $A \neq \emptyset$ , dar  $A$  are un număr finit de elemente, mai mult decât un element. **q.e.d.**

**Definiția 3.9.3.** Submulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  se numește **închisă în  $X$**  dacă

$$A = \overline{A}. \quad (3.179)$$

**Observația 3.9.5.** Închiderea în  $X, \overline{A}$ , a oricărei mulțimi  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  este mulțime închisă în  $X$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din (3.177) și (3.179). ■

**Observația 3.9.6.** Orice mulțime finită de puncte din spațiul metric  $(X, d)$  este mulțime închisă în  $X$ ; mulțimea vidă este mulțime închisă în  $X$ .

Afirmațiile rezultă din (3.178). ■

**Observația 3.9.7.** Spațiul întreg  $X$  este mulțime închisă în  $X$ .

Într-adevăr, din (3.175) avem  $X \subset \mathbf{x}$ ; din Definiția 3.9.1, Propoziția 3.9.1 și Propoziția 3.9.2 rezultă că avem și  $\mathbf{x} \subset X$ . Cele două incluziuni conduc la  $X = \mathbf{x}$  și, după Definiția 3.9.3, rezultă că  $X$  este mulțime închisă în  $X$ . ■



**Teorema 3.9.2.** Mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  este închisă în  $X$  dacă și numai dacă conține limita oricărui șir de puncte convergent din  $A$ .

*Demonstrație.* Afirmția rezultă simplu din (3.175) și Propoziția 3.9.2.

**q.e.d.**

**Teorema 3.9.3.** Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi închise în mulțimea  $X$  din spațiul metric  $(X, d)$ , atunci  $A \cup B$  este mulțime închisă în  $X$ .

În consecință, reuniunea unui număr finit de mulțimi închise în  $X$  este mulțime închisă în  $X$ .

Intersecția oricărui număr de mulțimi închise în  $X$  este mulțime închisă în  $X$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi închise în  $X$ , atunci  $A = \overline{A}$  și  $B = \overline{B}$ . Pe de altă parte, din (3.176) avem  $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$  ceea ce, conform lui (3.179), arată că  $A \cup B$  este mulțime închisă în  $X$ .

Demonstrația este similară pentru un număr finit de mulțimi.

Fie acum  $A = \bigcap_{t \in T} A_t$ , cu  $A_t$  mulțimi închise în  $X$ , adică

$$A_t = \overline{A_t}, \quad \forall t \in T.$$

Deoarece  $A \subset A_t$ , conform lui (3.174) avem  $\overline{A} \subset \overline{A_t}$ . Deci

$$A \subset \overline{A} \subset \bigcap_{t \in T} \overline{A_t} = \overline{A},$$

adică  $\overline{A} = A$ , ceea ce demonstrează ultima parte a teoremei.

**q.e.d.**

**Definiția 3.9.4.** Punctul  $a \in A$  se numește **punct interior** în  $X$  al mulțimii  $A$  dacă există o vecinătate  $V_a \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât

$$V_a \subset A. \quad (3.180)$$

**Propoziția 3.9.3.** Punctul  $a \in A$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $A$  dacă și numai dacă  $\exists \varepsilon > 0$  astfel încât

$$B(a, \varepsilon) \subset A. \quad (3.181)$$

*Demonstrație.* Dacă  $a \in A$  este punct interior în  $X$  al lui  $A$ , atunci din Definiția 3.9.4 și Definiția 3.1.10 rezultă (3.181).

Reciproc, din (3.181) și Propoziția 3.1.7 rezultă că este îndeplinită condiția din Definiția 3.9.4, deci  $a$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $A$ .

**q.e.d.**

**Propoziția 3.9.4.** *Punctul  $a \in A$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $A$  dacă și numai dacă*

$$\text{dist}(a, C_X A) > 0, \quad (3.182)$$

*unde  $C_X A = X \setminus A$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $a \in A$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $A$ , atunci are loc (3.181) care, pusă alături de Definiția 3.1.7, conduce la concluzia (3.182).

Reciproc, dacă (3.182) are loc, atunci fie  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon = \text{dist}(a, C_X A)$ . Se vede imediat că avem  $B\left(a, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset A$ , care, în baza lui (3.181), arată că  $a$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $A$ . **q.e.d.**

**Definiția 3.9.5.** *Se numește **interiorul în  $X$  al mulțimii  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$ , totalitatea punctelor interioare în  $X$  ale sale.***

*Interiorul în  $X$  al mulțimii  $A$  se notează cu  $\overset{\circ}{A}$ , sau cu  $\text{Int } A$ .*

Dacă avem în vedere Propoziția 3.9.4, putem scrie

$$\overset{\circ}{A} = \{a \in A : \text{dist}(a, C_X A) > 0\}. \quad (3.183)$$

**Teorema 3.9.4.** *Pentru orice submulțimi  $A$  și  $B$  ale lui  $X$  :*

$$A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}; \quad (3.184)$$

$$\overset{\circ}{A} \subset A; \quad (3.185)$$

$$\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}; \quad (3.186)$$

$$\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}. \quad (3.187)$$

*Demonstrație.* Teorema se demonstrează simplu folosind definițiile și propozițiile acestui paragraf . **q.e.d.**

**Teorema 3.9.5.** *Pentru orice mulțime  $A$  din  $(X, d)$ , au loc egalitățile*

$$C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}, \quad \overset{\circ}{A} = C_X(\overline{C_X A}), \quad (3.188)$$

$$C_X \overline{A} = \overset{\circ}{C_X A}, \quad \overline{A} = C_X(\overset{\circ}{C_X A}). \quad (3.189)$$

Identitățile (3.188) și (3.189) permit să deducem proprietățile interiorului în  $X$  al unei mulțimi din acelea ale închiderii în  $X$  ale ei și invers. De exemplu, proprietățile interiorului în  $X$  a unei mulțimi prezentate în Teorema 3.9.4 pot rezulta din cele ale închiderii în  $X$  a mulțimii, demonstrate în Teorema 3.9.1, și din (3.188), (3.189).

**Definiția 3.9.6.** Submulțimea  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  se numește **deschisă în  $X$**  dacă

$$A = \overset{\circ}{A}. \quad (3.190)$$

**Propoziția 3.9.5.** Mulțimea  $A \subset X$  este deschisă în  $X$  dacă și numai dacă orice punct al ei este punct interior în  $X$  sau, echivalent,  $\forall a \in A \exists \varepsilon > 0$  astfel încât  $B(a, \varepsilon) \subset A$ .

*Demonstrație.* Se folosesc Definiția 3.9.6, Definiția 3.9.4 și Propoziția 3.9.3.

**q.e.d.**

**Observația 3.9.8.** Interiorul în  $X$  al unei mulțimi din  $X$  este mulțime deschisă în  $X$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din (3.187) și Definiția 3.9.6.

**Teorema 3.9.6.** Submulțimea  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  este mulțime deschisă în  $X$ , respectiv închisă în  $X$ , dacă și numai dacă complementara sa  $CA$  este mulțime închisă în  $X$ , respectiv deschisă în  $X$ .

*Demonstrație.* Să presupunem că  $A \subset X$  este mulțime deschisă în  $X$ . Atunci, are loc (3.190), din care rezultă evident și

$$C_X A = C_X \overset{\circ}{A}. \quad (3.191)$$

Din (3.188)<sub>1</sub> și (3.191), obținem

$$C_X A = \overline{C_X A}. \quad (3.192)$$

Egalitatea (3.192), împreună cu Definiția 3.9.3, conduce la concluzia că mulțimea  $C_X A$  este închisă în  $X$ .

Dacă  $A$  este mulțime închisă în  $X$ , atunci are loc (3.179), deci vom avea și  $C_X A = C_X \overline{A}$ , din care, ținând cont de (3.189)<sub>1</sub>, găsim  $C_X A = \overset{\circ}{C_X A}$ , care exprimă că  $C_X A$  este mulțime deschisă în  $X$ .

Reciproc, dacă  $C_X A$  este mulțime închisă în  $X$ , atunci are loc (3.192) care, împreună cu (3.188)<sub>1</sub>, duce la (3.191), din care deducem (3.190), ceea ce, după Definiția 3.9.6, înseamnă  $A$  mulțime deschisă în  $X$ .

Dacă  $C_X A$  este mulțime deschisă în  $X$ , atunci este egală cu interiorul ei de unde, folosind (3.189)<sub>1</sub>, deducem  $C_X A = C_X \overset{\circ}{A}$ , din care rezultă (3.179), ceea ce, după Definiția 3.9.3, arată că  $A$  este mulțime închisă în  $X$ . **q.e.d.**

**Observația 3.9.9.** În spațiul metric  $(X, d)$ , mulțimea vidă  $\emptyset$  și spațiul întreg  $X$  sunt simultan mulțimi închise în  $X$  și deschise în  $X$ .

Într-adevăr, afirmațiile rezultă din Teorema 3.9.6, Observația 3.9.6 și Observația 3.9.7. ■

**Teorema 3.9.7.** Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi deschise în spațiul metric  $(X, d)$ , atunci  $A \cap B$  este mulțime deschisă în  $X$ .

În consecință, intersecția unui număr finit de mulțimi deschise în  $X$  este mulțime deschisă în  $X$  și reuniunea oricărui număr de mulțimi deschise în  $X$  este mulțime deschisă în  $X$ .

**Teorema 3.9.8.** Dacă  $A$  este mulțime deschisă în  $X$ , iar  $B$  este mulțime închisă în  $X$ , atunci  $A \setminus B = C_{AB}$  este mulțime deschisă în  $X$ , iar  $B \setminus A = C_B A$  este mulțime închisă în  $X$ .

*Demonstrație.* Folosind Teorema 3.9.6, Teorema 3.9.7, Teorema 3.9.3 și identitățile evidente  $A \setminus B = A \cap C_B$ ,  $B \setminus A = B \cap C_A$ , putem arăta cu ușurință că afirmațiile de mai sus sunt adevărate. **q.e.d.**

**Teorema 3.9.9.** Orice bilă deschisă cu centrul în  $x_0 \in X$  și de rază  $\varepsilon > 0$  este mulțime deschisă în  $X$ .  
Bila închisă  $\overline{B}(x_0, \varepsilon)$  este mulțime închisă în  $X$ .

*Demonstrație.* Conform Propoziției 3.9.5, trebuie arătat că  $\forall y \in B(x_0, \varepsilon)$  este punct interior în  $X$  al mulțimii  $B(x_0, \varepsilon)$ . Pentru a dovedi aceasta folosim Propoziția 3.9.3. Dacă alegem  $\varepsilon' = \varepsilon - d(x_0, y) > 0$ , atunci rezultă imediat că  $B(y, \varepsilon') \subset B(x_0, \varepsilon)$  și cu aceasta teorema este demonstrată. **q.e.d.**

**Definiția 3.9.7.** Se numește **frontiera în  $X$  a mulțimii  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$** , mulțimea  $\partial A$  definită de

$$\partial A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}. \quad (3.193)$$

**Observația 3.9.10.** Din Teorema 3.9.8 rezultă  $\partial A = \overline{\partial A}$ , adică frontiera în  $X$  a unei mulțimi este mulțime închisă în  $X$ .

Dacă  $A$  este mulțime deschisă în  $X$ , din (3.193) și Definiția 3.9.6 deducem că  $\partial A = \overline{A} \setminus A$ .

Dacă  $A$  este mulțime închisă în  $X$ , din Definiția 3.9.3 și aceeași relație (3.193) găsim  $\partial A = A \setminus \overset{\circ}{A}$ .

Vom ilustra acum noțiunile de mulțime închisă în  $X$ , mulțime deschisă în  $X$  și frontiera în  $X$  a unei mulțimi, pe baza unor exemple de mulțimi din spațiul Euclidian  $p$ -dimensional  $\mathbb{R}^p$ .

Fie în acest sens  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$  și  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$  două puncte din  $\mathbb{R}^p$  luate astfel încât să fie satisfăcute condițiile  $a_i < b_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ .

**Definiția 3.9.8.** Se numește **interval  $p$ -dimensional deschis** definit de punctele  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , mulțimea

$$J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) : a_i < x_i < b_i, i \in \overline{1, p}\} \subset \mathbb{R}^p.$$

Punctul  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  se numește **centrul** intervalului  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

**Definiția 3.9.9.** Se numește **interval  $p$ -dimensional închis** mulțimea

$$I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) : a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \overline{1, p}\} \subset \mathbb{R}^p.$$

Punctul  $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  se numește **centrul** intervalului  $I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

**Teorema 3.9.10.** În spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^p$ , intervalele  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  și  $I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  au proprietățile

$$\begin{aligned} J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \overset{\circ}{J}_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}); & I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \overline{I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})}; \\ J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \overset{\circ}{I}_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}); & I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \overline{J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})}; \\ J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (a_1, b_1) \times \dots \times (a_p, b_p); & I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_p, b_p]. \end{aligned}$$

Intervalele bi-dimensionale sunt dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele de coordonate din plan, iar intervalele tri-dimensionale sunt paralelipede dreptunghice cu muchiile paralele cu axele de coordonate ale spațiului.

**Definiția 3.9.10.** Se numește **față  $(p-1)$ -dimensională** a intervalelor  $p$ -dimensionale  $I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  și  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  mulțimea

$$F_{p-1}^k = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) : x_k = a_k \text{ sau } x_k = b_k\} \subset \mathbb{R}^p.$$

**Observația 3.9.11.** Un interval  $p$ -dimensional are  $2p$  fețe  $(p-1)$ -dimensionale.

**Observația 3.9.12.** Reuniunea tuturor fețelor  $(p-1)$ -dimensionale ale lui  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  este frontiera lui  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  care coincide cu frontiera lui  $I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

Dacă  $a_i = b_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$  și  $a_j = b_j$  pentru cel puțin un indice  $j$ , intervalul degenerat  $I_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  este o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^p$  și interiorul ei este mulțimea vidă. Frontiera acestui interval este însuși intervalul.

**Teorema 3.9.11.** Dacă  $A \subset \mathbb{R}^p$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^p$  și  $\mathbf{x}_0 \in A$ , există un interval  $p$ -dimensional deschis  $J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  cu centrul în  $\mathbf{x}_0$  astfel încât  $\mathbf{x}_0 \in J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset A$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $A$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^p$  există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \subset A$ .

Fie acum  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 - \varepsilon \mathbf{s}$  și  $\mathbf{b} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{s}$ , unde  $\mathbf{s} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^p$ . Atunci, intervalul  $p$ -dimensional deschis

$$J_p(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p) : |x_i - x_{0i}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, i \in \overline{1, p}\},$$

unde  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0p})$ , este submulțime a lui  $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$  deci și a lui  $A$  și are centrul în punctul  $\mathbf{x}_0$ . **q.e.d.**

**Definiția 3.9.11.** *Punctul  $x \in X$  se numește punct de acumulare în  $X$  pentru submulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  dacă orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(x)$  conține cel puțin un punct din  $A$  diferit de  $x$ , adică*

$$V \cap A - x \neq \emptyset, \quad \forall V \in \mathcal{V}(x). \quad (3.194)$$

*Mulțimea punctelor de acumulare în  $X$  ale mulțimii  $A$  se numește mulțime derivată în  $X$  și se notează cu  $A'$ .*

**Observația 3.9.13.**  $x \in A' \implies x \in \mathbf{a}$ . Reciproc nu este adevărat. Aceasta arată că  $A' \subset \overline{A}$ .

Într-adevăr, implicația rezultă din Definiția 3.9.1 și Definiția 3.9.9.

Pentru a dovedi că reciproca afirmației nu este adevărată considerăm submulțimea  $A = \{-1\} \cup [0, 3] \subset \mathbb{R}$ , metrica în  $\mathbb{R}$  fiind cea obișnuită. Atunci, punctul  $x = -1$  este punct aderent în  $\mathbb{R}$  pentru  $A$  dar nu și punct de acumulare în  $\mathbb{R}$  al mulțimii  $A$  deoarece vecinătatea  $V = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}(-1)$  nu conține nici un punct al lui  $A$  diferit de  $-1$ . ■

**Observația 3.9.14.** *Un punct de acumulare în  $X$  al unei mulțimi poate să aparțină, sau să nu aparțină acelei mulțimi.*

De exemplu, dacă  $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ , atunci punctele  $x = 0$  și  $x = 1$  sunt puncte de acumulare în  $\mathbb{R}$  ale lui  $A$  care nu aparțin lui  $A$  în timp ce  $x = \frac{1}{3}$ , spre exemplu, este punct de acumulare în  $\mathbb{R}$  al lui  $A$  și aparține lui  $A$ . ■

**Definiția 3.9.12.** *Un punct  $x \in A$  care nu este punct de acumulare în  $X$  al mulțimii  $A$  se numește punct izolat în  $X$  al lui  $A$  dacă există  $V \in \mathcal{V}(x)$  astfel încât  $V \cap A = \{x\}$ . O mulțime formată numai din puncte izolate în  $X$  se numește mulțime discretă în  $X$ .*

**Observația 3.9.15.** *Dacă  $x \in \overline{A} \setminus A$ , atunci  $x$  este punct de acumulare în  $X$  pentru  $A$ .*

Afirmația se deduce combinând Definiția 3.9.1 cu Definiția 3.9.12. ■

**Teorema 3.9.12.** *Orice vecinătate a unui punct de acumulare în  $X$  al unei mulțimi conține o infinitate de puncte ale acelei mulțimi.*

*Demonstrație.* Prin reducere la absurd.

Presupunem că există  $V_0 \in \mathcal{V}(x)$  astfel încât

$$V_0 \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

unde  $x$  este un punct de acumulare în  $X$  al mulțimii  $A \subset (X, d)$ , și fie  $\varepsilon = \min\{d(x, x_1), d(x, x_2), \dots, d(x, x_n)\} > 0$ .

Deoarece  $B(x, \varepsilon) \cap A = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A \\ \emptyset, & \text{dacă } x \notin A, \end{cases}$  rezultă că  $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$  și cum  $B(x, \varepsilon) \in \mathcal{V}(x)$  rezultă că  $x$  nu este punct de acumulare în  $X$  al mulțimii  $A$  ceea ce ar contrazice ipoteza. **q.e.d.**

**Observația 3.9.16.** O mulțime care are puncte de acumulare în  $X$  este o mulțime infinită, aceasta rezultând din Teorema 3.9.11, deci mulțimile finite nu au puncte de acumulare în  $X$ .

Se poate însă ca  $A$  să fie mulțime infinită și să nu aibă puncte de acumulare în  $X$ . De exemplu,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  este mulțime infinită care nu are puncte de acumulare în  $\mathbb{R}$ . Singurul punct de acumulare al lui  $\mathbb{N}$  este  $+\infty$  care nu aparține lui  $\mathbb{R}$ , acesta aparținând lui  $\overline{\mathbb{R}}$ .

La fel ca pentru puncte aderente în  $X$  putem demonstra cu ușurință

**Teorema 3.9.13.** Punctul  $x \in X$  este punct de acumulare în  $X$  al mulțimii  $A \subset X$  dacă și numai dacă  $\forall \varepsilon > 0 \implies B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

De asemenea, folosind Propoziția 3.9.2 și Observația 3.9.8, rezultă

**Teorema 3.9.14.** Punctul  $x \in X$  este punct de acumulare în  $X$  pentru mulțimea  $A \subset (X, d)$  dacă și numai dacă există un șir de puncte  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in A$  cu  $x_n \neq x$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $x_n \rightarrow x$ .

Folosind acum Teorema 3.9.14 tragem concluzia că dacă  $x$  este punct de acumulare în  $X$  al mulțimii  $A$ , atunci există o infinitate de șiruri de puncte având proprietățile din Teorema 3.9.14.

Rezultatele de mai sus conduc fără dificultate la următorul rezultat.

**Teorema 3.9.15.** Dacă  $A \subset (X, d)$ , atunci

$$\overline{A} = A \cup A'. \quad (3.195)$$

*Demonstrație.* Din Observația 3.9.3, Definiția 3.9.2 și Observația 3.9.8, rezultă  $A \subset \overline{A}$  și  $A' \subset \overline{A}$ , din care deducem

$$A \cup A' \subset \overline{A} \quad (3.196)$$

Invers, dacă  $x \in \overline{A}$ , atunci  $\forall \varepsilon > 0$  are loc (3.170). Pentru acest punct există două posibilități: fie  $x \in A$ , caz în care  $x \in A \cup A'$ ; fie  $x \notin A$  în care situație, dacă ținem cont de (3.170), deducem  $B(x, \varepsilon) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ , ceea ce arată că  $x \in A'$ , adică  $x \in A \cup A'$ .

În concluzie, în ambele cazuri  $x \in A \cup A'$  de unde rezultă

$$\overline{A} \subset A \cup A'. \quad (3.197)$$

Incluziunile (3.196) și (3.197) demonstrează (3.195).

**q.e.d.**

**Corolarul 3.9.1.** Submulțimea  $A \subset (X, d)$  este mulțime închisă în  $X$  dacă și numai dacă își conține toate punctele de acumulare în  $X$ , adică

$$A' \subset A. \quad (3.198)$$

*Demonstrație.* Fie  $A$  mulțime închisă în  $X$ . Atunci,  $A = \overline{A}$  și din rezultă  $A = A \cup A'$  ceea ce evident antrenează (3.198).

Reciproc, să presupunem că  $A' \subset A$ . Deoarece  $A \subset \overline{A}$ , rezultă că  $A' \cup A \subset \overline{A}$ . Folosind Teorema 3.9.14, deducem  $\overline{A} \subset A$ . Pe de altă parte, avem și  $A \subset \overline{A}$ . Deci  $\overline{A} \subset A \subset \overline{A}$ , din care rezultă  $A = \overline{A}$ , adică mulțimea  $A$  este închisă în  $X$ . **q.e.d.**

Să introducem o ultimă noțiune și anume aceea de *spațiu topologic*.

În acest sens, fie  $\mathcal{P}(X)$  totalitatea submulțimilor mulțimii  $X$  și  $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ , o parte din aceste mulțimi.

**Definiția 3.9.13.** Spunem că  $\tau$  este o **topologie** pe  $X$  dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți numite *axiomele topologiei*:

- ( $T_1$ ) Reuniune de mulțimi din  $\tau$  aparține lui  $\tau$ ;
- ( $T_2$ ) Intersecție finită de mulțimi din  $\tau$  aparține lui  $\tau$ ;
- ( $T_3$ )  $X \in \tau$ ,  $\emptyset \in \tau$ .

**Definiția 3.9.14.** Perechea  $(X, \tau)$  unde  $X$  este o mulțime nevidă oarecare, iar  $\tau$  este o topologie pe  $X$ , se numește **spațiu topologic**.

**Observația 3.9.17.** Un spațiu metric  $(X, d)$  este spațiu topologic.

Într-adevăr, dacă considerăm  $\tau_d \subset \mathcal{P}(X)$ , unde  $\tau_d = \{D \subset X : D = \overset{\circ}{D}\}$ , adică  $\tau_d$  este familia mulțimilor deschise în  $X$ , folosind Teorema 3.9.7 și Observația 3.9.9, rezultă că  $\tau_d$  satisface ( $T_1$ ) – ( $T_3$ ). ■

**Definiția 3.9.15.** Topologia  $\tau_d$  se numește **topologia indusă de metrica  $d$** .

În încheiere prezentăm o caracterizare a mulțimilor deschise în  $X$  cu ajutorul bilelor deschise din  $(X, d)$ .

**Teorema 3.9.16.** Mulțimea  $D \subset X$  este mulțime deschisă în  $X$  dacă și numai dacă  $D$  este reuniunea unei familii de bile deschise.

*Demonstrație.* Dacă  $D$  este mulțime deschisă în  $X$ , atunci  $\forall x \in D \exists \varepsilon_x > 0$  astfel încât  $B(x, \varepsilon_x) \subset D$ . Fie familia de mulțimi deschise în  $X$   $\{B(x, \varepsilon_x) : x \in D\}$ . După Teorema 3.9.7 rezultă că mulțimea  $B = \bigcup_{x \in D} B(x, \varepsilon_x)$

este mulțime deschisă în  $X$ . În plus,  $B = D$  deoarece un punct arbitrar  $y$  aparține lui  $B$  dacă și numai dacă există  $x \in D$  astfel încât  $y \in B(x, \varepsilon_x)$  ceea ce este echivalent cu  $y \in D$ , adică avem simultan  $B \subset D$  și  $D \subset B$ .

Reciproc, dacă  $D = \bigcup_{t \in T} B_t$ , unde  $B_t$  sunt bile deschise, conform axiomei  $T_1$ ,  $D$  este mulțime deschisă în  $X$ . **q.e.d.**



**Observația 3.9.18.** O submulțime a lui  $\mathbb{R}$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă este reuniune de intervale deschise.

Într-adevăr, aceasta rezultă din Teorema 3.9.16 aplicată spațiului Euclidian  $\mathbb{R}$  unde se ține cont că bila deschisă cu centrul în  $x_0 \in \mathbb{R}$  și rază  $\varepsilon$  este intervalul deschis  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ . ■

**Exercițiul 3.9.1.** Fie intervalele din spațiul Euclidian  $\mathbb{R}$

$$D_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right), \quad F_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = [1, 2]; \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = (1, 3).$$

**Soluție.** În primul rând se vede că mulțimea compactă  $[1, 2]$  este inclus în orice mulțime  $D_n$ . Prin urmare,  $[1, 2] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$ .

Să arătăm că are loc și incluziunea inversă.

Fie în acest sens  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$ , arbitrar. Atunci,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  avem  $x \in \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$ . Dacă  $x \notin [1, 2]$ , atunci  $x < 1$ , sau  $x > 2$ . Oriunde s-ar plasa  $x$  în afara intervalului  $[1, 2]$ , există  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x \notin D_{n_0}$  care conduce la faptul că  $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$ , ceea ce este fals.

Prin urmare, avem  $1 \leq x \leq 2$ , adică  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n \subset [1, 2]$ . Cele două incluziuni demonstrează egalitatea  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = [1, 2]$ .

În mod similar se arată că  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = (1, 3)$ .

Mai general, putem arăta că

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = [a, b], \quad \bigcup_{\varepsilon > 0} [a - \varepsilon, a + \varepsilon] = (a, b)$$

adică, enunțând rezultatul într-un cadru general, putem afirma că într-un spațiu metric  $(X, d)$ , intersecția de mulțimi deschise în  $X$  poate fi o mulțime închisă în  $X$ , iar reuniunea de mulțimi închise în  $X$  poate da ca rezultat o mulțime deschisă în  $X$ . ■

### 3.10 Mulțimi compacte într-un spațiu metric

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $\mathcal{P}(X)$  mulțimea tuturor părților mulțimii  $X$ .

**Definiția 3.10.1.** O familie de mulțimi  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  se spune că este o **acoperire** pentru mulțimea  $A \subset X$ , sau că  $\mathcal{F}$  **acoperă**  $A$  dacă orice punct  $x \in A$  este punct al cel puțin unei mulțimi din  $\mathcal{F}$ .

Dacă  $\mathcal{F}$  acoperă  $A$  și  $\mathcal{F}$  are un număr finit de elemente (mulțimi), atunci se spune că  $\mathcal{F}$  constituie o **acoperire finită** a mulțimii  $A$ . Dacă, în plus, elemente lui  $\mathcal{F}$  sunt mulțimi deschise în  $X$ , atunci se spune că  $\mathcal{F}$  este o **acoperire finită deschisă** în  $X$  a mulțimii  $A$ .

**Definiția 3.10.2.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$  și  $\varepsilon > 0$ . Mulțimea  $M \subset X$  se numește  $\varepsilon$ -rețea pentru mulțimea  $A$  dacă  $\forall x \in A \exists y_x \in M$  astfel încât  $d(x, y_x) < \varepsilon$ . Dacă  $M$ , o  $\varepsilon$ -rețea pentru mulțimea  $A$ , are un număr finit de elemente, atunci  $M$  se numește  $\varepsilon$ -rețea finită a mulțimii  $A$ .

Fără a restrânge generalitatea putem presupune  $M \subset A$ .

**Propoziția 3.10.1.** Mulțimea  $M \subset X$  este  $\varepsilon$ -rețea pentru mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  dacă și numai dacă

$$A = \bigcup_{y \in M} B(y, \varepsilon). \quad (3.199)$$

*Demonstrație.* Este evidentă dacă se folosește Definiția 3.10.2.

q.e.d.

**Observația 3.10.1.** Incluziunea (3.199) arată că familia de bile  $\{B(y, \varepsilon) : y \in M\}$  constituie o acoperire deschisă a mulțimii  $A$ . În plus, dacă  $M$  are un număr finit de elemente, familia de bile de mai sus este o acoperire deschisă finită a mulțimii  $A$ .

**Definiția 3.10.3.** Mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  se numește **compactă prin acoperire**, sau simplu, **compactă** dacă din orice acoperire deschisă  $\mathcal{F}$  a lui  $A$  se poate extrage o acoperire finită.

Spațiul metric  $(X, d)$  se numește **compact** dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o acoperire finită.

**Definiția 3.10.4.** Mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  se numește **compactă prin șiruri**, sau **secvențial compactă** dacă orice șir de puncte  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_n \in A$ , conține cel puțin un subșir  $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent la un punct din  $A$ .

Spațiul metric  $(X, d)$  se numește **secvențial compact** sau **compact prin șiruri** dacă orice șir de puncte din  $X$  conține un subșir convergent la un punct din  $X$ .

**Teorema 3.10.1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$ . Dacă  $A$  este mulțime secvențial compactă, atunci  $A$  este mărginită și închisă în  $X$ .

*Demonstrație.* Întrucât incluziunea  $A \subset \overline{A}$  este asigurată de Teorema 3.9.1, pentru a arăta egalitatea  $A = \overline{A}$  mai trebuie demonstrat că  $\overline{A} \subset A$ . Vom arăta că un element arbitrar  $x \in \overline{A}$  este element și al mulțimii  $A$ . Dacă  $x \in \overline{A}$ , atunci, oricare ar fi  $V \in \mathcal{V}(x)$ , intersecția  $V \cap A$  este nevidă. Luăm  $V = B(x, \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ; intersecția acestei bile cu mulțimea  $A$  fiind nevidă, conține măcar un element; fie acesta  $x_n$ ; acest element are evident proprietatea:

$$d(x_n, x) < \frac{1}{n}. \quad (3.200)$$

În acest mod putem defini un șir de puncte  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , cu termenii din mulțimea  $A$  care, în baza lui (9.2), este convergent la  $x \in \overline{A}$ . Dar mulțimea  $A$  este compactă prin șiruri, deci șirul de puncte  $(x_n)$  construit mai sus are cel puțin un subșir convergent la un element al mulțimii  $A$ , element care nu poate fi altul decât  $x$ .

Prin urmare, am demonstrat că  $\forall x \in \overline{A}$  este element și al mulțimii  $A$  ceea ce în final atrage  $A = \overline{A}$ , adică  $A$  este mulțime închisă în  $X$ .

Să arătăm că  $A$  este mulțime mărginită.

Presupunem contrariul, și anume că  $A$  este nemărginită. Atunci, există  $x_0 \in X$  cu proprietatea că  $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in A$  astfel încât  $d(x_\varepsilon, x_0) \geq \varepsilon$  sau, echivalent,  $x_\varepsilon \notin B(x_0, \varepsilon)$ . Din acest rezultat deducem că pentru  $\varepsilon_0 = 1$  există  $x_1 \in A$  astfel încât  $x_1 \notin B(x_0, 1)$ . Notând  $\varepsilon_1 = 1 + d(x_1, x_0)$ , deducem că și pentru această valoare a lui  $\varepsilon$  există  $x_2 \in A$  astfel încât  $x_2 \notin B(x_0, \varepsilon_1)$ . Notăm acum  $\varepsilon_2 = 1 + d(x_2, x_0)$ . Atunci, există  $x_3 \in A$  cu proprietatea  $x_3 \notin B(x_0, \varepsilon_2)$ . Presupunând ales  $x_n$  după procedeul de mai sus, notăm apoi  $\varepsilon_n = 1 + d(x_n, x_0)$ . Atunci, există  $x_{n+1} \in A$  așa încât  $x_{n+1} \notin B(x_0, \varepsilon_n)$ . În acest fel am construit șirul de puncte  $(x_n)$  din mulțimea  $A$  cu proprietatea

$$d(x_{n+1}, x_0) \geq 1 + d(x_n, x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.201)$$

Din inegalitatea (3.201) deducem

$$d(x_{n+p}, x_0) \geq 1 + d(x_n, x_0), \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*. \quad (3.202)$$

Șirul de puncte  $(x_n)$  fiind din mulțimea secvențial compactă  $A$  are un subșir  $(x_{k_n})$ , convergent la un punct din  $A$ . Cum orice șir convergent este fundamental rezultă că  $(x_{k_n})$  este șir fundamental și prin urmare,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{k_{n+p}}, x_{k_n}) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*. \quad (3.203)$$

Dar din Propoziția 3.1.1 avem

$$d(x_{k_{n+p}}, x_0) - d(x_{k_n}, x_0) \leq d(x_{k_{n+p}}, x_{k_n}). \quad (3.204)$$

Trecând la limită în (3.204) pentru  $n \rightarrow \infty$  și ținând cont de (3.202) și (3.203) ajungem la contradicția  $1 \leq 0$ , care arată că presupunerea făcută este falsă.

Prin urmare, mulțimea  $A$  este mărginită.

**q.e.d.**

**Corolarul 3.10.1.** Dacă mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  este compactă prin șiruri și  $A_1 \subset A$  este mulțime închisă în  $X$ , atunci  $A_1$  este mulțime compactă prin șiruri.

**Teorema 3.10.2.** Submulțimea nevidă  $A \subset \mathbb{R}^n$  este secvențial compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstrație.* Prima parte a teoremei rezultă din Teorema 3.10.1.

Partea a doua, care de fapt este reciproca teoremei amintite în cazul când  $X = \mathbb{R}^n$ , se demonstrează arătând că este îndeplinită Definiția 3.10.4. Considerăm în acest sens un șir de puncte arbitrar  $(\mathbf{x}_m)$  din mulțimea  $A$ . Fiindcă  $A$  este mărginită, există un interval închis  $n$ -dimensional

$$I_n = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

astfel încât  $A \subset I_n$ .

Fie acum  $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$ , mijlocul segmentului  $[a_j, b_j]$ , unde  $j$  ia toate valorile de la 1 până la  $n$ .

Notăm  $I_n^{(1)} = [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \times \dots \times [a_n^{(1)}, b_n^{(1)}] \subset I_n$  acel subinterval  $n$ -dimensional închis în  $\mathbb{R}^n$  care conține o infinitate de termeni ai șirului  $(\mathbf{x}_n)$ , unde  $a_j^{(1)}$  poate fi  $a_j$  sau  $c_j$ , iar  $b_j^{(1)}$  este fie  $c_j$ , fie  $b_j$ , cu  $j \in \overline{1, n}$ .

Continuând procedeul, găsim un șir de intervale  $n$ -dimensionale închise în  $\mathbb{R}^n$ , notat cu  $(I_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ , care are următoarele proprietăți:

- (a)  $I_n \supset I_n^{(1)} \supset I_n^{(2)} \supset \dots \supset I_n^{(k)} \supset \dots$ ;
- (b)  $I_n^{(k)}$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(\mathbf{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ;
- (c)  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_n^{(k)} = \{\mathbf{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ .

Primele două proprietăți sunt evidente din modul cum s-au construit intervalele  $I_n^{(k)}$ ,  $k \geq 1$ , iar cea de a treia rezultă imediat din Teorema 2.1.6.

Alegem acum  $\mathbf{x}_{k_1} \in I_n^{(1)}$ , un termen oarecare al șirului  $(\mathbf{x}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ , astfel încât  $k_1 \geq 1$ , lucru posibil deoarece  $I_n^{(1)}$  conține o infinitate de termeni ai șirului. Deoarece  $I_n^{(2)}$  conține o infinitate de termeni ai șirului  $(\mathbf{x}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , există  $k_2 \geq 2$ ,  $k_2 > k_1$  astfel încât  $\mathbf{x}_{k_2} \in I_n^{(2)}$ .

Presupunem că, prin procedeul de mai sus, am ales  $\mathbf{x}_{k_m} \in I_n^{(m)}$ , unde  $k_m \geq m$  și  $k_m > k_{m-1}$ . Intervalul închis  $n$ -dimensional  $I_n^{(m+1)}$  conținând o infinitate de termeni ai șirului  $(\mathbf{x}_m)$ , conține și un termen de forma  $\mathbf{x}_{k_{m+1}}$ , unde  $k_{m+1} > m+1$  și  $k_{m+1} \geq k_m$ .

Șirul  $(\mathbf{x}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$  astfel construit este un subșir al șirului  $(\mathbf{x}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  și are proprietatea

$$\mathbf{x}_{k_m} \in I_n^{(m)}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*. \quad (3.205)$$

Din (3.205) și proprietatea (c) a șirului  $(I_n^{(m)})_{m \in \mathbb{N}^*}$  rezultă  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_m} = \mathbf{x}$ , ceea ce arată că  $\mathbf{x}$  este punct de acumulare în  $\mathbb{R}^n$  al mulțimii  $A$ . Cum  $A$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ , ea își conține toate punctele de acumulare în  $\mathbb{R}^n$  (vezi Corolarul 3.9.1). Prin urmare,  $\mathbf{x} \in A$ .

Rezultatul stabilit și Definiția 3.10.4 arată că  $A$  este mulțime secvențial compactă.

**q.e.d.**

**Teorema 3.10.3.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A$  o submulțime a lui  $X$ . Dacă  $A$  este mulțime compactă prin acoperire, sau mulțime compactă, atunci  $A$  este secvențial compactă.

*Demonstrație.* Presupunem contrariul, că  $A$  nu ar fi compactă prin șiruri, adică există șirul de puncte  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in A$  care să nu admită subșiruri convergente la puncte din  $A$ . Aceasta înseamnă că  $\forall x \in A \exists \varepsilon_x > 0$  astfel încât bila  $B(x, \varepsilon_x)$  conține un număr finit de termeni ai șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  căci, în caz contrar, există un punct de acumulare în  $X$  pentru mulțimea valorilor șirului, care după Teorema 3.9.14 conduce la existența unui subșir convergent la  $x$ , fapt ce am presupus că nu se întâmplă.

Deoarece  $A$  este compactă prin acoperire, toți termenii șirului se află într-un număr finit de bile ceea ce conduce la concluzia că mulțimea valorilor șirului  $(x_n)$  are un număr finit de termeni. De aici tragem concluzia că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  ar avea cel puțin un subșir constant, adică convergent, fapt care ar contrazice presupunerea făcută. Prin urmare, neapărat șirul dat trebuie să admită un subșir convergent la un punct din  $A$  ceea ce, după Definiția 3.10.4, arată că mulțimea  $A$  este secvențial compactă.

**q.e.d.**

**Corolarul 3.10.2.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A \subset X$  o mulțime compactă. Atunci,  $A$  este închisă în  $X$  și mărginită.

Într-adevăr, dacă  $A$  este compactă, din Teorema 3.10.3 rezultă că  $A$  este compactă prin șiruri și folosind Teorema 3.10.1, deducem că  $A$  este mulțime închisă în  $X$  și mărginită. ■

Reciproca din Corolarul 3.10.2 este adevărată doar în  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.10.4.** Dacă  $A$  este mulțime compactă în spațiul metric  $(X, d)$  și  $B \subset A$  este o mulțime închisă în  $X$ , atunci  $B$  este mulțime compactă.

*Demonstrație.* Fie  $\mathcal{F} = \{D_i : i \in I, D_i = \overset{\circ}{D}_i, \forall i \in I\}$  o acoperire deschisă pentru mulțimea  $B$ . Notăm  $D = C_X B$ . Mulțimea  $B$  fiind închisă în  $X$ , complementara sa față de spațiul întreg  $X$ , adică mulțimea  $D$ , este mulțime deschisă în  $X$  și avem evident

$$A \subset D \cap \left( \bigcup_{i \in I} D_i \right).$$

Deoarece  $A$  este mulțime compactă, există  $J \subset I$  finită astfel încât

$$A \subset D \cup \left( \bigcup_{i \in J} D_i \right)$$

și cum  $B \subset A$  vom avea și

$$B \subset \bigcup_{i \in J} D_i,$$

ceea ce arată că  $B$  este mulțime compactă prin acoperire.

**q.e.d.**

**Teorema 3.10.5.** Dacă  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A \subset X$  o mulțime compactă, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o  $\varepsilon$ -rețea finită  $M$  pentru mulțimea  $A$ .

*Demonstrație.* Familia  $\mathcal{U} = \{B(x, \varepsilon) : x \in A\}$  este o acoperire deschisă în  $X$  pentru mulțimea  $A$ . Cum  $A$  este mulțime compactă, există o subacoperire finită a sa, deci există mulțime finită de puncte  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  din  $A$ , astfel încât

$$A \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon).$$

Acum se vede că  $M$  este  $\varepsilon$ -rețea pentru mulțimea  $A$ .

**q.e.d.**

**Teorema 3.10.6.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric,  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$  și  $\{F_i : i \in I, F_i = \mathbf{f}_i, \forall i \in I\}$  o familie oarecare de mulțimi închise în  $X$ . Afirmatia și implicațiile de mai jos sunt echivalente:

(i)  $A$  este mulțime compactă;

$$(ii) \quad A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) = \emptyset \implies \exists J \subset I, \quad J \text{ finită, astfel încât } A \cap \left( \bigcap_{j \in J} F_j \right) = \emptyset; \quad (3.206)$$

$$(iii) \quad A \cap \left( \bigcap_{j \in J} F_j \right) \neq \emptyset, \quad \forall J \subset I, J \text{ finită, } \implies A \cap \left( \bigcap_{i \in I} F_i \right) \neq \emptyset.$$

*Demonstrație.* Arătăm mai întâi că  $(i) \implies (ii)$ . În primul rând avem că  $A \subset C_X \left( \bigcup_{i \in I} F_i \right)$ . Folosind una din relațiile lui de Morgan (vezi Teorema 1.2.1), Teorema 3.9.6 și Teorema 3.9.7, constatăm că familia  $\mathcal{U} = \{C_X F_i : i \in I\}$  constituie o acoperire deschisă pentru mulțimea  $A$ . Cum  $A$  este compactă, din Definiția 3.10.3 rezultă că există  $J \subset I$ ,  $J$  finită, astfel încât să aibă loc (3.206).

Arătăm acum că  $(ii) \implies (i)$ .

Fie în acest sens o acoperire deschisă a mulțimii  $A$  de forma

$$\mathcal{D} = \{D_i : D_i = \overset{\circ}{D}_i, \forall i \in I\}$$

cu proprietatea  $A \subset \bigcup_{i \in I} D_i$ . Atunci,  $A \cap C_X\left(\bigcup_{i \in I} D_i\right) = \emptyset$  care, după utilizarea relației de Morgan adecvate, se poate scrie în forma  $A \cap \left(\bigcap_{i \in I} (C_X D_i)\right) = \emptyset$ . Însă familia de mulțimi  $\{C_X D_i : i \in I\}$  este formată din mulțimi închise în  $X$  și, folosind ipoteza, deducem că există  $J \subset I$ ,  $J$  mulțime finită, astfel încât  $A \cap \left(\bigcap_{j \in J} (C_X D_j)\right) = \emptyset$ , din care, în baza uneia dintre relațiile lui de Morgan, rezultă  $A \cap C_X\left(\bigcup_{j \in J} D_j\right) = \emptyset$ . Ultimul rezultat arată că  $A \subset \bigcup_{j \in J} D_j$  ceea ce, după Definiția 3.10.3, demonstrează că  $A$  este mulțime compactă.

Implicațiile (ii)  $\iff$  (iii) se demonstrează prin reducere la absurd.

**q.e.d.**

Următoarea teoremă arată că pentru spațiile metrice compactitatea prin acoperire și compactitatea prin șiruri sunt echivalente.

**Teorema 3.10.7.** *Submulțimea nevidă  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  este compactă prin acoperire dacă și numai dacă este compactă prin șiruri.*

*Demonstrație.* Dacă  $A$  este compactă prin acoperire, din Teorema 3.10.3, rezultă că  $A$  este secvențial compactă.

Reciproc, demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem așadar că  $A$  nu ar fi compactă, prin urmare din acoperirea deschisă  $\mathcal{D}$ , unde  $I$  este familie oarecare de indici, nu se poate extrage o acoperire finită. După Teorema 3.10.5, luând  $\varepsilon_1 = 1$  putem determina o  $\varepsilon_1$ -rețea finită în care găsim o bilă deschisă  $B(a_1, 1)$  astfel încât  $A \cap \overline{B}(a_1, 1)$  să nu fie acoperită finit de familia  $\mathcal{D}$ . Deoarece mulțimea  $A \cap \overline{B}(a_1, 1)$  este compactă prin șiruri, putem construi o  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ -rețea finită în care să existe bila  $B\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$  așa încât  $A \cap \overline{B}(a_1, 1) \cap B\left(a_2, \frac{1}{2}\right)$  să nu fie acoperită finit de familia  $\mathcal{D}$ .

Prin acest procedeu obținem un șir de mulțimi închise în  $X$

$$(F_n)_{n \geq 1}, F_n = A \cap \left(\bigcap_{k=1}^n \overline{B}\left(a_k, \frac{1}{k}\right)\right), n \geq 1$$

aflat în relația de incluziune  $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ , din care rezultă că  $A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n\right) \neq \emptyset$ .

Din modul cum au fost construite mulțimile  $F_n$  rezultă că  $A \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} F_n\right) = \{a\}$ . Deoarece  $a \in A$  există  $i_0 \in I$  astfel încât  $a \in D_{i_0}$ . Întrucât  $D_{i_0}$  este mulțime deschisă în  $X$ , există  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $D_{i_0} \supset F_n, \forall n \geq n_0$ , ceea ce constituie contradicție.

**q.e.d.**

Să considerăm acum două spații metrice  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$ . După Exercițiul 3.1.2, aplicația

$$d : T \times T \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}, \quad (3.207)$$

unde  $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in T$ , este o metrică pe  $T$  și deci  $(T, d)$  este spațiu metric.

**Teorema 3.10.8.** Dacă  $(X, d_1)$  și  $(Y, d_2)$  sunt două spații metrice compacte, atunci produsul cartezian  $T = X \times Y$  înzestrat cu metrica (3.207) este spațiu metric compact.

*Demonstrație.* Dacă avem în vedere Teorema 3.10.7, trebuie să arătăm că  $(T, d)$  este spațiu secvențial compact. În acest sens considerăm un șir de puncte arbitrar  $(z_n)$  din  $T$ . Însă  $z_n = (x_n, y_n)$  și ca urmare vom avea șirurile de puncte  $(x_n)$  și  $(y_n)$  din  $(X, d_1)$  și respectiv  $(Y, d_2)$ . Cum  $(X, d_1)$  este spațiu compact rezultă că există un subșir  $(x_{k_n})$  al șirului  $(x_n)$  convergent la un punct  $x \in X$ . Considerând subșirul  $(y_{k_n})$  al șirului  $(y_n)$  și ținând seama că  $(Y, d_2)$  este compact, rezultă că există un subșir al său  $(y_{k_{m_n}})$  convergent la un punct  $y \in Y$ .

Fie acum  $(z_{k_{m_n}})$ , subșir al lui  $(z_n)$ , care are termenul general  $z_{k_{m_n}} = (x_{k_{m_n}}, y_{k_{m_n}})$ . Se deduce imediat că  $z_{k_{m_n}} \rightarrow (x, y) \in X \times Y = T$ , ceea ce arată că  $(T, d)$  este secvențial compact deci și compact. **q.e.d.**

Rezultatul de mai sus se poate generaliza la un produs cartezian de mai mult de două spații.

**Teorema 3.10.9.** Dacă  $(X_i, d_i)$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , sunt  $n$  spații metrice compacte, atunci spațiul metric produs  $(X, d)$ , unde

$$X = X_1 \times \dots \times X_n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

și

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2(x_i, y_i)}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

este de asemenea compact.

*Demonstrație.* Este într-un tot al analoagă celei din Teorema 3.10.8.

**q.e.d.**

**Corolarul 3.10.3.** Orice interval  $n$ -dimensional închis  $I_n \subset \mathbb{R}^n$  este mulțime compactă.

*Demonstrație.* Să arătăm mai întâi că orice interval închis unidimensional  $I_1 = [a, b] \subset \mathbb{R}$  este mulțime compactă în spațiul metric obișnuit  $\mathbb{R}$ .

Într-adevăr, dacă  $(x_n)$  este un șir numeric din  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  el este mărginit și conform lemei lui Cesaro (Propoziția 2.1.8), conține un subșir  $(x_{k_n})$  convergent la un punct  $x \in \mathbb{R}$ . Cum mulțimea  $[a, b]$  este închisă în  $\mathbb{R}$ , folosind Teorema 3.9.2, deducem că  $x \in [a, b]$ . Prin urmare,  $[a, b]$  fiind mulțime secvențial compactă în  $\mathbb{R}$ , este compactă.

Având în vedere că  $I_n$  este de fapt un produs cartezian finit de mulțimi compacte, din Teorema 3.10.9 rezultă că  $I_n$  este mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$ . **q.e.d.**

Prezentăm acum unul din rezultatele fundamentale ale analizei matematice.

**Teorema 3.10.10.** O submulțime  $A$  a lui  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstrație.* Afirmațiile rezultă din Teorema 3.10.2 și Teorema 3.10.3.

q.e.d.

**Observația 3.10.2.** Spațiul metric obișnuit  $(\mathbb{R}, d)$  și spațiul Euclidian  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , nu sunt mulțimi compacte, nefiind mulțimi mărginite.

În schimb, elemente lui  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , posedă o proprietate de compactitate locală în sensul că, dat un element arbitrar  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , se poate indica o vecinătate compactă a sa de exemplu, un interval închis  $n$ -dimensional (vezi Corolarul 3.10.3), care să-l conțină pe  $\mathbf{x}_0$ .

**Exemplul 3.10.1.** Mulțimea  $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$  din spațiul Euclidian bi-dimensional  $\mathbb{R}^2$  este compactă.

Într-adevăr, mulțimea  $A$  este mărginită căci este inclusă, de exemplu, în bila  $B(\mathbf{0}, 4)$  și închisă în  $\mathbb{R}^2$  pentru că își conține toate punctele de acumulare în  $X$ . Prin urmare, din Teorema 3.10.10, rezultă că este compactă. ■

**Exemplul 3.10.2.** Intervalul  $(0, +\infty) = \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$  nu este mulțime compactă nefiind nici mulțime închisă în  $\mathbb{R}$  nici mulțime mărginită.

**Exemplul 3.10.3.** Intervalul  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  nu este mulțime compactă deoarece nu este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ . Intervalele  $[a, b]$  și  $[b, a)$ , din  $\mathbb{R}$ , nu sunt nici închise în  $\mathbb{R}$  nici deschise în  $\mathbb{R}$ .

În aceste exemple se consideră că  $\mathbb{R}$  este spațiu metric, metrica pe  $\mathbb{R}$  fiind cea obișnuită, definită prin  $d(x, y) = |x - y|$ , oricare ar fi numerele reale  $x$  și  $y$ .

**Teorema 3.10.11.** Dacă mulțimea  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  este compactă, atunci perechea  $(A, d_{A \times A})$ , unde  $d_{A \times A}$  este restricția funcției  $d$  la mulțimea  $A \times A$ , este spațiu metric complet.

*Demonstrație.* Faptul că  $(A, d_{A \times A})$  este spațiu metric rezultă din Observația 3.1.4. Să arătăm că este complet. Fie în acest scop  $(x_n)$  un șir fundamental din  $(A, d_{A \times A})$ . Cum  $A$  este mulțime compactă, din Teorema 3.10.7 rezultă că  $A$  este mulțime compactă prin șiruri în spațiul metric  $(X, d)$ , deci există subșirul  $(x_{k_n})$  convergent la punctul  $x \in A$ . În baza axiomei  $(M_3)$  din Definiția 3.1.1, avem  $d_{A \times A}(x, x_n) \leq d(x, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_n)$ . Primul termen din membrul al doilea al acestei inegalități tinde la zero când  $n \rightarrow \infty$ , deoarece șirul  $(x_{k_n})$  este convergent la  $x$  în spațiul metric  $(A, d_{A \times A})$ , iar cel de-al doilea termen al inegalității tinde de asemenea la zero fiindcă șirul  $(x_n)$  este fundamental în același spațiu metric. În concluzie,  $d(x, x_n) \rightarrow 0 \iff x_n \rightarrow x$ , ceea ce arată că  $(A, d_{A \times A})$  este spațiu metric complet. q.e.d.

### 3.11 Mulțimi conexe și mulțimi convexe

Intuitiv, noțiunea de conexiune descrie faptul că o mulțime dată este formată dintr-o singură bucată, adică nu poate fi descompusă în două sau mai multe părți separate. Astfel, anumite mulțimi întâlnite cum ar fi bilele deschise sau închise dintr-un spațiu metric și intervalele  $n$ -dimensionale din spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^n$  pot



fi considerate ca fiind formate dintr-o singură bucată în timp ce alte mulțimi dintr-un spațiu metric, cum ar fi reuniunea a două bile fără puncte comune, sau complementara în spațiul Euclidian bi-dimensional  $\mathbb{R}^2$  a mulțimii  $A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ , sunt mulțimi compuse din mai multe bucăți distincte.

În cele ce urmează vom prezenta noțiunea de *conexiune*.

**Definiția 3.11.1.** *Spațiul metric  $(X, d)$  se numește **spațiu conex** dacă nu există mulțimile nevide și disjuncte  $D_1, D_2$ , deschise în  $X$ , astfel încât să avem  $X = D_1 \cup D_2$ .*

**Observația 3.11.1.** *Întrucât  $D_1 = X - D_2 = C_X D_2$  și  $D_2 = X - D_1 = C_X D_1$ , rezultă că  $D_1$  și  $D_2$  sunt simultan închise în  $X$  și deschise în  $X$ .*

**Teorema 3.11.1.** *Într-un spațiu metric  $(X, d)$  următoarele afirmații sunt echivalente:*

- $(X, d)$  este spațiu conex;
- Nu există două mulțimi închise în  $X$   $F_1$  și  $F_2$ , nevide și disjuncte, astfel încât  $X = F_1 \cup F_2$ ;
- Singura mulțime nevidă din  $X$  simultan deschisă în  $X$  și închisă în  $X$  este spațiul întreg  $X$ .

*Demonstrație.* Rezultă din Definiția 3.11.1 și Observația 3.11.1.

**q.e.d.**

**Definiția 3.11.2.** *Spațiul metric  $(X, d)$  se numește **spațiu neconex**, sau **spațiu disconex** dacă nu este spațiu conex*

**Definiția 3.11.3.** *O parte  $A$  a unui spațiu metric  $(X, d)$  se numește **mulțime conexă** dacă spațiul metric  $(A, d_{|A \times A})$  este spațiu conex*

**Observația 3.11.2.** *Mulțimea  $A$  este conexă dacă nu există  $D_1, D_2 \in \tau_d$  cu proprietățile:*

- (C<sub>1</sub>)  $A \subset D_1 \cup D_2$ ;
- (C<sub>2</sub>)  $D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$ ;
- (C<sub>3</sub>)  $D_1 \cap A \neq \emptyset$ , și  $D_2 \cap A \neq \emptyset$ .

**Definiția 3.11.4.** *Submulțimea  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  se numește **neconexă**, sau **disconexă** dacă nu este conexă.*

Următoarea teoremă pune în evidență un exemplu important de mulțime conexă și, totodată, dă o caracterizare a mulțimilor conexe din spațiul metric  $(\mathbb{R}, d)$ , unde  $d$  este metrica obișnuită, Euclidiană, dată de  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 3.11.2.** Pentru orice submulțime nevidă a lui  $\mathbb{R}$  următoarele afirmații sunt echivalente:

- ( $\alpha$ ) *A este interval, adică  $\forall a, b \in A, a < b \text{ și } c \in (a, b) \implies c \in A$ ;*  
 ( $\beta$ ) *A este conexă.*

*Demonstrație.* Să arătăm că ( $\alpha$ )  $\implies$  ( $\beta$ ). Presupunem că  $A$  este un interval care nu este mulțime conexă. Atunci, există  $D_1 \in \tau_d$  și  $D_2 \in \tau_d$  astfel încât  $(C_1) - (C_3)$  să aibă loc. Din  $(C_3)$  rezultă că există  $a_1 \in D_1 \cap A$  și  $a_2 \in D_2 \cap A$ , iar din  $(C_2)$  rezultă că  $a_1 \neq a_2$ . Presupunem  $a_1 < a_2$  și, cum  $A$  este interval, obținem

$$[a_1, a_2] \subset A. \quad (3.208)$$

Se observă că  $a_1 \in D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2)$ , deci mulțimea  $E = D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2)$  este nevidă. Dar  $E \subset (-\infty, a_2)$ , deci  $E$  este majorată (de  $a_2$  de exemplu), prin urmare, conform axiomei de existență a marginii superioare, are margine superioară în  $\mathbb{R}$ ; fie aceasta

$$M = \sup E. \quad (3.209)$$

Din (3.209) rezultă

$$a_1 \leq M. \quad (3.210)$$

Având în vedere Definiția 1.6.4, Propoziția 1.6.1 și Definiția 3.9.1 deducem că  $M \in \mathbf{e}$ , adică  $M$  este punct aderent în  $\mathbb{R}$  al mulțimii  $E$ . Rezultă apoi că

$$M \leq a_2. \quad (3.211)$$

Din (3.210), (3.211) și definiția intervalului din  $\mathbb{R}$  rezultă că  $M \in [a_1, a_2]$ , iar din (3.208) deducem

$$M \in A. \quad (3.212)$$

Observăm că

$$M < a_2. \quad (3.213)$$

Într-adevăr, dacă  $M = a_2 \in D_2 \in \tau_d$ , atunci există  $\varepsilon > 0$  astfel încât

$$(M - \varepsilon, M + \varepsilon) \subset D_2. \quad (3.214)$$

Din (3.209) rezultă că pentru  $\varepsilon$  de mai sus, există  $x_0 \in E$  astfel încât

$$M - \varepsilon < x_0 < M < M + \varepsilon. \quad (3.215)$$

Din (3.215) și (3.214) deducem  $x_0 \in D_2$ . Însă  $x_0 \in E \subset D_1 \cap A$ , deci  $x_0 \in D_1 \cap D_2 \cap A$ , care contrazice  $(C_2)$ .

Să arătăm că  $M \notin D_1 \cup D_2$ . Presupunem prin absurd că  $M \in D_1$  care, fiind mulțime deschisă în  $X$ , conduce la existența lui  $r > 0$  astfel încât

$$(M - r, M + r) \subset D_1. \quad (3.216)$$

Din (3.213) rezultă că  $(M, M + r) \cap (-\infty, a_2) \neq \emptyset$ .

Fie  $t \in (M, M + r) \cap (-\infty, a_2)$ . Atunci, din (11.10) avem

$$t \in D_1 \cap (-\infty, a_2). \quad (3.217)$$

Deci  $t < a_2$ . Însă  $a_1 \leq M < t$ , ca urmare

$$t \in (a_1, a_2). \quad (3.218)$$

Din (3.217) și (3.218) rezultă  $t \in D_1 \cap A \cap (-\infty, a_2) = E$ , deci  $t \leq \sup E = M$ , care contrazice faptul că  $t \in (M, M + r)$ . Așadar,  $M \notin D_1$ .

Dacă  $M$  ar aparține lui  $D_2$ , atunci repetând demonstrația inegalității (3.213), s-ar ajunge la  $D_1 \cap D_2 \cap A \neq \emptyset$ , care este în contradicție cu  $(C_2)$ , deci  $M \in D_2$ . Din  $M \in A$  și  $M \notin D_1 \cup D_2$  rezultă că  $A$  nu este inclusă în  $D_1 \cup D_2$ , adică  $A \not\subset D_1 \cup D_2$ , care contrazice  $(C_1)$ . Deci  $A$  este conexă.

Să arătăm că  $(\beta) \implies (\alpha)$ . Vom arăta că  $\text{non}(\alpha) \implies \text{non}(\beta)$ . Fie  $a = \inf A$  și  $b = \sup A$ . Atunci,  $A \subset [a, b]$ . Dacă  $A$  nu este interval, atunci există  $x_0 \in (a, b)$  astfel încât

$$x_0 \notin A. \quad (3.219)$$

Punând

$$D_1 = (-\infty, x_0) \quad \text{și} \quad D_2 = (x_0, +\infty), \quad (3.220)$$

rezultă că

$$a \in D_1, \quad b \in D_2, \quad D_1 \neq \emptyset, \quad D_2 \neq \emptyset,$$

iar  $D_1$  și  $D_2$  verifică condițiile  $(C_1) - (C_3)$ . Într-adevăr,  $(C_1)$  rezultă din (3.219) și (3.220), iar  $(C_2)$  este evidentă. Dacă  $D_1 \cap A = \emptyset$ , atunci  $A \subset C_R D_1 = [x_0, +\infty)$ , deci  $x_0 < \inf A = a$  care contrazice faptul că  $x_0 \in (a, b)$ . Analog se arată că  $D_2 \cap A = \emptyset$ . **q.e.d.**

**Corolarul 3.11.1.** Mulțimea  $\mathbb{Q}$  a numerelor raționale nu este conexă.

**Teorema 3.11.3.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și fie  $\{A_i : i \in I\}$  o familie de mulțimi conexe cu  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ . Atunci,  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  este mulțime conexă.

*Demonstrație.* Să presupunem că  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ar fi neconexă. Atunci, există două mulțimi deschise și nevide  $D_1$  și  $D_2$  astfel încât să fie satisfăcute proprietățile  $(C_1) - (C_3)$ . Cum  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$  rezultă că există  $a \in A_i, \forall i \in I$ , deci  $a \in A$ . Să presupunem că  $a \in D_1$ . Întrucât  $D_2 \cap A \neq \emptyset$  există  $i_0 \in I$  astfel încât  $D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ . Deoarece  $a \in A_{i_0}$  și  $a \in D_1$  obținem că  $a \in D_1 \cap A_{i_0}$ , adică  $D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ . De asemenea, să observăm că  $D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset$ , iar  $D_1 \cup D_2 \supset A_{i_0}$ . Prin urmare, avem

$$D_1 \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad D_2 \cap A_{i_0} \neq \emptyset, \quad D_1 \cap D_2 \cap A_{i_0} = \emptyset, \quad D_1 \cup D_2 \supset A_{i_0},$$

adică  $A_{i_0}$  este neconexă. Contradicția la care s-a ajuns demonstrează că mulțimea  $A$  este conexă. **q.e.d.**

**Teorema 3.11.4.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric și  $A \subset X$ . Dacă  $A$  este mulțime conexă, atunci orice submulțime  $B$  care satisface  $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$  este conexă. În particular,  $\overline{A}$  este mulțime conexă.

*Demonstrație.* Prin reducere la absurd. Presupunem că  $\exists B$  neconexă astfel încât  $A \subset B \subseteq \overline{A}$ . Atunci, există mulțimile nevide  $D_1$  și  $D_2$  din familia  $\tau_d$  a mulțimilor deschise din spațiul metric  $(X, d)$  care satisfac proprietățile:  $D_1 \cap B \neq \emptyset$ ;  $D_2 \cap B \neq \emptyset$ ;  $D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$ ;  $B \subset D_1 \cup D_2$ .

Deoarece  $D_1 \cap B \neq \emptyset \implies \exists x_1 \in D_1$  și  $x_1 \in B$ , iar din  $D_1 \cap B \neq \emptyset \implies \exists x_2 \in D_2$  și  $x_2 \in B$ . Cum  $B \subset \overline{A}$  implică  $x_1, x_2 \in \overline{A}$ , din definiția punctului aderent în  $X$  vom scoate că  $D_1 \cap A \neq \emptyset$  și  $D_2 \cap A \neq \emptyset$ . Apoi:  $D_1 \cap D_2 \cap B = \emptyset$  și  $B \supset A \implies D_1 \cap D_2 \cap A = \emptyset$ ;  $A \subset B \subset D_1 \cup D_2 \implies A \subset D_1 \cup D_2$ .

Rezultatele deduse referitoare la  $A$  arată că această mulțime este neconexă ceea ce ar contrazice ipoteza.

În concluzie,  $B$  este conexă și, în particular,  $\overline{A}$ , este mulțime conexă. **q.e.d.**

**Definiția 3.11.5.** Fie vectorii  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ . Se numește **segment închis** de extremități  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$  submulțimea  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^n$  definită prin

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in [0, 1]\}. \quad (3.221)$$

**Observația 3.11.3.** Având în vedere Definiția 3.9.9, segmentul închis  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  poate fi **diagonala** intervalului  $n$ -dimensional închis  $I_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , unde  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

**Definiția 3.11.6.** O submulțime  $A$  a lui  $\mathbb{R}^n$  se numește **convexă** dacă

$$\forall \mathbf{a} \in A \quad \text{și} \quad \forall \mathbf{b} \in A \implies [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset A.$$

**Observația 3.11.4.** O mulțime convexă din  $\mathbb{R}^n$  este mulțime conexă.

Într-adevăr, dacă mulțimea convexă  $A$  ar fi neconexă, ar exista două mulțimi deschise în  $\mathbb{R}^n$  și nevide  $D_1$  și  $D_2$  astfel încât să fie îndeplinite condițiile  $(C_1) - (C_3)$  ceea ce ar însemna că  $A$  ar fi formată din două bucăți. Considerând acum extremitățile segmentului  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  astfel încât  $\mathbf{a} \in D_1 \cap A$  și  $\mathbf{b} \in D_2 \cap A$  din  $(C_2)$  deducem că segmentul considerat nu este conținut în întregime în  $A$  fapt ce ar contrazice Definiția 3.11.6. ■

**Exemplul 3.11.1.** Bilele deschise și închise din  $\mathbb{R}^n$  sunt mulțimi convexe deci și conexe.

**Soluție.** În adevăr, să considerăm bila deschisă de centru  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  și rază  $\varepsilon > 0$  și fie  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ . Un punct oarecare al segmentului închis  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  are forma  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ , unde  $t \in [0, 1]$ . Rezultă că  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$  deoarece

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \|(1-t)(\mathbf{a} - \mathbf{x}_0) + t(\mathbf{b} - \mathbf{x}_0)\| \leq \\ &\leq |1-t|\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\| + |t|\|\mathbf{b} - \mathbf{x}_0\| < (1-t)\varepsilon + t\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Acest rezultat arată că  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ , de unde deducem că bila deschisă cu centrul în  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  și rază  $\varepsilon > 0$  este mulțime convexă deci și conexă. ■

**Exemplul 3.11.2.** Intervalele  $n$ -dimensionale deschise în  $\mathbb{R}^n$  și intervalele  $n$ -dimensionale închise în  $\mathbb{R}^n$  sunt mulțimi convexe în  $\mathbb{R}^n$ . am

**Soluție.** Într-adevăr, din Definiția 3.9.9 rezultă că un interval  $n$ -dimensional închis din  $\mathbb{R}^n$  este mulțimea

$$I_n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

unde

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dacă  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in I_n$  și  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in I_n$ , atunci segmentul închis  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  are elementele  $\mathbf{x}$  de forma  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ ,  $t \in [0, 1]$ . Deoarece  $a_i \leq u_i \leq b_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  și  $a_i \leq v_i \leq b_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , deducem că expresiile componentelor  $x_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , ale lui  $\mathbf{x}$ , care sunt evident egale cu

$$x_i = u_i + t(v_i - u_i) = (1-t)u_i + tv_i,$$

satisfac condițiile  $x_i \in [a_i, b_i]$ ,  $\forall i \in \overline{1, n}$ , de unde va rezulta că  $\mathbf{x} \in I_n$ . ■

**Exemplul 3.11.3.** În  $\mathbb{R}^2$ , mulțimea

$$A = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9\}$$

nu este convexă, dar este conexă.

**Soluție.** Într-adevăr, segmentul închis  $[-3\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_1]$ , unde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ , ce are extremitățile  $\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 \in A$  și  $\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_1 \in A$ , nu este în întregime conținut în  $A$  căci, de exemplu,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , element al acestui segment, nu aparține lui  $A$ .

Mulțimea  $A$  este formată din toate punctele planului, raportat la reperul cartezian ortogonal  $Ox_1x_2$ , situate între cercurile concentrice de raze 1 și respectiv 3 cu centrele în origine, inclusiv punctele acestor cercuri. Ca urmare,  $A$  este formată dintr-o singură bucată, deci  $A$  este mulțime conexă. ■

## 3.12 Spațiul $\mathbb{R}^n$ și spațiul punctual $\mathbb{I}E^n$

În cele ce urmează, sintetizăm rezultatele relative la mulțimea  $\mathbb{R}^n$ .

În primul rând, am constatat că  $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Folosind Definiția 1.3.1 și relația (1.27), deducem că  $\mathbb{R}^n$  se scrie în forma

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \overline{1, n}\}.$$

În primul paragraf al Capitolului 3 s-a demonstrat că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu metric în raport cu oricare din aplicațiile:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (3.222)$$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_i - y_i|, \quad i \in \overline{1, n}\}, \quad (3.223)$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad (3.224)$$

definite pe  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  cu valori în  $\mathbb{R}$ , unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sunt elemente arbitrare din  $\mathbb{R}^n$ .

Metricele  $d$ ,  $d_1$  și  $d_2$  pe  $\mathbb{R}^n$  sunt echivalente deoarece, utilizând inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

și inegalitățile evidente

$$|x_j - y_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad \forall j \in \overline{1, n},$$

putem demonstra că:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n;$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n}d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n;$$

$$\frac{1}{n}d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Întrucât oricare din perechile  $(\mathbb{R}^n, d)$ ,  $(\mathbb{R}^n, d_1)$ , și  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  este spațiu metric, elementele lui  $\mathbb{R}^n$  sunt numite *puncte* și vor fi notate cu litere mari ale alfabetului latin. Un asemenea punct  $P$  corespunde unei  $n$ -uple din  $\mathbb{R}^n$  de forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , fapt ce se va scrie în forma  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Mulțimea tuturor punctelor  $P$  se notează cu  $\mathbb{E}^n$ , deci

$$\mathbb{E}^n = \{P : P = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, n}\}.$$

Punctul  $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{E}^n$  se numește *originea* mulțimii  $\mathbb{E}^n$ .

Bilele deschise cu centrul în punctul  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$  și rază  $r > 0$  în spațiile metrice  $(\mathbb{R}^n, d)$ ,  $(\mathbb{R}^n, d_1)$ ,  $(\mathbb{R}^n, d_2)$  sunt mulțimile:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}^0, r) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\}; \\ B_1(\mathbf{x}^0, r) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\} = J_n(\mathbf{x}^0 - r\mathbf{s}, \mathbf{x}^0 + r\mathbf{s}); \\ B_2(\mathbf{x}^0, r) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r\} = \{\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) : \sum_{k=1}^n |x_k - x_k^0| < r\}. \end{aligned}$$

Din Definiția 3.2.3 avem că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu vectorial real și din Teorema 3.2.1 rezultă că adunarea în  $\mathbb{R}^n$  este definită prin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.225)$$

iar produsul vectorului  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  cu scalarul  $\lambda \in \mathbb{R}$  este vectorul

$$\lambda \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Mulțimea  $\mathbb{R}^n$  este spațiu vectorial  $n$ -dimensional, o bază în  $\mathbb{R}^n$  fiind  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , unde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1). \quad (3.226)$$

Această bază este denumită baza canonică, baza standard, sau baza uzuală a lui  $\mathbb{R}^n$  și avem

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k = \mathbf{e}X,$$

unde

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$$

și  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top \in \mathcal{F}_{n,1}(\mathbb{R})$  este matricea coloană cu  $n$  linii a coordonatelor vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ . Să remarcăm că numerele reale  $x_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , care definesc pe  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , se numesc *componentele* lui  $\mathbf{x}$  când considerăm că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu metric și *coordonatele* lui  $\mathbf{x}$  în baza canonică (3.226) când considerăm că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu vectorial real.

Din Exemplul 3.5.1 deducem că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu normat complet sau spațiu Banach, o normă în  $\mathbb{R}^n$  fiind dată de

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \quad (3.227)$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  este vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ . Această normă am numit-o *norma Euclidiană* pe  $\mathbb{R}^n$ . De asemenea, folosind Exercițiul 3.5.1, constatăm că se pot defini încă normele:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad (3.228)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.229)$$

care sunt echivalente între ele și echivalente cu norma definită de (3.227) după cum rezultă din Exercițiul 3.5.1. Mai mult, din Observația 3.5.9 avem că metricele  $d, d_1, d_2$  definite respectiv de (3.222), (3.223), (3.224) sunt

metrici induse de respectiv normele  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_1$  și  $\|\cdot\|_2$ , definite corespunzător de (3.227), (3.228) și (3.229), deoarece avem:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \quad d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1; \quad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

Totodată, cele trei norme pe  $\mathbb{R}^n$  au următoarele interpretări:

$$\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}); \quad \|\mathbf{x}\|_1 = d_1(\mathbf{x}, \mathbf{0}); \quad \|\mathbf{x}\|_2 = d_2(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Așadar, de acum, putem vorbi de spațiile normate complete  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  și  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ . În cazul  $n = 1$ , aceste trei spații coincid cu spațiul normat obișnuit în care norma este dată de funcția modul.

Un produs scalar pe  $\mathbb{R}^n$ , numit *produsul scalar standard* sau *produsul scalar canonic*, este dat de

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^\top Y, \quad \forall \mathbf{x} = \mathbf{e} X \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{y} = \mathbf{e} Y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.230)$$

Se poate demonstra că  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$  este spațiu Hilbert.

Folosind acum (3.226) și (3.230), deducem

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, n}. \quad (3.231)$$

Relațiile (3.231) arată că în spațiul Euclidian  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ , baza canonică  $\mathcal{B}$  este *bază ortonormată*.

Norma Euclidiană indusă de produsul scalar standard pe  $\mathbb{R}^n$  este (3.227).

Aplicația  $\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definită prin

$$\varphi(A, B) = \mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n) = \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.232)$$

unde  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  sunt două puncte arbitrare din  $\mathbb{E}^n$ ,  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , are evident proprietățile:

$$\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C), \quad \forall A, B, C \in \mathbb{E}^n; \quad (3.233)$$

$$\forall A \in \mathbb{E}^n \text{ și } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \exists P \in \mathbb{E}^n \text{ astfel încât } \mathbf{x} = \overrightarrow{AP}. \quad (3.234)$$

Deoarece aplicația  $\varphi$  din (3.232) are proprietățile (3.233) și (3.234), spunem că mulțimea  $\mathbb{E}^n$  are structură de *spațiu punctual afin* asociat lui  $\mathbb{R}^n$ .

Spațiul liniar  $\mathbb{R}^n$  se mai numește *spațiul vectorial director* al spațiului punctual afin  $\mathbb{E}^n$ . se numește *dimensiunea* spațiului punctual afin  $\mathbb{E}^n$ , dimensiunea spațiului său director.

Prin urmare, spațiul punctual afin  $\mathbb{E}^n$  are dimensiunea egală cu  $n$ .

Se vede, de asemenea, din (3.233) că aplicația  $\varphi$  are încă proprietățile:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \iff A = B \iff a_i = b_i, \quad i \in \overline{1, n};$$

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{0} \iff A = B;$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \quad \forall A, B \in \mathbb{E}^n;$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \quad \forall A, B \in \mathbb{E}^n.$$

unde  $O \in \mathbb{E}^n$  este punctul denumit mai sus origine în  $\mathbb{E}^n$ .

De asemenea, este evident că aplicația  $\varphi_0 : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definită prin

$$\varphi_0(M) = \overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (3.235)$$

oricare ar fi  $M = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$ , este bijectivă.

Vectorul  $\overrightarrow{OM}$  din (3.235) se numește *vectorul de poziție* al punctului  $M \in \mathbb{E}^n$  față de originea  $O \in \mathbb{E}^n$ . Când  $n = 2$ ,  $n = 3$ , sau  $n = 1$  acest vector se notează de regulă cu  $\mathbf{r}$ .

Datorită bijecției (3.235), spațiile  $\mathbb{E}^n$  și  $\mathbb{R}^n$  se identifică.

Proprietatea (3.233) permite interpretări geometrice a adunării în  $\mathbb{R}^n$ , definită de (3.225), numite *regula triunghiului* și *regula paralelogramului* de adunare a doi vectori reprezentați în același punct al spațiului afin Euclidian  $\mathbb{E}^n$ .

Dacă vectorii  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  sunt reprezentați în punctul  $M$  al spațiului afin Euclidian de către segmentele orientate  $\overrightarrow{MM_1}$  și  $\overrightarrow{MM_2}$  și  $M_3$  este cel de al patrulea vârf al paralelogramului cu muchiile alăturate segmentele orientate  $\overrightarrow{MM_1}$  și  $\overrightarrow{MM_2}$ , atunci segmentul orientat  $\overrightarrow{MM_3}$  este reprezentantul în  $M$  al vectorului sumă  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ .

Fie  $p$  vectori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$  reprezentați în spațiul afin Euclidian  $\mathbb{E}^n$  respectiv în punctele  $M_1, M_2, \dots, M_p$ .

Vectorul al cărui reprezentant în punctul  $M_p$  este segmentul orientat  $\overrightarrow{M_p M_1}$  este, prin definiție, vectorul sumă  $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_p$ .

Acest mod de obținere a sumei a  $p$  vectori este cunoscută sub numele de *regula poligonului*.

Ansamblul  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$  unde  $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{E}^n$  este originea în  $\mathbb{E}^n$ , iar  $\mathcal{B}$  este o baza din  $\mathbb{R}^n$  se numește *reper* în  $\mathbb{E}^n$ . Punctul  $O$  se numește *originea reperului*, iar vectorii bazei se numesc *vectorii reperului*. Dacă baza  $\mathcal{B}$  este cea canonică, prezentată în (3.226), reperul corespunzător  $\mathcal{R}$  se numește *reper ortogonal*, sau *reper cartezian*, vectorii reperului numindu-se în acest caz *versorii reperului*. În acest caz, numerele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  din (3.235) se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului  $M \in \mathbb{E}^n$  și se obișnuiește să se scrie  $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Folosind Observația 3.2.6, putem afirma că în  $\mathbb{E}^n$  există o infinitate de repere. Mulțimea de puncte din  $\mathbb{E}^n$

$$Ox_k = \{P \in \mathbb{E}^n : \mathbf{x} = \mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = t\mathbf{e}_k, t \in \mathbb{R}\},$$

se numește *axă de coordonate* a reperului cartezian  $\mathcal{R}$ . Există  $n$  asemenea axe de coordonate și anume  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$ , despre care spunem că sunt ortogonale deoarece baza care le definește este ortonormată.

Spațiul punctual afin  $\mathbb{E}^4$ , de dimensiune 4, se numește *spațiu-timp*, *spațiul evenimentelor*, sau *spațiul relativist*.

Față de punctul fix  $O = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{E}^n$ , ales ca origine a reperului cartezian  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ , fiecărui punct  $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$  îi corespunde vectorul său de poziție  $\mathbf{r} = \mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$  care este element al spațiului Hilbert  $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ .

Folosind acum (3.231), deducem  $x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha_j = \text{mapr}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{x}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , unde  $\alpha_j$  este unghiul dintre vectorul  $\mathbf{x} = \mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  și versorul  $\mathbf{e}_j$ , care arată că coordonata de rang  $j$  a punctului  $M \in \mathbb{E}^n$  în reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$  este produsul scalar al vectorului său de poziție cu versorul  $\mathbf{e}_j$  al axei  $Ox_j$ , adică este numărul real care reprezintă *mărimea algebrică a proiecției ortogonale a vectorului  $\mathbf{x}$  pe direcția vectorului  $\mathbf{e}_j$* .

În cazul planului punctual afin, numerele  $x_1, x_2$  se numesc *abscisa* și respectiv *ordonata* punctului  $M \in \mathbb{E}^2$ . De multe ori, coordonatele carteziene ale unui punct  $M$  din plan se notează cu  $x$  și  $y$ , iar versorii reperului se notează cu  $\mathbf{i}$  și  $\mathbf{j}$ , axa  $Ox$  numindu-se *axa absciselor*, iar  $Oy$ -*axa ordonatelor*. În cazul  $n = 3$ ,  $x_1, x_2, x_3$  se numesc corespunzător *abscisa*, *ordonata* și respectiv *cota* punctului  $M$ , iar axele de coordonate se numesc *axa absciselor*, *axa ordonatelor* și *axa cotelor*. Tot în această figură se vede interpretarea algebrică dată mai sus pentru scalarii  $x_1, x_2, x_3$ , coordonatele punctului  $M$  în reperul cartezian  $Ox_1x_2x_3$ . Uneori, coordonatele spațiale se notează cu  $x, y$  și  $z$ , versorii reperului fiind notați în această situație cu  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , iar axele de coordonate se notează cu  $Ox, Oy$  și  $Oz$ .

Pe spațiul punctual afin  $\mathbb{E}^n$  se pot introduce trei metrice echivalente, introducerea lor fiind sugerată de metricile  $d, d_1$  și  $d_2$  pe  $\mathbb{R}^n$ .

Aceste trei metrice se definesc după cum urmează:

$$(A, B) \mapsto d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}; \quad (3.236)$$

$$(A, B) \mapsto d_1(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_1 = \max\{|b_i - a_i|, i \in \overline{1, n}\};$$



$$(A, B) \mapsto d_2(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|_2 = \sum_{k=1}^n |b_k - a_k|,$$

unde  $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$  sunt puncte arbitrare din  $\mathbb{E}^n$ .

În cazul  $n = 2$ ,  $d(A, B)$  este lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic  $ACB$ ,  $d_1(A, B)$  este cea mai mare dintre lungimile catetelor  $AC, BC$  ale aceluiași triunghi, iar  $d_2(A, B)$  reprezintă suma lungimilor catetelor triunghiului dreptunghic  $ACB$ .

În cazul  $n = 3$ , cele trei distanțe se interpretează ușor dacă se construiește paralelipipedul dreptunghic cu punctele  $A$  și  $B$  ca vârfuri opuse, iar muchiile sale să fie paralele cu axele de coordonate ale reperului cartezian  $Ox_1x_2x_3$ .

În acest caz,  $d(A, B)$  este lungimea muchiei  $AB$  a paralelipipedului, numărul  $d_1(AB)$  este cea mai mare dintre muchiile  $AC, CD$  și  $DB$ , iar  $d_2(A, B)$  este suma acestor trei muchii.

Distanța (3.236) în  $\mathbb{E}^n$  se numește *distanța Euclidiană*, iar spațiul metric  $(\mathbb{E}^n, d)$  se numește *spațiul punctual Euclidian de dimensiune  $n$* .

În cazul  $n = 1$ , spațiile metrice  $(\mathbb{E}^1, d)$ ,  $(\mathbb{E}^1, d_1)$  și  $(\mathbb{E}^1, d_2)$  coincid și se identifică cu axa reală.

Având în vedere identificarea lui  $\mathbb{R}^2$  cu  $\mathbb{E}^2$  și a lui  $\mathbb{R}^3$  cu  $\mathbb{E}^3$ , precum și cele stabilite mai sus, putem reprezenta grafic bilele deschise și închise cu centrul în  $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, x_0^2)$  și rază  $r > 0$ . Acestea sunt *discuri*.

Bila deschisă  $B(\mathbf{x}_0, r)$ , în cazul  $n = 3$ , este mulțimea punctelor interioare sferei cu centrul în punctul  $C(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  și rază  $r > 0$  din spațiul fizic obișnuit raportat la reperul cartezian  $Ox_1x_2x_3$ .

Bila deschisă  $B_1(\mathbf{x}_0, r)$  din spațiul metric  $(\mathbb{E}^3, d_1)$  este mulțimea punctelor interioare cubului cu centrul de simetrie în punctul  $C(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  și muchiile paralele cu axele de coordonate ale reperului cartezian  $Ox_1x_2x_3$  și de lungime  $2r$ .

Întrucât metricile  $d, d_1, d_2$  pe  $\mathbb{R}^n$  sunt echivalente, rezultă ca au loc incluziunile de bile precizate în Definiția 3.1.9, adică oricărei bile deschise  $B(\mathbf{x}^0, r)$  i se poate înscrie și circumscrie câte o bilă deschisă cu centrul în  $\mathbf{x}^0$  din spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_1)$  razele acestora fiind în ordine  $\frac{1}{\sqrt{n}}r$  și respectiv  $r$ . Totodată, bilei  $B_1(\mathbf{x}^0, r)$  i se poate înscrie bila  $B(\mathbf{x}^0, r)$  și circumscrie bila  $B(\mathbf{x}^0, \sqrt{n}r)$ .

Afirmații asemănătoare se pot face și atunci când se iau în discuție metricile echivalente  $d$  și  $d_2$ .

În cazul  $n = 1$ , spațiile Banach  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ,  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_1)$ ,  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_2)$  coincid cu spațiul Banach  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , iar bilele deschise  $B(x_0, r)$ ,  $B_1(x_0, r)$  și  $B_2(x_0, r)$  sunt identice cu intervalul  $(x_0 - r, x_0 + r)$ .

Un șir de vectori din spațiul normat  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$   $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ , sau totuna cu a spune un șir de puncte  $(M_k)_{k \geq 1}$  din spațiul punctual afin Euclidian  $\mathbb{E}^n$  determină în mod unic  $n$  șiruri de numere reale  $(x_{jk})_{k \geq 1}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , unde  $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$ , care se numesc *șirurile componente*, sau *șirurile coordonate* ale șirului  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ .

**Teorema 3.12.1.** *Au loc următoarele echivalențe:*

- 1<sup>0</sup>.  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$  *șir mărginit în*  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \iff$   
 $\iff (x_{jk})_{k \geq 1}, j \in \overline{1, n}, \text{ sunt șiruri mărginite în } (\mathbb{R}, |\cdot|);$
- 2<sup>0</sup>.  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n \iff$   
 $\iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_{jk} = x_{j0} \in \mathbb{R}, j \in \overline{1, n};$
- 3<sup>0</sup>.  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$  *șir fundamental în*  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \iff$   
 $\iff (x_{jk})_{k \geq 1}, j \in \overline{1, n}, \text{ sunt șiruri fundamentale în } (\mathbb{R}, |\cdot|).$

*Demonstrație.* Pentru demonstrație se folosesc inegalitățile

$$|\lambda_i| \leq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2} \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|, \quad i \in \overline{1, n}, \quad (3.237)$$

Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.2 și unele rezultate stabilite în primele două paragrafe din Cap. 2.

**q.e.d.**

**Observația 3.12.1.** Studiul șirurilor de vectori din  $\mathbb{R}^n$  se reduce la studiul șirurilor componente ale acestora.

**Observația 3.12.2.** Proprietățile  $2^0$  și  $3^0$  din Teorema 3.12.1 și Teorema 2.2.2 conduc la afirmația că  $\mathbb{R}^n$  este spațiu metric complet.

Mai mult,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ,  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$  și  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$  sunt spații Banach.

**Observația 3.12.3.** Dacă unul din șirurile coordonate ale șirului  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$  este nemărginit, atunci  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$  este șir nemărginit în  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 3.12.2.** Un șir mărginit din  $\mathbb{R}^n$  conține un subșir convergent.

*Demonstrație.* Fie șirul mărginit  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ , unde  $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}) \in \mathbb{R}^n$ . După Teorema 3.12.1, șirurile coordonate sunt mărginite. Din Propoziția 2.1.8 avem că șirul  $(x_{1k})_{k \geq 1}$  conține un subșir convergent; fie acesta  $(x_{1p_k^{(1)}})_{k \geq 1}$ . Subșirul  $(x_{2p_k^{(1)}})_{k \geq 1}$  este un șir mărginit, deci admite un subșir convergent; fie acesta  $(x_{2p_k^{(2)}})_{k \geq 1}$ . Este clar că șirul strict crescător de numere naturale  $(p_k^{(2)})_{k \geq 1}$  satisface condițiile  $p_k^{(2)} \geq k$  și este subșir al șirului de numere naturale  $(p_k^{(1)})$ . Șirul  $(x_{1p_k^{(2)}})_{k \geq 1}$  este subșir al șirului convergent  $(x_{1p_k^{(1)}})_{k \geq 1}$ , deci șir convergent. Subșirul  $(x_{3p_k^{(2)}})_{k \geq 1}$  este șir mărginit, deci admite un subșir convergent de forma  $(x_{3p_k^{(3)}})_{k \geq 1}$ , unde  $(p_k^{(3)})_{k \geq 1}$  este, în cele din urmă, subșir al șirului  $(p_k^{(1)})_{k \geq 1}$ .

Procedeul continuă și, în final, ajungem la concluzia că șirul  $(x_{nk})_{k \geq 1}$  admite subșirul convergent  $(x_{np_k^{(n)}})_{k \geq 1}$  unde  $(p_k^{(n)})_{k \geq 1}$  este un subșir al șirului  $(p_k^{(n-1)})_{k \geq 1}$  care la rândul-i este subșir al șirului  $(p_k^{(n-2)})_{k \geq 1}$  ș.a.m.d.

În felul acesta se obține șirul convergent de vectori  $(\mathbf{x}_{p_k^{(n)}})_{k \geq 1}$ , unde

$$\mathbf{x}_{p_k^{(n)}} = (x_{1p_k^{(n)}}, x_{2p_k^{(n)}}, \dots, x_{np_k^{(n)}}) \in \mathbb{R}^n,$$

care este subșir al șirului mărginit  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ .

q.e.d.

**Observația 3.12.4.** Folosind Corolarul 3.10.2 putem afirma că o mulțime compactă de numere reale  $A$  are un cel mai mic element și un cel mai mare element care sunt în același timp  $\inf A$  și respectiv  $\sup A$ .

O afirmație de genul  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m}$ , unde

$$\mathbb{R}^{n+m} = \{\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m\},$$

trebuie înțeleasă în sensul că  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ .

Dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  și  $B \subset \mathbb{R}^m$ , atunci  $E = A \times B = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$ . Afirmația  $\mathbf{z} \in E$  înseamnă  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , unde  $\mathbf{x} \in A \subset \mathbb{R}^n$ , iar  $\mathbf{y} \in B \subset \mathbb{R}^m$ .

## Capitolul 4

# Limite și continuitate

### 4.1 Limita unei funcții într-un punct

Fie  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  două spații metrice,  $A$  o submulțime nevidă a lui  $X$ ,  $A' \subset X$  mulțimea punctelor de acumulare ale mulțimii  $A$ ,  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  o funcție de la  $A$  în  $Y$ ,  $a \in A'$  și  $\ell \in Y$ .

**Definiția 4.1.1.** Spunem că  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  admite limita  $\ell$  în punctul  $a$  și scriem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \ell, \quad \text{sau} \quad f(x) \longrightarrow \ell, \quad \text{pentru} \quad x \longrightarrow a, \quad (4.1)$$

dacă oricare ar fi vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(\ell)$ , există vecinătatea  $U \in \mathcal{V}(a)$ , astfel încât să fie satisfăcută condiția

$$f\left((U \setminus \{a\}) \cap A\right) \subset V. \quad (4.2)$$

**Observația 4.1.1.** Condiția (4.2) este echivalentă cu

$$\forall x \in (U \setminus \{a\}) \cap A \implies f(x) \in V. \quad (4.3)$$

**Teorema 4.1.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  are limita  $\ell \in Y$  în punctul  $a \in A'$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât

$$\forall x \in A, \quad 0 < d(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), \ell) < \varepsilon. \quad (4.4)$$

*Demonstrație.* Presupunem că (4.1) are loc și fie  $\varepsilon > 0$  dat.

Luăm  $V = B(\ell, \varepsilon)$ . Conform ipotezei, există  $U \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $f\left((U \setminus \{a\}) \cap A\right) \subset V$ . Alegem apoi  $\delta > 0$  astfel încât  $B(a, \delta) \subset U$ . Acum, dacă

$$x \in \left(B(a, \delta) \setminus \{a\}\right) \cap A, \quad (4.5)$$

din (4.3) rezultă

$$f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon). \quad (4.6)$$

Condiția (4.5) este echivalentă cu  $0 < d(x, a) < \delta$ , iar (4.6) cu  $\sigma(f(x), \ell) < \varepsilon$ . Prin urmare, putem scrie

$$0 < d(x, a) < \delta \implies \sigma(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Reciproc, să considerăm  $\varepsilon > 0$  pentru care există  $\delta > 0$  astfel încât să aibă loc (4.4) și fie  $V \in \mathcal{V}(\ell)$  o vecinătate arbitrară a punctului  $\ell$ .

Din Definiția 3.1.10 rezultă că există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $B(\ell, \varepsilon) \subset V$ . Pentru acest  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta > 0$ , care poate fi interpretat drept raza unei bile cu centrul în  $a$  din spațiul metric  $(X, d)$ .

Din Propoziția 3.1.7 avem că  $B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$ , deci putem lua pe  $U$  din Definiția 4.1.1 chiar pe  $B(a, \delta)$ . Atunci, relația (4.4) se poate traduce prin (4.2), iar din Definiția 4.1.1 rezultă că  $\ell$  este limita funcției  $f$  în punctul de acumulare  $a$  al mulțimii  $A$ . **q.e.d.**

**Observația 4.1.2.** Din Teorema 4.1.1 deducem că (4.4) poate fi luată ca definiție a limitei unei funcții într-un punct. Convenim ca această definiție să se numească **definiția limitei unei funcții într-un punct în limbajul " $\varepsilon - \delta$ ."**

**Teorema 4.1.2.** Funcția  $f$  are limita  $\ell$  în punctul  $a$  dacă și numai dacă oricare ar fi șirul de puncte  $(x_n)$ ,  $x_n \in A \setminus \{a\}$ , convergent la punctul  $a$ , șirul valorilor funcției  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  este convergent la  $\ell$ .

*Demonstrație.* Fie șirul arbitrar de puncte  $(x_n)$ , unde  $x_n \in A \setminus \{a\}$ , considerat astfel încât  $x_n \rightarrow a$ .

Dorim să demonstrăm că  $f(x_n) \rightarrow \ell$ .

Fie în acest sens  $\varepsilon > 0$ , arbitrar. Din Teorema 4.1.1 rezultă că pentru acest  $\varepsilon$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice  $x \in A \setminus \{a\}$  implicația (4.4) este adevărată. Cum  $x_n \rightarrow a$ , pentru  $\delta = \delta(\varepsilon)$  de mai sus există  $n_\delta \in \mathbb{N}$  așa încât oricare ar fi  $n > n_\delta$  să rezulte  $d(x_n, a) < \delta$ . Din (4.4) obținem  $\sigma(f(x_n), \ell) < \varepsilon$ ,  $\forall n > n_\delta = n_{\delta(\varepsilon)} = n_\varepsilon$ .

Prin urmare, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  astfel încât pentru  $n > n_\varepsilon$  rezultă  $\sigma(f(x_n), \ell) < \varepsilon$ , adică  $f(x_n) \rightarrow \ell$ .

Reciproca teoremei o demonstrăm prin reducere la absurd.

Presupunem că există o vecinătate  $V$  a lui  $\ell$  astfel încât oricare ar fi vecinătatea  $U \in \mathcal{V}(a)$  să avem

$$f((U \setminus \{a\}) \cap A) \not\subset V. \quad (4.7)$$

Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  să luăm drept  $U = B\left(a, \frac{1}{n}\right)$ . Atunci, (4.7) devine

$$f\left(\left(B\left(a, \frac{1}{n}\right) \setminus \{a\}\right) \cap A\right) \not\subset V. \quad (4.8)$$

Relația (4.8) arată că există  $x_n \in B\left(a, \frac{1}{n}\right)$ ,  $x_n \neq a$ , astfel încât

$$f(x_n) \notin V. \quad (4.9)$$

Dar  $x_n$  fiind element al bilei  $B\left(a, \frac{1}{n}\right)$  avem  $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , inegalitate care arată că  $x_n \rightarrow a$ . Conform ipotezei teoremei reciproce  $f(x_n) \rightarrow \ell$ . Prin urmare, există  $N_v \in \mathbb{N}$  așa încât pentru  $n > N_v$  să avem  $f(x_n) \in V$ , ceea ce contrazice (4.9). **q.e.d.**

**Observația 4.1.3.** Condiția din Teorema 4.1.2 poate fi luată, de asemenea, ca definiție a limitei funcției  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  în punctul  $a \in A'$  și este numită **definiția cu șiruri a limitei funcției  $f$  în punctul  $a \in A'$** .

**Observația 4.1.4.** Definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct poate fi utilizată pentru a demonstra că funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  nu are limită în punctul  $a \in A'$ .

Pentru aceasta este suficient să arătăm că există două șiruri  $(x_n)$  și  $(x'_n)$  în  $A \setminus \{a\}$ , ambele convergente la  $a$ , pentru care șirurile imaginilor  $(f(x_n))$  și  $(f(x'_n))$  să aibă limite diferite în  $Y$ .

**Exercițiul 4.1.1.** Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ .

**Soluție.** Pornim de la

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |x - 2||x + 2| = |x - 2| |(x - 2) + 4| \leq \\ &\leq |x - 2| (|x - 2| + 4) = |x - 2|^2 + 4|x - 2| < \delta^2 + 4\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Rezolvând ecuația  $\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$  găsim  $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ .

Prin urmare,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$  cu proprietatea că oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , cu  $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$ , avem  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ , unde  $f(x) = x^2$  și  $\ell = 4$ , ceea ce în baza Teoremei 4.1.1 arată că  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ . ■

**Exemplul 4.1.1.** Funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ , nu are limită în  $x = 0$ .

**Soluție.** Considerăm șirurile  $(x_n)$  și  $(x'_n)$  cu

$$x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}, \quad x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi},$$

ambele convergente la zero. Atunci,

$$f(x_n) = \sin \frac{(4n+1)\pi}{2} = 1 \quad \text{și} \quad f(x'_n) = \sin \frac{(4n-1)\pi}{2} = -1,$$

de unde avem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = -1$ .

Rezultatul stabilit, împreună cu Observația 4.1.4, arată că nu există limita funcției  $f$  în  $x = 0$ . ■

**Exemplul 4.1.2.** Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0 = (0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , nu are limită în origine.

**Soluție.** Șirul  $(\mathbf{z}_n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , este evident convergent la  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . Șirul

valorilor funcției are termenul general  $f(\mathbf{z}_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\frac{\lambda}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{\lambda^2}{n^2}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ . Se vede că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{z}_n) =$

$\frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$ , deci limita șirului  $(f(\mathbf{z}_n))$  depinde de  $\lambda$ . Într-adevăr, dacă  $\lambda = 2$ , adică  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ , atunci  $f(\mathbf{z}_n) \rightarrow \frac{2}{5}$ ,

iar dacă  $\lambda = -1$ ,  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  și  $f(\mathbf{z}_n) \rightarrow -\frac{1}{2}$ . Prin urmare, funcția  $f$  nu are limită în origine. ■

**Teorema 4.1.3.** *Dacă funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  are limită în punctul  $a \in A'$ , atunci limita este unică.*

*Demonstrație.* Afirmația rezultă din Observația 4.1.3 și Teorema 3.3.2.

q.e.d.

Să considerăm acum cazul particular  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  și  $Y = \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , iar metricile  $d$  și  $\sigma$  sunt cele Euclidiene. Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , unde  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$  și  $m > 1$ , este echivalentă cu un sistem de  $m$  funcții reale de variabilă vectorială. Într-adevăr, fie  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ , imaginea lui  $\mathbf{x} \in A$  prin  $\mathbf{f}$ . Deoarece  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , avem  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  cu  $y_i \in \mathbb{R}$ . Dacă pentru orice  $i \in \overline{1, m}$  atașăm fiecărui  $\mathbf{x} \in A$  coordonata de pe locul  $i$  a vectorului  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , atunci  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1\mathbf{x}, f_2\mathbf{x}, \dots, f_m\mathbf{x})$  pentru orice  $\mathbf{x} \in A$ , unde  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(\mathbf{x}) = y_i$ ,  $\forall i \in \overline{1, m}$ .

Reciproc, dacă avem un sistem de  $m$  funcții reale  $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , putem defini funcția  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  astfel încât  $\mathbf{f}\mathbf{x} = (f_1\mathbf{x}, f_2\mathbf{x}, \dots, f_m\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in A$ .

Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , unde  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$  și  $m > 1$ , se numește *funcție vectorială de argument vectorial*. În această situație funcțiile  $f_i \in \mathcal{F}(A)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , se numesc *funcțiile componente*, sau *funcțiile coordonate* ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  și scriem  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ . În cazul  $n = 1$  și  $m \geq 2$ , funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , se numește *funcție vectorială de argument real*, iar în cazul  $m = 1$  și  $n \geq 2$  funcția corespunzătoare, care acum este normal să se noteze cu  $f$ , se numește *funcție reală de variabilă vectorială*, sau *funcție reală de  $n$  variabile reale*. În sfârșit, dacă  $m = n = 1$ , funcția corespunzătoare  $f$  se numește *funcție reală de variabila reală  $x \in A$* , sau  $t \in A$ .

**Teorema 4.1.4.** *Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1, m \geq 2$ , are limita  $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$  în punctul  $\mathbf{a} \in A'$  dacă și numai dacă există simultan  $\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{a}}} f_i(\mathbf{x}) = \ell_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, m}$ .*

*Demonstrație.* Afirmațiile se obțin din Observația 4.1.2 și Teorema 3.12.1.

q.e.d.

**Observația 4.1.5.** *Din Teorema 4.1.4 rezultă că studiul limitei unei funcții vectoriale de argument vectorial poate fi redus la studiul limitelor funcțiilor componente, sau coordonate care sunt funcții reale de variabilă vectorială.*

**Teorema 4.1.5. (Cauchy–Bolzano<sup>1</sup>)** *Fie  $(X, d)$  spațiu metric,  $(Y, \sigma)$  spațiu metric complet,  $A$  submulțime nevidă a lui  $X$ ,  $a \in X$  un punct de acumulare al mulțimii  $A$  și  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ .*

*Funcția  $f$  are limită în punctul  $a \in A'$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi punctele  $x', x'' \in A$  cu*

$$\begin{cases} 0 < d(x', a) < \delta(\varepsilon) \\ 0 < d(x'', a) < \delta(\varepsilon) \end{cases} \implies \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>Bolzano, Bernard (1781–1848), matematician italian.

*Demonstrație.* Să presupunem că  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ . Folosind Teorema 4.1.2 deducem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât

$$\forall x \in A \quad \text{cu} \quad 0 < d(x, a) < \delta(\varepsilon) \implies \sigma(f(x), \ell) < \varepsilon/2. \quad (4.11)$$

Fie  $x' \in A$  și  $x'' \in A$  care satisfac (4.11), adică

$$\sigma(f(x'), \ell) < \varepsilon/2 \text{ și } \sigma(f(x''), \ell) < \varepsilon/2. \quad (4.12)$$

Din (4.12), utilizând inegalitatea triunghiulară, deducem

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leq \sigma(f(x'), \ell) + \sigma(f(x''), \ell) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

adică (4.10) este satisfăcută.

Reciproc, să presupunem că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  pentru care are loc (4.10) și să arătăm existența limitei funcției  $f$  în punctul  $a$ .

Vom utiliza definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct.

Fie în acest sens  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n \in A \setminus \{a\}$ , un șir arbitrar convergent la  $a$ . Arătăm că șirul valorilor funcției  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  este convergent în  $Y$ .

Cum  $x_n \rightarrow a$ , pentru  $\delta(\varepsilon)$  care apare în (4.10), există  $N = N(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ , așa fel încât

$$d(x_n, a) < \delta(\varepsilon), \quad \forall n > N(\delta(\varepsilon)).$$

Dacă  $n > N(\delta(\varepsilon))$  și  $m > N(\delta(\varepsilon))$  sunt numere naturale arbitrare, atunci interpretând  $x_n$  și  $x_m$  drept  $x'$  și respectiv  $x''$  din (4.10), rezultă că

$$\begin{cases} 0 < d(x_n, a) < \delta(\varepsilon) \\ 0 < d(x_m, a) < \delta(\varepsilon) \end{cases} \implies \sigma(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon. \quad (4.13)$$

Ultima inegalitate din (4.13) arată că șirul  $(f(x_n))$  este fundamental în  $(Y, \sigma)$ . Cum  $(Y, \sigma)$  este spațiu metric complet, rezultă că  $(f(x_n))$  este convergent, deci există  $\ell \in Y$  astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \ell. \quad (4.14)$$

Pentru a încheia demonstrația trebuie să arătăm că  $\ell$  din (4.14) nu depinde de șirul  $(x_n)$ . Presupunem că n-ar fi așa și că șirurile  $(x'_n)$ ,  $(x''_n)$  cu termenii din  $A \setminus \{a\}$ , convergente fiecare la  $a$ , sunt astfel încât  $f(x'_n) \rightarrow \ell'$ ,  $f(x''_n) \rightarrow \ell''$ , iar  $\ell' \neq \ell''$ .

Să formăm acum șirul

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \dots, x'_n, x''_n, \dots,$$

care converge, de asemenea, la  $a$ .

Aplicând din nou cele demonstrate mai sus, rezultă că există  $\ell \in Y$  astfel ca șirul valorilor

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \dots, f(x'_n), f(x''_n), \dots \quad (4.15)$$

este convergent și are limita  $\ell \in Y$ . Întrucât  $(f(x'_n))$  și  $(f(x''_n))$  sunt subșiruri ale șirului (4.15) rezultă că  $\ell' = \ell'' = \ell$  care contrazice presupunerea făcută că  $\ell' \neq \ell''$  și demonstrația teoremei este încheiată. **q.e.d.**

**Observația 4.1.6.** Dacă  $Y$  din Teorema 4.1.5 este  $\mathbb{R}^m$  și metrica din  $\mathbb{R}^m$  este cea indusă de norma Euclidiană, iar  $A$  este o submulțime a spațiului Euclidian  $\mathbb{R}^n$ , atunci Teorema 4.1.5 se poate adapta după cum urmează.

**Teorema 4.1.6.** Funcția  $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ , unde  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ,  $m \geq 1$ , are limită în punctul  $\mathbf{a} \in A'$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x}' \in A, \text{ cu } 0 < \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \\ \forall \mathbf{x}'' \in A, \text{ cu } 0 < \|\mathbf{x}'' - \mathbf{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \end{cases} \implies \|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon. \quad (4.16)$$

În cazul  $m = n = 1$ , implicația (4.16) devine

$$\begin{cases} 0 < |x' - a| < \delta \\ 0 < |x'' - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (4.17)$$

și reprezintă condiția necesară și suficientă ca o funcție reală de variabilă reală să aibă limită finită într-un punct de acumulare  $a \in \mathbb{R}$  al domeniului de definiție al funcției.

În continuare, punem în evidență un rezultat important, cunoscut și sub numele de *principiul substituției*, care permite calculul limitei unor funcții compuse.

**Teorema 4.1.7. (Principiul substituției)** Fie  $A \subset (X, d)$ ,  $B \subset (Y, \sigma)$  și funcțiile  $f : B \rightarrow (Z, q)$ ,  $g : A \rightarrow B \setminus \{y_0\}$ .

Dacă  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \ell$  și  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$ , atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \ell. \quad (4.18)$$

*Demonstrație.* Deoarece  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = \ell$ , din Definiția 4.1.1 rezultă că pentru orice  $W \in \mathcal{V}(\ell)$ , există  $U \in \mathcal{V}(y_0)$ , astfel încât

$$y \in (U \setminus \{y_0\}) \cap B \implies f(y) \in W. \quad (4.19)$$

Pe de altă parte, întrucât  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$  și  $g$  ia valori în  $B \setminus \{y_0\}$ , avem că există vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(x_0)$  astfel ca

$$x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A \implies g(x) \in (U \setminus \{y_0\}) \cap B. \quad (4.20)$$

Din (4.19) și (4.20) rezultă că oricare ar fi vecinătatea  $W \in \mathcal{V}(\ell)$ , există vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(x_0)$ , astfel încât

$$x \in (V \setminus \{x_0\}) \cap A \implies f(g(x)) \in W. \quad (4.21)$$

Implicația (4.21) demonstrează că (4.18) are loc.

**q.e.d.**

## 4.2 Funcții continue

Fie spațiile metrice  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$ ,  $A \subset X$  o submulțime nevidă a lui  $X$ ,  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  o funcție de la  $A$  în  $Y$  și  $a \in A$  un punct oarecare al mulțimii  $A$ .

**Definiția 4.2.1.** Spunem că funcția  $f : A \rightarrow Y$  este **continuă în punctul**  $a \in A$  dacă pentru orice vecinătate  $V \in \mathcal{V}(f(a))$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât

$$f(U \cap A) \subset V. \quad (4.22)$$



**Definiția 4.2.2.** Dacă funcția  $f$  nu este continuă în punctul  $a \in A$ , spunem că  $f$  este **discontinua** în punctul  $a$ , sau că punctul  $a$  este **punct de discontinuitate** al funcției  $f$ .

**Observația 4.2.1.** Dacă admitem că noțiunea matematică de vecinătate traduce ideea intuitivă de **apropiere**, Definiția 4.2.1 ne spune că  $f(x)$  este oricât de **aproape** de  $f(a)$  de îndată ce  $x$  este suficient de **aproape** de  $a$ .

**Observația 4.2.2.** Noțiunea de continuitate a unei funcții nu are sens decât în punctele mulțimii de definiție a funcției respective.

**Observația 4.2.3.** Continuitatea unei funcții într-un punct depinde numai de valorile funcției dintr-o vecinătate a punctului, deci are **caracter local**. O funcție poate fi continuă într-un punct  $a \in A$  dar să nu fie continuă într-un alt punct vecin lui  $a$ .

**Observația 4.2.4.** Dacă  $a \in A$  este un **punct izolat** al lui  $A$ , atunci  $f$  este **continuă în  $a$** , deoarece,  $a$  fiind punct izolat există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(a)$  astfel ca  $U \cap A = \{a\}$  și atunci oricare ar fi vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(f(a))$  are loc  $f(U \cap A) = \{f(\{a\})\} \subset V$ , ceea ce antrenează continuitatea lui  $f$  în  $a$ .

Prin urmare, dacă domeniul de definiție al unei funcții are puncte izolate, în aceste puncte funcția este continuă.

**Teorema 4.2.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  este continuă în punctul  $a \in A' \cap A$  dacă și numai dacă există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  și această limită este egală cu  $f(a)$ .

*Demonstrație.* Dacă  $f$  este continuă în  $a \in A' \cap A$ , din Definiția 4.2.1 rezultă că  $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$  există  $U \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât să aibă loc (4.22) de unde, cu atât mai mult, are loc  $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$  care spune că  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Reciproc, dacă  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , din Definiția 4.1.1 rezultă că  $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \exists U \in \mathcal{V}(a)$  așa încât  $f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subset V$ . Cum și pentru  $x = a \in A$  avem  $f(a) \in V$  rezultă că (2.1) are loc, ceea ce spune că  $f$  este continuă în  $x = a$ . **q.e.d.**

Ținând seama de Observația 4.2.4 și de Teorema 4.2.1, rezultă următoarea observație.

**Teorema 4.2.2.** Fie  $f : A \rightarrow Y$  și  $a \in A$ . Atunci,  $f$  este continuă în  $x = a$  dacă și numai dacă are loc una din următoarele condiții:

- (i) ori  $a \in A'$  și  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ;
- (ii) ori  $a$  este punct izolat al lui  $A$ .

**Observația 4.2.5.** Dacă  $a \in A \cap A'$  și  $f : A \rightarrow Y$  este continuă în punctul  $a$ , definiția continuității lui  $f$  în  $a$  se scrie în forma

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right). \quad (4.23)$$

Egalitatea (4.23) arată că dacă  $f$  este continuă în punctul  $a \in A \cap A'$ , operația de trecere la limită este permutabilă cu funcția  $f$ .

**Teorema 4.2.3. (Teoremă de caracterizare a continuității)** Fie funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ , unde  $A \subset (X, d)$ , și  $a \in A$ . Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

- ( $\alpha$ )  $f$  este continuă în  $a$ ;
- ( $\beta$ ) oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $\forall x \in A$ , cu  $d(x, a) < \delta$ ,  $\implies \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon$ ;
- ( $\gamma$ )  $\forall (x_n), x_n \in A$ , cu  $x_n \rightarrow a$ ,  $\implies f(x_n) \rightarrow f(a)$ .

*Demonstrație.* Rezultă din Teorema 4.1.1, Teorema 4.1.2 și Teorema 4.2.2.

**q.e.d.**

Din această teoremă rezultă că afirmațiile ( $\beta$ ) și ( $\gamma$ ) pot constitui, fiecare în parte, definiții echivalente ale continuității unei funcții într-un punct. Dacă Definiției 4.1.1 îi spunem *definiția cu vecinătăți* a limitei unei funcții într-un punct, atunci lui ( $\beta$ ) îi putem spune *definiția continuității în limbajul  $\varepsilon - \delta$* , iar ( $\gamma$ ) poate fi numită *definiția continuității cu șiruri*.

**Definiția 4.2.3.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  se numește **funcție continuă pe mulțimea  $A$** , sau **continuă** dacă  $f$  este funcție continuă în orice punct  $x \in A$ .

**Observația 4.2.6.** Dacă o funcție  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  este continuă pe  $A$ ,  $B \subset A$  și  $f|_B$  este restricția funcției  $f$  la mulțimea  $B$ , atunci  $f|_B$  este funcție continuă.

**Teorema 4.2.4.** Fie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset (X, d)$  o funcție reală continuă în punctul  $a \in A \cap A'$  și  $f(a) > 0$  (respectiv  $f(a) < 0$ ). Atunci,  $f$  este pozitivă (respectiv negativă) pe intersecția cu  $A$  a unei vecinătăți a lui  $a$ .

*Demonstrație.* Fie  $f(a) > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  ales astfel încât  $\varepsilon < f(a)$  și  $V \in \mathcal{V}(f(a))$  de forma  $V = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ . Conform Definiției 4.2.1, există  $U \in \mathcal{V}(a)$  astfel încât  $f(U \cap A) \subset V$ , aceasta însemnând că pentru orice  $x \in U \cap A$  avem  $f(x) \in V$ , deci  $f(x) > f(a) - \varepsilon > 0$ . Cazul  $f(a) < 0$  se tratează analog.

**q.e.d.**

**Teorema 4.2.5.** Fiecare din condițiile următoare este necesară și suficientă pentru ca o funcție  $f : A \subset X \rightarrow Y$  să fie continuă:

- (a)  $\forall B$ , mulțime închisă în  $Y$ , mulțimea  $f^{-1}(B)$  este închisă în spațiul metric  $(A, d|_A)$ ;

(b)  $\forall D$ , mulțime deschisă în  $Y$ , mulțimea  $f^{-1}(D)$  este deschisă în spațiul metric  $(A, d_A)$ ;

(c)  $\forall A_1 \subset A \implies f(\overline{A_1}^A) \subset \overline{f(A_1)}$ , unde  $\overline{A_1}^A$  este închiderea în  $A$  a mulțimii  $A_1$ .

*Demonstrație.* Presupunem că  $f$  este continuă pe  $A$  și fie  $B$  o mulțime închisă în  $Y$ , oarecare.

Dacă  $B \cap f(A) = \emptyset$ , atunci  $f^{-1}(B) = \emptyset$ , deci  $f^{-1}(B)$  este mulțime închisă în  $A$ , chiar și în  $X$ .

Dacă  $B \cap f(A) \neq \emptyset$ , putem considera un șir oarecare  $(x_n)_{n \geq 0}$ , din  $A$ , astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in A$  și  $x_n \in f^{-1}(B)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece  $f$  este continuă în  $x \in A$ , rezultă că  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ . Cum  $B$  este închisă în  $Y$  și  $f(x_n) \in B$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , după Teorema 3.9.2, rezultă  $f(x) \in B$ .

Prin urmare,  $x \in f^{-1}(B)$  și, conform Teoremei 3.9.2,  $f^{-1}(B)$  este închisă în  $A$ , însă poate să nu fie închisă în  $X$ .

Să arătăm acum că (a)  $\implies$  (b).

Fie  $D \subset Y$ , mulțime deschisă. Complementara sa față de  $Y$ , adică  $C_Y D$ , este mulțime închisă în  $Y$ . După (a), mulțimea  $f^{-1}(C_Y D)$  este închisă în  $(A, d_A)$ .

În consecință,  $f^{-1}(D) = A \setminus f^{-1}(C_Y D)$  este mulțime deschisă în  $(A, d_A)$ .

Să presupunem că  $f$  are proprietatea (b) și fie  $x_0 \in A$ . Pentru orice  $\varepsilon > 0$  mulțimea  $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$  este deschisă în  $(A, d_A)$ , deoarece, conform Teoremei 3.9.8, o bilă deschisă este o mulțime deschisă. Această mulțime conține  $x_0$ .

În consecință, există  $\delta > 0$  așa încât oricare ar fi  $x \in A$ , dacă  $d_A(x, x_0) < \delta$ , atunci  $x \in f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ , adică  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ , ceea ce după punctul (b) din Teorema 4.2.3, arată că  $f$  este continuă în punctul  $x_0 \in A$ .

Cum  $x_0$  este arbitrar din  $A$ , rezultă că  $f$  este continuă.

Să arătăm că  $f$  continuă  $\implies$  (c).

Fie  $A_1 \subset A$  și  $y \in f(\overline{A_1}^A)$ . Atunci, există  $x \in \overline{A_1}^A$  astfel încât  $y = f(x)$ . Deoarece  $x \in A_1$  rezultă că există  $(x_n)_{n \geq 1}$ , cu  $x_n \in A_1$  astfel încât  $x_n \rightarrow x$ . Funcția  $f$  fiind continuă în  $x$ , avem  $f(x_n) \rightarrow f(x) = y$ , adică există șirul  $(f(x_n))_{n \geq 1}$  în mulțimea  $f(A_1)$  astfel încât  $f(x_n) \rightarrow y$ , deci  $y \in \overline{f(A_1)}$ .

Cu aceasta incluziunea  $f(\overline{A_1}^A) \subset \overline{f(A_1)}$  este demonstrată.

(c)  $\implies$  (a). Într-adevăr, dacă  $B$  este o mulțime închisă în  $Y$ , adică  $B = \overline{B}$  și  $C = f^{-1}(B)$ , atunci conform (c), avem

$$f(\overline{C}^A) \subset \overline{f(C)} = \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B,$$

de unde

$$\overline{C} \subset f^{-1}(f(\overline{C})) \subset f^{-1}(B) = C$$

și cum avem și incluziunea  $C \subset \overline{C}$  rezultă  $C = \overline{C}$ , ceea ce demonstrează că  $C = f^{-1}(B)$  este mulțime închisă în  $(A, d_A)$ .

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Observația 4.2.7.** Se poate arăta că afirmația " $f$  continuă" din Teorema 4.2.5 este echivalentă și cu alte condiții ([22, p.200], [24, p.116], [5, p.106]).

În demonstrația Teoremei 4.2.5 s-a afirmat că  $f^{-1}(B)$  este închisă în  $A$ , însă poate să nu fie închisă în  $X$ . În sprijinul acestei afirmații prezentăm exemplul următor.

**Exemplul 4.2.1.** Considerăm mulțimile  $A = (-1, 1) \subset X = \mathbb{R}$ ,  $B = [0, +\infty) \subset Y = \mathbb{R}$  și funcția reală de variabilă reală

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in A.$$

Funcția  $f$  este continuă pe  $A$ , mulțimea  $B = f(A)$  este închisă în  $\mathbb{R}$ , mulțimea  $f^{-1}(B)$  este deschisă în  $\mathbb{R}$ , dar închisă în  $A$ .

**Exemplul 4.2.2. (Aplicația de proiecție)** Funcțiile reale de variabilă vectorială

$$\text{pr}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{pr}_i \mathbf{x} = x_i, \quad i \in \overline{1, n},$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , numite aplicații de proiecție, sau proiecții ortogonale, sunt continue pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Soluție.** Întrădevăr, fie  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , arbitrar. Dacă  $(\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}$ ,  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{x}_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}$ , atunci  $x_{i,k} \xrightarrow{\mathbb{R}} a_i$ ,  $\forall i \in \overline{1, n}$ , adică  $\text{pr}_i(\mathbf{x}_k) = x_{i,k} \xrightarrow{\mathbb{R}} a_i = \text{pr}_i(\mathbf{a})$ ,  $\forall i \in \overline{1, n}$ , ceea ce spune că funcția  $\text{pr}_i$  este continuă în  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ , oricare ar fi  $i \in \overline{1, n}$ . ■

**Teorema 4.2.6.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $m \geq 2$ , este continuă în  $\mathbf{a} \in A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in \mathcal{F}(A)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt continue în  $\mathbf{a}$ .

*Demonstrație.* Conform Teoremei 4.2.3, continuitatea funcției vectoriale

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$$

în  $\mathbf{a} \in A$  este echivalentă cu condiția  $(\gamma)$  care acum se scrie în forma:

$$\forall (\mathbf{x}_k)_{k \geq 1}, \mathbf{x}_k \in A, \text{ cu } \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} \implies \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Pe de altă parte, din Teorema 3.12.1, avem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{a}) \iff f_j(\mathbf{x}_k) \rightarrow f_j(\mathbf{a}), \quad j \in \overline{1, m}$$

și teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Teorema 4.2.7. (Continuitatea funcției compuse)** Fie  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow C$ ,  $A, B, C$  fiind submulțimi ale unor anumite spații metrice. Dacă  $f$  este continuă în  $x_0 \in A$  și  $g$  este continuă în  $f(x_0) \in B$ , atunci funcția compusă  $g \circ f$  este continuă în  $x_0$ . Dacă  $f$  și  $g$  sunt continue,  $g \circ f$  este continuă pe  $A$ .

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $x_n \rightarrow x_0$ , atunci  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  și, în consecință,  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$ , adică  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ , ceea ce arată că  $g \circ f$  este continuă în  $x_0$ . Dacă  $x_0$  este arbitrar din  $A$ , rezultă că  $g \circ f$  este continuă pe  $A$ . **q.e.d.**

Fie  $(X, d)$ ,  $(Y, \sigma)$  două spații metrice,  $A \subset X$  și  $a \in A \cap A'$ . Dacă  $f: A \setminus \{a\} \rightarrow Y$  este o funcție definită pe  $A \setminus \{a\}$ , putem *prelungi*  $f$  la mulțimea  $A$  în diferite moduri, atribuindu-i lui  $f$  o valoare arbitrară în punctul  $a$ . Dacă însă există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \in Y$ , putem considera funcția

$$\tilde{f}: A \rightarrow Y, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{a\}, \\ \ell, & \text{dacă } x = a, \end{cases} \quad (4.24)$$

care, evident, este o *prelungire* a lui  $f$  la  $A$ .

**Teorema 4.2.8.** Fie  $f : A \setminus \{a\} \rightarrow Y$ . Dacă există  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , atunci funcția  $\tilde{f} : A \rightarrow Y$ , definită prin (4.24) este continuă în punctul  $a$ .

*Demonstrație.* Întrucât pentru  $x \in A \setminus \{a\}$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$ , iar  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ , rezultă că  $\lim_{x \rightarrow a} \tilde{f}(x) = \ell = \tilde{f}(a)$ , adică  $\tilde{f}$  este continuă în  $a$ . q.e.d.

**Definiția 4.2.4.** Dacă  $f : A \setminus \{a\} \rightarrow Y$  are limita  $\ell$  în punctul  $a \in A' \cap A$ , atunci funcția  $\tilde{f}$  definită de (4.24) se numește **prelungire a funcției  $f$  prin continuitate în punctul  $a$** .

**Exemplul 4.2.3.** Fie  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  definită pe  $\mathbb{R}^*$ . Cum  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , putem prelungi funcția  $f$  prin continuitate în 0.

Prelungirea prin continuitate în origine a funcției  $f$  este funcția

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

**Exemplul 4.2.4.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric. Aplicația

$$d_1 : (X \times X) \times (X \times X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1((x, y), (x_0, y_0)) = d(x, x_0) + d(y, y_0)$$

este o metrică pe  $X \times X$ , iar funcția

$$f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = d(x, y),$$

este continuă pe  $X \times X$ .

**Soluție.** Fie  $(x_0, y_0)$  un punct arbitrar din  $X \times X$ . Dacă  $(x, y)$  este un alt punct al lui  $X \times X$ , atunci

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |d(x, y) - d(x_0, y_0)| \leq d(x, x_0) + d(y, y_0),$$

inegalitatea fiind adevărată în baza lui (3.3) din Propoziția 3.1.1.

Fie  $\varepsilon > 0$ . Luând  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , atunci oricare ar fi  $(x, y) \in X \times X$  cu  $d_1((x, y), (x_0, y_0)) < \delta(\varepsilon)$  rezultă  $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ , adică  $f$  este continuă în punctul  $(x_0, y_0)$ , arbitrar ales. Deci  $f$  este continuă pe spațiul metric  $(X \times X, d_1)$ . ■

**Exemplul 4.2.5.** Fie  $(H, \cdot)$  un spațiu prehilbertian. Aplicația

$$f : H \times H \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

este funcție continuă pe  $H \times H$ .

**Soluție.** Aplicația

$$d_1 : (H \times H) \times (H \times H) \rightarrow \mathbb{R}, d_1((\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|,$$

unde  $\|\cdot\|$  este norma indusă de produsul scalar „ $\cdot$ ”, este o metrică pe  $H \times H$ , deci  $(H \times H, d_1)$  este spațiu metric.

Pentru orice  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in H \times H$  și pentru orice  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in H \times H$ , avem

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| = |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_0|,$$

din care deducem

$$|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \|\mathbf{y}_0\|. \quad (4.25)$$

Fie  $((\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))_{n \geq 1}$  un șir de puncte din  $(H \times H, d_1)$  convergent la  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Atunci,  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}_0$ . Șirurile  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$  și  $(\mathbf{y}_n)_{n \geq 1}$  fiind convergente, sunt mărginite în metrica  $d_1$ . Din inegalitatea (4.25) rezultă  $f(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , deci funcția  $f$  este continuă în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ .

Deoarece  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este oriunde în domeniul de definiție al funcției, rezultă că  $f$  este continuă pe  $H \times H$ . ■

**Exemplul 4.2.6.** Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat.

Funcția  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ , este continuă pe  $V$ .

**Soluție.** Utilizând Propoziția 3.5.1, avem

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = ||\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Considerând  $\varepsilon > 0$  și luând  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , constatăm că oricare ar fi  $\mathbf{x} \in V$ , astfel încât  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta(\varepsilon)$ , implică  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ , rezultat care arată că  $f$  este continuă în  $\mathbf{x}_0$ . Deoarece  $\mathbf{x}_0$  este ales arbitrar din  $V$  rezultă că  $f$  este continuă pe  $V$ . ■

**Exemplul 4.2.7.** Să se studieze continuitatea funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

**Soluție.** Restricția funcției  $f$  la mulțimea  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  este funcție continuă fiind un cât de două polinoame, ambele funcții continue.

Studiem continuitatea funcției  $f$  în origine. Fie în acest sens șirul de puncte  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$ , cu termenul general  $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ , care este convergent la punctul  $\mathbf{0} = (0, 0)$ .

Șirul valorilor funcției are termenul general  $f(\mathbf{x}_n) = f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ , de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0)$ .

Prin urmare, funcția nu este continuă în origine. ■

## 4.3 Funcții uniform continue

**Definiția 4.3.1.** O funcție  $f$  de la o submulțime  $A$  a unui spațiu metric  $(X, d)$  în spațiul metric  $(Y, \sigma)$  se numește **uniform continuă** dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$\forall x', x'' \in A \quad \text{cu} \quad d(x', x'') < \delta \implies \sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon. \quad (4.26)$$

Pentru a explica diferența dintre continuitatea obișnuită și uniforma continuitate, să scriem mai întâi definiția continuității utilizând limbajul " $\varepsilon - \delta$ ".

Funcția  $f$  este continuă dacă

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \text{ și } \forall x \in A \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0 \text{ astfel încât} \\ \forall y \in A, \text{ cu } d(x, y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon \end{aligned} \quad (4.27)$$

Să scriem din nou (4.26), dar cu mici schimbări de notație.

Funcția  $f$  este uniform continuă dacă

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ astfel încât } \forall x \in A \text{ și } \forall y \in A \\ \text{cu } d(x, y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Din (4.27) și (4.28) vedem în primul rând că cele două definiții diferă prin schimbarea poziției cuantificatorilor  $\forall x \in A$  și  $\exists \delta > 0$ . Apoi, în definiția continuității numărul  $\delta$  depinde de  $\varepsilon$  și de  $x$  pe când în definiția uniforme continuități numărul  $\delta$  depinde numai de  $\varepsilon$ .

**Observația 4.3.1.** Continuitatea uniformă a unei funcții pe o mulțime este o **proprietate globală** în timp ce continuitatea funcției pe mulțimea de definiție, sau pe o submulțime a ei este o **proprietate locală** și de aceea continuității pe o mulțime  $i$  se spune și **continuitate punctuală**.

**Definiția 4.3.2.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ ,  $A \subset (X, d)$ , nu este uniform continuă dacă  $\exists \varepsilon_0 > 0$  astfel încât  $\forall \delta > 0$  există o pereche de puncte  $(x'_\delta, x''_\delta) \in A \times A$  cu  $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$  care are proprietatea  $\sigma(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geq \varepsilon_0$ .

**Observația 4.3.2.** Orice funcție uniform continuă este continuă. Reciproc nu este în general adevărat.

Într-adevăr, fie  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ . Este suficient să fixăm  $x'' = a$  în (4.26) și obținem Definiția 4.2.2 a continuității lui  $f$  în  $a$ , punct arbitrar din  $A$ , deci  $f$  este continuă. ■

Exemplul care urmează ilustrează partea a doua a afirmației din Observația 4.3.2.

**Exemplul 4.3.1.** Funcția continuă  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , nu este uniform continuă.

**Soluție.** Într-adevăr, să considerăm șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , convergent la zero. Fiind convergent în  $\mathbb{R}$ ,  $(x_n)$  este șir fundamental în  $\mathbb{R}$ . Prin urmare,  $\forall \delta > 0$ ,  $\exists N(\delta) \in \mathbb{N}$  cu proprietatea că pentru orice  $n > N(\delta)$  și  $\forall p \in \mathbb{N}$  avem  $|x_{n+p} - x_n| < \delta$ .

Să luăm acum  $\varepsilon_0 = p$ ,  $x'_\delta = x_{n+p}$  și  $x''_\delta = x_n$ . Observăm că

$$(\sigma(f(x'_\delta), f(x''_\delta))) = |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = |n + p - n| = p.$$

După Definiția 4.3.2, funcția  $f$  nu este uniform continuă.

Rezultatul se explică prin faptul că mulțimea de definiție  $(0, 1]$  nu este compactă, nefiind închisă. ■

**Definiția 4.3.3. (Funcția Hölder<sup>2</sup>)** Funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  se numește **hölderiană**, sau **funcție Hölder** de ordin  $\alpha \in (0, 1]$  pe mulțimea  $A$  dacă există  $K > 0$ , numită **constanta lui Hölder**, astfel încât

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leq K(d(x', x''))^\alpha, \quad \forall x', x'' \in A. \quad (4.29)$$

**Propoziția 4.3.1.** *Orice funcție Hölder este uniform continuă.*

*Demonstrație.* Dacă  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, atunci luând  $\delta(\varepsilon) = \left(\frac{1}{K}\varepsilon\right)^{1/\alpha}$ , din (4.29) obținem

$$\sigma(f(x'), f(x'')) < \varepsilon, \quad \forall x', x'' \in A \text{ cu } d(x', x'') < \delta(\varepsilon)$$

care, în baza Definiției 4.3.1, arată că funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  care satisface (4.29) este funcție uniform continuă. **q.e.d.**

**Definiția 4.3.4. (Funcția Lipschitz<sup>3</sup>)** Funcția hölderiană de ordin  $\alpha = 1$  se numește **funcție lipschitziană** sau **funcție Lipschitz**. De obicei, constanta  $K$  se notează cu  $L$  și se numește **constantă lui Lipschitz**. Prin urmare o funcție Lipschitz satisface inegalitatea

$$\sigma(f(x'), f(x'')) \leq Ld(x', x''), \quad \forall x', x'' \in A, \quad (4.30)$$

unde  $L > 0$ .

**Observația 4.3.3.** *O funcție Lipschitz este uniform continuă.*

Întradevăr, afirmația rezultă din 4.3.1 luând  $\alpha = 1$  și  $K = L$ . ■

**Observația 4.3.4.** *O contracție pe spațiul metric  $(X, d)$  (vezi Definiția 3.8.2) este funcție uniform continuă.*

**Propoziția 4.3.2.** *Funcția normă este funcție Lipschitz.*

*Demonstrație.* Întradevăr, dacă  $(V, \|\cdot\|)$  este un spațiu normat, funcția normă

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|,$$

este funcție Lipschitz în care constanta lui Lipschitz este  $L = 1$ , aceasta rezultând din Propoziția 3.5.1, punctul (b). **q.e.d.**

**Teorema 4.3.1. (Cantor)** *Dacă  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  este continuă și  $A$  este mulțime compactă, atunci  $f$  este uniform continuă.*

<sup>2</sup>Hölder, Otto Ludwig (1859 – 1937), matematician german.

<sup>3</sup>Lipschitz, Rudolf (1832–1903), matematician german.



*Demonstrație.* Fie  $f : A \rightarrow Y$ , o funcție continuă pe mulțimea compactă  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$  cu valori în spațiul metric  $(Y, \sigma)$ . Presupunem prin absurd că  $f$  nu este uniform continuă. Folosind Definiția 4.3.2 deducem că există  $\varepsilon_0 > 0$  astfel încât oricare ar fi  $\delta_n = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , există  $x'_n \in A$  și  $x''_n \in A$  care satisfac

$$d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n} \implies \sigma(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0. \quad (4.31)$$

În acest mod au apărut șirurile de puncte  $(x'_n)_{n \geq 1}$  și  $(x''_n)_{n \geq 1}$  ale căror termeni satisfac (4.31).

Mulțimea  $A$  fiind compactă în spațiul metric  $(X, d)$ , există subșirul de puncte  $(x'_{k_n})_{n \geq 1}$  al șirului de puncte  $(x'_n)_{n \geq 1}$  convergent la un punct  $x_0 \in A$ , adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x'_{k_n} = x_0 \in A \iff d(x'_{k_n}, x_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Considerăm acum subșirul  $(x''_{k_n})_{n \geq 1}$  al șirului  $(x''_n)_{n \geq 1}$ . Deoarece

$$d(x''_{k_n}, x_0) \leq d(x''_{k_n}, x'_{k_n}) + d(x'_{k_n}, x_0),$$

în baza lui (4.31) și (4.32), deducem

$$d(x''_{k_n}, x_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \iff x''_{k_n} \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Din continuitatea lui  $f$  în  $x_0$  și (4.32), (4.33), avem

$$f(x'_{k_n}) \rightarrow f(x_0), \quad n \rightarrow \infty \quad \text{și} \quad f(x''_{k_n}) \rightarrow f(x_0), \quad n \rightarrow \infty,$$

rezultate care sunt echivalente cu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f(x'_{k_n}), f(x_0)) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f(x''_{k_n}), f(x_0)) = 0. \quad (4.34)$$

Din (4.34) și inegalitatea triunghiului din Definiția 3.1.1, obținem

$$\varepsilon_0 \leq \sigma(f(x'_{k_n}), f(x''_{k_n})) \leq \sigma(f(x'_{k_n}), f(x_0)) + \sigma(f(x''_{k_n}), f(x_0)). \quad (4.35)$$

Trecând la limită pentru  $n \rightarrow \infty$  în (4.35) și ținând cont de (4.34), deducem  $\varepsilon_0 \leq 0$ , deci presupunerea făcută nu este posibilă, ca atare funcția  $f$  este uniform continuă. **q.e.d.**

**Observația 4.3.5.** Dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , este mulțime mărginită și închisă și dacă  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$  este continuă, atunci  $f$  este uniform continuă.

Într-adevăr, afirmația rezultă din Teorema 3.10.10 și Teorema 4.3.1. ■

**Observația 4.3.6.** Din Definiția 4.3.1 și comentariul făcut mai jos de aceasta, tragem concluzia că o funcție continuă pe  $A \subset (X, d)$  este uniform continuă dacă mulțimea  $\{\delta(\varepsilon, x_0) : x_0 \in A\}$  are un infimum, notat cu  $\delta(\varepsilon)$ , strict pozitiv.

**Exemplul 4.3.2.** Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  este continuă în orice  $x_0 \in \mathbb{R}$  dar nu este uniform continuă.

Într-adevăr,  $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||x + x_0| = |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \leq$

$|x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) < \delta(\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2|x_0|\delta = \varepsilon$ , de unde  $\delta(\varepsilon, x_0) = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$ , deci  $f$  este continuă în orice punct  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Funcția  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(t) = \sqrt{t^2 + \varepsilon} - t$  are valoarea  $\sqrt{\varepsilon}$  în  $t = 0$ , este descrescătoare pentru că  $h'(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 + \varepsilon}}{\sqrt{t^2 + \varepsilon}}$ , este negativă și are limita egală cu zero când  $t \rightarrow \infty$ . Prin urmare,  $\inf\{\delta(\varepsilon, x_0) : x_0 \in \mathbb{R}\} = 0$  și, după Observația 4.3.6, deducem că funcția  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , nu este uniform continuă. ■

## 4.4 Funcții continue pe mulțimi compacte

**Teorema 4.4.1.** Fie  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ , unde  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  sunt spații metrice. Dacă  $f$  este continuă și  $A \subset X$  este mulțime compactă, atunci  $f(A) \subset Y$  este mulțime compactă.

*Demonstrație.* Fie  $(y_n)_{n \geq 1}$  un șir de puncte arbitrar din  $B = f(A)$ . Atunci, există  $x_n \in A$  astfel încât  $y_n = f(x_n)$ . Deoarece  $A$  este mulțime compactă,  $A$  este compactă prin șiruri, deci șirul de puncte  $(x_n)$  din  $A$  conține un subșir  $(x_{k_n})_{n \geq 1}$ , convergent la un punct  $x_0 \in A$ . Prin urmare,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x_0. \quad (4.36)$$

Din (4.36) și continuitatea lui  $f$  în  $x_0$ , deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \in B. \quad (4.37)$$

Relația (4.37) arată că subșirul  $(y_{k_n})_{n \geq 1}$ , unde  $y_{k_n} = f(x_{k_n})$ , este convergent la punctul  $y_0 = f(x_0) \in B$ .

Prin urmare,  $B = f(A) \subset Y$  este mulțime compactă prin șiruri.

Folosind Teorema 3.9.6 constatăm că  $B$  este mulțime compactă prin acoperire, sau mulțime compactă. **q.e.d.**

**Corolarul 4.4.1.** Fie funcția vectorială de argument vectorial

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Dacă  $A$  este mulțime mărginită și închisă și  $\mathbf{f}$  este funcție continuă, atunci mulțimea  $\text{Im } \mathbf{f} = \mathbf{f}(A) \subset \mathbb{R}^m$  este mărginită și închisă.

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $A \subset \mathbb{R}^n$  este mulțime mărginită și închisă, atunci din Teorema 3.10.2 și Teorema 3.10.7 deducem că  $A$  este mulțime compactă și din Teorema 4.4.1 rezultă că  $\mathbf{f}(A)$  este compactă în  $\mathbb{R}^m$ . Folosind iarăși Teorema 3.10.2 și Teorema 3.10.7, deducem că  $\mathbf{f}(A)$  este mulțime mărginită și închisă. **q.e.d.**

**Definiția 4.4.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  se numește **mărginită** dacă mulțimea  $\text{Im } f = f(X)$  este mărginită în spațiul metric  $(Y, \sigma)$ .

**Corolarul 4.4.2.** Dacă  $f : X \rightarrow Y$  este o funcție continuă definită pe spațiul metric compact  $(X, d)$  cu valori în spațiul metric  $(Y, \sigma)$ , atunci  $f$  este mărginită.

*Demonstrație.* Din Teorema 4.4.1 rezultă că  $f(X)$  este mulțime compactă în spațiul metric  $(Y, \sigma)$ , iar din Corolarul 3.10.2 rezultă că  $f(X)$  este mărginită și închisă. Folosind acum Definiția 4.4.1, deducem că  $f$  este funcție mărginită. **q.e.d.**

**Definiția 4.4.2.** Fie funcția reală  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  și

$$M = \sup\{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R}, \quad m = \inf\{f(x) : x \in X\} \in \mathbb{R},$$

unde  $(X, d)$  este un spațiu metric oarecare.

- (i) Spunem că funcția reală  $f$  își atinge marginea superioară pe mulțimea  $X$  dacă există cel puțin un punct  $x' \in X$  astfel încât

$$M = f(x'); \quad (4.38)$$

- (ii) Funcția  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  își atinge marginea inferioară pe  $X$  dacă există cel puțin un punct  $x'' \in X$  astfel încât

$$m = f(x''); \quad (4.39)$$

- (iii) Se spune că funcția  $f \in \mathcal{F}(X)$  își atinge marginile dacă își atinge atât marginea superioară pe  $X$ , cât și marginea inferioară pe  $X$ .

**Teorema 4.4.2. (Weierstrass)** Fie  $(X, d)$  spațiu metric,  $A \subset X$  mulțime compactă și  $f \in \mathcal{F}(A)$ , o funcție reală continuă. Atunci,  $f$  este funcție mărginită și își atinge marginile.

*Demonstrație.* Conform Corolarului 4.4.2,  $f(A)$  este mulțime mărginită în spațiul metric obișnuit  $(\mathbb{R}, d)$ . Întrucât  $M$  și  $m$  sunt puncte aderente pentru  $f(A)$  rezultă că  $M \in \overline{f(A)}$  și  $m \in \overline{f(A)}$ . Însă  $f(A)$  fiind compactă, este mulțime închisă, deci  $f(A) = \overline{f(A)}$  și ca atare avem  $M \in f(A)$ ,  $m \in f(A)$ .

Prin urmare, exist'ă a  $x', x'' \in A$  astfel încât  $f(x') = M$  și  $f(x'') = m$ , ceea ce arată că  $f$  își atinge marginile pe  $A$ . **q.e.d.**

**Observația 4.4.1.** Un caz particular al Teoremei 4.4.2 este acela în care  $X = \mathbb{R}$ , iar  $A$ , fiind mulțime compactă, este de forma  $A = [a, b]$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Putem afirma că dacă  $f$  este continuă, imaginea lui  $f$ , adică mulțimea  $f([a, b])$ , este compactul  $[m, M] \subset \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.4.3.** Inversa  $f^{-1}$  a unei funcții continue biunivoce  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ , definită pe o mulțime compactă  $A$ , este funcție continuă.

*Demonstrație.* Fie  $B = f(A)$  și  $g = f^{-1} : B \rightarrow X$ . Din Teorema 4.4.1 și Teorema 3.10.4, rezultă că pentru orice mulțime  $C \subset X$ , închisă în  $X$ , mulțimea  $g^{-1}(C) = f(A \cap C)$  este compactă. Prin urmare,  $g^{-1}(C)$  este mulțime închisă în spațiul metric  $(B, \sigma_B)$ . După Teorema 4.2.5, punctul (a), rezultă că  $g = f^{-1}$  este continuă. **q.e.d.**

## 4.5 Convergența unui șir de funcții

Fie  $A$  o mulțime nevidă,  $(X, d)$  un spațiu metric,  $\mathcal{F}(A, X)$  mulțimea funcțiilor definite pe  $A$  cu valori în  $X$  și  $\mathcal{M}(A, X) \subset \mathcal{F}(A, X)$  submulțimea funcțiilor mărginite definite pe  $A$  cu valori în  $X$ . S-a arătat că aplicația

$$\rho : \mathcal{M}(X, A) \times \mathcal{M}(A, X) \longrightarrow \mathbb{R},$$

definită prin

$$\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in A\}, \quad \forall f, g \in \mathcal{M}(A, X), \quad (4.40)$$

este o metrică pe  $\mathcal{M}(A, X)$  și deci cuplul  $(\mathcal{M}(A, X), \rho)$  este un spațiu metric.

**Definiția 4.5.1.** Se numește **șir de funcții**, definite pe mulțimea  $A$  cu valori în spațiul metric  $(X, d)$ , aplicația  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{N}_k, \mathcal{F}(A, X))$ .

Un șir de funcții definite pe mulțimea  $A$  cu valori în  $X$  se notează cu  $(f_n)_{n \geq k}$ . Dacă avem  $k = 1$ , atunci șirul  $(f_n)_{n \geq 1}$  se notează simplu prin  $(f_n)$ .

**Observația 4.5.1.** Un șir de funcții  $(f_n)$  este o mulțime de șiruri de puncte din spațiul metric  $(X, d)$  de forma  $(f_n(x))$ , unde  $x$  este un element arbitrar din  $A$ . Deci  $(f_n) = \{(f_n(x))_{n \geq 1} : x \in A\}$ .

**Definiția 4.5.2.** Spunem că șirul de funcții  $(f_n)$ , unde  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ , este **convergent** în  $x_0 \in A$ , sau că  $x_0$  este **punct de convergență** al șirului, dacă șirul de puncte  $(f_n(x_0))$  este convergent în spațiul metric  $(X, d)$ .

Putem vorbi de *mulțimea de convergență* a șirului  $(f_n)$ , care este o submulțime a lui  $A$ . Mai mult, fără să restrângem generalitatea, putem presupune că mulțimea de convergență este chiar  $A$ .

Fiecărui  $x \in A$  îi asociem punctul  $f(x)$  din  $(X, d)$ , definit de

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Evident, corespondența  $x \mapsto f(x)$  este o funcție  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ .

**Definiția 4.5.3.** Spunem că șirul  $(f_n)$ , unde  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ , este **convergent** la funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ , sau că  $f$  este **limita șirului**  $(f_n)$ , și scriem

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, \quad \text{sau} \quad f_n \longrightarrow f, \quad (4.41)$$

dacă pentru fiecare  $x \in A$ , șirul de puncte  $(f_n(x))$ , din spațiul metric  $(X, d)$ , este convergent la punctul  $f(x) \in X$ .

Ținând cont de caracterizarea șirurilor de puncte convergente, deducem că (4.41) are loc dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  și oricare ar fi  $x \in A$ , există  $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon, x). \quad (4.42)$$

Convergența introdusă în Definiția 4.5.3 se numește *convergență punctuală*. Funcția  $f$  din (4.41) se numește *limită punctuală* a șirului de funcții  $(f_n)$ , iar în locul lui (4.41) se pot utiliza una din notațiile:

$$f_n \longrightarrow f \quad (\text{punctual pe } A); \quad f_n \xrightarrow[A]{p} f.$$

**Observația 4.5.2.** Un șir de funcții poate fi interpretat ca un **procedeu de descriere aproximativă** a unei funcții care este limita acelui șir de funcții în cazul când el este punctual convergent.

Dacă avem un șir de funcții  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ , punctual convergent pe mulțimea  $A$  la o funcție  $f \in \mathcal{F}(A, X)$  și fiecare din termenii șirului posedă o proprietate  $P$ , este natural să ne punem problema dacă aceeași proprietate o are și funcția limită  $f$ .

Proprietatea  $P$  ar putea fi oricare din proprietățile care pot furniza informații despre comportarea locală, sau globală a funcțiilor, precum: mărginirea, existența limitei într-un punct, continuitatea, etc.

În cazul în care  $A$  este un interval  $I$  din  $\mathbb{R}$  și  $(X, d)$  este spațiul metric  $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ , proprietatea  $P$  poate fi: derivabilitatea funcției limită într-un punct  $x_0 \in I$ , sau pe întreg intervalul  $I$ ; integrabilitatea Riemann a funcției limită pe un compact  $[a, b] \subset I$ .

Un exemplu simplu dat mai jos arată că o proprietate  $P$  pe care o are termenii unui șir de funcții nu se transmite întotdeauna și funcției limită.

**Exemplul 4.5.1.** Fie  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}([0, 1])$ ,  $f_n(x) = x^n$ ,  $n \geq 1$ . Acest șir de funcții este punctual convergent pe  $[0, 1]$  la o funcție  $f$ , ce urmează a se determina, care nu este continuă deși termenii șirului sunt funcții continue pe  $[0, 1]$ .

Într-adevăr, continuitatea oricărei funcții  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  fiind evidentă și fiindcă  $A = [0, 1]$  rezultă că funcția limită punctuală a șirului dat este

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Observăm că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 0 \neq f(1) = 1$  și deci  $f$  nu este funcție continuă.

Așadar proprietatea de continuitate pe care o are fiecare termen  $f_n$  al șirului de funcții considerat nu se transmite și funcției limita punctuală a șirului. ■

Exemplul dat motivează introducerea altui tip de convergență care să conserve anumite proprietăți ale termenilor șirului de funcții prin trecere la limită.

**Definiția 4.5.4.** Șirul de funcții  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ , **converge uniform** la funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ , numită **limită uniformă a șirului de funcții**  $(f_n)_{n \geq 1}$ , și scriem  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ , dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

**Observația 4.5.3.** Convergența punctuală și convergența uniformă ale unui șir de funcții definite pe mulțimea  $A$  diferă prin transpoziția cuantificatorilor  $\forall x \in A$  și  $\exists N$ . În definiția convergenței punctuale numărul natural  $N$  depinde de  $\varepsilon$  și  $x$ , pe când, în definiția convergenței uniforme,  $N$  este ales numai pentru un  $\varepsilon$  dat, el nedepinzând de elementul  $x \in A$ , ceea ce înseamnă că la un același  $\varepsilon$ , numărul natural  $N$  este același pentru toate elementele  $x \in A$ , acesta modificându-se doar când se schimbă  $\varepsilon$ .

**Observația 4.5.4.** Convergența uniformă a unui șir de funcții implică convergența punctuală a acestuia. Afirmatia reciprocă nu este în general adevărată. Vezi în acest sens Exemplul 4.5.2.

**Observația 4.5.5.** În cazul când  $A \subset \mathbb{R}$  și  $(X, d) = (\mathbb{R}, \cdot - \cdot|)$ , funcția reală de variabilă reală  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  este limita șirului de funcții uniform convergent  $(f_n)$ , unde  $f_n \in \mathcal{F}(A)$ , dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad (4.43)$$

și poate fi interpretată geometric în sensul că pentru  $n > N(\varepsilon)$  graficele funcțiilor  $f_n$  sunt cuprinse între graficele funcțiilor  $f - \varepsilon$  și  $f + \varepsilon$ .

Totalitatea funcțiilor  $\{f_n : n > N(\varepsilon)\}$ , care satisface (4.43), se numește *tub de funcții*.

**Propoziția 4.5.1.** Fie  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$  un șir de funcții convergent punctual la  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ . Atunci,  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  mulțimea  $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$  este mărginită în  $\mathbb{R}$ .

*Demonstrație.* Întradevăr, dacă  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ , atunci mulțimea  $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$  are un singur element și anume pe  $N(\varepsilon)$ , deci este mărginită superior.

Reciproc, dacă mulțimea  $\{N(\varepsilon, x) : x \in A\}$  este mărginită, atunci există marginea superioară a acestei mulțimi în  $\mathbb{R}$  pe care s-o notăm cu  $\alpha(\varepsilon)$ . Fie  $N(\varepsilon) = [\alpha(\varepsilon)]$ , partea întreagă a lui  $\alpha(\varepsilon)$ . Atunci, pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  avem  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in A$ , deci  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ . **q.e.d.**

**Propoziția 4.5.2.** Fie  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ . Atunci,  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$  dacă și numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in A\} = 0. \quad (4.44)$$

*Demonstrație.* Dacă  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ , atunci din Definiția 4.5.4 rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât oricare ar fi  $n > N(\varepsilon)$  și pentru orice  $x \in A$ , să rezulte  $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/2$ , de unde avem

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in A\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

ceea ce arată că (4.44) are loc.

Reciproc, dacă (4.44) are loc, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in A\} < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon),$$

de unde deducem

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon).$$

Acest rezultat și Definiția 4.5.4 conduce la concluzia că  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ .

**q.e.d.**

**Observația 4.5.6.** Dacă termenii șirului de funcții  $(f_n)$  sunt din  $\mathcal{M}(A, X)$ , atunci din Exemplul 3.1.2 și Definiția 4.5.4 observăm că de fapt convergența uniformă a șirului de funcții dat la funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$  este convergența în metrica  $\rho$ , adică convergența șirului de puncte  $(f_n)$  în spațiul metric  $(\mathcal{M}(A, X), \rho)$  și rezultatul demonstrat mai sus îndreptățește denumirea de **metrica convergenței uniforme** pentru  $\rho$ .

**Observația 4.5.7.** Propoziția 4.5.2 este deosebit de importantă în practică deoarece, după determinarea funcției limita punctuală a unui șir de funcții, cu ajutorul ei se poate preciza dacă convergența punctuală este sau nu uniformă.

**Exemplul 4.5.2.** Șirul de funcții

$$(f_n)_{n \geq 1}, \quad f_n \in \mathcal{F}([0, 1]), \quad f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

converge uniform la funcția  $f \in \mathcal{F}([0, 1])$ ,  $f(x) = 1$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , în timp ce șirul  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$  nu este uniform convergent la funcția sa limită.

Într-adevăr, pentru a aplica Propoziția 4.5.2 trebuie să determinăm variația funcției

$$d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)|, \quad x \in [0, 1].$$

Avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2} - 1 \right| = \frac{nx}{x^2 + n^2} = \varphi(x).$$

Derivata funcției  $\varphi$  este

$$\varphi'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2},$$

de unde deducem că valorile extreme ale sale se realizează când  $x = \pm n$ .

Dacă  $n > 1$ , punctele  $x = \pm n$  nu aparțin segmentului  $[0, 1]$  și deci valoarea maximă este atinsă în extremitățile segmentului  $[0, 1]$ . Dar  $f(0) = 0$ , iar  $f(1) = \frac{n}{1 + n^2}$ , deci (4.44) este satisfăcută.

În baza Propoziției 4.5.2, rezultă că  $f_n \xrightarrow[u]{[0, 1]} f$ .

În cazul celui de-al doilea șir de funcții, limita punctuală este funcția reală de variabilă reală

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Avem

$$\sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \max\{f_n(-n), f_n(n)\} = \max\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Deci  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2} \neq 0$  și prin urmare convergența punctuală evidentă  $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{p} f$  nu este uniformă. ■

Situația în care se plasează cel de al doilea șir de funcții din exemplul justifică partea a doua a Observației 4.5.4.

**Exemplul 4.5.3.** Fie  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Observăm că  $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f$  unde  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Convergența punctuală este și uniformă.

**Soluție.** Determinăm, la fel ca în exemplul de mai sus, valorile extreme ale funcției  $\varphi(x) = f_n(x) - f(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ . Avem  $\varphi'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$ . De aici se vede că  $\varphi'(x) = 0 \iff 1-nx^2 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Întrucât  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$  valoarea maximă a funcției  $|\varphi|$  este  $\left| \varphi\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

Prin urmare,  $\rho(f_n, f) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$ , în baza Propoziției 4.5.2 și Observației 4.5.6, rezultă că  $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f$ . ■

**Teorema 4.5.1. (Criteriul general al lui Cauchy)** Șirul de funcții  $(f_n)$ , unde  $f_n \in \mathcal{M}(A, X)$ , iar  $(X, d)$  este un spațiu metric complet, converge uniform la funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$  dacă și numai dacă este satisfăcută următoarea condiție a lui Cauchy: pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon, \quad \forall m, n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in A. \quad (4.45)$$

*Demonstrație.* Presupunem că  $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f$ . Atunci, oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n > N(\varepsilon), \quad \forall x \in A. \quad (4.46)$$

De asemenea, putem scrie

$$d(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A, \quad \forall m > N(\varepsilon). \quad (4.47)$$

Din inegalitățile (4.46), (4.47) și axioma  $(M_3)$  din definiția metricei, rezultă că  $\forall x \in A$  și  $\forall m, n > N(\varepsilon)$ ,

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m(x), f(x)) + d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

adică condiția lui Cauchy (4.45) are loc.

Reciproc, să presupunem că  $(f_n)$  satisface condiția lui Cauchy. Atunci, pentru orice  $x \in A$  șirul de puncte  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  din spațiul metric  $(X, d)$  este șir fundamental.

Deoarece  $(X, d)$  este spațiu metric complet, șirul de puncte  $(f_n(x))_{n \geq 1}$  converge la un punct din  $X$  pe care convenim să-l notăm cu  $f(x)$ . Se vede imediat că funcția  $f \in \mathcal{F}(A, X)$  definită prin

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in A \quad (4.48)$$

este de fapt limita punctuală a șirului de funcții  $(f_n)_{n \geq 1}$ , adică  $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f$ .

Să arătăm că, mai mult, convergența este uniformă.

În acest scop, transcriem condiția (4.45), dar pentru  $\varepsilon/2$ , adică

$$d(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in A, \quad \forall m > N(\varepsilon), \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (4.49)$$

Trecând la limită în (4.49) pentru  $m \rightarrow \infty$  și ținând cont de Teorema 3.3.1, sau de Exemplul 4.2.4, și de (4.48), obținem  $d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$ ,  $\forall x \in A$ , ceea ce arată că  $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} f$ . **q.e.d.**



**Observația 4.5.8.** Condiția lui Cauchy (4.45) este echivalentă cu

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \text{astfel încât} \quad \rho(f_n, f_m) < \varepsilon, \quad \forall m > N(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (4.50)$$

Relațiile din (4.50) exprimă faptul că șirul de funcții  $(f_n)_{n \geq 1}$  este șir fundamental sau șir Cauchy în spațiul metric  $(\mathcal{F}(A, X), \rho)$ .

**Teorema 4.5.2.** (Criteriul majorării, sau criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă) Fie  $f_n \in \mathcal{F}(A, X)$ ,  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ ,  $A$  mulțime oarecare și  $(X, d)$  spațiu metric.

Dacă  $f_n \xrightarrow[A]{p} f$  și există șirul de numere pozitive  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ , convergent la zero, cu proprietatea

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \alpha_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad \forall x \in A, \quad (4.51)$$

atunci

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f. \quad (4.52)$$

*Demonstrație.* Întradevăr, din  $\alpha_n \rightarrow 0$  rezultă că  $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât (avem că  $\alpha_n \geq 0$ )

$$\alpha_n < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon). \quad (4.53)$$

Atunci, din (4.51), (4.53) și Definiția 4.5.4, deducem (4.52).

**q.e.d.**

**Teorema 4.5.3.** (Transfer de existență a limitei în punct) Fie  $A \subset (X, d)$ ,  $(Y, \sigma)$  spațiu metric complet și  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{M}(A, Y)$ , un șir de funcții uniform convergent la funcția  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ . Dacă  $x_0 \in A'$  și există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$  pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$ , atunci există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  și, în plus, are loc egalitatea

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

*Demonstrație.* Deoarece  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$  rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  să avem

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in A. \quad (4.54)$$

Pe de altă parte, întrucât pentru orice număr natural  $n \in \mathbb{N}$  există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ , aplicând lui  $f_m$  teorema Bolzano–Cauchy de existență a limitei unei funcții într-un punct (Teorema 4.1.5), unde  $m > N(\varepsilon)$ ,  $m$  fixat, rezultă că există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi punctele  $x', x'' \in A$ , cu

$$0 < d(x', x_0) < \delta(\varepsilon) \quad \text{și} \quad 0 < d(x'', x_0) < \delta(\varepsilon) \quad (4.55)$$

să rezulte

$$\sigma(f_m(x'), f_m(x'')) < \varepsilon/3. \quad (4.56)$$

Din (4.54) și (4.56) rezultă că,  $\forall x', x'' \in A$ , care satisfac (4.55), avem

$$\begin{aligned} \sigma(f(x'), f(x'')) &\leq \sigma(f(x'), f_m(x')) + \sigma(f_m(x'), f_m(x'')) + \\ &+ \sigma(f_m(x''), f(x'')) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Așadar, din (4.55), (4.57) și Teorema 4.1.5 rezultă că există  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Dacă în (4.54) facem  $x \rightarrow x_0$  și ținem cont că  $\sigma(\cdot, \cdot)$  este funcție continuă în cele două argumente (a se vedea în acest sens și Exemplul 4.2.4), obținem  $\sigma\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right) < \varepsilon$ ,  $\forall n > N(\varepsilon)$  adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

și teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Teorema 4.5.4. (Transfer de mărginire)** Fie  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $f_n \in \mathcal{M}(A, X)$ . Dacă avem  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$ , atunci  $f \in \mathcal{M}(A, X)$ .

*Demonstrație.* Deoarece  $f_n$  este funcție mărginită rezultă că pentru  $y_0 \in X$  există  $M > 0$  astfel încât

$$d(f_n(x), y_0) \leq M, \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.58)$$

Să calculăm  $d(f(x), y_0)$ . Avem

$$d(f(x), y_0) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), y_0), \quad \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.59)$$

Din (4.58) și (4.59), deducem

$$d(f(x), y_0) \leq d(f_n(x), f(x)) + M, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.60)$$

Trecând la limită în (4.60) pentru  $n \rightarrow \infty$  și ținând cont că

$$f_n \xrightarrow[A]{u} f \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0, \quad \forall x \in A,$$

deducem  $d(f(x), y_0) \leq M$ ,  $\forall x \in A$ , ceea ce demonstrează teorema.

**q.e.d.**

**Teorema 4.5.5. (Transferul de continuitate)** Fie  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{M}(A, Y)$ ,  $A \subset X$  și  $(X, d)$ ,  $(Y, \sigma)$  spații metrice. Dacă  $f_n \xrightarrow[A]{u} f$  și  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , sunt funcții continue în  $x_0$ , atunci funcția  $f$  este continuă în  $x_0$ . În consecință, limita uniformă a unui șir de funcții continue este o funcție continuă.

*Demonstrație.* Fie  $\varepsilon > 0$  și  $N = N(\varepsilon)$  numărul natural cu proprietatea

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in A \quad \text{și} \quad \forall n \in N(\varepsilon). \quad (4.61)$$

În particular, (4.61) are loc pentru  $n_0 > N(\varepsilon)$ ,  $n_0$  fixat, adică

$$\sigma(f_{n_0}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in A. \quad (4.62)$$

Deoarece  $f_{n_0}$  este continuă în  $x_0$ , rezultă că pentru  $\varepsilon$  ales mai sus, există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$d(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \implies \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.63)$$

Din (4.61) – (4.63) deducem că dacă  $x \in A$  este astfel încât  $d(x, x_0) < \delta(\varepsilon)$ , atunci

$$\begin{aligned} \sigma(f(x), f(x_0)) &\leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \\ &\quad + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează continuitatea lui  $f$  în baza Teoremei 4.2.3, punctul ( $\beta$ ).

Dacă  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sunt continue pe  $A$ , atunci funcțiile  $f_n$  sunt continue în orice punct  $x_0 \in A$ . În consecință,  $f$  este continuă în orice punct  $x_0 \in A$ . **q.e.d.**

**Teorema 4.5.6.** Dacă șirul de funcții  $(f_n)$ ,  $f_n \in \mathcal{M}(A, Y)$ ,  $A \subset X$ , unde  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  sunt spații metrice, converge uniform la funcția continuă  $f : A \rightarrow Y$ , mulțimea  $A$  este compactă în  $(X, d)$ , iar  $g$  este funcție continuă pe  $Y$ , atunci

$$g \circ f_n \xrightarrow{u} g \circ f.$$

*Demonstrație.* Conform Teoremei 4.4.1, mulțimea  $f(A)$  este compactă în  $(Y, \sigma)$ . Din această teoremă rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât, dacă  $y \in f(A)$ ,  $y_1 \in Y$  și

$$\sigma(y, y_1) < \delta, \quad (4.64)$$

atunci  $\sigma(g(y_1), g(y)) < \varepsilon$ .

Pentru  $\delta$  de mai sus, există  $N(\delta(\varepsilon)) = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  încât

$$\sigma(f_n(x), f(x)) < \delta, \quad \forall n > N(\varepsilon) \text{ și } \forall x \in A.$$

Socotind acum că  $y_1 = f_n(x)$  și  $y = f(x)$ , lucru posibil, din (4.64) deducem

$$\sigma(g(f_n(x)), g(f(x))) < \varepsilon, \quad \forall n > N(\varepsilon) \text{ și } \forall x \in A,$$

care arată că șirul  $g \circ f_n$  converge uniform pe  $Y$  la funcția  $g \circ f$ .

**q.e.d.**

**Teorema 4.5.7. (Criteriul lui Dini<sup>4</sup>)** Fie  $(f_n)$  un șir de funcții reale continue definite pe mulțimea compactă  $A$  din spațiul metric  $(X, d)$ , punctual convergent la funcția continuă  $f \in \mathcal{F}(A, X)$ . Dacă

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots, \quad \forall x \in A,$$

atunci  $f_n \xrightarrow{u} f$ .

*Demonstrație.* Presupunem prin absurd că  $(f_n)$  nu este uniform convergent la funcția  $f$ . Negând Definiția 4.5.4, deducem că există  $\varepsilon_0 > 0$  cu proprietatea că oricare ar fi  $N \in \mathbb{N}$  există  $n > N$  și  $x \in A$  astfel încât  $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_0$ .

<sup>4</sup>Dini, Ulisse (1845–1918), matematician italian.

Să notăm cu  $x_{n_N}$  punctele astfel obținute și să ținem cont de faptul că  $f(x) \geq f_n(x)$ ,  $\forall x \in A$ . În acest mod s-a obținut șirul de puncte  $(x_{n_N})_{N \geq 1}$  din  $A$  cu proprietatea  $f(x_{n_N}) - f_{n_N}(x_{n_N}) \geq \varepsilon_0$ .

Deoarece  $A$  este mulțime compactă în  $(X, d)$ , șirul  $(x_{n_N})_{N \geq 1}$  admite un subșir  $(x_{n_{m_N}})_{N \geq 1}$  convergent la un punct  $x_0 \in A$ .

Să alegem acum  $p \in \mathbb{N}$  arbitrar.

Funcția  $f - f_p$  este continuă în  $x_0$ , deci pentru  $\varepsilon_0$  de mai sus există  $N_0 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\forall N \in \mathbb{N}$ ,  $N > N_0$ , avem

$$\varepsilon_0 - (f(x_0) - f_p(x_0)) \leq [f(x_{n_{m_N}}) - f_p(x_{n_{m_N}})] - [f(x_0) - f_p(x_0)] < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Pe de altă parte, putem lua  $N \in \mathbb{N}$  astfel încât  $n_{m_N} > p$ , ceea ce în baza monotoniei șirului numeric  $(f_n(x))_{n \geq 1}$ ,  $x \in A$ , conduce la  $f_{n_{m_N}}(x) \geq f_p(x)$ ,  $x \in A$ .

În felul acesta, deducem

$$f(x_{n_{m_N}}) - f_p(x_{n_{m_N}}) \geq f(x_{n_{m_N}}) - f_{n_{m_N}}(x_{n_{m_N}}) \geq \varepsilon_0.$$

În acest ultim rezultat facem  $N \rightarrow \infty$ , ținem cont că  $x_{n_{m_N}} \rightarrow x_0$  și că  $f$  și  $f_p$  sunt funcții continue. Atunci, avem

$$f(x_0) - f_p(x_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}, \quad \forall p \in \mathbb{N},$$

care contrazice faptul că șirul numeric  $(f_n(x_0))_{n \geq 1}$  este convergent la  $f(x_0)$ .

Contradicția la care s-a ajuns demonstrează teorema.

**q.e.d.**

Să considerăm în încheiere că  $X = \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$  și fie  $(\mathbf{f}_n)_{n \geq 1}$  un șir de funcții vectoriale din  $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ . Șirul de funcții considerat este echivalent cu șirurile de funcții reale  $(f_{kn})_{n \geq 1}$ ,  $k \in \overline{1, m}$ ,  $f_{kn} \in \mathcal{F}(A)$ , unde  $f_{1n}$ ,  $f_{2n}$ , ...,  $f_{mn}$  sunt coordonatele în baza canonică din  $\mathbb{R}^m$  ale funcției vectoriale  $\mathbf{f}_n$ .

**Teorema 4.5.8.** Șirul  $(\mathbf{f}_n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{f}_n = (f_{1n}, f_{2n}, \dots, f_{mn}) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , converge uniform pe mulțimea  $A$  la funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  dacă și numai dacă

$$f_{kn} \xrightarrow[A]{u} f_k.$$

*Demonstrație.* Folosind inegalitățile evidente

$$|\alpha_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^m \alpha_j^2} \leq \sum_{k=1}^m |\alpha_k|, \quad \forall i \in \overline{1, m},$$

unde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  sunt numere reale arbitrare, și definiția uniforme convergenței a unui șir de funcții, concluzia teoremei rezultă imediat.

**q.e.d.**

## 4.6 Homeomorfisme

**Definiția 4.6.1.** O transformare (aplicație, funcție, operator)  $f$  a submulțimii  $A$  dintr-un spațiu metric  $(X, d)$  pe submulțimea  $B$  a spațiului metric  $(Y, \sigma)$  se numește **homeomorfism** dacă  $f$  este aplicație bijectivă și atât  $f$  cât și  $f^{-1}$  sunt funcții continue.

**Observația 4.6.1.** Deoarece  $(f^{-1})^{-1} = f$  rezultă că dacă  $f : A \rightarrow B$  este homeomorfism, atunci  $f^{-1}$  este, de asemenea, homeomorfism.

**Definiția 4.6.2.** Două mulțimi  $A, B$  se zic că sunt **homeomorfe** dacă există un homeomorfism de la  $A$  la  $B$ .

**Observația 4.6.2.** Orice funcție bijectivă continuă definită pe o mulțime compactă este un homeomorfism.

Întrădevăr, aceasta rezultă din Teorema 4.4.3 și din Definiția 4.6.1. ■

**Observația 4.6.3.** Dacă  $f$  este un homeomorfism de la  $A$  pe  $B$  și  $g$  este un homeomorfism de la  $B$  pe  $C$ , atunci  $g \circ f$  este un homeomorfism de la  $A$  pe  $C$ .

Afirmația este evidentă în baza Teoremei 4.2.7, Teoremei 4.4.3, Observației 1.4.5 și Definiției 4.6.1. ■

**Teorema 4.6.1.** Fiecare din condițiile de mai jos este necesară și suficientă pentru ca o transformare bijectivă a unui spațiu metric  $(X, d)$  pe un spațiu metric  $(Y, \sigma)$  să fie homeomorfism:

- (a)  $\forall$  șir de puncte  $(x_n)_{n \geq 1}$  din  $X$ ,  $x_n \xrightarrow{d} x \iff f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$ ;
- (b)  $\forall A \subset X$ ,  $A = \overset{\circ}{A} \iff f(A) = f(\overset{\circ}{A})$ ;
- (c)  $\forall A \subset X$ ,  $A = \overline{A} \iff f(A) = \overline{f(A)}$ ;
- (d)  $\forall A \subset X$ ,  $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ;
- (e)  $\forall A \subset X$ ,  $f(\overset{\circ}{A}) = f(\overset{\circ}{A})$ .

*Demonstrație.* Dacă  $f$  este un homeomorfism de la  $X$  pe  $Y$ , atunci implicația

$$x_n \xrightarrow{d} x \implies f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x)$$

rezultă din continuitatea lui  $f$  conform Teoremei 4.2.3, punctul (γ).

Implicația inversă:  $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x) \implies x_n \xrightarrow{d} x$  rezultă în mod similar din continuitatea lui  $f^{-1}$ .

Prin urmare, (a) are loc.

(a) implică (d). Întrădevăr, din (a) rezultă că  $x \in \overline{A}$  (adică  $x$  este limita unui șir de puncte din  $A$ ) dacă și numai dacă  $f(x) \in \overline{f(A)}$ .

(d) implică (c) deoarece, în baza lui (d),  $A = \overline{A}$  dacă și numai dacă  $f(A) = \overline{f(A)}$ .

Dacă (c) are loc, atunci  $f$  este homeomorfism. Într-adevăr, dacă  $A$  este o submulțime închisă a lui  $X$ , atunci  $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$  este o submulțime închisă a lui  $Y$ , care demonstrează că transformarea  $f^{-1}$  este continuă. În mod similar, dacă  $B \subset Y$  este închisă, deci  $B = \overline{B}$ , atunci mulțimea  $A = f^{-1}(B)$  este închisă, deoarece  $f(A) = B$ . Acest rezultat, împreună cu Teorema 4.2.5, punctul (a), demonstrează că  $f$  este continuă.

Pentru ca demonstrația să fie completă, să mai observăm că condiția (b) este echivalentă cu condiția (c) în baza Teoremei 3.9.6, iar condiția (d) este echivalentă cu condiția (e) în baza Teoremei 3.9.5. **q.e.d.**

**Definiția 4.6.3.** Submulțimile  $A, B$  ale respectiv spațiilor metrice  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  se numesc **izometrice** dacă există o transformare  $f : A \rightarrow B$  astfel încât

$$\sigma(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in A. \quad (4.65)$$

Orice aplicație  $f : A \rightarrow B$  cu proprietatea (4.65) se numește **izometrie**.

**Observația 4.6.4.** Orice izometrie este un homeomorfism. Mulțimile izometrice sunt homomorfe.

Întradevăr, aceasta rezultă din condiția (a) a Teoremei 4.6.1 și (4.65).

De exemplu,  $\mathbb{E}^p$  ca spațiu de puncte este izometric cu spațiul liniar real  $\mathbb{R}^p$ , izometria fiind aplicația care pune în corespondență un punct din  $\mathbb{E}^p$ , deci o  $p$ -uplă ordonată de numere reale,  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ , cu vectorul său de poziție  $\mathbf{x}$  din  $\mathbb{R}^p$ , care, în baza canonică din  $\mathbb{R}^p$ , are coordonatele  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , adică  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e} X$ . ■

**Definiția 4.6.4.** Proprietățile mulțimilor și spațiilor care sunt **invariante la homeomorfisme**, în sensul că dacă una din cele două mulțimi homeomorfe are o proprietate, atunci aceeași proprietate o are și cealaltă mulțime, se numesc **proprietăți topologice**. Proprietățile invariante la izometrie sunt numite **proprietăți metrice**.

**Observația 4.6.5.** Orice proprietate topologică este și proprietate metrică. Reciproc nu este, în general, adevărat.

## 4.7 Conexiune prin arce. Funcții continue pe mulțimi conexe și pe mulțimi convexe

**Definiția 4.7.1.** Se numește **drum**, sau **arc** care unește punctul  $a$  cu punctul  $b$ , ambele din spațiul metric  $(X, d)$ , orice funcție continuă definită pe un interval compact  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  cu valori în  $X$  astfel încât  $f(\alpha) = a$  și  $f(\beta) = b$ , sau invers, adică  $f(\alpha) = b$  și  $f(\beta) = a$ . Mulțimea  $\text{Im } f = f([\alpha, \beta]) \subset X$  se numește **imagea drumului**, iar  $a$  și  $b$  sunt **extremitățile sale**.

**Definiția 4.7.2.** Spațiul metric  $(X, d)$  se numește **conex prin arce** dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-un arc a cărui imagine este inclusă în  $X$ . O submulțime  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  se numește **conexă prin arce** dacă subspațiul metric  $(A, d_{|A \times A})$  este conex prin arce.

**Exemplul 4.7.1.** Mulțimea  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$  este conexă prin arce deoarece orice două puncte din  $A$  pot fi unite printr-un drum inclus în  $A$ .

**Teorema 4.7.1.** *Imaginea printr-o aplicație continuă a unei mulțimi conexe dintr-un spațiu metric este o mulțime conexă.*

*Demonstrație.* Fie funcția continuă  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ ,  $A \subset X$ ,  $A$  mulțime conexă, unde  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  sunt spații metrice. Să arătăm că  $f(A)$  este mulțime conexă în  $(Y, \sigma)$ . Presupunem contrariul. Atunci, există două mulțimi deschise nevide  $D_1, D_2 \in \tau_\sigma$  (deci mulțimi deschise în  $(Y, \sigma)$ ) astfel încât

$$D_1 \cap D_2 \cap f(A) = \emptyset, \quad D_1 \cap f(A) \neq \emptyset, \quad D_2 \cap f(A) \neq \emptyset \text{ și } f(A) \subset D_1 \cup D_2.$$

Întrucât  $f$  este continuă, în baza Teoremei 4.2.5, mulțimile  $\tilde{D}_1 = f^{-1}(D_1)$  și  $\tilde{D}_2 = f^{-1}(D_2)$  sunt deschise în  $A$ . În plus,  $\tilde{D}_1 \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_2 \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \cap A = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2) \cap A = f^{-1}(D_1 \cap D_2) \cap A = \emptyset$ ,  $\tilde{D}_1 \cap A \neq \emptyset$ ,  $\tilde{D}_2 \cap A \neq \emptyset$ , iar  $A \subset \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2$ . Din aceste rezultate și Definiția 3.11.4 și Definiția 3.11.3 deducem că  $A$  este neconexă, ceea ce este absurd. Prin urmare  $f(A)$  este conexă. **q.e.d.**

**Corolarul 4.7.1.** *Fie  $f : [a, b] \rightarrow X$ , unde  $[a, b]$  este un interval din  $\mathbb{R}$  și  $(X, d)$  un spațiu metric. Dacă  $f$  este continuă, atunci  $\text{Im } f = f([a, b])$  este mulțime conexă în  $(X, d)$ .*

*Demonstrație.* Într-adevăr, din Exemplul 3.11.2 deducem că  $[a, b]$  este mulțime conexă, iar din Teorema 4.7.1 rezultă concluzia corolarului. **q.e.d.**

**Corolarul 4.7.2.** (Teorema valorii intermediare) *Fie  $f \in \mathcal{F}(A)$ , unde  $A$  este submulțime conexă a spațiului metric  $(X, d)$ . Dacă  $f$  este continuă,  $a \in A$ ,  $b \in A$  și dacă  $f(a) < f(b)$ , atunci pentru orice  $\lambda \in (f(a), f(b))$  există  $c \in A$  astfel încât  $f(c) = \lambda$ .*

*Demonstrație.* Din Teorema 4.7.1 rezultă că  $f(A) \subset \mathbb{R}$  este mulțime conexă. Conform Teoremei 3.11.2, rezultă că  $f(A)$  este interval din  $\mathbb{R}$ . Aceasta înseamnă că dacă  $f(a) \in f(A)$  și  $f(b) \in f(A)$ , intervalul  $(f(a), f(b)) \subset f(A)$ , de unde rezultă afirmația corolarului. **q.e.d.**

Din Corolarul 4.7.2, obținem:

**Corolarul 4.7.3.** *Dacă  $I$  este un interval din  $\mathbb{R}$  și  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă pe  $I$ , atunci mulțimea  $f(I)$  este un interval.*

**Teorema 4.7.2.** *Orice spațiu metric conex prin arce este con***Exemplul**

*Demonstrație.* Fie  $(X, d)$  un spațiu metric conex prin arce și fie  $a \in X$ , fixat. Pentru orice  $x \in X$  există un drum conținut în  $X$  care unește  $a$  cu  $x$ , adică o funcție continuă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow X$  astfel încât  $f(\alpha) = a$ ,  $f(\beta) = x$ ,  $f(t) \in X$ ,  $\forall t \in [\alpha, \beta]$ . Fie  $A_x = \text{Im } f = f([\alpha, \beta])$ . Din Corolarul 4.7.1 deducem că  $A_x$  este o mulțime conexă în  $(X, d)$ .

Vedem imediat că  $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ . Atunci, în baza Teoremei 3.10.3, rezultă că  $X$  este mulțime conexă. **q.e.d.**

Reciproca acestei teoreme nu este adevărată după cum rezultă din

**Exemplul 4.7.2.** Fie submulțimea  $A = \left\{ \left( x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \subset \mathbb{R}^2$  care este evident graficul funcției  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  pentru  $x \in (0, 1]$ . Aderența mulțimii  $A$ , adică mulțimea  $\overline{A} = A \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1\}$ , este conexă dar nu este conexă prin arce.

Într-adevăr, întrucât  $A$  este conexă prin arce deoarece funcția  $f$  este continuă, rezultă că  $A$  este conexă, iar conform Teoremei 3.10.4 3.10.4,  $\overline{A}$  este conexă. Pe de altă parte, se observă că pentru orice punct aparținând mulțimii  $A \subset \overline{A}$  nu există nici un arc care să-l unească cu originea și să fie conținut în  $\overline{A}$ , adică  $\overline{A}$  nu este conexă prin arce. ■

**Definiția 4.7.3.** Fie  $f \in \mathcal{F}(X, Y)$  unde  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  sunt spații metrice. Funcția  $f$  are **proprietatea lui Darboux**<sup>5</sup> dacă transformă orice submulțime conexă a lui  $X$  într-o submulțime conexă a lui  $Y$ .

**Observația 4.7.1.** O funcție continuă  $f \in \mathcal{F}(A, Y)$ , unde  $A \subset X$ , iar  $(X, d)$  și  $(Y, \sigma)$  sunt spații metrice, are proprietatea lui Darboux.

În adevăr, afirmația rezultă din Teorema 4.7.1 și Definiția 4.7.3. ■

**Observația 4.7.2.** Ca un caz particular al Corolarului 4.7.2 și Corolarului 4.7.3, dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, deci are proprietatea lui Darboux, atunci pentru orice pereche de puncte  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $a < b$  și pentru orice  $\lambda \in (f(a), f(b))$  (sau  $\lambda \in (f(b), f(a))$ ) există un element  $c \in (a, b)$  astfel încât  $f(c) = \lambda$ .

**Observația 4.7.3.** Reciproca Teoremei 4.7.1 nu este adevărată adică există funcții care au proprietatea lui Darboux și nu sunt funcții continue. În acest sens dăm următorul exemplu.

**Exemplul 4.7.3.** Funcția

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

nu este continuă dar are proprietatea lui Darboux.

**Soluție.** Funcția  $f$  nu este continuă în  $x = 0$  deoarece nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Arătăm că  $f$  are proprietatea lui Darboux. Fie  $[a, b] \subset [0, 1]$ . Dacă  $a > 0$ , atunci pe  $[a, b]$   $f$  fiind continuă, are proprietatea lui Darboux. Dacă

<sup>5</sup>Darboux, Jean Gaston (1842–1917), matematician francez.



$a = 0$  și  $b \in (0, 1]$  se observă că pentru orice  $x \neq 0$ ,  $f(x) \leq 1 = f(0)$ , deci  $f(b) < f(a) = f(0) = 1$ . Să arătăm că  $\forall \lambda \in [f(b), f(0)] \exists c \in [0, b]$  astfel încât  $f(c) = \lambda$ . Se vede mai întâi că  $f(x) = 1 \iff \sin \frac{\pi}{x} = 1$ , adică  $x = \frac{2}{4k+1}$  și  $f(x) = -1 \iff x = \frac{2}{4k+3}$ . Prin urmare oricât ar fi  $b$  de mic se poate indica un interval de forma  $\left[\frac{2}{4k+3}, \frac{2}{4k+1}\right] \subset [0, b]$ . Atunci,  $\forall \lambda \in [-1, 1]$  și, cu atât mai mult,  $\forall \lambda \in [f(b), f(0)]$  există  $c \in \left[\frac{2}{4k+3}, \frac{2}{4k+1}\right] \subset [0, b]$  astfel încât  $f(c) = \lambda$ . În concluzie,  $f$  are proprietatea lui Darboux. ■

**Definiția 4.7.4.** Submulțimea  $A$  a spațiului metric  $(X, d)$  se numește **domeniu** dacă  $A$  este mulțime deschisă și conexă. Un domeniu  $D$  împreună cu frontiera lui  $\partial D$ , adică  $\overline{D} = D \cup \partial D$ , se numește **domeniu închis**, sau **continuu**.

**Teorema 4.7.3.** Fie  $D$  o mulțime deschisă și nevidă din  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Mulțimea  $D$  este conexă (deci domeniu) dacă și numai dacă  $D$  este conexă prin arce.

*Demonstrație.* Fie  $D$  un domeniu din  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a} \in D$  un punct arbitrar fixat și  $A$  mulțimea tuturor punctelor  $\mathbf{x} \in D$  ce pot fi unite cu  $\mathbf{a}$  printr-un arc conținut în  $D$ . Observăm că  $A \neq \emptyset$  deoarece  $D = \overset{\circ}{D}$ , deci există  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $\exists B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset D$ , iar orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$  se poate uni cu  $\mathbf{a}$  printr-un segment închis fiindcă  $B(\mathbf{a}, \varepsilon)$  este mulțime convexă.

Să arătăm că  $A = \overset{\circ}{A}$ . Pentru aceasta fie  $x \in A$ . Cum  $D$  este deschisă există o bilă deschisă  $B(\mathbf{x}, \varepsilon_1) \subset D$ . Dacă  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon_1)$ , segmentul  $[\mathbf{y}, \mathbf{x}] \subset B(\mathbf{x}, \varepsilon_1)$ , deoarece  $\overline{B(\mathbf{x}, \varepsilon_1)}$  este mulțime convexă (Exemplul 3.11.1). Prin urmare există funcția continuă  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow D$  astfel încât  $f(\alpha) = \mathbf{y}$  și  $f(\beta) = \mathbf{x}$ . De exemplu, putem lua  $[\alpha, \beta] = [0, 1]$  și  $f(t) = \mathbf{y} + t(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Pe de altă parte,  $\mathbf{x} \in A$  se poate uni cu  $\mathbf{a}$  printr-un segment  $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] \subset A$  adică  $\exists g: [\beta, \gamma] \rightarrow A$  astfel încât  $g(\beta) = \mathbf{x}$  și  $g(\gamma) = \mathbf{a}$ ; prin urmare  $\exists h: [\alpha, \gamma] \rightarrow A$ , continuă, astfel încât  $h(\alpha) = \mathbf{y}$  și  $h(\gamma) = \mathbf{a}$ , adică punctul  $\mathbf{y}$  poate fi unit cu  $\mathbf{a}$  printr-un arc conținut în  $D$ , deci  $\mathbf{y} \in A$ . Aceasta dovedește că  $B(\mathbf{x}, \varepsilon_1) \subset A$ , din care tragem concluzia că  $A$  este mulțime deschisă.

Să arătăm acum că  $A$  este în același timp și mulțime închisă în  $D$ . Pentru aceasta vom arăta că  $C_D A$  este mulțime deschisă în  $D$ . Fie  $B = C_D A$ . Dacă  $\mathbf{x} \in B$ , atunci  $\mathbf{x} \in D$  și  $\mathbf{x} \notin A$ . Cum  $\mathbf{x} \in D$ ,  $\exists B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset D$ . Urmărim să demonstrăm că  $B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset B$ . Să presupunem că n-ar fi astfel, deci ar exista  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  cu proprietatea  $\mathbf{y} \notin B$ . Rezultă că  $\mathbf{y}$  poate fi unit cu  $\mathbf{x}$  printr-un segment și  $\mathbf{y} \in A$ . Deci  $\mathbf{y}$  poate fi unit cu  $\mathbf{a}$  printr-un arc. Cum  $\mathbf{x}$  poate fi unit cu  $\mathbf{y}$  printr-un segment și  $\mathbf{y}$  se unește cu  $\mathbf{a}$  printr-un arc rezultă că  $\mathbf{x}$  poate fi unit cu  $\mathbf{a}$  printr-un arc, deci  $\mathbf{x} \in A$ , ceea ce este absurd.

Așadar mulțimea nevidă  $A \neq \emptyset$  este simultan închisă și deschisă în spațiul metric  $(D, d_{D \times D})$  și cum singurile submulțimi ale lui  $D$  simultan închise și deschise în  $(D, d_{D \times D})$  sunt mulțimea vidă și mulțimea însăși  $D$  rezultă că  $A = D$ , ceea ce spune că punctul fixat  $\mathbf{a} \in D$  se poate uni cu orice punct din  $D$ .

Deoarece  $\mathbf{a}$  este arbitrar din  $D$  rezultă că orice două puncte din  $D$  pot fi unite printr-un arc conținut în  $D$ , deci  $D$  este conexă prin arce.

Reciproc, dacă  $D$  este conexă prin arce, atunci conform Teoremei 4.7.2 rezultă că  $D$  este mulțime conexă. **q.e.d.**

**Teorema 4.7.4.** Fie  $E$  o mulțime convexă din spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  și  $f \in \mathcal{F}(E)$  o funcție reală continuă. Atunci,  $\forall \mathbf{a} \in E, \forall \mathbf{b} \in E$  și  $\lambda \in (f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) \exists \mathbf{c}_\lambda \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$  astfel încât  $f(\mathbf{c}_\lambda) = \lambda$ .

*Demonstrație.* Fie funcția  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = f((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b})$ ,  $t \in [0, 1]$ . Deoarece funcția  $f$  este continuă, iar  $F$  este rezultatul compunerii funcției  $f$  cu funcția continuă  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $\varphi(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ,  $t \in [0, 1]$ , deducem că funcția  $F$  este continuă pe  $[0, 1]$  și satisface condițiile:  $F(0) = f(\mathbf{a})$ ;  $F(1) = f(\mathbf{b})$ . Din Corolarul 4.7.2 rezultă că există  $t_\lambda \in (0, 1)$  astfel încât să avem

$$\lambda = F(t_\lambda) = f((1-t_\lambda)\mathbf{a} + t_\lambda\mathbf{b}) = f(\mathbf{c}_\lambda), \quad \text{unde } \mathbf{c}_\lambda = (1-t_\lambda)\mathbf{a} + t_\lambda\mathbf{b} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

și teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Exercițiul 4.7.1.** Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2}$$

pentru care se cere întâi să se studieze:

- (a) uniforma continuitate a funcției  $f$ ;
- (b) continuitatea uniformă a restricției funcției  $f$  la mulțimea  $A_1$ , unde

$$A_1 = \overline{B((1, 0, 0), 3)} \setminus B(\mathbf{0}, 1/2),$$

apoi să se arate că următoarele mulțimi au proprietățile indicate alăturat:

- (c)  $B = f(A_1)$  este mulțime compactă;
- (d)  $B = f(A_2)$ , unde  $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 > x_1^2 + x_2^2\}$ , este mulțime conexă;
- (e)  $A_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 < f(\mathbf{x}) < 5\}$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^3$ ;
- (f)  $A_4 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x}) \leq 2\}$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^3$ .

**Soluție.** Remarcăm mai întâi că din Teorema 3.9.1 și Teorema 3.9.6 rezultă că domeniul de definiție al funcției  $f$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^3$  fiindcă complementara sa față de  $\mathbb{R}^3$  este mulțimea formată dintr-un singur punct, originea reperului, care este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Considerăm șirul de vectori  $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}$ .

$$\text{Avem } \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0\right) = (x_{1\,n+1} - x_{1n}, 0, 0).$$

Șirul absciselor acestui șir este

$$x_{1\,n+1} - x_{1n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}} = -\frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}.$$

Observăm că  $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{0}$ .

Prin urmare, oricare ar fi  $\delta > 0$ , există  $N(\delta) \in \mathbb{N}$ , astfel încât pentru orice număr natural  $n > N(\delta)$ , avem  $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < \delta$ .

Dacă alegem  $\mathbf{x}'_\delta = \mathbf{x}_{n+1}$  și  $\mathbf{x}''_\delta = \mathbf{x}_n$ , unde  $n > N(\delta)$ , atunci

$$d(\mathbf{x}'_\delta, \mathbf{x}''_\delta) = \|\mathbf{x}'_\delta - \mathbf{x}''_\delta\| = \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| < \delta.$$

Calculând apoi  $\sigma(f(\mathbf{x}'_\delta), f(\mathbf{x}''_\delta))$ , găsim

$$\sigma(f(\mathbf{x}'_\delta), f(\mathbf{x}''_\delta)) = |f(\mathbf{x}'_\delta) - f(\mathbf{x}''_\delta)| = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{\frac{1}{n}} = 1 \geq 1.$$

Prin urmare, există  $\varepsilon_0 = 1$  cu proprietatea că oricare ar fi  $\delta > 0$ , există vectorii  $\mathbf{x}'_\delta, \mathbf{x}''_\delta \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  pentru care  $d(\mathbf{x}'_\delta, \mathbf{x}''_\delta) < \delta$ , iar  $\sigma(f(\mathbf{x}'), f(\mathbf{x}'')) \geq \varepsilon_0$ .

După Definiția 4.3.2, rezultă că funcția  $f$  nu este uniform continuă.

(b) Funcția  $f$  este funcție continuă deoarece raportul dintre funcția constantă 1 și funcția polinom omogen de gradul doi  $x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2$ , ambele funcții continue, iar mulțimea  $A_1$  se poate scrie în forma  $A_1 = B\left((1, 0, 0), 3\right) \cap C_{\mathbb{R}^3} B\left(\mathbf{0}, 1/2\right)$ . Conform Teoremei 3.9.9, mulțimea  $\overline{B\left((1, 0, 0), 3\right)}$  este închisă în  $\mathbb{R}^3$ , mulțimea  $B\left(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\right)$  este deschisă în  $\mathbb{R}^3$ , iar complementara acesteia din urmă este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^3$ .

Rezultă că mulțimea  $A_1$  este intersecția a două mulțimi închise în  $\mathbb{R}^3$ .

Conform Teoremei 3.9.7,  $A_1$  este mulțime închisă.

Totodată,  $A_1$  este mulțime mărginită fiindcă este inclusă, de exemplu, în bila deschisă  $B(\mathbf{0}, 6)$ .

După Teorema 3.10.2 și Teorema 3.10.7, o mulțime mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^3$  este mulțime compactă în  $\mathbb{R}^3$ .

Conform Teoremei 4.3.1,  $f$  fiind funcție continuă și  $A_1$  mulțime compactă în  $\mathbb{R}^3$ , restricția funcției  $f$  la mulțimea  $A_1$  este o funcție uniform continuă.

(c) Deoarece  $A_1$  este mulțime compactă, iar  $f$  este funcție continuă, din Teorema 4.4.1 deducem că  $f(A_1)$  este mulțime compactă, deci  $f(A_1)$  este un interval de forma  $[a, b]$ , cu  $a < b$ .

În plus,  $a > 0$  pentru că  $f(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

(d) Determinăm mai întâi mulțimea  $A_2$ . În acest scop, folosim metoda secțiunilor pentru determinarea frontierei sale, care este mulțimea

$$\partial A_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\},$$

numită suprafață.

Intersecția suprafeței  $\partial A_2$  cu planul  $x_2 = 0$ , adică cu planul de coordonate  $Ox_1x_3$ , este mulțimea de puncte ale căror coordonate satisfac simultan ecuațiile  $x_2 = 0$  și  $x_3 = x_1^2$ , în care recunoaștem o parabolă.

Intersecția mulțimii  $\partial A_2$  cu planul  $Ox_2x_3$  este mulțimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_3 = x_2^2\}$$

care este, de asemenea, o parabolă.

Intersecția mulțimii  $\partial A_2$  cu planul  $x_3 = r^2$  este mulțimea

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = r^2, x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$$

care este un cerc de rază  $r > 0$ , situat în planul  $x_3 = r^2$ , cu centrul în punctul  $(0, 0, r^2)$  de pe axa  $Ox_3$ .

Avem, în acest fel, o descriere completă a suprafeței  $\partial A_2$ .

Putem afirma că  $\partial A_2$  este suprafața generată de familia de cercuri cu centrele pe  $Ox_3$ , aflate în plane paralele cu planul  $Ox_1x_2$ , care se sprijină fie pe parabola din planul  $Ox_1x_3$ , fie pe cea din planul  $Ox_2x_3$ .

Această suprafață se numește paraboloid de revoluție, sau paraboloid de rotație pentru că provine din rotația parabolei

$$\begin{cases} x_3 = x_1^2, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

din planul  $Ox_1x_3$ , în jurul axei  $Ox_3$ .

Mulțimea  $A_2$  este deschisă în  $\mathbb{R}^3$  deoarece este formată numai din puncte interioare.

Deoarece orice două puncte din  $A_2$  se pot uuni printr-un drum conținut în mulțime, rezultă că  $A_2$  este mulțime conexă în  $\mathbb{R}^3$ .

În plus,  $A_2$  este și mulțime convexă deoarece drumul care unește două puncte ale sale poate fi chiar segmentul care le unește.

Prin urmare,  $A_2$  este mulțime conexă, iar  $f$  este funcție continuă. Conform Teoremei 4.7.1 rezultă că  $f(A_2)$  este mulțime conexă.

(e) Se constată că  $A_3 = f^{-1}((1, 5))$ . Dar mulțimea  $(1, 5) \subset \mathbb{R}$  este mulțime deschisă. Conform Teoremei 4.2.5, rezultă că  $A_3 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^3$ .

(f) Mulțimea  $A_4$  este contraimaginea prin funcția continuă  $f$  a mulțimii  $(-\infty, 2] \subset \mathbb{R}$  care este mulțime închisă în  $\mathbb{R}$ , fiind complementara mulțimii deschise  $(2, \infty)$ .

Conform Teoremei 4.2.5, rezultă că  $A_4 = \overline{A}_4$ , adică  $A_4$  este mulțime închisă. ■

**Exemplul 4.7.4.** Se consideră funcția  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left( e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, \|\mathbf{x}\| \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\|^{x_1} \right), & \text{dacă } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ (0, 0, 1), & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și mulțimile

$$\begin{cases} A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leq 1\}; \\ B = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2 \leq 1 \right\}. \end{cases} \quad (4.66)$$

Să se arate că :

- (a)  $A$  și  $B$  sunt mulțimi închise în  $\mathbb{R}^n$  și respectiv  $\mathbb{R}^3$ ;
- (b) mulțimea  $\mathbf{f}(A) \subset \mathbb{R}^3$  este compactă și conexă;
- (c)  $\mathbf{f}^{-1}(B) \subset \mathbb{R}^n$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

**Soluție.** Funcția  $\mathbf{f}$  este o funcție vectorială de  $n$  variabile reale. Funcțiile coordonate  $f_1, f_2, f_3$  sunt funcții reale de  $n$  variabile reale și au expresiile

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{x_1}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned}$$

Aici  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  este norma Euclidiană pe  $\mathbb{R}^n$ .

Este simplu de arătat că funcțiile  $f_1, f_2, f_3$  sunt continue pe  $\mathbb{R}^n$ . În baza Teoremei 4.2.6,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  este funcție continuă.

(a) Mulțimea  $A$  din (4.66) este bila închisă, cu centrul în origine și rază 1, din spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , unde

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

După Teorema 3.9.9, orice bilă închisă este mulțime închisă. Prin urmare,  $A$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

Pentru a vedea natura topologică a mulțimii  $B$  din (4.66), considerăm funcția reală

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2,$$

care evident este continuă. Atunci,  $B = \varphi^{-1}([0, 1])$ , adică  $B$  este contraimaginea prin funcția continuă  $\varphi$  a compactului  $[0, 1]$  care, conform Teoremei 4.2.5, este mulțime închisă.

(b) Mulțimea  $A$ , fiind o bilă închisă, este mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$ . Mulțimea  $A$  este, de asemenea, mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^n$ , dar și conexă.

Întrucât  $\mathbf{f}$  este funcție continuă, după Teorema 4.4.1 și Teorema 4.7.1 rezultă că  $\mathbf{f}(A)$  este compactă și conexă.

(c) Mulțimea  $B$  fiind închisă și  $f$  fiind funcție continuă, din Teorema 4.2.5 rezultă că  $f^{-1}(B)$  este mulțime închisă. ■

**Exemplul 4.7.5.** Fie  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definită prin

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{cases} \left( (x^2 + y^2 + z^2) \ln(x^2 + y^2 + z^2), \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2} \right), & (x, y, z) \in A, \\ (0, \sqrt{2}), & \text{dacă } (x, y, z) = (0, 0, 0), \\ (0, 1), & \text{dacă } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}, \end{cases}$$

unde  $A = \overline{B(\mathbf{0}, 1)} \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ .

Să se studieze continuitatea uniformă a funcției  $\mathbf{f}$  pe mulțimea

$$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}.$$

**Soluție.** Să remarcăm mai întâi că funcția  $\mathbf{f}_{/A}$ , restricția funcției  $\mathbf{f}$  la mulțimea  $A$ , este funcție compusă. Într-adevăr,  $\mathbf{f}_{/A} = \mathbf{g} \circ \varphi$ , unde

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : (0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & \mathbf{g}(t) &= (t \ln t, \sqrt{2 - t^2}) \\ \varphi : A &\longrightarrow \mathbb{R}, & \varphi(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Atât  $\varphi$  cât și  $\mathbf{g}$  sunt funcții continue deci, după Teorema 4.2.7, rezultă că  $\mathbf{f}_{/A}$  este funcție continuă.

Restricția funcției  $\mathbf{f}$  la mulțimea  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$  este funcție constantă, deci continuă.

Rămâne să studiem continuitatea lui  $\mathbf{f}$  în origine și în punctele frontieră ale mulțimii  $\overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ .

Avem

$$\lim_{(x, y, z) \in A \rightarrow (0, 0, 0)} \mathbf{f}(x, y, z) = \lim_{t \rightarrow 0} (t \ln t, \sqrt{2 - t^2}) = (0, \sqrt{2}),$$

deci  $\mathbf{f}$  este continuă în origine.

Continuitatea lui  $\mathbf{f}$  pe  $\partial \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$  este echivalentă cu continuitatea în  $t = 1$  a funcției

$$\mathbf{h} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{h}(t) = \begin{cases} (t \ln t, \sqrt{2 - t^2}), & \text{dacă } 0 < t \leq 1 \\ (0, \sqrt{2}), & \text{dacă } t = 0 \\ (0, 1), & \text{dacă } t > 1. \end{cases}$$

Funcția  $\mathbf{h}$  este continuă pe  $[0, \infty)$ , deci este continuă și în  $t = 1$ .

Să remarcăm că  $\mathbf{f} = \mathbf{h} \circ \psi$ , unde

$$\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Deoarece  $\psi$  este funcție continuă pe  $\mathbb{R}^3$ , iar  $\mathbf{h}$  este funcție continuă pe  $[0, +\infty)$  rezultă că  $\mathbf{f}$  este funcție continuă pe  $\mathbb{R}^3$ .

Mulțimea  $A_1$  este mărginită pentru că punctele sale aparțin de exemplu, bilei  $B(\mathbf{0}, 4)$ , sau intervalului tri-dimensional închis  $I_3 = [-2, 2] \times [-3, 3] \times [-1, 1]$ .

Trebuie să mai arătăm că  $A_1$  este mulțime închisă. În acest scop să considerăm un șir arbitrar de puncte din  $A_1$  de forma  $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n, z_n)$ , convergent la  $(x_0, y_0, z_0)$ . Arătăm că limita aparține lui  $A_1$ . Avem

$$\frac{x_n^2}{4} + \frac{y_n^2}{9} + z_n^2 \leq 1.$$

Trecând la limită în inegalitatea de mai sus, obținem

$$\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{9} + z_0^2 \leq 1 \implies \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in A_1.$$

Conform Teoremei 3.9.2, rezultă că  $A_1 = \overline{A_1}$ .

Folosind Teorema 3.10.2 și Teorema 3.10.7, deducem că  $A_1$  este mulțime mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^3$ , deci compactă.

În sfârșit, din Teorema 4.3.1 rezultă că  $f$  este funcție uniform continuă. ■

## 4.8 Aplicații liniare între spații vectoriale reale. Izomorfism

Fie  $V$  și  $W$  două spații vectoriale reale.

**Definiția 4.8.1.** Funcția  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  se numește **aplicație liniară** dacă satisface condițiile:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V \quad (\text{aditivitate}), \quad (4.67)$$

$$\mathbf{T}(\alpha \mathbf{x}) = \alpha \mathbf{T}(\mathbf{x}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (\text{omogenitate}). \quad (4.68)$$

Pentru o aplicație liniară se folosesc și alte denumiri cum ar fi *operator liniar*, ori *transformare liniară*, sau *homomorfism*.

Dacă  $V = W$ , aplicația  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  care satisface (4.67) și (4.68) se numește *endomorfism*.

**Propoziția 4.8.1.** Aplicația  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este operator liniar dacă și numai dacă pentru orice scalari  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  și oricare ar fi vectorii  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$  are loc relația

$$\mathbf{T}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2). \quad (4.69)$$

*Demonstrație.* Dacă  $\mathbf{T}$  este operator liniar, aplicarea combinată a lui (4.67) și (4.68) conduce la (4.69).

Întrădevăr,

$$\mathbf{T}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \mathbf{T}(\alpha_1 \mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(\alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2).$$

Reciproc, dacă (4.69) este adevărată pentru orice scalari  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  și orice vectori  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ , atunci rămâne adevărată și pentru  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ .

Știind că  $1 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$  și  $1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2$ , din (4.69), obținem (4.67).

Luând acum în (4.69)  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ ,  $\alpha_2 = 0$  și având în vedere că  $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , obținem (4.68).

**q.e.d.**

**Propoziția 4.8.2.** Dacă  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este operator liniar dacă și numai dacă oricare ar fi scalarii  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \overline{1, p}$ , vectorii  $\mathbf{x}_i \in V$ ,  $i \in \overline{1, p}$  și  $p \in \mathbb{N}^*$  este atisfăcută egalitatea

$$\mathbf{T} \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{T}(\mathbf{x}_i). \quad (4.70)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, pentru  $p = 1$ , (4.70) este tocmai (4.68), pentru  $p = 2$ , (4.70) este identică cu (4.69), iar pentru  $p \geq 2$ , demonstrația că (4.70) are loc se face prin inducție matematică.

Reciproc, dacă (4.70) are loc în condițiile precizate, atunci are loc și pentru  $p = 2$ , de unde după Propoziția 4.8.1 rezultă că aplicația  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este operator liniar. **q.e.d.**

**Teorema 4.8.1.** Dacă  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este operator liniar, atunci:

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W, \\ \mathbf{T}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V; \end{cases} \quad (4.71)$$

mulțimea

$$\text{Im } \mathbf{T} = \mathbf{T}(V) = \{\mathbf{y} \in W : \exists \mathbf{x} \in V \text{ astfel încât } \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\},$$

numită **imaginea operatorului liniar  $\mathbf{T}$** , este subspațiu liniar al lui  $W$ ;

mulțimea

$$\text{Ker } \mathbf{T} = \{\mathbf{x} \in V : \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W\},$$

numită **nucleul operatorului liniar  $\mathbf{T}$** , este subspațiu liniar al lui  $V$ .

*Demonstrație.* Luând în (4.69)  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$  și  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$ , obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(1 \cdot \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}) &= \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}((-1)\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{T}(\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + (-\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}_W, \end{aligned}$$

de unde rezultă prima din egalitățile (4.71).

Asemănător se demonstrează și celelalte două identități din (4.71).

Fie  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbf{T}(V)$ . Atunci, există  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$  astfel încât  $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Dacă  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  sunt scalari reali arbitrari, atunci se vede imediat că

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2,$$

ceea ce arată că  $\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 \in \text{Im } \mathbf{T}$ .

Aplicând acum Teorema 3.2.2, deducem că  $\text{Im } \mathbf{T}$  este subspațiu liniar al lui  $W$ .

Dacă  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  sunt vectori arbitrari din  $\text{Ker } \mathbf{T}$  și  $\lambda_1, \lambda_2$  reprezintă scalari reali arbitrari, în baza lui (4.69), deducem

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) = \lambda_1 \mathbf{0} + \lambda_2 \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de unde, conform Teoremei 3.2.2, rezultă că  $\text{Ker } \mathbf{T}$  este subspațiu liniar al lui  $V$ . **q.e.d.**

**Teorema 4.8.2.** Operatorul  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este funcție injectivă dacă și numai dacă  $\text{Ker } \mathbf{T} = \{\mathbf{0}\}$ .

*Demonstrație.* Într-adevăr, dacă  $\mathbf{T}$  este aplicație injectivă,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  implică  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{T}(\mathbf{0})$  și, în baza lui (4.71), avem că  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ .

Prin urmare, singurul element al lui  $\text{Ker } \mathbf{T}$  este vectorul nul din  $V$ .

Reciproc, dacă  $\text{Ker } \mathbf{T} = \{\mathbf{0}\}$ , atunci  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$  implică  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  și  $\mathbf{T}$  este aplicație injectivă deoarece  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$  implică  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$  și  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \neq \mathbf{T}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ , adică  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{T}(\mathbf{x}_2)$ . **q.e.d.**

**Definiția 4.8.2.** Spațiile vectoriale  $V$  și  $W$  se numesc **izomorfe** dacă există o aplicație liniară bijectivă  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  care se numește **izomorfism**.

**Teorema 4.8.3.** Condiția necesară și suficientă ca spațiile liniare reale  $V$  și  $W$  să fie izomorfe este ca  $\dim V = \dim W$ .

*Demonstrație. Suficiența.* Fie  $V$  și  $W$  spații liniare reale cu bazele  $\mathcal{B}_1$  și  $\mathcal{B}_2$  cardinal echivalente (vezi Observația 3.2.8) și  $\mathbf{f} : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  o aplicație biunivocă a lui  $\mathcal{B}_1$  pe  $\mathcal{B}_2$ . Prelungim  $\mathbf{f}$  la tot spațiul  $V$  astfel încât prin definiție să avem  $\mathbf{f}(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ , iar dacă  $\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{B}_1} \lambda_i \mathbf{x}_i$  este reprezentarea unică a lui  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}_1$ , punem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{B}_1} \lambda_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i).$$

Se verifică ușor că  $\mathbf{f}$  astfel definit realizează un izomorfism între  $V$  și  $W$ .

**Necesitatea.** Fie spațiile liniare  $V$  și  $W$  algebric izomorfe prin operatorul liniar bijectiv  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  și  $\mathcal{B}$  o bază a lui  $V$ .

Arătăm că  $\mathbf{T}(\mathcal{B})$  este bază în  $W$ .

Într-adevăr, să considerăm elementele distincte  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$  ale lui  $\mathbf{T}(\mathcal{B})$  cu

$$\lambda_1 \mathbf{y}_1 + \lambda_2 \mathbf{y}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{y}_n = \mathbf{0}, \quad (4.72)$$

fără ca toți scalarii reali  $\lambda_i$  să fie nuli.

Deoarece  $\mathbf{T}$  este izomorfism, există vectorii  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in V$  astfel încât

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i \in \overline{1, n}$$

și relația (4.72) se scrie în forma

$$\lambda_1 \mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 \mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \dots + \lambda_n \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{0}_W,$$

sau, pentru că  $\mathbf{T}$  este operator liniar, în forma

$$\mathbf{T}(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Deoarece  $\mathbf{T}$  este aplicație bijectivă rezultă

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}_V,$$

care contrazice faptul că  $\mathcal{B}$  este bază în  $V$ .

Se vede acum că orice element  $\mathbf{y} \in W$  se exprimă ca o combinație liniară de elementele lui  $\mathbf{T}(\mathcal{B})$  deoarece pentru fiecare  $\mathbf{y} \in W$  există un singur  $\mathbf{x} \in V$  cu  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$  care se scrie unic în forma

$$\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{B}} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

de unde

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \sum_{\mathbf{y}_i \in \mathbf{T}(\mathcal{B})} \lambda_i \mathbf{y}_i$$

unde am notat  $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$ .

Aceste rezultate arată că  $\mathcal{B}' = \mathbf{T}(\mathcal{B})$  este bază în  $W$ .

În plus,  $\mathcal{B}$  și  $\mathbf{T}(\mathcal{B})$  au același număr de element ceea ce arată că  $\dim V = \dim W$ .

**q.e.d.**



**Corolarul 4.8.1.** Două spații liniare reale de dimensiune finită  $n$  sunt izomorfe și în particular izomorfe cu  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.8.4.** Dacă  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  este aplicație liniară injectivă, atunci funcția inversă  $\mathbf{T}^{-1} : \text{Im } \mathbf{T} \rightarrow V$  este operator liniar.

*Demonstrație.* Se arată că  $\mathbf{T}^{-1}$  satisface (4.67) și (4.68).

q.e.d.

Fie  $L_a(V, W)$  mulțimea tuturor aplicațiilor liniare definite pe spațiul vectorial real  $V$  cu valori în spațiul vectorial real  $W$ . Evident,  $L_a(V, W) \subset \mathcal{F}(V, W)$ .

**Teorema 4.8.5.** Mulțimea  $L_a(V, W)$  este subspațiu liniar al spațiului liniar  $\mathcal{F}(V, W)$ .

*Demonstrație.* În Exemplul 3.2.2 am demonstrat că  $\mathcal{F}(A, V)$ , unde  $A$  este mulțime oarecare, iar  $V$  un spațiu vectorial, este spațiu liniar. În particular, dacă  $A = V$  și  $V$  din  $\mathcal{F}(A, V)$  trece în  $W$  rezultă că  $\mathcal{F}(V, W)$  este, de asemenea, spațiu vectorial.

Pentru a demonstra propoziția, aplicăm Teorema 3.2.2, deci trebuie să arătăm că dacă  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$  și  $\alpha \in \mathbb{R}$  sunt elemente arbitrare, atunci  $\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$ .

Într-adevăr,  $(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = (\alpha\mathbf{T}_1)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) + \mathbf{T}_2(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \alpha\mathbf{T}_1(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) + \lambda_1\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2) = \alpha(\lambda_1\mathbf{T}_1(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_1(\mathbf{x}_2)) + \lambda_1\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1) + \lambda_2\mathbf{T}_2(\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_2)$ , de unde extragem egalitatea

$$(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_1) + \lambda_2(\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_2),$$

care arată că  $\alpha\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 \in L_a(V, W)$ .

q.e.d.

Dacă  $V \equiv W$ , spațiul  $L_a(V, V)$  se notează cu  $L_a(V)$ .

## 4.9 Aplicații liniare și continue între spații normate

În acest paragraf considerăm că spațiile vectoriale reale din paragraful precedentă sunt, în plus, normate, norma din fiecare spațiu fiind notată cu același simbol  $\|\cdot\|$ .

În acest caz, pentru o aplicație  $\mathbf{T} \in L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$  se poate introduce noțiunea de *mărginire*.

**Definiția 4.9.1.** Aplicația  $\mathbf{T} \in L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$  se numește **mărginită** dacă există  $M > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4.73)$$

În legătură cu aplicațiile liniare definite pe un spațiu normat  $(V, \|\cdot\|)$  cu valori într-un alt spațiu normat  $(W, \|\cdot\|)$  avem următorul rezultat fundamental.

**Teorema 4.9.1.** Fie  $\mathbf{T} : V \rightarrow W$  o aplicație liniară arbitrară definită pe spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  cu valori în spațiul normat  $(W, \|\cdot\|)$ . Atunci, afirmațiile:

- (i)  $\mathbf{T}$  este continuă pe  $V$ ;
  - (ii)  $\mathbf{T}$  este continuă în  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_V$ ;
  - (iii)  $\mathbf{T}$  este aplicație mărginită,
- sunt echivalente.

*Demonstrație.* Afirmația (i)  $\rightarrow$  (ii) este evidentă.

Să arătăm că (ii)  $\rightarrow$  (iii). Din continuitatea lui  $\mathbf{T}$  în  $\mathbf{0}_V$ , conform Teoremei 4.4.3, punctul  $(\beta)$ , rezultă că pentru  $\varepsilon = 1$  există  $\delta > 0$  astfel încât  $\forall \mathbf{x}' \in V$  cu  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{0}_V\| = \|\mathbf{x}'\| < \delta$  implică

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x}') - \mathbf{T}(\mathbf{0}_V)\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}')\| < 1. \quad (4.74)$$

Considerăm că  $M = 1/\delta'$ , unde  $0 < \delta' < \delta$ ;  $\mathbf{x} \in V$ , arbitrar, cu  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V$ ;  $\mathbf{x}' \in V$ , legat de  $\mathbf{x}$  prin

$$\mathbf{x}' = \frac{\delta'}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x}. \quad (4.75)$$

Din (4.75) deducem imediat

$$\|\mathbf{x}'\| = \frac{\delta'}{\|\mathbf{x}\|} \|\mathbf{x}\| = \delta' < \delta. \quad (4.76)$$

Întrucât  $\mathbf{x}' \in V$  definit de (4.75) satisface (4.76), rezultă că are loc (4.74).

Având în vedere (4.74) și (4.75), deducem că pentru orice  $\forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$  are loc (4.73) cu  $M = \frac{1}{\delta'}$ , unde  $0 < \delta' < \delta$ . Pentru  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  inegalitatea (4.73) este verificată ca egalitate și cu aceasta implicația (ii)  $\rightarrow$  (iii) este demonstrată.

Să arătăm că (iii)  $\rightarrow$  (i). Fie  $\mathbf{x} \in V$ , arbitrar dar fixat și  $(\mathbf{x}_n)$  un șir de vectori din  $(V, \|\cdot\|)$  convergent la  $\mathbf{x} \in V$ . Atunci, în baza lui (4.71), avem

$$0 \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\| \leq M \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|. \quad (4.77)$$

Trecând la limită în (4.77) pentru  $n \rightarrow \infty$ , deducem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

care arată că  $\mathbf{T}$  este continuă pe  $V$ .

**q.e.d.**

**Corolarul 4.9.1.** Aplicația  $\mathbf{T} \in L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$  este un homeomorfism dacă și numai dacă  $\mathbf{T}$  este aplicație surjectivă și există numerele pozitive  $m$  și  $M$  astfel încât

$$m\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4.78)$$

*Demonstrație.* Să presupunem mai întâi că  $\mathbf{T} \in L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$  este un homeomorfism. Atunci, din Definiția 4.6.1 și Teorema 4.8.4, rezultă că  $\mathbf{T}$  și  $\mathbf{T}^{-1}$  sunt aplicații liniare și continue, iar din Teorema 4.9.1 avem că  $\mathbf{T}$  și  $\mathbf{T}^{-1}$  sunt aplicații liniare mărginite, prin urmare, după Definiția 4.9.1,  $\exists m > 0$ ,  $\exists M > 0$  astfel

încât să aibă loc (4.73) și

$$\|\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y})\| \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{y} \in \text{Im } \mathbf{T} = \mathbf{T}(V) = W. \quad (4.79)$$

Dacă  $\forall \mathbf{x} \in V$  punem  $\mathbf{y} \in \mathbf{T}(\mathbf{x})$ , din (4.73) și (4.79) obținem (4.78).

Reciproc, dacă are loc dubla inegalitate (4.78), în baza Definiției 4.9.1 și Teoremei 4.9.1, rezultă că  $\mathbf{T}$  este aplicație continuă. Din prima inegalitate (4.78) rezultă că  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$  implică  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$  și, deci, cum  $\mathbf{T}(V) = W$ , căci aplicația  $\mathbf{T}$  este surjectivă, din Teorema 4.8.2 deducem că  $\mathbf{T}$  este bijecție.

Mai avem de demonstrat că  $\mathbf{T}^{-1}$  este aplicație continuă. Fie în acest sens  $\mathbf{y} \in W$  și  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}) \in V$ . Folosind acești vectori în prima din inegalitățile (4.78) găsim

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{y}) \leq \frac{1}{m}\|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{y} \in W. \quad (4.80)$$

Aplicând iarăși Teorema 4.9.1, din (4.80) deducem că  $\mathbf{T}^{-1}$  este aplicație continuă pe  $W$  și afirmațiile corolarului sunt complet demonstrate. **q.e.d.**

**Propoziția 4.9.1.** *Mulțimea  $L(V, W)$  a tuturor operatorilor liniari mărginiți, definiți pe spațiul normat  $(V, \|\cdot\|)$  și cu valori în spațiul normat  $(W, \|\cdot\|)$ , este subspațiu liniar al spațiului liniar  $L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$ .*

*Demonstrație.* Fie  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$  operatori liniar mărginiți definiți pe  $(V, \|\cdot\|)$  cu valori în  $(W, \|\cdot\|)$ . După Definiția 4.9.1 avem că  $\exists M_1 > 0, M_2 > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{T}_1(\mathbf{x})\| \leq M_1\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{T}_2(\mathbf{x})\| \leq M_2\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4.81)$$

Atunci,  $\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2$  este mai întâi operator liniar, în baza Teoremei 4.8.5, și apoi aplicație mărginită, deoarece, din (4.81), deducem imediat

$$\|(\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2)(\mathbf{x})\| \leq (|\alpha_1|M_1 + |\alpha_2|M_2)\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

care arată că operatorul liniar  $\alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2$  este, într-adevăr, mărginit.

În baza Teoremei 3.2.2, rezultă că  $L_a((V, \|\cdot\|), (W, \|\cdot\|))$ .

**q.e.d.**

**Propoziția 4.9.2.**  *$L(V, W)$  este spațiu normat.*

*Demonstrație.* În adevăr, se dovedește ușor că aplicația  $\|\cdot\| : L(V, W) \rightarrow \mathbb{R}_+$  definită prin

$$\|\mathbf{T}\| = \inf\{M : \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V\} \quad (4.82)$$

este o normă pe  $L(V, W)$  întrucât satisface axiomele  $(N_1)$ – $(N_3)$  din Definiția 3.4.1.

**q.e.d.**

Să remarcăm că numărul nenegativ  $\|\mathbf{T}\|$  definit de (4.82) are proprietatea

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{T}\| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in V. \quad (4.83)$$

De asemenea, să observăm că dacă  $V$  este spațiu vectorial nenul, egalitatea (4.82) este echivalentă cu

$$\|\mathbf{T}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_V} \frac{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (4.84)$$

Mai mult, au loc egalitățile

$$\|\mathbf{T}\| = \sup\{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| = 1, \mathbf{x} \in V\} \quad (4.85)$$

$$\|\mathbf{T}\| = \sup\{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}. \quad (4.86)$$

În paragraful care urmează focalizăm pe aplicațiile liniare definite pe spații normate, finit dimensionale, cu valori în spații normate.

În acest scop, considerăm spațiile vectoriale  $V$  și  $W$  finit dimensionale cu  $\dim V = n$ ,  $\dim W = m$  unde  $n, m \in \mathbb{N}^*$ .

Din 4.8.1 rezultă că  $V$  este izomorf cu  $\mathbb{R}^n$ , iar  $W$  este izomorf cu  $\mathbb{R}^m$ .

Normele pe spațiile liniare  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  se notează cu același simbol  $\|\cdot\|$ , cu precizarea că atunci când una din aceste norme este oricare din cele definite anterior, se menționează în mod expres.

## 4.10 Aplicații liniare și continue între spații normate finit dimensionale

În primul rând avem  $L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \underbrace{L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \dots \times L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}_{m \text{ ori}}$  deoarece  $\forall \mathbf{T} \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  se scrie în forma  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ , unde, evident,  $T_i \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $i \in \overline{1, m}$ . Aplicațiile  $T_i$  se numesc *forme liniare*.

**Teorema 4.10.1.** *Aplicația  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este operator liniar de la  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$  dacă și numai dacă într-o pereche de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  există o matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  astfel încât*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'(AX), \quad (4.87)$$

oricare ar fi  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  cu

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}X, \quad (4.88)$$

unde

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m,$$

sunt baze în respectiv spațiile liniare  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$ ,

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \quad \mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m, \quad (4.89)$$

iar  $X$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ .

*Demonstrație.* Dacă  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$  este un operator liniar de la  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$ , atunci  $\mathbf{T}$  este cunoscut dacă și numai dacă se cunoaște imaginea prin  $\mathbf{T}$  a oricărui vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Din Propoziția 4.8.2 și (4.88), obținem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{T}(\mathbf{e}_j), \quad (4.90)$$

din care vedem că vectorul  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  este cunoscut dacă și numai dacă se cunosc vectorii  $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) \in \mathbb{R}^m$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Acești vectori din  $\mathbb{R}^m$  sunt cunoscuți dacă și numai dacă se cunosc coordonatele lor în baza  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\}$  din  $\mathbb{R}^m$ . Dacă notăm cu  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$  coordonatele vectorului  $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$  în baza  $\mathcal{B}'$ , atunci

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}'_i, \quad j \in \overline{1, n}. \quad (4.91)$$

Introducerea lui (4.91) în (4.90) conduce la

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}'_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mathbf{e}'_i. \quad (4.92)$$

În felul acesta ajungem la expresia finală pentru  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  și anume

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'(AX), \quad (4.93)$$

unde  $\mathbf{e}'$  este un vector din  $(\mathbb{R}^m)^m = \underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m}_{m \text{ ori}}$  a cărei expresie este dată în (4.89), iar  $A = \|a_{ij}\| \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Dacă coordonatele vectorului  $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  în baza  $\mathcal{B}'$  sunt  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , atunci

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'Y, \quad (4.94)$$

unde  $Y$  este matricea unicolonară cu  $m$  linii ce are ca elemente coordonatele lui  $\mathbf{y}$  în baza  $\mathcal{B}'$ .

Din unicitatea scrierii unui vector într-o bază și (4.92), (4.94), deducem

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (4.95)$$

care reprezintă *ecuațiile analitice* ale operatorului liniar  $\mathbf{T}$  în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ . Aceste ecuații dau coordonatele vectorului  $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$  în baza  $\mathcal{B}'$  ca expresii liniare și omogene de coordonatele vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ , coeficienții expresiilor din membrul drept ale lui (4.95) fiind elementele matricei  $A$ .

Tot din (4.94) și (4.93), sau direct din (4.95), vedem că

$$Y = AX, \quad (4.96)$$

pe care o vom numi *ecuația matriceală* a operatorului liniar  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ .

Să presupunem că în locul lui  $\mathbf{x}$  în (4.92) luăm unul din vectorii bazei  $\mathcal{B}$ . Atunci, obținem corespunzător

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'A_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (4.97)$$

ocazie cu care constatăm că elementele coloanei  $j$  a matricei  $A$  reprezintă coordonatele vectorului  $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$  în baza  $\mathcal{B}'$ .

Pe de altă parte, avem

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = (T_1(\mathbf{e}_j), T_2(\mathbf{e}_j), \dots, T_m(\mathbf{e}_j)), \quad (4.98)$$

unde  $T_1, T_2, \dots, T_m$  sunt coordonatele lui  $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$  în baza  $\mathcal{B}'$ . Atunci, din (4.97), (4.98) și (4.88), deducem

$$T_i(\mathbf{e}_j) = a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n; \quad (4.99)$$

$$T_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.100)$$

ceea ce arată că elementul de pe linia  $i$  și coloana  $j$  al matricei  $A$  este valoarea formei liniare  $T_i$  în vectorul  $\mathbf{e}_j$  al bazei  $\mathcal{B}$ .

Reciproc, să arătăm că orice aplicație  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  care în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  se scrie în forma (4.93), este liniară.

Într-adevăr, se arată cu ușurință că o astfel de aplicație satisface (4.67) și (4.68), prin urmare,  $\mathbf{T}$  este aplicație liniară de la  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$ . **q.e.d.**

**Propoziția 4.10.1.** *Subspațiul liniar  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  coincide cu  $L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ .*

*Demonstrație.* Afirmția de mai sus este echivalentă cu afirmația următoare. Orice aplicație liniară  $\mathbf{T}$  de la  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$  este mărginită.

Să arătăm afirmația este adevărată.

Dacă  $\mathbf{T} \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , atunci într-o pereche de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  aplicația  $\mathbf{T}$  are expresia (4.93) sau, echivalent, (4.96). Dacă norma  $\|\cdot\|$  pe  $\mathbb{R}^m$  este indusă de produsul scalar  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , atunci

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{g(\mathbf{y}, \mathbf{y})} = \sqrt{\mathbf{Y}^\top \mathbf{G} \mathbf{Y}}, \quad \forall \mathbf{y} = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'^\top \mathbf{Y}, \quad (4.101)$$

unde  $\mathbf{G} = \|g_{ij}\|_{m \times m}$  este tensorul metric și are elementele date de

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j). \quad (4.102)$$

Pentru simplificarea calculelor să presupunem că produsele scalare din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  sunt cele standard, adică bazele  $\mathcal{B}$  din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}'$  din  $\mathbb{R}^m$  sunt bazele canonice. Atunci,  $g_{ij}$  din (4.102) este  $\delta_{ij}$ , deci  $\mathbf{G} = \mathbf{I}_m$  și pentru  $\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'^\top (\mathbf{A} \mathbf{X})$ , (4.101) devine

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \sqrt{\mathbf{X}^\top (\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \mathbf{X}}, \quad (4.103)$$

ceea ce este identic cu

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (T_i(\mathbf{x}))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2}. \quad (4.104)$$

Însă, din inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, avem

$$\left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \|\mathbf{x}\|^2. \quad (4.105)$$

Folosind (4.105) în (4.104), obținem

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})} \|\mathbf{x}\|$$

de unde, ținând cont de Exemplul 3.5.4, deducem

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \quad (4.106)$$

care, în baza Definiției 4.9.1, arată că  $\mathbf{T}$  este aplicație mărginită. Mai mult, din (4.106) și expresia (4.106)(9.12) pentru  $\|\mathbf{T}\|$ , deducem

$$\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{A}\|. \quad (4.107)$$

**q.e.d.**

**Corolarul 4.10.1.** *Orice aplicație liniară  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  este continuă.*

*Demonstrație.* Într-adevăr, aceasta rezultă din Propoziția 4.10.1 și Teorema 4.9.1.

q.e.d.

**Teorema 4.10.2.** Spațiile liniare  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  sunt izomorfe.

*Demonstrație.* Fie funcția  $\varphi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  care asociază fiecărui operator liniar  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  matricea sa  $A_{\mathbf{T}}$  într-o pereche de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ , deci

$$\varphi(\mathbf{T}) = A_{\mathbf{T}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad \forall \mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad (4.108)$$

unde  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}'(A_{\mathbf{T}}X)$ , iar  $\mathbf{x} = \mathbf{e}X$ .

Din (4.108) deducem că oricare ar fi scalarii  $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  și pentru orice operatori liniari  $\mathbf{T}_1 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \forall \mathbf{T}_2 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , are loc relația

$$\varphi(\alpha_1 \mathbf{T}_1 + \alpha_2 \mathbf{T}_2) = \alpha_1 \varphi(\mathbf{T}_1) + \alpha_2 \varphi(\mathbf{T}_2),$$

din care deducem că  $\varphi \in L(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ .

Aplicația  $\varphi$  este în plus bijectivă, deci  $\varphi$  este un izomorfism între spațiile liniare  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .  
q.e.d.

**Observația 4.10.1.** Orice aplicație  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  poate fi identificată cu matricea sa  $A_{\mathbf{T}}$  într-o pereche de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din Teorema 4.10.2. ■

**Observația 4.10.2.** Spațiul liniar  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  este finit dimensional și dimensiunea sa este:  $\dim L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = m \cdot n$ .

Într-adevăr, afirmația este adevărată în baza Teoremei 4.10.2, a Corolarului 4.10.1 și a Exercițiului 3.2.2. În particular,  $\dim L(\mathbb{R}^n) = n^2$ , iar  $\dim(\mathbb{R}^n)^* = n$ , unde  $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  este spațiul liniar al formelor liniare pe  $\mathbb{R}^n$ , sau spațiul dual al spațiului liniar real  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Teorema 4.10.3.** Dacă  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbf{S} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ , atunci aplicația produs  $\mathbf{S} \circ \mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  și matricea sa  $A_{\mathbf{S} \circ \mathbf{T}}$  în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}'' \subset \mathbb{R}^p$  este

$$A_{\mathbf{S} \circ \mathbf{T}} = A_{\mathbf{S}} \cdot A_{\mathbf{T}}, \quad (4.109)$$

unde  $A_{\mathbf{S}}$  este matricea lui  $\mathbf{S}$  în perechea de baze  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  și  $\mathcal{B}'' \subset \mathbb{R}^p$ , iar  $A_{\mathbf{T}}$  este matricea lui  $\mathbf{T}$  în bazele  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ .

*Demonstrație.* În primul rând aplicația compusă

$$\mathbf{S} \circ \mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{T}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.110)$$

este liniară, deoarece

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})(\mathbf{x}_2),$$

oricare ar fi scalarii  $\alpha_1, \alpha_2$  din  $\mathbb{R}$  și oricare ar fi vectorii  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  din  $\mathbb{R}^n$ .

Dacă  $A_{\mathbf{S}} = \|b_{jk}\|_{p \times m}$  este matricea lui  $\mathbf{S}$  în perechea de baze  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  și  $\mathcal{B}'' \subset \mathbb{R}^p$  atunci, în baza lui (4.99), avem

$$b_{ij} = S_i(\mathbf{e}'_j), \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (4.111)$$

unde  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, \dots, S_p)_{\mathcal{B}''}$ .

Elementele  $a_{jk}$  ale matricei  $A_{\mathbf{T}}$  sunt date evident de

$$a_{jk} = T_j(\mathbf{e}_k), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (4.112)$$

unde  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)_{\mathcal{B}' \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}$ .

Fie  $c_{ik}$  elementul de pe linia  $i$  și coloana  $k$  al matricei operatorului liniar  $\mathbf{S} \circ \mathbf{T}$  în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}'' \subset \mathbb{R}^p$ . Atunci, din (4.99), avem

$$c_{ik} = (\mathbf{S} \circ \mathbf{T})_i(\mathbf{e}_k). \quad (4.113)$$

Folosind acum (4.110) – (4.113) și (4.91), găsim

$$c_{ik} = S_i(\mathbf{T}(\mathbf{e}_k)) = S_i\left(\sum_{j=1}^m a_{jk} \mathbf{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{jk} S_i(\mathbf{e}'_j) = \sum_{j=1}^m a_{jk} b_{ij} = \sum_{j=1}^m b_{ij} a_{jk},$$

de unde rezultă (4.109).

**q.e.d.**

**Observația 4.10.3.** În baza izomorfismului spațiilor liniare  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  și a Teoremei 4.10.3, tragem concluzia că proprietățile produsului între matrice se transmit întocmai și aplicațiilor liniare de la  $\mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$ .

De exemplu, în cazul  $m = n$ , operatorii  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in L(\mathbb{R}^n)$  se pot compune, iar operatorul rezultat  $\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2$  putem spune că este *produsul* operatorilor liniari  $\mathbf{T}_1$  și  $\mathbf{T}_2$  care este, de asemenea, element al lui  $L(\mathbb{R}^n)$ . Se verifică ușor că au loc proprietățile:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2) \circ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{T}_1 \circ (\mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_3); & \mathbf{T}_1 \circ (\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3) &= \mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_3; \\ (\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \circ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_3 + \mathbf{T}_2 \circ \mathbf{T}_3; & (\alpha_1 \mathbf{T}_1) \circ (\alpha_2 \mathbf{T}_2) &= (\alpha_1 \cdot \alpha_2)(\mathbf{T}_1 \circ \mathbf{T}_2), \end{aligned}$$

oricare ar fi  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3 \in L(\mathbb{R}^n)$  și oricare ar fi scalarii  $\alpha_1, \alpha_2$  din  $\mathbb{R}$ .

În acest fel, spațiul liniar  $L(\mathbb{R}^n)$  devine o *algebră* pe care o vom numi *algebra operatorilor liniari* definiți pe  $\mathbb{R}^n$ . Această algebră are element unitate, acesta fiind operatorul identic

$$\mathbf{I} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{I}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

care, evident, are proprietatea  $\mathbf{I} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ \mathbf{I} = \mathbf{T}$ ,  $\forall \mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n)$ . Algebra  $L(\mathbb{R}^n)$  este necomutativă deoarece produsul a două matrice nu este comutativ. Dacă însă  $n = 1$ , algebra corespunzătoare este comutativă.

**Teorema 4.10.4.** Aplicația  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n)$  este izomorfism liniar dacă și numai dacă matricea sa  $A_{\mathbf{T}}$  într-o bază  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  este nesingulară ( $\det A_{\mathbf{T}} \neq 0$ ).

*Demonstrație.* Aplicația  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n)$  este o bijecție pe  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă ecuația  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ , unde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  este arbitrar, dar fixat, are soluție unică. Această ecuație conduce la sistemul liniar de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = y_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (4.114)$$



sau matriceal

$$A_{\mathbf{T}}X = Y. \quad (4.115)$$

Sistemul (4.114), sau ecuația matriceală (4.115) are soluție unică dacă și numai dacă  $A_{\mathbf{T}}$  este nesară. **q.e.d.**

## 4.11 Forme multiliniare și de gradul $m$ pe $\mathbb{R}^n$

**Definiția 4.11.1.** Funcția reală  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  se numește **omogenă de grad  $m$**  dacă

$$F(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^m F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.116)$$

**Definiția 4.11.2.** Funcția reală  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  se numește **aditivă** dacă

$$F(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = F(\mathbf{x}_1) + F(\mathbf{x}_2), \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (4.117)$$

**Definiția 4.11.3.** Funcția  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  se numește **omogenă** dacă este omogenă de grad 1.

**Observația 4.11.1.** Aplicația  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  este formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , adică  $F \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , dacă  $F$  este aditivă și omogenă.

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiția 4.11.4, Definiția 4.11.5 și Definiția 4.8.1. ■

**Observația 4.11.2.** Dacă  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  este formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , atunci au loc următoarele identități:

$$F(-\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad (4.118)$$

$$F(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; \quad (4.119)$$

$$F(\mathbf{0}) = 0; \quad (4.120)$$

$$F\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i F(\mathbf{x}_i), \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ și } \forall \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n. \quad (4.121)$$

Într-adevăr, identitățile (4.118)–(4.121) rezultă din Teorema 4.8.1 și Propoziția 4.8.2 pentru cazul particular  $m = 1$ . ■

**Observația 4.11.3.** Funcția reală  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă într-o bază  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  există  $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  astfel încât

$$F(\mathbf{x}) = AX, \quad \forall \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e} X \in \mathbb{R}^n, \quad (4.122)$$

unde  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  sunt vectorii bazei  $\mathcal{B}$ , iar  $X$  este matricea unicolonară cu  $n$  linii a coordonatelor vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ .

Aceste afirmații rezultă din Teorema 4.10.1, în cazul particular  $m = 1$ , și  $\mathcal{B}' = \{1\}$ . Evident, elementele matricei  $A$  sunt  $a_i = F(\mathbf{e}_i)$ ,  $i \in \overline{1, n}$ . ■

**Observația 4.11.4.** Dacă  $F \in L_a(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , atunci  $F \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ , deci  $F$  este continuă pe  $\mathbb{R}^n$ .

Într-adevăr, dacă presupunem că  $\mathcal{B}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ , atunci norma vectorului  $\mathbf{x}$  este  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{X^t X} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  și din (4.122) și inegalitatea Cauchy–Buniakowski–Schwarz, avem

$$|F(\mathbf{x})| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|A\| \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

unde  $\|A\| = \sqrt{A^t A} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ , deci  $F$  este aplicație mărginită, adică  $F \in (\mathbb{R}^n)^*$  ceea ce atrage că  $F$  este continuă. În plus,  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  este spațiu normat și  $\|F\| = \|A\| = \sqrt{A^t A}$ . ■

În Definiția 3.7.4 am introdus noțiunea de formă biliniară pe spațiul vectorial  $H^2 = H \times H$ . În cazul  $H = \mathbb{R}^n$ , folosind (3.116)–(3.118), deducem că  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este formă biliniară pe  $(\mathbb{R}^n)^2$  dacă și numai dacă într-o bază

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

există o matrice  $G \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  astfel încât

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j = X^t G Y, \quad (4.123)$$

unde

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e} X, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e} Y, \quad G = \|g_{ij}\|_{n \times n},$$

iar

$$g_{ij} = F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad i, j \in \overline{1, n}. \quad (4.124)$$

Matricea  $G \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , ale cărei elemente sunt date de (4.124), se numește *matricea aplicației (forme) biliniare*  $F$  în baza  $\mathcal{B}$ .

**Observația 4.11.5.**  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este formă biliniară pe  $(\mathbb{R}^n)^2$  dacă aplicațiile  $F(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și  $F(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cu  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  arbitrari dar fixați, sunt forme liniare pe  $\mathbb{R}^n$ .

Această observație permite generalizarea noțiunilor de formă liniară și formă biliniară.

**Definiția 4.11.4.** Funcția reală  $F : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m \text{ ori}} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **formă  $m$ -liniară** pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , sau **formă multiliniară** pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , dacă pentru orice vectori fixați  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m$ , aplicația

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \cdot, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

este formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 4.11.1.** Aplicația  $F : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$  este formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  dacă și numai dacă oricare ar fi scalarii  $\alpha_{i1} \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_{i2} \in \mathbb{R}$  și pentru orice vectori  $\mathbf{x}_{i1} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_{i2} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \overline{1, m}$  este satisfăcută egalitatea

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \alpha_{i1}\mathbf{x}_{i1} + \alpha_{i2}\mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) &= \\ &= \alpha_{i1}F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) + \\ &+ \alpha_{i2}F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i2}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m), \end{aligned} \quad (4.125)$$

unde vectorii  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m$  sunt considerați fixați, însă arbitrari din  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstrație.* Identitatea (4.125) rezultă din Definiția 4.11.4 și Propoziția 4.8.1.

**q.e.d.**

**Corolarul 4.11.1.** Dacă  $F : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$  este formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , atunci:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, -\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) &= \\ &= -F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m); \end{aligned} \quad (4.126)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{x}_m) &= \\ &= F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) - F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m); \end{aligned} \quad (4.127)$$

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0 \quad (4.128)$$

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i_1=1}^{\ell_1} \alpha_{1i_1} \mathbf{x}_{1i_1}, \sum_{i_2=1}^{\ell_2} \alpha_{2i_2} \mathbf{x}_{2i_2}, \dots, \sum_{i_m=1}^{\ell_m} \alpha_{mi_m} \mathbf{x}_{mi_m}\right) &= \\ &= \sum_{i_1=1}^{\ell_1} \sum_{i_2=1}^{\ell_2} \dots \sum_{i_m=1}^{\ell_m} F(\mathbf{x}_{1i_1}, \mathbf{x}_{2i_2}, \dots, \mathbf{x}_{mi_m}) \alpha_{1i_1} \alpha_{2i_2} \dots \alpha_{mi_m}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

*Demonstrație.* Toate aceste egalități sunt consecințe imediate ale relației (4.125).

**q.e.d.**

Fie  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  o bază în  $\mathbb{R}^n$ .

Dacă  $F$  este o formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , atunci pentru orice vectori  $\mathbf{x}_j = \sum_{i_j=1}^n x_{ji_j} \mathbf{e}_{i_j} \in \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ,

avem

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}) x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{mi_m}. \quad (4.130)$$

Reciproc, date numerele reale  $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ , unde  $1 \leq i_k \leq n$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , funcția

$$F : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n F_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{mi_m}, \quad (4.131)$$

unde  $x_{ji_j}$ ,  $1 \leq i_j \leq n$ , sunt coordonatele vectorului  $\mathbf{x}_j$  într-o bază  $\mathcal{B}$ , reprezintă o formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  deoarece, după cum se constată simplu,  $F$  din (4.131) satisface (4.125).

În consecință, putem enunța

**Teorema 4.11.2.** *Funcția  $F : (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow \mathbb{R}$  este formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  dacă și numai dacă într-o bază  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$   $F$  are expresia (4.131) unde*

$$F_{i_1 i_2 \dots i_m} = F(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \mathbf{e}_{i_m}), \quad (4.132)$$

iar  $x_{ji_j}$  cu  $1 \leq i_j \leq n$ , sunt coordonatele vectorului  $\mathbf{x}_j$  în baza  $\mathcal{B}$  și  $1 \leq j \leq m$ .

**Definiția 4.11.5.** *Fie numerele naturale  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . Fiecărei  $m$ -uple de numere naturale  $i_1, i_2, \dots, i_m$  astfel încât*

$$1 \leq i_1 \leq k_1, 1 \leq i_2 \leq k_2, \dots, 1 \leq i_m \leq k_m,$$

*îi asociem numărul real  $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$ .*

*În această situație, spunem că am definit o matrice  $m$ -indexată, sau o matrice de tipul  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , și convenim să scriem această matrice în forma*

$$\|F_{i_1 i_2 \dots i_m}\|_{1 \leq i_1 \leq k_1, 1 \leq i_2 \leq k_2, \dots, 1 \leq i_m \leq k_m} \quad (4.133)$$

*Numerele  $F_{i_1 i_2 \dots i_m}$  se numesc elementele (coordoanatele) matricei  $m$ -indexate. În cazul în care  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = n$  vom spune că matricea  $m$ -indexată este  $n$ -dimensională.*

*Numărul natural  $m$  este numărul indicilor matricei (4.133).*

*Produsul  $k_1 \cdot k_2 \dots k_m$  reprezintă numărul elementelor matricei (4.133).*

Din Teorema 4.11.2 rezultă că există o corespondență biunivocă între formele  $m$ -liniare pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  și matricele  $m$ -indexate  $n$ -dimensionale. În general vorbind, ambele noțiuni exprimă același conținut matematic. Elementele matricei din (4.133) sunt unic determinate de forma  $m$ -liniară  $F$  prin (4.132) și de aceea ele pot fi numite coordonatele lui  $F$ . Matricea (4.133) se numește matricea coordonatelor formei multilinare  $F$ , sau simplu, matricea lui  $F$ .

**Definiția 4.11.6.** *O formă  $m$ -liniară  $F$  pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  se numește simetrică dacă*

$$F(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_m}) = F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \quad (4.134)$$

*pentru orice permutare  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ i_1 & i_2 & \dots & i_m \end{pmatrix}$  și pentru orice vectori*

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$$

*din spațiul vectorial  $\mathbb{R}^n$ .*

Se verifică ușor că o formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  este simetrică dacă și numai dacă matricea (11.18) este simetrică adică este o matrice  $m$ -indexată  $n$ -dimensională care satisface condiția

$$F_{i_1 i_2 \dots i_m} = F_{12 \dots m}, \quad (4.135)$$

oricare ar fi permutarea  $\sigma$  din Definiția 4.11.6.

**Definiția 4.11.7.** O funcție  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **formă de gradul  $m$**  pe spațiul liniar  $\mathbb{R}^n$  dacă există o formă  $m$ -liniară simetrică pe  $(\mathbb{R}^n)^m$  astfel încât

$$h(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.136)$$

Cu alte cuvinte,  $h$  este o formă de gradul  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă într-o bază  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  există o matrice simetrică  $m$ -indexată și  $n$ -dimensională de forma (4.133) în care  $k_1 = k_2 = \dots = k_m = n$  astfel încât să avem

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n F_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad (4.137)$$

oricare ar fi  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ .

**Observația 4.11.6.** O formă de gradul  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$  este funcție omogenă de grad  $m$  deoarece din (11.22) deducem

$$h(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^m h(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.138)$$

De asemenea,  $h(\mathbf{0}) = 0$ .

Formele de gradul 1 coincid cu formele liniare, iar formele de gradul 2 sunt formele pătratice introduse în Definiția 3.7.5. O formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}$  este  $h(x) = ax^m, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Se poate demonstra ușor următorul rezultat.

**Teorema 4.11.3.** Forma de gradul  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$  este identic nulă dacă și numai dacă matricea sa simetrică  $m$ -indexată  $n$ -dimensională într-o bază oarecare este identic nulă.

Din această teoremă rezultă că pentru o formă  $h$  de gradul  $m$ , într-o bază dată  $\mathcal{B}$ , există o singură matrice  $\|F_{i_1 i_2 \dots i_m}\|$  simetrică astfel încât (4.137) să aibă loc, căci dacă ar mai exista o altă matrice  $\|F'_{i_1 i_2 \dots i_m}\|$  încât să avem

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n F'_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.139)$$

atunci din (4.137) și (4.139), obținem

$$0 = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n (F_{i_1 i_2 \dots i_m} - F'_{i_1 i_2 \dots i_m}) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m},$$

și din Teorema 4.11.3 găsim că  $F_{i_1 i_2 \dots i_m} = F'_{i_1 i_2 \dots i_m}$ , deci matricea formei  $h$  de grad  $m$  într-o bază dată este unică.

**Definiția 4.11.8.** Fie  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ . Se spune că forma  $h$  este:

- (i) **pozitiv definită** dacă  $h(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- (ii) **negativ definită** dacă  $h(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- (iii) **ne-negativă**, sau **pozitiv semi-definită** dacă  $h(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iii) **ne-pozitivă**, sau **negativ semi-definită** dacă  $h(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (v) **nedefinită** dacă există vectorii  $\mathbf{x}_1$  și  $\mathbf{x}_2$  astfel încât  $h(\mathbf{x}_1) > 0$  și  $h(\mathbf{x}_2) < 0$ .

**Observația 4.11.7.** Din (4.138), luând  $\lambda = -1$ , rezultă că dacă  $m$  este număr impar și  $h$  este formă de grad  $m$  neidentică nulă, atunci  $h$  este nedefinită.

**Observația 4.11.8.** Dacă  $m$  este număr natural par, atunci matricea  $m$ -indexată  $n$ -dimensională  $\|F_{i_1 i_2 \dots i_m}\|$  care intră în (4.137) se spune că este **pozitiv definită**, **negativ definită**, **ne-negativă** (**pozitiv semi-definită**), sau **ne-pozitivă** (**negativ semi-definită**) ori de câte ori forma corespunzătoare de grad  $m$  (4.137) este pozitiv definită, negativ definită, pozitiv semi-definită, sau negativ semi-definită, respectiv. În mod similar, matricea formei  $h$  de grad  $m$  se spune că este nedefinită dacă  $h$  este nedefinită.

O formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}$  are expresia  $h(x) = ax^m$ . Dacă  $m$  este par, atunci  $h$  este pozitiv definită, ori negativ definită, după cum  $a > 0$ , sau  $a < 0$ . Interpretarea lui  $a$  este  $a = h(1)$ .

## Capitolul 5

# Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă reală

În acest capitol se consideră funcții de o variabilă reală cu valori într-un spațiu Hilbert  $m$ -dimensional care, în baza izomorfismului spațiilor liniare finit dimensionale, poate fi considerat că este  $\mathbb{R}^m$ .

### 5.1 Derivabilitatea funcțiilor vectoriale de argument real

Elementele spațiului Hilbert  $\mathbb{R}^m$  pot fi interpretate ca puncte în mulțimea  $\mathbb{E}^m$  care are structură de *spațiu afin Euclidian*. Spațiul  $\mathbb{E}^m$  îl considerăm raportat la reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}'\}$ , unde  $O$  este un punct fixat al spațiului afin  $\mathbb{E}^m$ , numit *originea* reperului, iar

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\},$$

este baza canonică a spațiului Hilbert  $\mathbb{R}^m$  și

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{e}'_1 & = & (1, 0, 0, \dots, 0, 0), \\ \mathbf{e}'_2 & = & (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{e}'_m & = & (0, 0, 0, \dots, 0, 1). \end{array} \right.$$

Un sistem de vectori directori corespunzători *axelor* reperului  $\mathcal{R}$ , notate cu  $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n$ , este sistemul format din versorii  $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m$ .

Dacă  $M = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  este un punct arbitrar din  $\mathbb{E}^m$ , atunci vectorul

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = \mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' X \in \mathbb{R}^m,$$

este *vectorul de poziție* al punctului  $M \in \mathbb{E}^m$ . Această relație stabilește un izomorfism între  $\mathbb{R}^m$  și  $\mathbb{E}^m$  ceea ce face ca aceste două spații să fie practic confundate.

Structura de spațiu Euclidian a spațiului liniar  $\mathbb{R}^m$  este indusă de produsul scalar standard

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^m y_i z_i = Y^\top Z, \quad (5.1)$$

oricare ar fi vectorii  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$  care în baza canonică din  $\mathbb{R}^m$  au expresiile

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' Y, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^m z_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' Z,$$

unde

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}).$$

Vom considera că norma pe  $\mathbb{R}^m$  este cea indusă de produsul scalar (5.1), adică norma Euclidiană

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m y_i^2} = \sqrt{Y^\top Y}. \quad (5.2)$$

De asemenea, considerăm că metrica  $d$  pe  $\mathbb{R}^m$  este cea Euclidiană, deci

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_i - z_i)^2} = \sqrt{(Y^\top - Z^\top)(Y - Z)}. \quad (5.3)$$

În cazul  $m = 3$ , se introduc în plus două operații între vectori și anume *produsul vectorial* a doi vectori din  $\mathbb{R}^3$  și *produsul mixt* a trei vectori.

**Definiția 5.1.1.** Se numește **produs vectorial** al vectorilor

$$\mathbf{y} = y_1 \mathbf{e}'_1 + y_2 \mathbf{e}'_2 + y_3 \mathbf{e}'_3 \quad \text{și} \quad \mathbf{z} = z_1 \mathbf{e}'_1 + z_2 \mathbf{e}'_2 + z_3 \mathbf{e}'_3,$$

luați în această ordine, vectorul  $\mathbf{y} \times \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$  definit de

$$\mathbf{y} \times \mathbf{z} = (y_2 z_3 - y_3 z_2) \mathbf{e}'_1 + (y_3 z_1 - y_1 z_3) \mathbf{e}'_2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{e}'_3. \quad (5.4)$$

Dacă introducem *simbolurile de alternanță*

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 1, & \text{dacă permutarea } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ este pară;} \\ \varepsilon_{ijk} = -1, & \text{dacă permutarea } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \text{ este impară;} \\ \varepsilon_{ijk} = 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

atunci (5.4) se scrie în forma

$$\mathbf{y} \times \mathbf{z} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j z_k \mathbf{e}'_i. \quad (5.5)$$

Membrul al doilea din (5.5) este un determinant simbolic de ordinul trei având pe prima linie versorii reperului  $Ox_1x_2x_3$ , iar pe liniile a doua și a treia, coordonatele vectorului  $\mathbf{y}$  și respectiv  $\mathbf{z}$ . Așadar, produsul vectorial al vectorilor  $\mathbf{y}$  și  $\mathbf{z}$  se poate scrie în forma echivalentă

$$\mathbf{y} \times \mathbf{z} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$



Dacă interpretăm  $\mathbb{R}^2$  ca un subspațiu liniar al spațiului vectorial  $\mathbb{R}^3$  cu elementele  $\mathbf{y}$  și  $\mathbf{z}$  de forma

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, 0) = y_1 \mathbf{e}'_1 + y_2 \mathbf{e}'_2 + 0 \cdot \mathbf{e}'_3, \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, 0) = z_1 \mathbf{e}'_1 + z_2 \mathbf{e}'_2 + 0 \cdot \mathbf{e}'_3,$$

atunci din (5.4) – (5.6) rezultă că produsul vectorial al vectorilor  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$  este un vector din  $\mathbb{R}^3$ , coliniar cu  $\mathbf{e}'_3$ , care are expresia analitică

$$\mathbf{y} \times \mathbf{z} = (0, 0, y_1 z_2 - y_2 z_1) = (y_1 z_2 - y_2 z_1) \mathbf{e}'_3.$$

Fie acum și un al treilea vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ .

**Definiția 5.1.2.** Se numește **produsul mixt** al vectorilor  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  și  $\mathbf{u}$ , luați în această ordine, numărul real notat prin  $(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u})$  definit de

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{u}. \quad (5.7)$$

**Observația 5.1.1.** Din (5.1), (5.4) sau (5.5) și (5.7) se vede că expresia analitică a produsului mixt (5.7) este

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} y_j z_k u_i = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ ,  $t_0 \in A$  un punct de acumulare al mulțimii  $A$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  o funcție vectorială de argument real. Oricărui  $t \in A$  îi corespunde un vector unic  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^m$  care poate fi interpretat ca punct al spațiului afin  $\mathbb{E}^m$  raportat la reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}'\}$ .

Deoarece  $\mathbf{f}(t)$  este un vector din  $\mathbb{R}^m$ , în baza  $\mathcal{B}'$  se scrie în forma

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) = \sum_{i=1}^m f_i(t) \mathbf{e}'_i.$$

Introducem funcțiile reale de variabilă reală  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{F}(A)$  după procedeul: fiecărui  $t \in A$  îi asociem coordonata  $i$  a vectorului  $\mathbf{f}(t)$ . Funcțiile  $f_i$  se numesc *coordonatele* funcției  $\mathbf{f}$  și convenim să scriem

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m).$$

Când considerăm că  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{E}^m$ , funcțiile  $f_i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , se numesc *componentele* lui  $\mathbf{f}$ .

Dacă vectorul de poziție al unui punct curent al spațiului afin Euclidian  $\mathbb{E}^m$  este notat cu  $\mathbf{x}$ , sau cu  $\mathbf{r}$ , funcția  $\mathbf{f}$  se prezintă în una din formele:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad (5.8)$$

unde  $t \in A$  și  $\mathbf{x} = \mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ . E

Oricare din egalitățile (5.8) sunt echivalente cu sistemul de  $m$  funcții reale de variabila reală  $t$  cu domeniul de definiție  $A$

$$x_i = f_i(t), \quad t \in A, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \overline{1, m}. \quad (5.9)$$

**Definiția 5.1.3.** Mulțimea,

$$G_{\mathbf{f}} = \{M : \exists t \in A \text{ astfel încât } \overrightarrow{OM} = \mathbf{f}(t)\} \subset \mathbb{E}^m,$$

se numește **graficul**, sau **hodograful** funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ .

**Definiția 5.1.4.** Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ . Egalitatea (5.8) se numește **ecuație vectorială** a graficului funcției  $\mathbf{f}$ , iar egalitățile (5.9) se numesc **ecuații parametrice** ale graficului lui  $\mathbf{f}$ .

**Observația 5.1.2.** Dacă variabila  $t \in A$  are ca interpretare timpul, atunci  $G_{\mathbf{f}}$  se numește **traiectoria** unui punct material din  $\mathbb{R}^m$  aflat în mișcare după legea (5.8), sau (5.9). Când  $m = 2$ , mișcarea punctului material se numește **plană**, iar când  $m = 3$  mișcarea se numește **spațială**.

**Observația 5.1.3.** Hodograful funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  poate fi interpretat și ca mulțime de vectori din  $\mathbb{R}^m$ .

**Observația 5.1.4.** În baza relațiilor (5.1), (5.2), (5.3), din Definiția 5.1.1 și Definiția 5.1.2 rezultă că, date funcțiile  $\varphi \in \mathcal{F}(A)$  și funcțiile  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , putem introduce funcțiile  $\varphi \mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \in \mathcal{F}(A)$ ,  $\|\mathbf{f}\| \in \mathcal{F}(A)$  și  $d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in \mathcal{F}(A)$ , respectiv prin:

$$(\varphi \mathbf{f})(t) = \varphi(t) \mathbf{f}(t) = (\varphi(t)f_1(t), \varphi(t)f_2(t), \dots, \varphi(t)f_m(t)), \quad t \in A;$$

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^m f_i(t)g_i(t), \quad t \in A; \quad (5.10)$$

$$\|\mathbf{f}\|(t) = \|\mathbf{f}(t)\| = \sqrt{\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m f_i^2(t)}, \quad t \in A;$$

$$(d(\mathbf{f}, \mathbf{g}))(t) = d(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(t) - g_i(t))^2}, \quad t \in A,$$

numite corespunzător: funcția **produs** al funcției vectoriale  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  cu funcția scalară  $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ ; funcția **produs scalar** al funcțiilor vectoriale  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ ; funcția **norma** lui  $\mathbf{f}$ ; funcția **distanța** între funcțiile  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ .

**Observația 5.1.5.** În cazul  $m = 3$ , definim în plus funcția **produs vectorial** al funcțiilor  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  și  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$ , notată cu  $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$ , definită prin

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{g})(t) = \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} f_j(t) g_k(t) \mathbf{e}'_i, \quad t \in A.$$

**Definiția 5.1.5.** Funcția reală de variabilă reală  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathcal{F}(A)$ , cu valorile date de relația

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})(t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} f_i(t) g_j(t) h_k(t), \quad t \in A,$$

se numește **produs mixt** al funcțiilor vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  și  $\mathbf{h}$ , luate în această ordine.

**Definiția 5.1.6.** Dacă  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , atunci funcția care asociază oricărui  $t \in A$  punctul  $M = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) \in \mathbb{E}^m$  se numește **câmp de vectori**, sau **câmp vectorial** pe  $A$ .

**Definiția 5.1.7.** Funcția  $\mathbf{R}(\cdot, t_0, \mathbf{f}) \in \mathcal{F}(A \setminus \{t_0\}, \mathbb{R}^m)$  definită prin

$$\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f}) = \frac{1}{t - t_0} (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)) = \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}, \quad t \in A \setminus \{t_0\}, \quad (5.11)$$

se numește **raportul incrementar al funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$** .

**Observația 5.1.6.** Din (5.11) și (5.5) deducem

$$\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f}) = \left( R_1(t, t_0, \mathbf{f}), R_2(t, t_0, \mathbf{f}), \dots, R_m(t, t_0, \mathbf{f}) \right), \quad (5.12)$$

unde

$$R_i(t, t_0, \mathbf{f}) = \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0}, \quad t \in A \setminus \{t_0\}, \quad i \in \overline{1, m}$$

sunt rapoartele incrementare ale funcțiilor reale de variabilă reală  $f_i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ .

**Definiția 5.1.8.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este **derivabilă** în punctul  $t_0 \in A$  dacă funcția raport incrementar  $\mathbf{R}(\cdot, t_0, \mathbf{f}) \in \mathcal{F}(A \setminus \{t_0\}, \mathbb{R}^m)$  are limită în  $t_0$  și această limită aparține lui  $\mathbb{R}^m$ .

**Definiția 5.1.9.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $t_0$ , atunci limita în  $t_0$  a raportului incrementar (5.11) se numește **derivata** funcției vectoriale  $\mathbf{f}$  de variabilă reală  $t$  în punctul  $t_0$  și se notează cu unul din simbolurile:

$$\mathbf{f}'(t_0); \quad \dot{\mathbf{f}}(t_0); \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}(t_0).$$

Prin urmare

$$\mathbf{f}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f}) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}. \quad (5.13)$$

**Teorema 5.1.1.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $t_0 \in A$  dacă și numai dacă există vectorul  $\dot{\mathbf{f}}(t_0) \in \mathbb{R}^m$  cu proprietatea:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât dacă  $t \in A$  și  $0 < \|t - t_0\| < \delta(\varepsilon)$ , atunci

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} - \dot{\mathbf{f}}(t_0) \right\| < \varepsilon.$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, aceste afirmații rezultă din Definiția 5.1.8 și Teorema 4.1.1.

**q.e.d.**

**Teorema 5.1.2.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $t_0 \in A$ , atunci  $\mathbf{f}$  este continuă în  $t_0$ .

*Demonstrație.* Din (5.13) deducem că există funcția  $\alpha \in \mathcal{F}(A \setminus \{t_0\}, \mathbb{R}^m)$  cu proprietatea  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \mathbf{0}$  astfel încât să avem

$$\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \dot{\mathbf{f}}(t_0) + \alpha(t), \quad t \in A \setminus \{t_0\},$$

din care obținem  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + (t - t_0)\dot{\mathbf{f}}(t_0) + (t - t_0)\alpha(t)$ ,  $t \in A \setminus \{t_0\}$ . Trecând la limită în această egalitate pentru  $t \rightarrow t_0$  și ținând cont de faptul că  $\alpha(t) \rightarrow 0$  atunci când  $t \rightarrow t_0$ , găsim  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)$ . Această relație demonstrează teorema.

**q.e.d.**

**Definiția 5.1.10.** Spunem că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă pe submulțimea de puncte  $B \subset A$ , dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă în orice punct din  $B$ . Dacă  $B = A$ , atunci  $\mathbf{f}$  se numește derivabilă.

**Definiția 5.1.11.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă, atunci funcția

$$\dot{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m), \quad \dot{\mathbf{f}}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{f}(t+h) - \mathbf{f}(t))$$

se numește derivata de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{f}$ .

Pentru derivata de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  pot fi utilizate și notațiile:

$$\mathbf{f}'; \quad \mathbf{f}'(\cdot); \quad \frac{d}{dt}\mathbf{f}; \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}; \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt}(\cdot).$$

**Observația 5.1.7.** Vectorul  $\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$  are direcția secantei (drepte) care trece prin punctele  $M_0$  și  $M$  de pe hodograful funcției  $\mathbf{f}$ , corespunzătoare valorilor  $t_0$  și  $t$ .

Când  $t \rightarrow t_0$ , punctul  $M$  se apropie de  $M_0$  pe hodograful lui  $\mathbf{f}$ , iar secanta ( $M_0M$ ) tinde să ocupe poziția limită ( $T$ ) numită tangenta în  $M_0$  la hodograful lui  $\mathbf{f}$  și, la limită pentru  $t \rightarrow t_0$ , vectorul  $\mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$  devine  $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$  care are ca direcție tangenta ( $T$ ).

Sensul vectorului  $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$  este sensul creșterii variabilei  $t$ . Creșterea variabilei  $t$  imprimă un sens de parcurs pe hodograf numit *sens pozitiv*.

Sensul invers de parcurs al hodografului lui  $\mathbf{f}$  se numește *sens negativ*.

Hodograful funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește *orientat* dacă este precizat un sens de parcurs al acestuia.

Din punct de vedere cinematic  $\dot{\mathbf{f}}(t_0)$  este *vectorul viteză* la momentul  $t_0$  (și nu *viteza*, care este  $\|\dot{\mathbf{f}}(t_0)\|$ ) al unui punct material care se mișcă după legea (5.8).

**Definiția 5.1.12.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  se numește **funcție constantă** dacă

$$\mathbf{f}(A) = \text{Imf} = \{\mathbf{c}\}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m.$$

**Teorema 5.1.3.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $t_0 \in A$  dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in \mathcal{F}(A)$ ,  $i \in \overline{1, m}$  sunt derivabile în  $t_0$ . Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $t_0$ , atunci

$$\mathbf{f}'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_m(t_0)).$$

*Demonstrație.* Rezultă din Definiția 5.1.8, relațiile (5.12), (5.13) și Teorema 4.1.4.

**q.e.d.**

Din Teorema 5.1.3, Observația 5.1.3 și proprietățile funcțiilor de variabilă reală derivabile se pot demonstra cu ușurință următoarele două teoreme (exercițiu!).

**Teorema 5.1.4.** Dacă  $\varphi \in \mathcal{F}(A)$  și  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  sunt funcții derivabile în punctul  $t_0 \in A$ , iar  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  scalari arbitrari, atunci funcțiile:

$$\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}, \quad \varphi\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}, \quad \|\mathbf{f}\|, \quad d(\mathbf{f}, \mathbf{g});$$

sunt derivabile în  $t_0$  și au loc următoarele egalități:

$$(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})'(t_0) = \alpha\mathbf{f}'(t_0) + \beta\mathbf{g}'(t_0);$$

$$(\varphi\mathbf{f})'(t_0) = \varphi'(t_0)\mathbf{f}(t_0) + \varphi(t_0)\mathbf{f}'(t_0);$$

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})'(t_0) = \mathbf{f}'(t_0) \cdot \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \cdot \mathbf{g}'(t_0);$$

$$\|\mathbf{f}\|'(t_0) = \frac{\mathbf{f}'(t_0) \cdot \mathbf{f}(t_0)}{\|\mathbf{f}(t_0)\|}, \quad \text{dacă } \mathbf{f}(t_0) \neq \mathbf{0};$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g})'(t_0) = \frac{(\mathbf{f}'(t_0) - \mathbf{g}'(t_0)) \cdot (\mathbf{f}(t_0) - \mathbf{g}(t_0))}{d(\mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0))}, \quad \text{dacă } \mathbf{f}(t_0) \neq \mathbf{g}(t_0);$$

**Teorema 5.1.5.** Dacă  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  sunt funcții derivabile în  $t_0 \in A$ , atunci funcțiile  $\mathbf{f} \times \mathbf{g} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  și  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}) \in \mathcal{F}(A)$  sunt derivabile în  $t_0$  și au loc egalitățile:

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} \times \mathbf{g})'(t_0) &= \mathbf{f}'(t_0) \times \mathbf{g}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) \times \mathbf{g}'(t_0); \\ (\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})'(t_0) &= (\mathbf{f}'(t_0), \mathbf{g}(t_0), \mathbf{h}(t_0)) + (\mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}'(t_0), \mathbf{h}(t_0)) + (\mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0), \mathbf{h}'(t_0)).\end{aligned}$$

**Observația 5.1.8.** Dacă ipotezele din Teorema 5.1.4 și Teorema 5.1.2 au loc pe mulțimea  $A$ , sau pe submulțimea deschisă  $B \subset A$ , atunci identitățile teoremelor sunt adevărate pe mulțimea  $A$ , respectiv pe  $B$ .

**Observația 5.1.9.** Dacă  $\mathbf{f}$  este funcția constantă și  $\varphi \in \mathcal{F}(A)$  este funcție derivabilă, atunci  $(\varphi \mathbf{f})'$  este funcție coliniară cu  $\varphi \mathbf{f}$  deoarece în acest caz  $(\varphi \mathbf{c})'(t) = \varphi'(t)\mathbf{c}$ ,  $\forall t \in A$ . Dacă  $\|\mathbf{f}\|$  este funcție reală de o variabilă reală, constantă, atunci funcțiile  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  sunt ortogonale în sensul că pentru orice  $t \in A$  vectorii  $\mathbf{f}(t)$  și  $\mathbf{f}'(t)$  sunt ortogonali în spațiul Hilbert  $\mathbb{R}^m$  (produsul lor scalar este nul).

## 5.2 Derivabilitate laterală și derivate laterale ale funcțiilor vectoriale de variabilă reală

Pentru funcțiile vectoriale de argument real se introduce noțiunea de *derivabilitate laterală*. Pentru aceasta introducem mai întâi noțiunile: *punct de acumulare la stânga*; *punct de acumulare la dreapta*; *punct de acumulare bilateral* ale mulțimii  $A \subset \mathbb{R}$ , presupusă a fi un interval, sau o reuniune de intervale din  $\mathbb{R}$ .

**Definiția 5.2.1.** (i) Punctul  $t_0 \in \mathbb{R}$  se numește **punct de acumulare la stânga** al mulțimii  $A \subset \mathbb{R}$  dacă  $t_0 \in ((-\infty, t_0) \cap A)'$ ;  
(ii)  $t_0 \in \mathbb{R}$  se numește **punct de acumulare la dreapta** al mulțimii  $A$  dacă  $t_0 \in (A \cap (t_0, +\infty))'$ ;  
(iii)  $t_0 \in \mathbb{R}$  se numește **punct de acumulare bilateral** al mulțimii  $A$  dacă  $t_0$  este atât punct de acumulare la stânga cât și punct de acumulare la dreapta.

**Observația 5.2.1.** Punctul  $t_0 \in \mathbb{R}$  este punct de acumulare la stânga (respectiv, la dreapta) pentru mulțimea  $A \subset \mathbb{R}$  dacă și numai dacă există un șir numeric  $(t_n)_{n \geq 1}$ ,  $t_n \in A$ ,  $t_n < t_0$  (respectiv,  $t_n > t_0$ ) astfel încât  $t_n \rightarrow t_0$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiția 5.2.1 și Teorema 3.9.14. ■

**Observația 5.2.2.** Un punct de acumulare la stânga, sau la dreapta al mulțimii  $A \subset \mathbb{R}$  este punct de acumulare al lui  $A$ . Prin urmare, un punct de acumulare al mulțimii  $A$  este fie punct de acumulare la stânga, fie punct de acumulare la dreapta, fie punct de acumulare bilateral al lui  $A$ .

**Definiția 5.2.2.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , se numește **derivabilă la stânga** (respectiv, **derivabilă la dreapta**) în  $t_0 \in A$ , dacă  $t_0$  este punct de acumulare la stânga (respectiv, la dreapta) al mulțimii  $A$  și funcția  $\mathbf{R}(\cdot, t_0, \mathbf{f})$  are limită la stânga (respectiv, la dreapta) în  $t_0$ .

**Definiția 5.2.3.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă la stânga, (respectiv, la dreapta) în  $t_0$ , atunci  $\mathbf{f}'_s(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$  (respectiv,  $\mathbf{f}'_d(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \mathbf{R}(t, t_0, \mathbf{f})$ ) se numește **derivata la stânga** (respectiv, **derivata la dreapta**) în punctul  $t_0$  a funcției  $\mathbf{f}$ . Derivatele la stânga și la dreapta în  $t_0$  ale unei funcții  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  se numesc **derivate laterale** în  $t_0$  ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ .

**Teorema 5.2.1.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , este derivabilă în punctul de acumulare bilateral  $t_0 \in A$  dacă și numai dacă funcția  $\mathbf{f}$  este derivabilă la stânga și la dreapta în  $t_0$  și derivatele laterale ale sale în  $t_0$  sunt egale.

*Demonstrație.* Afirmția de mai sus se demonstrează simplu dacă se folosește Definiția 5.1.9, Definiția 5.2.2 și rezultatele referitoare la limite laterale. q.e.d.

**Definiția 5.2.4.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , se numește **derivabilă** în  $a$ , respectiv în  $b$ , dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă la dreapta în  $a$ , respectiv la stânga în  $b$ .

Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în punctele  $a$  și  $b$ , atunci  $\mathbf{f}'(a) = \mathbf{f}'_d(a)$  și  $\mathbf{f}'(b) = \mathbf{f}'_s(b)$ .

**Teorema 5.2.2.** Fie  $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$ ,  $\varphi \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$  funcții continue pe  $[a, b]$ . Dacă  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$  sunt derivabile la dreapta în orice punct  $t \in [a, b]$  și

$$\|\mathbf{f}'_d(t)\| \leq \varphi'_d(t), \quad t \in [a, b], \quad (5.14)$$

atunci

$$\|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \leq \varphi(b) - \varphi(a). \quad (5.15)$$

*Demonstrație.* Arătăm că  $\forall \varepsilon > 0$  și  $\forall t \in [a, b]$  avem

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(t - a) + \varphi(t) - \varphi(a), \quad (5.16)$$

din care, în cazul  $t = b$ , ținând cont că  $\varepsilon$  este arbitrar, rezultă (5.15).

Pentru aceasta, să considerăm mulțimea  $I_\varepsilon$  formată din toate punctele  $u \in [a, b]$  cu proprietatea că  $\forall t \in [a, u]$  inegalitatea (5.16) este satisfăcută. Mulțimea  $I_\varepsilon$  este nevidă întrucât conține cel puțin punctul  $u = a$ . În plus,  $I_\varepsilon$  este un interval cu extremitatea stângă în punctul  $a$ . Mai mult, din continuitatea funcțiilor  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$  rezultă  $I_\varepsilon = [a, c]$  cu  $c \leq b$ . Rămâne să mai arătăm că  $c = b$ .

Dacă, prin absurd,  $c < b$ , atunci există  $h > 0$  astfel încât pentru  $c < t \leq c + h$  să avem

$$\left\| \frac{1}{t - c} (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)) - \mathbf{f}'_d(c) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c} - \varphi'_d(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folosind Propoziția 2.5.1, relația (5.14) și aceste inegalități, deducem

$$\frac{\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)\|}{t - c} < \|\mathbf{f}'_d(c)\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varphi'_d(c) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varphi(t) - \varphi(c)}{t - c} + \varepsilon,$$

din care găsim apoi  $\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(c)\| < \varepsilon(t - c) + \varphi(t) - \varphi(c)$ ,  $\forall t \in [c, c + h]$ . Datorită faptului că  $c \in I_\varepsilon$ , rezultă că este îndeplinită și inegalitatea  $\|\mathbf{f}(c) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(c - a) + \varphi(c) - \varphi(a)$ .

Din ultimele două inegalități deducem

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)\| < \varepsilon(t - a) + \varphi(t) - \varphi(a), \quad t \in [c, c + h].$$

Această inegalitate arată că  $c + h \in I_\varepsilon$ , ceea ce contrazice faptul că  $I_\varepsilon = [a, c]$ . Așadar  $c = b$  și inegalitatea (5.16) este demonstrată. **q.e.d.**

**Corolarul 5.2.1.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$  o funcție continuă și derivabilă la dreapta oricărui punct  $t \in [a, b)$ , pentru care există  $M > 0$  cu proprietatea

$$\|\mathbf{f}'_d(t)\| \leq M, \quad \forall t \in (a, b).$$

Atunci

$$\|\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)\| \leq M(b - a).$$

*Demonstrație.* Se aplică Teorema 5.2.2 în care  $\varphi(t) = Mt$ ,  $t \in [a, b]$ .

**q.e.d.**

### 5.3 Derivabilitate și derivate de ordin superior ale unei funcții vectoriale de variabilă reală

**Definiția 5.3.1.** Fie  $A \subset \mathbb{R}$  o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  o funcție derivabilă și fie  $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  funcția derivată lui  $\mathbf{f}$ . Funcția  $\mathbf{f}$  se numește **de două ori derivabilă** în punctul  $t_0 \in A$  dacă funcția  $\mathbf{f}'$  este derivabilă în  $t_0$ .

**Definiția 5.3.2.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  o funcție de două ori derivabilă în punctul  $t_0 \in A$ . Vectorul  $(\mathbf{f}')'(t_0) \in \mathbb{R}^m$  se numește **derivata de ordinul al doilea**, sau **derivata secundă** a funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0$  și se notează cu unul din simbolurile:

$$\mathbf{f}''(t_0); \quad \frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}(t_0); \quad \ddot{\mathbf{f}}(t_0).$$

Prin urmare,

$$\mathbf{f}''(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{t - t_0} (\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}'(t) - \mathbf{f}'(t_0)}{t - t_0}.$$

**Definiția 5.3.3.** Fie  $A = [a, b) \subset \mathbb{R}$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b), \mathbb{R}^m)$  o funcție derivabilă. Funcția  $\mathbf{f}$  este de două ori derivabilă în  $t_0 = a$  dacă funcția  $\mathbf{f}'$  este derivabilă la dreapta în  $t_0 = a$ .

Se poate da o definiție asemănătoare derivabilității de două ori în extremitatea dreaptă  $b$  a intervalului de definiție al funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^n)$ , cu condiția ca  $b \in A$ .



**Observația 5.3.1.** Dacă  $\mathbf{f}$  este de două ori derivabilă în  $t_0$ , atunci funcția  $\mathbf{f}'$  este continuă în  $t_0$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă aplicând Teorema 5.1.2 funcției  $\mathbf{f}'$ . ■

**Observația 5.3.2.** Dacă  $A = [a, b]$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$  este derivabilă, atunci prin definiție  $\mathbf{f}$  este de două ori derivabilă în  $t_0 = a$  dacă  $\mathbf{f}'$  este derivabilă la dreapta în punctul  $t_0 = a$ .

O observație analogă, din care rezultă cine este  $\mathbf{f}''(b)$ , are loc pentru extremitatea dreaptă a intervalului  $A = [a, b]$ .

**Definiția 5.3.4.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  se numește de două ori derivabilă, dacă  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{f}'$  sunt derivabile. Funcția  $\mathbf{f}'' \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , definită de

$$\mathbf{f}''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}'(t+h) - \mathbf{f}'(t)}{h}, \quad t \in A,$$

se numește derivata de ordinul al doilea a funcției  $\mathbf{f}$ .

**Teorema 5.3.1.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in \mathcal{F}(A)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt derivabile de două ori. Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă, atunci

$$\mathbf{f}''(t) = (f_1''(t), f_2''(t), \dots, f_m''(t)), \quad t \in A. \quad (5.17)$$

*Demonstrație.* Se aplică Teorema 5.1.3 funcției  $\mathbf{f}' = (f_1', f_2', \dots, f_m') \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  folosindu-se totodată Definiția 5.1.7 și Teorema 4.1.4. **q.e.d.**

**Observația 5.3.3.** Din punct de vedere cinematic,  $\mathbf{f}''(t)$  este vectorul accelerație, iar  $\|\mathbf{f}''(t)\|$  este accelerația la momentul  $t$  ale unui punct material în mișcare după legea (5.8).

**Definiția 5.3.5.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  se numește de  $k$  ori derivabilă în  $t_0 \in A$  dacă  $\mathbf{f}$  este de  $k-1$  ori derivabilă pe  $V \cap A$ ,  $V \in \mathcal{V}(t_0)$ , iar derivata de ordinul  $k-1$  a funcției  $\mathbf{f}$  este derivabilă în  $t_0$ .

**Definiția 5.3.6.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori derivabilă în  $t_0$ , atunci limita în  $t_0$  a raportului incremental al funcției  $\mathbf{f}^{(k-1)} \in \mathcal{F}(V \cap A, \mathbb{R}^m)$ ,

$$\mathbf{R}^{k-1}(t, t_0, \mathbf{f}) = \frac{\mathbf{f}^{(k-1)}(t) - \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0)}{t - t_0}, \quad t \in V \cap A \setminus \{t_0\}, \quad (5.18)$$

se numește derivata de ordinul  $k$  a funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0 \in A' \cap A$ .

Derivata de ordinul  $k$  a funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $t_0 \in A$  se notează cu unul din simbolurile:

$$\mathbf{f}^{(k)}(t_0); \quad \frac{d^k \mathbf{f}}{dt^k}(t_0).$$

**Observația 5.3.4.** Din Definiția 5.3.5 avem

$$\mathbf{f}^{(k)}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}^{k-1}(t, t_0, \mathbf{f}) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}^{(k-1)}(t) - \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0)}{t - t_0}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Derivata de ordinul zero a funcției  $\mathbf{f}$  este, prin convenție, însăși funcția  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f}^{(0)}(t) = \mathbf{f}(t), \quad t \in A,$$

iar raportul incrementar de ordinul zero  $\mathbf{R}^0(t, t_0, \mathbf{f})$ , obținut luând  $k = 1$  în (5.18), este raportul incrementar (5.11).

Generalizând acum Teorema 5.1.3 și Teorema 5.3.1, obținem

**Teorema 5.3.2.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori derivabilă dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in \mathcal{F}(A)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt de  $k - 1$  ori derivabile. Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori derivabilă, atunci

$$\mathbf{f}^{(k)}(t) = (f_1^{(k)}(t), f_2^{(k)}(t), \dots, f_m^{(k)}(t)), \quad t \in A.$$

**Definiția 5.3.7.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește de clasă  $C^k$  pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$  și scriem  $\mathbf{f} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ , dacă pentru  $k = 0$ ,  $\mathbf{f}$  este continuă și pentru  $k \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , funcția  $\mathbf{f}^{(k-1)} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă, iar derivata  $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este funcție continuă pe  $I$ .

Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește indefinit derivabilă dacă  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{f} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ . În acest caz se scrie  $\mathbf{f} \in C^\infty(I, \mathbb{R}^m)$ .

Dacă  $I$  nu este un interval deschis, atunci drept derivate de ordin  $k$  ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  în extremitățile intervalului se consideră derivatele laterale corespunzătoare ale funcției.

**Observația 5.3.5.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$  dacă și numai dacă  $f_j \in C^k(I)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ .

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiția 5.3.7 și Teorema 5.3.2. ■

**Teorema 5.3.3.** Dacă  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este un interval, atunci funcția  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R})$  și

$$(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})^{(k)} = \sum_{s=0}^k C_k^s \mathbf{f}^{(k-s)}(t) \cdot \mathbf{g}^{(s)}(t), \quad t \in I, \quad (5.19)$$

unde  $C_k^s$  înseamnă combinații de  $k$  elemente luate câte  $s$ .

*Demonstrație.* Aplicăm metoda inducției matematice în raport cu  $k$ . Demonstrația este identică cu cea din algebra elementară referitoare la puterea  $k$  a binomului  $a + b$ ,

$$(a + b)^k = \sum_{s=1}^k C_k^s a^{k-s} b^s, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

cu deosebirea că  $a$  și  $b$  trec respectiv în  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ ,  $a^{k-s}$  trece în  $\mathbf{f}^{(k-s)}$  și  $b^s$  trece în  $\mathbf{f}^{(s)}$ . Din această demonstrație rezultă că (5.19) are loc oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}^*$ . **q.e.d.**

Relația (5.19) este cunoscută sub numele de *formula lui Leibniz de derivare a produsului de funcții*. În cazul  $m \geq 2$ , produsul care apare în Teorema 5.3.3 este produsul scalar standard (5.10) al funcțiilor  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ . Dacă  $m = 1$ , produsul din Teorema 5.3.3 este produsul obișnuit al funcțiilor reale  $f$  și  $g$ .

## 5.4 Derivabilitatea funcțiilor vectoriale compuse de variabilă reală

Fie  $I, J$  intervale din  $\mathbb{R}$ ,  $\varphi : I \rightarrow J$  și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$ .

**Definiția 5.4.1.** *Funcția*

$$\mathbf{F} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m), \quad \mathbf{F}(t) = (\mathbf{f} \circ \varphi)(t) = (f_1(\varphi(t)), f_2(\varphi(t)), \dots, f_m(\varphi(t))), \quad (5.20)$$

se numește **funcția compusă** a funcțiilor  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$ .

În teorema care urmează se precizează condițiile pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$  pentru ca funcția compusă  $\mathbf{F}$  să fie derivabilă.

**Teorema 5.4.1. (Regula lanțului)** *Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$  și  $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$  sunt funcții derivabile, atunci funcția compusă  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi$  este derivabilă și*

$$\mathbf{F}'(t) = (\mathbf{f} \circ \varphi)'(t) = \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I. \quad (5.21)$$

*Demonstrație.* Trebuie calculată limita în punctul  $h = 0$  a raportului incrementar

$$\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad t+h \in I.$$

Pentru aceasta să observăm mai întâi că, folosind (5.20), acesta se poate scrie în forma

$$\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h} = \frac{\mathbf{f}(\varphi(t+h)) - \mathbf{f}(\varphi(t))}{\varphi(t+h) - \varphi(t)} \cdot \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}. \quad (5.22)$$

Deoarece funcția  $\varphi$  este derivabilă în punctul  $t \in I$ , din Teorema 5.1.2 rezultă că  $\varphi$  este continuă în  $t$ . Prin urmare, există funcția reală  $\tilde{h}$  de variabila reală  $h$  definită într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(0)$  cu proprietatea  $\tilde{h} \rightarrow 0$  când  $h \rightarrow 0$ , astfel încât să avem  $\varphi(t+h) = \varphi(t) + \tilde{h}$ ,  $\forall h \in V, \forall t \in I, t+h \in I$ . Folosind această relație în (5.22), obținem  $\frac{\mathbf{F}(t+h) - \mathbf{F}(t)}{h} = \frac{\mathbf{f}(\varphi(t) + \tilde{h}) - \mathbf{f}(\varphi(t))}{\tilde{h}} \cdot \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$ . Prima fracție din membrul al doilea este raportul incrementar al funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\varphi(t) \in J$ . Trecând la limită pentru  $h \rightarrow 0$  și ținând cont că  $h \rightarrow 0$  antrenează  $\tilde{h} \rightarrow 0$ , obținem (5.21). **q.e.d.**

**Observația 5.4.1.** Dacă avem în vedere că coordonatele lui  $\mathbf{F}$  sunt

$$F_i = (f_i \circ \varphi)(t) = f_i(\varphi(t))$$

și ținem cont de Teorema 5.1.3, din (5.21) obținem egalitatea

$$F'_i(t) = (f_i \circ \varphi)'(t) = f'_i(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in I, \quad i \in \overline{1, m},$$

care se numește **regula lanțului** de derivare a funcțiilor reale compuse de o variabilă reală.

**Teorema 5.4.2.** Dacă funcțiile  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$  și  $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$  sunt de două ori derivabile, atunci funcția compusă  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă și

$$\mathbf{F}''(t) = \mathbf{f}''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2 + \mathbf{f}'(\varphi(t))\varphi''(t), \quad t \in I. \quad (5.23)$$

*Demonstrație.* La fel ca în Teorema 5.4.1 vom calcula limita în punctul  $h = 0$  a raportului incrementar al funcției  $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ ,

$$\frac{\mathbf{F}'(t+h) - \mathbf{F}'(t)}{h},$$

definită pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(0)$  care are proprietatea  $t+h \in I, \forall h \in V$ . Se folosește (5.21), Teorema 5.1.2, Observația 5.3.1 și după trecerea la limită pentru  $t \rightarrow 0$  se obține (5.23). **q.e.d.**

## 5.5 Diferențiabilitatea unei funcții vectoriale de o variabilă reală

Noțiunea de diferențiabilitate a unei funcții vectoriale de argument real  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ , într-un punct  $t_0$  al intervalului  $I \subset \mathbb{R}$ , are ca punct de plecare problema aproximării vectorului  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^m, t \in V \cap I, V \in \mathcal{V}(t_0)$ , printr-o funcție afină  $\mathbf{A}$  care să aibă proprietățile:

$$\mathbf{A}(t_0) = \mathbf{f}(t_0); \quad (5.24)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{A}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t).$$

Ținând cont că funcția afină  $\mathbf{A} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  are forma

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{T}(t) + \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.25)$$

unde  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , iar  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$  este un vector constant, din (5.24) și (5.25) deducem

$$\mathbf{c} = \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(t_0).$$

Folosirea acestei relații în (5.25) conduce la concluzia că funcția afină (5.25) este

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{T}(t - t_0) + \mathbf{f}(t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.26)$$

Dacă se dorește ca valorile funcției afine (5.26) să aproximeze pe cele ale funcției  $\mathbf{f}$  în apropierea punctului  $t_0$ , atunci trebuie să avem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)) = \mathbf{0}. \quad (5.27)$$

Din (5.26), (5.27), continuitatea aplicației liniare  $\mathbf{T}$  în origine și  $\mathbf{T}(0) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$ , obținem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0),$$

rezultat care arată că aproximarea lui  $\mathbf{f}(t)$  printr-o funcție afină implică, în mod necesar, continuitatea funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0$ .

Aplicația liniară  $\mathbf{T}$  care intră în componența funcției afine  $\mathbf{A}$  este încă nedeterminată, deci pentru determinarea matricei sale în baza canonică  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  trebuie să mai impunem o condiție.

Condiția pe care o vom impune este ca  $\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)$  să se apropie de  $\mathbf{0}$  mai repede decât se apropie  $t$  de  $t_0$ . Matematic, această condiție se exprimă prin

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{A}(t)}{|t - t_0|} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(t - t_0)}{|t - t_0|} = \mathbf{0}.$$

Analizând această egalitate, vedem că ea este echivalentă cu existența funcției vectoriale de variabilă reală  $\alpha \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ , cu proprietatea

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \alpha(t_0) = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{T}(t - t_0) + \alpha(t)|t - t_0|, \quad t \in V \cap I.$$

Dacă aproximarea este realizabilă, se spune că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este *diferențiabilă* în  $t_0$ , iar aplicația liniară  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  este *diferențiala* funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ .

Cu aceste considerații putem da definiții riguroase pentru diferențiabilitatea și diferențiala unei funcții vectoriale de argument real într-un punct de acumulare ce aparține domeniului de definiție al funcției.

**Definiția 5.5.1.** Spunem că funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este **diferențiabilă** în punctul de acumulare  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ , dacă există aplicația liniară

$$\mathbf{T} = d\mathbf{f}(t_0) = d\mathbf{f}(t_0)(\cdot) = d\mathbf{f}(t_0, \cdot) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \quad (5.29)$$

și funcția  $\alpha \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  cu proprietatea (5.28) astfel încât să aibă loc egalitatea

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)|t - t_0|, \quad \forall t \in I \quad (5.30)$$

sau, echivalent,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; h) + \alpha(t_0 + h)|h|, \quad \forall h \in \mathbb{R}, t_0 + h \in I, \quad (5.31)$$

unde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(t_0 + h) = \alpha(t_0) = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

**Definiția 5.5.2.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  funcție diferențiabilă în  $t_0 \in I' \cap I$ . Aplicația liniară (5.29) se numește **diferențiala** funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ .

**Teorema 5.5.1. (Unicitatea diferențialei)** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este funcție diferențiabilă în  $t_0 \in I' \cap I$ , atunci diferențiala sa în  $t_0$  este unică.

*Demonstrație.* Să observăm mai întâi că (5.30) și (5.28) sunt echivalente cu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(t - t_0)}{|t - t_0|} = \mathbf{0},$$

iar (5.31) și (5.32) se mai pot scrie în forma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(h)}{|h|} = \mathbf{0}, \quad (5.33)$$

unde  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(t_0)$  este diferențiala funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0$ .

Să presupunem că aplicația  $\mathbf{T}$  nu este unică deci, pe lângă (5.33), există egalitatea

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{S}(h)}{|h|} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S} \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m). \quad (5.34)$$

Cum pentru orice  $h \neq 0$  au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{S}(h) - \mathbf{T}(h)\|}{|h|} &= \frac{\|\mathbf{S}(h) - \mathbf{f}(t_0 + h) + \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(h)\|}{|h|} \leq \\ &= \frac{\|\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{S}(h)\|}{|h|} + \frac{\|\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0) - \mathbf{T}(h)\|}{|h|}, \end{aligned}$$

făcând  $h \rightarrow 0$  și ținând cont de (5.33) și (5.34), obținem

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{S}(h) - \mathbf{T}(h)\|}{|h|} = 0.$$

Înlocuind în această ultimă relație pe  $h$  cu  $tu$  unde  $u$  este arbitrar din  $\mathbb{R}^*$ , dar fixat, iar  $t > 0$ , luând în considerație faptul că  $h \rightarrow 0 \implies t \rightarrow 0$  și având în vedere că  $\mathbf{S}$  și  $\mathbf{T}$  sunt aplicații liniare, obținem

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|\mathbf{S}(tu) - \mathbf{T}(tu)\|}{|tu|} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{\|t\mathbf{S}(u) - t\mathbf{T}(u)\|}{t|u|} = \frac{\|\mathbf{S}(u) - \mathbf{T}(u)\|}{|u|} = 0,$$

de unde rezultă  $\|\mathbf{S}(u) - \mathbf{T}(u)\| = 0, \forall u \in \mathbb{R}^*$ . Adăugând faptul că  $\mathbf{S}(0) = \mathbf{T}(0)$  deducem că  $\mathbf{S}(u) = \mathbf{T}(u), \forall u \in \mathbb{R}$ , deci  $\mathbf{S} = \mathbf{T}$ . **q.e.d.**

Deoarece  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , din Teorema 4.10.1 deducem că diferențiala funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $t_0 \in I$  este cunoscută dacă și numai dacă se cunoaște matricea sa în perechea de baze  $\mathbf{1} \subset \mathbb{R}$  și  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m$ , căci atunci

$$d\mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{e}'(Ah) = (\mathbf{e}'A)h = h \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{e}'_j, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

unde  $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m$ .

Teorema de mai jos urmează să precizeze cine sunt elementele  $a_1, a_2, \dots, a_m$  ale matricei coloană  $A$  a aplicației  $d\mathbf{f}(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  în perechea de baze  $\{1\} \subset \mathbb{R}$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ .

**Teorema 5.5.2.** *Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $t_0 \in I' \cap I$  dacă și numai dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă în  $t_0$ .*

*Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$ , atunci matricea  $A$  a diferențialei lui  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ , în perechea de baze*

$\{1\} \subset \mathbb{R}$  și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$ , este

$$A = \begin{pmatrix} f'_1(t_0) \\ f'_2(t_0) \\ \vdots \\ f'_m(t_0) \end{pmatrix},$$

adică

$$\mathbf{e}'A = \mathbf{f}'(t_0),$$

și, prin urmare,

$$d\mathbf{f}(t_0)(h) = d\mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}'(t_0)h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \quad (5.35)$$

*Demonstrație.* Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$ , atunci are loc (5.31), din care, pentru  $t \neq t_0$ , deducem

$$\frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = d\mathbf{f}(t_0)(1) + \boldsymbol{\alpha}(t) \frac{|t - t_0|}{t - t_0}, \quad \forall t \in I \setminus \{t_0\}. \quad (5.36)$$

Cum mulțimea  $\left\{ \frac{|t - t_0|}{t - t_0} : t \in I \setminus \{t_0\} \right\}$  este mărginită și  $\boldsymbol{\alpha}$  are proprietatea (5.28), din (5.36) deducem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = d\mathbf{f}(t_0)(1) = d\mathbf{f}(t_0; 1). \quad (5.37)$$

Comparând (5.37) cu (5.13) și folosind unicitatea limitei unei funcții într-un punct, obținem

$$d\mathbf{f}(t_0; 1) = \mathbf{f}'(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), \dots, f'_m(t_0)) = \mathbf{e}'A \in \mathbb{R}^m,$$

unde  $A$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{f}'(t_0)$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^m$  și are ca elemente derivatele în  $t_0$  ale componentelor funcției  $\mathbf{f}$ . Din acest rezultat și liniaritatea lui  $d\mathbf{f}(t_0)$  rezultă (5.35).

Reciproc, să arătăm că derivabilitatea lui  $\mathbf{f}$  în  $t_0$  implică diferențiabilitatea lui  $\mathbf{f}$  în  $t_0$  și egalitatea (5.35). Pentru aceasta considerăm funcția

$$t \mapsto \boldsymbol{\alpha}(t) = \begin{cases} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{f}'(t_0), & t \in I \setminus \{t_0\}, \\ \mathbf{0}, & t = t_0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Din faptul că  $\mathbf{f}$  este derivabilă în  $t_0$ , din (5.38) obținem (5.28) și, tot din (5.38), avem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0) + \boldsymbol{\beta}(t)|t - t_0|, \quad (5.39)$$

unde

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}(t) \frac{|t - t_0|}{t - t_0}, & t \neq t_0, \\ \mathbf{0}, & t = t_0. \end{cases}$$

Din definiția lui  $\boldsymbol{\beta}$  rezultă

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}(t_0) = \mathbf{0}.$$

Folosind acest rezultat în (5.39), conform Definiției 5.5.1 rezultă că  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$  și are loc (5.35). **q.e.d.**

**Observația 5.5.1.** Teorema 5.5.2 arată că pentru funcțiile vectoriale de variabilă reală noțiunile de diferențiabilitate și derivabilitate coincid. Deosebirea între aceste noțiuni apare când discutăm efectele lor, diferențiala și derivata în punct a funcției considerate. Mai precis, diferențiala funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $t_0 \in I' \cap I$  este un operator liniar  $d\mathbf{f}(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , iar  $\mathbf{f}'(t_0)$  este un vector din  $\mathbb{R}^m$ , între acestea existând legătura (5.35).

**Definiția 5.5.3.** Numim **creșterea** funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0$ , corespunzătoare **creșterii**  $t - t_0$  a variabilei independente, vectorul

$$\Delta \mathbf{f}(t_0; t - t_0) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) \in \mathbb{R}^m, \quad t \in I,$$

sau echivalent,

$$\Delta \mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0), \quad h \in \mathbb{R}, \quad t_0 + h \in I.$$

**Observația 5.5.2.** Din Definiția 5.5.1 și Definiția 5.5.3 rezultă  $\Delta \mathbf{f}(t_0; t - t_0) = d\mathbf{f}(t_0; t - t_0) + \alpha(t)|t - t_0|$ ,  $t \in I$ , sau echivalent,  $\Delta \mathbf{f}(t_0; h) = \mathbf{f}'(t_0)h + \alpha(t_0 + h)|h|$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 + h \in I$ .

**Observația 5.5.3.** Deoarece  $\alpha(t_0 + h)|h|$  tinde la zero mai repede decât  $d\mathbf{f}(t_0; h)$ , atunci când  $h \rightarrow t_0$ , rezultă că pentru valori mici ale lui  $h = t - t_0$  creșterea corespunzătoare funcției  $\mathbf{f}$  în  $t_0$  este **suficient de bine aproximată** prin partea ei principală  $d\mathbf{f}(t_0; h)$ . Deci

$$\Delta \mathbf{f}(t_0; h) \cong d\mathbf{f}(t_0; h), \quad (5.40)$$

sau echivalent,

$$\mathbf{f}(t_0 + h) \cong \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; h) \quad (5.41)$$

și prin urmare funcția afină  $\mathbf{A}(\cdot)$  are forma finală

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{f}(t_0) + d\mathbf{f}(t_0; t - t_0) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0).$$

Relația (5.40), sau echivalenta ei (5.41), se numește *formula fundamentală de aproximare a valorilor funcției*  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  într-o vecinătate  $V_0 \in \mathcal{V}(t_0)$ , sau *lema fundamentală a calculului diferențial*.

Expresia din membrul drept al relației (5.41) se numește *aproximația liniară* a funcției  $\mathbf{f}$ .

**Observația 5.5.4.** Toate considerațiile de mai sus rămân evident valabile când  $m = 1$ , caz în care obținem diferențiabilitatea și diferențiala unei funcții reale de o variabilă reală. Dacă  $f \in \mathcal{F}(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $I$  interval, este derivabilă în  $t_0 \in I' \cap I$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $t_0$  (este valabilă și reciproca) și avem

$$f(t) = f(t_0) + df(t_0)(h) + \alpha(t_0 + h)|h|, \quad h \in \mathbb{R}, \quad t_0 + h \in I, \quad (5.42)$$

unde

$$df(t_0; h) = df(t_0)(h) = f'(t_0)h, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (5.43)$$

În acest caz particular mărimile introduse mai sus pot fi interpretate geometric.



În primul rând  $df(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  este o funcție reală de variabilă reală, liniară. Graficul acestei funcții este o dreaptă care trece prin originea reperului cartezian din plan având panta egală cu  $f'(t_0)$ , adică  $\text{tg } \alpha_0 = f'(t_0)$ .

Pentru a vedea legătura (5.43) direct pe graficul funcției  $f \in \mathcal{F}(I)$  în reperul cartezian  $tOx$  cât și aproximarea (5.41), care în acest caz particular devine

$$f(t_0 + h) \approx f(t_0) + f'(t_0)h, \quad h \in \mathbb{R}, \quad (5.44)$$

să observăm mai întâi că tangenta ( $T$ ) la graficul funcției  $f$  în punctul  $M_0(t_0, f(t_0))$  are ecuația

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Această tangentă intersectează paralela la axa  $Ox$ , de ecuație  $t = t_0 + h$ , în punctul  $P(t_0 + h, f(t_0) + f'(t_0)h)$ . Paralela  $t = t_0 + h$  intersectează graficul funcției  $f$  în punctul  $M(t_0 + h, f(t_0 + h))$  și paralela prin  $M_0$  la axa  $Ot$  în punctul  $Q(t_0 + h, f(t_0))$ . În sfârșit, aceeași paralelă la axa  $Ox$  intersectează axa  $Ot$  în punctul  $M'(t_0 + h, 0)$ .

Acum, avem toate elementele pentru a interpreta geometric mărimile introduse mai sus, și anume:

- mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{M'Q}$  pe direcția versorului  $\mathbf{e}'_2 = (0, 1)$  este  $f(t_0)$ ;
- mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{QP}$  pe direcția lui  $\mathbf{e}'_2$  este  $df(t_0; h)$ , valoarea în  $h$  a diferențialei lui  $f$  în  $t_0$ ;
- mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{PM}$  pe direcția lui  $\mathbf{e}'_2$  este cantitatea  $\alpha(t_0 + h)|h| = \alpha(t)|t - t_0|$ ;
- mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{M'P}$  pe direcția lui  $\mathbf{e}'_2$  este  $f(t_0 + h)$ ;
- mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{M'M}$  pe  $\mathbf{e}'_2$  este  $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ .

Când  $h$  este foarte mic, numărul  $\|\overrightarrow{PM}\|$  este, de asemenea, foarte mic. Prin urmare, mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{M'P}$  pe direcția lui  $\mathbf{e}'_2$  se poate aproxima cu mărimea algebrică a proiecției vectorului  $\overrightarrow{M'M}$  pe  $\mathbf{e}'_2$  și deci (5.44) este justificată.

Să considerăm acum funcția identică

$$i_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad i_{\mathbb{R}}(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru orice  $t_0 \in \mathbb{R}$  are loc identitatea

$$i_{\mathbb{R}}(t) = i_{\mathbb{R}}(t_0) + 1 \cdot (t - t_0) + 0 \cdot |t - t_0|, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dacă comparăm această egalitate cu (5.42) și (5.43) constatăm că funcția (5.44) este diferențiabilă în orice punct  $t_0 \in \mathbb{R}$  și

$$di_{\mathbb{R}}(t_0; h) = di_{\mathbb{R}}(t_0)(h) = 1 \cdot h = h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

adică, indiferent de  $t_0$ , graficul diferențialei lui  $i_{\mathbb{R}}$  este prima bisectoare a reperului cartezian din plan. Fiindcă această diferențială este aceeași în orice punct  $t_0 \in \mathbb{R}$  ea se notează prin

$$di_{\mathbb{R}}(t) = dt.$$

Prin urmare  $dt \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . De acum, lui  $dt$  îi vom spune *diferențiala variabilei independente*. Valorile sale se calculează după regula

$$dt(h) = h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \quad (5.45)$$

care arată că matricea operatorului liniar  $dt$  în baza canonică din  $\mathbb{R}$ , formată dintr-un singur versor, este egală cu  $1$ .

Folosind acum (5.45) constatăm că (5.35) se scrie în forma

$$df(t_0)(h) = \mathbf{f}'(t_0)dt(h), \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

de unde, renunțând la variabila  $h$ , observăm că aplicația liniară  $df(t_0) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  se exprimă cu ajutorul aplicației liniare  $dt \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  prin

$$df(t_0) = \mathbf{f}'(t_0)dt.$$

În particular, în cazul  $m = 1$ , avem

$$df(t_0) = f'(t_0)dt.$$

**Teorema 5.5.3.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în punctul  $t_0 \in I' \cap I$  dacă și numai dacă funcțiile componente sunt diferențiabile în  $t_0$ . Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$ , atunci are loc

$$d\mathbf{f}(t_0) = (df_1(t_0), df_2(t_0), \dots, df_m(t_0)). \quad (5.46)$$

*Demonstrație.* Rezultă imediat folosind Teorema 5.1.3 și Teorema 5.5.2.

**q.e.d.**

**Observația 5.5.5.** Membrul doi din (5.46) nu este vector din  $\mathbb{R}^m$  deoarece coordonatele  $df_i(t_0)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt aplicații liniare de la  $\mathbb{R}$  la  $\mathbb{R}$ , prin urmare

$$d\mathbf{f}(t_0) \in \underbrace{L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \dots \times L(\mathbb{R}, \mathbb{R})}_{\text{de } m \text{ ori}} = (L(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^m, \quad (5.47)$$

deci componenta de pe locul  $k$  este diferențiala funcției  $f_k$  în punctul  $t_0$

$$df_k(t_0) = f'_k(t_0)dt, \quad k \in \overline{1, m}.$$

Relația de apartenență (5.47) afirmă că

$$L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) = \underbrace{L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \dots \times L(\mathbb{R}, \mathbb{R})}_{\text{de } m \text{ ori}}.$$

**Definiția 5.5.4.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă, dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în orice punct  $t \in I$ .

**Definiția 5.5.5.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  funcție diferențiabilă. Aplicația  $t \in I \mapsto d\mathbf{f}(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  se numește diferențiala de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{f}$ .

Funcția din Definiția 5.5.5 are următoarele proprietăți imediate:

$$d\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}'(t)dt;$$

$$d\mathbf{f}(t) = (df_1(t), df_2(t), \dots, df_m(t)) \in (L(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^m,$$

unde diferențialele funcțiilor coordonate  $f_k$  ale funcției  $\mathbf{f}$  sunt  $df_k(t) = f'_k(t)dt \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $k \in \overline{1, m}$ .

Utilizând rezultatele din această secțiune, cât și pe cele din prima secțiune a acestui capitol, putem lesne demonstra

**Teorema 5.5.4. (Reguli de diferențiere)** Fie funcțiile scalare  $\varphi \in \mathcal{F}(I)$  și  $\psi \in \mathcal{F}(J, I)$ , unde  $I$  și  $J$  sunt intervale din  $\mathbb{R}$ , funcțiile vectoriale  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  din  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  și constantele reale arbitrare  $\lambda$  și  $\mu$ . Dacă aceste funcții sunt diferențiabile, atunci funcțiile:  $\varphi\mathbf{f}$ ;  $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ ;  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ ;  $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$  și  $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})$  (în cazul  $m = 3$ );  $\mathbf{f} \circ \psi$ ; și funcția pozitivă  $\|\mathbf{f}\|$  sunt diferențiabile și, pentru orice  $t \in I$ , au loc următoarele proprietăți:

$$d(\varphi\mathbf{f})(t) = \varphi(t)d\mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t)d\varphi(t);$$

$$d(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})(t) = \lambda d\mathbf{f}(t) + \mu d\mathbf{g}(t)$$

$$d(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})(t) = \mathbf{g}(t) \cdot d\mathbf{f}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot d\mathbf{g}(t), ;$$

$$d(\mathbf{f} \times \mathbf{g})(t) = (d\mathbf{f}(t)) \cdot \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \cdot d(\mathbf{g}(t));$$

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h})(t) = (d\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{f}(t), d\mathbf{g}(t), \mathbf{h}(t)) + (\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t), d\mathbf{h}(t));$$

$$d(\mathbf{f} \circ \psi)(\tau) = \mathbf{f}'(\psi(\tau))d\psi(\tau), \quad \forall \tau \in J;$$

$$d\|\mathbf{f}\|(t) = \frac{1}{\|\mathbf{f}(t)\|} \mathbf{f}(t) \cdot d\mathbf{f}(t)$$

**Corolarul 5.5.1.** Dacă funcția  $\mathbf{h} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  are direcție fixă, adică  $\mathbf{h}(t) = \varphi(t)\mathbf{c}$ , unde  $\mathbf{c}$  este vector constant din  $\mathbb{R}^m$ , iar funcția  $\varphi$  este funcție diferențiabilă, atunci  $\mathbf{h}$  este diferențiabilă și  $d\mathbf{h}(t) = (d\varphi(t))\mathbf{c}$ ,  $t \in I$ .

*Demonstrație.* Se folosește prima regulă de diferențiere din Teorema 5.5.4 și se ține cont că diferențiala funcției constante este identic nulă. **q.e.d.**

**Corolarul 5.5.2.** Fie funcția diferențiabilă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ . Dacă funcția reală de variabilă reală  $\|\mathbf{f}\|$  este funcția constantă, atunci

$$\mathbf{f}(t) \cdot d\mathbf{f}(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

*Demonstrație.* Identitatea de demonstrat rezultă imediat din ultima egalitate a Teoremei 5.5.4, ținându-se totodată cont de faptul că diferențiala funcției constante este nulă și că spațiul dual  $(L(\mathbb{R}))^m$  este izomorf cu spațiul vectorial  $\mathbb{R}^m$  deoarece au aceeași dimensiune. **q.e.d.**

În ipotezele Corolarului 5.5.2, identitatea menționată în concluzia acestuia arată că vectorul  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^m$  este ortogonal pe vectorul  $d\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^m$ .

## 5.6 Diferențiabilitate și diferențiale de ordin superior ale funcțiilor vectoriale de argument real

Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă pe intervalul deschis  $I \in \mathbb{R}$ , există funcția

$$d\mathbf{f} : I \rightarrow L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m),$$

numită diferențială de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{f}$  pe intervalul  $I$ , a cărei valoare în punctul  $t \in I$ ,  $(d\mathbf{f})(t)$  sau, simplu,  $d\mathbf{f}(t)$ , este diferențiala funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t$ . Evident

$$(d\mathbf{f})(t) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad \forall t \in I$$

și

$$((d\mathbf{f})(t))(h) = d\mathbf{f}(t)(h) = d\mathbf{f}(t; h) \in \mathbb{R}^m, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Vectorul  $(d\mathbf{f})(t; h) = ((d\mathbf{f})(t))(h) = d\mathbf{f}(t; h) = d\mathbf{f}(t)(h) \in \mathbb{R}^m$  se calculează după legea

$$(d\mathbf{f})(t; h) = \mathbf{f}'(t)(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}. \quad (5.48)$$

Această formulă se mai poate scrie în forma

$$(d\mathbf{f})(\cdot; h) = (d\mathbf{f})(\cdot)(h) = \mathbf{f}'(\cdot)h, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad (5.49)$$

în care trebuie să înțelegem că punctul dintre paranteze urmează a fi ocupat, atunci când se impune precizat, de o valoare a lui  $t$  din intervalul deschis  $I$ .

**Definiția 5.6.1.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește **de două ori diferențiabilă în  $t_0 \in I$**  dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă pe intervalul deschis  $I$  și funcția diferențială de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$ .

Conform acestei definiții există diferențiala în punctul  $t_0$  a funcției  $d\mathbf{f}$ ,

$$(d(d\mathbf{f}))(t_0) \in L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)),$$

funcție liniară continuă de la  $\mathbb{R}$  în  $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ . Convenim să notăm această diferențială cu  $(d^2\mathbf{f})(t_0)$ , sau  $d^2\mathbf{f}(t_0)$ . Deci

$$d^2\mathbf{f}(t_0) \in L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)); \quad (d^2\mathbf{f}(t_0))(h) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m), \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

aceasta însemnând că

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \in \mathbb{R}^m, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Deoarece spațiul liniar  $L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m))$  este izomorf cu  $L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , vectorul  $((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \in \mathbb{R}^m$  se poate identifica cu vectorul  $(d^2\mathbf{f}(t_0))(h, k) \in \mathbb{R}^m$ , unde

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k) \equiv (d^2\mathbf{f}(t_0))(h, k), \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Deci,  $d^2\mathbf{f}(t_0)$  este o funcție biliniară continuă pe  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  și simetrică deoarece

$$d^2\mathbf{f}(t_0)(h, k) = d^2\mathbf{f}(t_0)(k, h), \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Pentru determinarea expresiei diferențialei de ordinul al doilea a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ ,  $d^2\mathbf{f}(t_0)$ , folosim Definiția 5.6.1 și relațiile (5.48), (5.49). Conform acestora, avem

$$((d^2\mathbf{f}(t_0))(h))(k)(\mathbf{f}''(t_0)h)(k).$$

Putem scrie  $(\mathbf{f}''(t_0) \cdot h)(k)$  căci se poate identifica vectorul  $\mathbf{f}''(t_0)h \in \mathbb{R}^m$  cu funcția liniară  $h \mapsto \mathbf{f}''(t_0)h$  prin izomorfismul natural care există între spațiile vectoriale  $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbb{R}^m$ . Având în vedere expresia unei aplicații liniare din  $L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ , putem scrie

$$(\mathbf{f}''(t_0)h)(k) = \mathbf{f}''(t_0)hk, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Deci

$$d^2\mathbf{f}(t_0)(h, k) = \mathbf{f}''(t_0)hk, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \quad (5.50)$$

**Definiția 5.6.2.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  funcție de două ori diferențiabilă în  $t_0 \in I$ . Aplicația biliniară simetrică

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = d^2\mathbf{f}(t_0; \cdot, \cdot) = d^2\mathbf{f}(t_0)(\cdot, \cdot) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$d^2\mathbf{f}(t_0)(h, k) = d^2\mathbf{f}(t_0; h, k) = d(d\mathbf{f}(\cdot; h)(t_0)(k)) = (\mathbf{f}(\cdot)h)'(t_0)k = \mathbf{f}''(t_0)hk,$$

se numește **diferențiala a doua** a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0 \in I$ .

Având în vedere (5.45), cu ajutorul căreia putem scrie:

$$dt(h) = h, \quad \forall h \in \mathbb{R}; \quad dt(k) = k, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

rezultă că (5.50) se mai poate scrie în forma

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}''(t_0)(dt)^2 = \mathbf{f}''(t_0)dt^2. \quad (5.51)$$

**Definiția 5.6.3.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește de două ori diferențiabilă dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în orice punct  $t \in I$ .

**Definiția 5.6.4.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  funcție de două ori diferențiabilă. Aplicația biliniară simetrică

$$d^2\mathbf{f} = d(d\mathbf{f}) : I \rightarrow L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)) \simeq L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m),$$

se numește **diferențiala a doua** a câmpului vectorial  $\mathbf{f}$  dacă

$$t \in I \mapsto d^2\mathbf{f}(t) \in L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^m),$$

unde

$$d^2\mathbf{f}(t)(h, k) = d^2\mathbf{f}(t; h, k) = \mathbf{f}''(t)hk, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Având în vedere relația (5.51) putem, de asemenea, să scriem

$$t \in I \mapsto d^2\mathbf{f}(t), \quad d^2\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}''(t)dt^2. \quad (5.52)$$

Remarcăm că în cazul  $m = 1$ , (5.50) devine

$$d^2f(t_0; h, k) = f''(t_0)hk, \quad \forall (h, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (5.53)$$

care arată că diferențiala a doua a unei funcții reale de o variabilă reală este o formă biliniară simetrică pe  $\mathbb{R}$ , în timp ce (5.52), în acest caz particular, devine  $d^2f(t) = f''(t)dt^2$ .

**Teorema 5.6.1.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ ,  $I$  interval din  $\mathbb{R}$ , este de două ori diferențiabilă în  $t_0 \in I$  dacă și numai dacă funcțiile componente  $f_j$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt de două ori diferențiabile în  $t_0$ . Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este de două ori diferențiabilă în  $t_0$ , atunci are loc egalitatea

$$d^2\mathbf{f}(t_0) = (d^2f_1(t_0), d^2f_2(t_0), \dots, d^2f_m(t_0)),$$

unde

$$d^2f_j(t_0) = f_j''(t_0)dt^2, \quad j \in \overline{1, m}.$$

*Demonstrație.* Aceste egalități rezultă din (5.50), (5.17), (5.53) și (5.45).

q.e.d.

Așadar, diferențiala a doua a funcției vectoriale de argument real  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $t_0 \in I$  este o  $m$ -uplă ordonată de diferențiale de ordinul al doilea ale funcțiilor coordonate.

**Observația 5.6.1.** Aplicând funcției diferențiala de ordinul  $k-1$  a funcției  $\mathbf{f}$  procedeul care ne-a condus la diferențiabilitatea și diferențiala de ordinul al doilea pentru funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ , vom fi conduși la noțiunile de diferențiabilitate și diferențială de ordinul  $k$  a funcției  $\mathbf{f}$  într-un punct  $t_0 \in I$ .

**Definiția 5.6.5.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește de  $k$  ori diferențiabilă în  $t_0 \in I$  dacă  $\mathbf{f}$  este de  $k-1$  ori diferențiabilă pe intervalul deschis  $I$  și funcția diferențială de ordinul  $k-1$  a funcției  $\mathbf{f}$

$$d^{k-1}\mathbf{f}(\cdot; h_1, \dots, h_{k-1}) : I \rightarrow L(\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k-1 \text{ ori}}, \mathbb{R}^m),$$

$$d^{k-1}\mathbf{f}(t; h_1, \dots, h_{k-1}) = \mathbf{f}^{(k-1)}(t)h_1 \dots h_{k-1}, \quad \forall (h_1, h_2, \dots, h_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$$

este diferențiabilă în  $t_0$ .

**Definiția 5.6.6.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori diferențiabilă în punctul  $t_0$  din intervalul deschis  $I \subset \mathbb{R}$ , atunci aplicația  $k$  liniară

$$d^k\mathbf{f}(t_0) = d^k\mathbf{f}(t_0)(\cdot, \cdot, \dots, \cdot) = d^k\mathbf{f}(t_0; \cdot, \cdot, \dots, \cdot) : \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k \text{ ori}} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

ale cărei valori sunt date de

$$d^k\mathbf{f}(t_0)(h_1, h_2, \dots, h_k) = \mathbf{f}^{(k)}(t_0)h_1 h_2 \dots h_k, \quad \forall (h_1, h_2, \dots, h_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (5.54)$$

se numește **diferențiala de ordinul  $k$**  a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ .

**Definiția 5.6.7.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește **diferențiabilă de  $k$  ori** pe o submulțime deschisă a intervalului deschis  $I \subset \mathbb{R}$  dacă  $\mathbf{f}$  este de  $k$  ori diferențiabilă în orice punct din acea submulțime. Funcția  $\mathbf{f}$  este **diferențiabilă de  $k$  ori** dacă ea este de  $k$  ori diferențiabilă în orice punct din  $I$ .

**Definiția 5.6.8.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori diferențiabilă, atunci funcția  $k$ -liniară

$$d^k\mathbf{f} = d(d^{k-1}\mathbf{f}) : I \rightarrow L(\mathbb{R}, L(\mathbb{R}^{k-1}, \mathbb{R}^m)) \simeq L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m),$$

se numește **diferențiala de ordinul  $k$**  a câmpului vectorial  $\mathbf{f}$  dacă

$$t \in I \mapsto d^k\mathbf{f}(t) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m),$$

unde

$$d^k\mathbf{f}(t)(h_1, h_2, \dots, h_k) = d^k\mathbf{f}(t; h_1, h_2, \dots, h_k) = \mathbf{f}^{(k)}(t)h_1 h_2 \dots h_k.$$

Având în vedere (5.45), din ultima egalitate obținem

$$d^k \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}^{(k)}(t) dt^k,$$

sau echivalent,

$$d^k \mathbf{f}(t) = \left( d^k f_1(t), d^k f_2(t), \dots, d^k f_m(t) \right),$$

unde  $d^k f_j(t_0) = f_j^{(k)}(t_0) dt^k$ ,  $j \in \overline{1, m}$ .

**Teorema 5.6.2.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este de  $k$  ori diferențiabilă dacă și numai dacă  $\mathbf{f} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ , sau echivalent,  $f_j \in C^k(I)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ .

Dacă  $\mathbf{f}$  este de  $k$  ori diferențiabilă, atunci

$$d^k \mathbf{f}(t) = (d^k f_1(t), d^k f_2(t), \dots, d^k f_m(t)), \quad t \in I,$$

unde  $d^k f_j(t) = f_j^{(k)}(t) dt^k$ ,  $t \in I$ .

*Demonstrație.* Concluziile acestei teoreme rezultă direct din rezultatele demonstrate anterior.

**q.e.d.**

## 5.7 Formula lui Taylor

Presupunem că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este astfel încât există derivatele sale până la ordinul  $k - 1$  inclusiv pe mulțimea  $V \cap I$ , unde  $V \in \mathcal{V}(t_0)$ , iar  $t_0$  este un punct fixat din intervalul real  $I$ . Presupunem în plus că derivata de ordinul  $k - 1$  a funcției  $\mathbf{f}$  este derivabilă în  $t_0$ . Prin urmare, există vectorii

$$\mathbf{f}(t_0), \quad \mathbf{f}'(t_0), \quad \dots, \quad \mathbf{f}^{(k-1)}(t_0), \quad \mathbf{f}^{(k)}(t_0) \in \mathbb{R}^m.$$

**Definiția 5.7.1.** Funcția polinomială  $\mathbf{P}_k(\cdot; t_0, \mathbf{f}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definită prin

$$\mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{1!} (t - t_0) + \dots + \frac{\mathbf{f}^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k, \quad (5.55)$$

se numește **polinomul lui Taylor**<sup>1</sup> de grad  $k$ , asociat funcției  $\mathbf{f}$ , centrat în  $t_0$ .

Coeficienții polinomului Taylor sunt vectori din  $\mathbb{R}^m$ .

Din (5.55) observăm că funcția polinomială  $\mathbf{P}_k(\cdot; t_0, \mathbf{f})$  are aceleași derivate cu  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ , până la ordinul  $k$  inclusiv

$$\mathbf{P}_k(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t_0), \quad \mathbf{P}'_k(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}'(t_0), \quad \dots, \quad \mathbf{P}^{(k)}_k(t_0; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}^{(k)}(t_0).$$

**Definiția 5.7.2.** Funcția vectorială de argument real

$$\mathbf{R}_k(\cdot; t_0, \mathbf{f}) : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f}), \quad t \in I, \quad (5.56)$$

se numește **rest de ordin  $k$**  al funcției  $\mathbf{f}$ .

<sup>1</sup>Taylor, Brook (1685–1731), matematician englez.

Ținând cont că funcția  $\mathbf{f}$  este continuă în  $t_0$ , din 5.55 și (5.56) obținem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{0}. \quad (5.57)$$

Apoi, din (5.56) mai rezultă

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f}) + \mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}), \quad \forall t \in I. \quad (5.58)$$

**Definiția 5.7.3.** Egalitatea (5.58) se numește **formula lui Taylor** pentru funcția  $\mathbf{f}$  cu rest de ordin  $k$ .

**Observația 5.7.1.** Având în vedere (5.57), din (5.58) constatăm că pentru valori ale lui  $t$  suficient de apropiate de  $t_0$  avem  $\mathbf{f}(t) \cong \mathbf{P}_k(t; t_0, \mathbf{f})$ . Această relație constituie o formulă aproximativă de calcul a valorilor funcției  $\mathbf{f}$  într-o vecinătate a punctului  $t_0$ , eroarea absolută care se comite când se folosește această aproximare este dată de norma vectorului  $\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f})$ .

Teorema de mai jos dă o evaluare a erorii care se comite când se utilizează aproximarea de mai sus.

**Teorema 5.7.1.** Fie  $\mathbf{f} \in C^k([a, b], \mathbb{R}^m)$  cu proprietatea că funcția vectorială de variabilă reală  $\mathbf{f}^{(k)} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^m)$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(a, b)$ .

Dacă există  $\lambda > 0$  astfel încât să avem

$$\|\mathbf{f}^{(k+1)}(t)\| \leq \lambda, \quad \forall t \in (a, b), \quad (5.59)$$

atunci are loc estimarea

$$\|\mathbf{R}_k(b; a, \mathbf{f})\| \leq \lambda \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (5.60)$$

*Demonstrație.* Să definim funcția

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \varphi(t) = \mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(t) - \sum_{s=1}^k \frac{(b-t)^s}{s!} \mathbf{f}^{(s)}(t), \quad t \in [a, b]. \quad (5.61)$$

Din (5.58), (5.61) și ipotezele teoremei rezultă că  $\varphi$  este continuă pe  $[a, b]$  și

$$\varphi(b) = \mathbf{0}, \quad \varphi(a) = \mathbf{R}_k(b; a, \mathbf{f}). \quad (5.62)$$

În plus,  $\varphi$  este derivabilă pe  $(a, b)$  și

$$\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!} \mathbf{f}^{(k+1)}(t), \quad \forall t \in (a, b). \quad (5.63)$$

Să considerăm acum funcția reală de variabilă reală

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = -\lambda \frac{(b-t)^{k+1}}{(k+1)!}, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (5.64)$$

Evident, din (5.64) și definiția derivatelor laterale rezultă că

$$g'(t) = \lambda \frac{(b-t)^k}{k!} = g'_d(t), \quad \forall t \in [a, b]. \quad (5.65)$$



Din (5.59), (5.63) și (5.65) observăm că  $\|\varphi'_d(t)\| \leq g'_d(t)$ ,  $\forall t \in (a, b)$ . Prin urmare, funcția  $\varphi$  din (5.61) și funcția  $g$  din (5.64) satisfac ipotezele Teoremei 5.2.2, deci

$$\|\varphi(b) - \varphi(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Înlocuind în această relație pe  $\varphi(b)$  și  $\varphi(a)$  cu valorile lor date în (5.62) și ținând cont de expresia lui  $g$  din (5.64), deducem (5.60). **q.e.d.**

Pentru a exprima restul de ordin  $k$  din formula lui Taylor (5.58) să remarcăm că procedând prin inducție matematică după  $k$  și folosind (5.60) putem demonstra că

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \sum_{s=1}^k \frac{(t-t_0)^s}{s!} \mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{(t-t_0)^k} = \mathbf{0}. \quad (5.66)$$

Se observă că pentru  $k = 1$  se obține definiția derivatei în  $t_0$  a funcției  $\mathbf{f}$ .

Să introducem acum funcția

$$\alpha \in \mathcal{F}(I \setminus \{t_0\}, \mathbb{R}^m), \quad \alpha(t) = k! \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0) - \sum_{s=1}^k \frac{(t-t_0)^s}{s!} \mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{(t-t_0)^k}. \quad (5.67)$$

Din (5.66) și (5.67) deducem

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = \mathbf{0}. \quad (5.68)$$

Aceasta arată că funcția  $\alpha$  din (5.67) poate fi prelungită prin continuitate în  $t_0$ .

Atunci, din (5.67) obținem

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^k \frac{\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{s!} (t-t_0)^s + \frac{(t-t_0)^k}{k!} \alpha(t), \quad t \in I. \quad (5.69)$$

Comparând (5.69) cu (5.58) deducem că (5.67) este formula lui Taylor, restul de ordin  $k$  fiind

$$\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \frac{(t-t_0)^k}{k!} \alpha(t), \quad t \in I. \quad (5.70)$$

Din (5.70) și (5.68) obținem  $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|^k} \mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{0}$ . Această relație arată că fiecare din coordonatele funcției  $\mathbf{R}_k(\cdot; t_0, \mathbf{f})$  este *infinit mic* în raport cu  $|t-t_0|^k$  pentru  $t \rightarrow t_0$  [3, p. 141], fapt ce poate fi scris în forma

$$\mathbf{R}_k(t; t_0, \mathbf{f}) = \mathbf{o}(|t-t_0|^k), \quad t \rightarrow t_0.$$

Dacă folosim această exprimare a restului de ordin  $n$  în (5.58) putem da o altă exprimare pentru formula lui Taylor și anume

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^k \frac{\mathbf{f}^{(s)}(t_0)}{s!} (t-t_0)^s + \mathbf{o}(|t-t_0|^k), \quad t \rightarrow t_0.$$

Restul dedus în (5.70) se numește *restul lui Peano*<sup>2</sup>, iar formula (5.69) este cunoscută sub numele de *formula lui Taylor–Young* [13, p. 100].

În cazul  $m = 1$ , rezultatele deduse mai sus se păstrează. În plus, într-un paragraf ulterior, vom arăta că putem da și alte expresii restului de ordin  $n$  din formula lui Taylor.

<sup>2</sup>Peano, Giuseppe (1858–1932), matematician, logician și lingvist italian.

**Observația 5.7.2.** Dacă în formula (5.69) considerăm  $k = 1$ , obținem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)\boldsymbol{\alpha}(t), \quad t \in I, \quad (5.71)$$

care definește diferențiabilitatea funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $t_0 \in I$  (vezi Definiția 5.5.1). Deci formula lui Taylor (5.58) generalizează noțiunea de diferențiabilitate a unei funcții vectoriale de argument real.

**Observația 5.7.3.** Dacă folosim (5.54) constatăm că (5.69) se poate scrie în forma diferențială

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} d^s \mathbf{f}(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, \dots, t - t_0}_{s-\text{ori}}) + \frac{(t - t_0)^k}{k!} \boldsymbol{\alpha}(t), \quad (5.72)$$

sau în forma

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} d^s \mathbf{f}(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, \dots, t - t_0}_{s-\text{ori}}) + \mathbf{o}(|t - t_0|^k), \quad t \rightarrow t_0,$$

în care termenul corespunzător lui  $k = 0$  este  $\mathbf{f}(t_0)$ , iar  $0! = 1$ .

## 5.8 Drumuri parametrizate în $\mathbb{R}^m$

Fie  $I$  un interval din  $\mathbb{R}$  și  $\mathbb{R}^m$  spațiul Euclidian  $m$ -dimensional, unde  $m \geq 2$ .

**Definiția 5.8.1.** Se numește **drum parametrizat** definit pe  $I$  cu valori în  $\mathbb{R}^m$ , sau simplu **drum** în  $\mathbb{R}^m$ , orice aplicație continuă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$ .

**Definiția 5.8.2.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este un drum în  $\mathbb{R}^m$ , atunci mulțimea  $\mathbf{f}(I)$  se numește **traectoria**, **imaginea**, sau **hodograful** drumului  $\mathbf{f}$ .

**Definiția 5.8.3.** Dacă  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este un drum în  $\mathbb{R}^m$ , atunci ecuațiile

$$x_i = f_i(t), \quad t \in I, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad (5.73)$$

se numesc **ecuații parametrice** ale drumului  $\mathbf{f}$  în  $\mathbb{R}^m$ , iar ecuația

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad (5.74)$$

se numește **ecuația vectorială** a drumului  $\mathbf{f}$  în  $\mathbb{R}^m$ . Variabila  $t$  a funcției  $\mathbf{f}$  se numește **parametru**.

**Exemplul 5.8.1.** Un drum parametrizat în plan este o aplicație continuă de forma  $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2)$ .

**Ecuațiile parametrice** ale drumului parametrizat în plan  $\mathbf{f}$  sunt  $\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \end{cases} \quad t \in I,$  în care am notat  $(x_1, x_2) = (x, y)$ . **Ecuația vectorială** a aceluiași drum este

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \quad (5.75)$$

unde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  este vectorul de poziție al punctului  $M \in \mathbb{E}^2$  care are coordonatele  $x$  și  $y$ , iar  $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ . **Traectoria** drumului în plan (5.75) este

$$\{M(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x = f_1(t), y = f_2(t), t \in I\}.$$

**Exemplul 5.8.2.** Un drum parametrizat în spațiu este o funcție vectorială de variabilă reală, continuă, de forma  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ , unde  $I \subset \mathbb{R}$  este interval. **Ecuatiile parametrice** ale drumului  $\mathbf{f}$  sunt

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \quad t \in I,$$

**traectoria** drumului este submulțimea lui  $\mathbb{E}^3$  definită prin

$$\{M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 : x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), t \in I\},$$

iar **ecuația vectorială** a sa este

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad t \in I, \quad (5.76)$$

unde

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad t \in I.$$

**Exemplul 5.8.3.** Fie  $\mathbf{f} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$  care, în baza Definiției 5.8.1, este un drum parametrizat în plan. Traectoria acestui drum este mulțimea punctelor din planul Euclidian raportat la reperul cartezian  $xOy$  ale căror coordonate  $x$  și  $y$  verifică condițiile  $x^2 + y^2 = 1$  și  $y \geq 0$ . Se vede imediat că traectoria acestui drum este semicercul din semiplanul  $y \geq 0$  care are centrul în origine și raza egală cu 1.

**Exemplul 5.8.4.** Drumul  $\mathbf{h} : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{h}(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$  are ca traectorie aceeași mulțime de puncte ca și traectoria drumului din Exemplul 5.8.3.

**Definiția 5.8.4.** Sensul de creștere al parametrului  $t$  din ecuația vectorială (5.74) a drumului parametrizat  $\mathbf{f}$  în  $\mathbb{R}^m$  imprimă un **sens de parcurs** pe traectorie care se numește **sens pozitiv de parcurs**. Drumul  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește **orientat** dacă este precizat un sens de parcurs al acestuia.

**Exemplul 5.8.5.** Funcția  $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}(t) = (\cos nt, \sin nt)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , are ca traectorie cercul de rază 1 cu centrul în originea reperului, parcurs însă de  $n$  ori în sens direct trigonometric. Când  $t$  parcurge intervalul  $\left[0, \frac{2\pi}{n}\right]$ , punctul corespunzător de pe traectorie,  $M(\cos nt, \sin nt)$ , parcurge o dată cercul.

**Exemplul 5.8.6.** Funcția  $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{f}(t) = (a \cos t, a \sin t, b)$  unde  $a$  și  $b$  sunt constante reale, iar  $a > 0$ , este un drum parametrizat în spațiu situat la intersecția **cilindrului circular** de ecuație  $x^2 + y^2 = a^2$  cu planul paralel cu planul  $xOy$  de ecuație  $z = b$ . Ecuațiile parametrice ale drumului sunt

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = b, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

iar ecuația sa vectorială este  $\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b \mathbf{k}$ . Evident, traiectoria acestui drum în  $\mathbb{R}^3$  este un cerc.

**Exemplul 5.8.7.** Drumul parametrizat

$$\mathbf{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(t) = (R \cos t, R \sin t, ht), \quad R > 0, \quad h \in \mathbb{R}^*,$$

are drept traiectorie o **buclă din elicea cilindrică de pas constant**.

Într-adevăr, traiectoria acestui drumul poate fi descrisă *cinematic* în modul următor. Presupunem că la momentul  $\tau = 0$ , punctul  $M(x, y, z)$ , aflat în mișcarea care se va descrie mai jos, se găsește în  $A(R, 0, 0)$ .

Fie  $(G)$  o generatoare a cilindrului circular de rază  $R$  cu axa de rotație axa  $Oz$ . La momentul  $\tau = 0$ , generatoarea  $(G)$  trece prin punctul  $A$ .

Presupunem că cilindrul execută o *mișcare circulară uniformă* în jurul axei  $Oz$  cu viteza unghiulară constantă  $\omega > 0$  și că punctul  $M \in (G)$  execută o *mișcare rectilinie uniformă* pe generatoarea  $(G)$  cu viteza constantă  $v > 0$ .

Când  $\tau$  parcurge intervalul de timp  $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$  punctul  $M$  are coordonatele

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = ht,$$

unde  $t = \omega\tau$  și  $v = \omega h$ . Intervalul de variație al parametrului  $t$  este  $[0, 2\pi]$ .

Acest punct descrie o buclă din elicea circulară de pas constant. ■

**Definiția 5.8.5.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}([\alpha, \beta], \mathbb{R}^m)$  este un drum parametrizat în  $\mathbb{R}^m$ , atunci  $\mathbf{a} = \mathbf{f}(\alpha) \in \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\beta) \in \mathbb{R}^m$  se numesc **capetele**, sau **extremitățile** drumului.

Drumul  $\mathbf{f}$  se numește **închis** dacă  $\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta)$ .

Dacă există  $t' \in [\alpha, \beta]$ ,  $t'' \in [\alpha, \beta]$ , cu  $t' \neq t''$ , astfel încât  $\mathbf{f}(t') = \mathbf{f}(t'')$ , spunem că punctul  $M'$  de vector de poziție  $\mathbf{f}(t')$  este **punct multiplu** al drumului  $\mathbf{f}$ .

Drumul

$$\mathbf{g} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\alpha + \beta - t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

se numește **opusul** drumului  $\mathbf{f}$ .

**Observația 5.8.1.** Dacă  $\mathbf{g}$  este opusul drumului  $\mathbf{f}$ , atunci  $\mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{f}(\beta)$ ,  $\mathbf{g}(\beta) = \mathbf{f}(\alpha)$ .

Un drum și opusul său au aceeași traiectorie, iar sensurile de parcurs sunt contrare.

**Definiția 5.8.6.** Dacă  $\mathbf{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  și  $\mathbf{g} : [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^m$  sunt două drumuri parametrizate în  $\mathbb{R}^m$  astfel încât  $\mathbf{f}(\beta) = \mathbf{g}(\beta)$ , atunci drumul  $\mathbf{h} : [\alpha, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{h}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), & t \in [\alpha, \beta], \\ \mathbf{g}(t), & t \in [\beta, \gamma], \end{cases}$  se numește **juxtapunerea**, sau **concatenatul** celor două drumuri.

Imaginea concatenatului este reuniunea hodografelor drumurilor  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ . Este posibil ca un drum parametrizat în  $\mathbb{R}^m$  să fie juxtapunerea a mai mult de două drumuri.

**Exemplul 5.8.8.** Drumul parametrizat în  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f} : [0, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}(t), & t \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \mathbf{v}(t), & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi], \\ \mathbf{w}(t), & t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}], \end{cases}$  unde

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}, \\ \mathbf{v}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}, \\ \mathbf{w}(t) = \left(\frac{2a}{\pi}t - 3a\right)\mathbf{i} + \left(a - \frac{a}{\pi}t\right)\mathbf{j}, \quad a > b > 0, \end{cases}$$

este juxtapunerea drumurilor  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  și  $\mathbf{w}$ . Primul drum are ca imagine sfertul de cerc din primul cadran cu centrul în origine și raza egală cu  $b$ ; cel de al doilea drum are ca imagine sfertul de elipsă din cadranul doi, de semiaxe  $a$  și  $b$ , cu axele de simetrie axele de coordonate, în timp ce al treilea drum este segmentul de dreaptă cu extremitățile  $C(-a, 0)$  și  $D(0, -\frac{a}{2})$ .

În aplicațiile practice ale calculului integral, geometriei diferențiale, mecanicii, fizicii etc., ipoteza de continuitate din Definiția 5.8.1 nu este suficientă. Ca să justificăm această afirmație să considerăm drumul  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  și  $t_0$  un punct fixat din  $I$ . Pentru fiecare  $t \in I \setminus \{t_0\}$  putem asocia drumul parametrizat

$$\mathbf{f}_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{f}_t(s) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} s, \quad s \in \mathbb{R} \quad (5.77)$$

care are ca hodograf dreapta din  $\mathbb{R}^m$  care trece prin punctele  $M_0$  și  $M$  ale imaginii lui  $\mathbf{f}$ , corespunzătoare valorilor  $t_0$  și  $t$  ale variabilei drumului.

Când  $s = 0$ , punctul corespunzătoare de pe hodograful drumului  $\mathbf{f}_t$  coincide cu  $M_0$ , iar când  $s = t - t_0$ , punctul corespunzătoare coincide cu  $M$ .

Să ne imaginăm acum mulțimea drumurilor parametrizate (5.77), în care  $t$  ia valori oricât de apropiate de  $t_0$ .

În aplicațiile practice interesează existența poziției limită a drumului (5.77) când  $t \rightarrow t_0$ . O asemenea poziție limită există dacă și numai dacă există în  $\mathbb{R}^m$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0}$$

care este derivata funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ , dacă funcția  $\mathbf{f}$  este derivabilă sau diferențiabilă în punctul  $t_0$ .

**Definiția 5.8.7.** Poziția limită  $\mathbf{f}_{t_0}$  a drumurilor (5.77) când  $t \rightarrow t_0$ , dacă există, se numește **tangenta** la drumul  $\mathbf{f}$  în punctul  $t_0$ .

Drumul  $\mathbf{f}_{t_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  există dacă și numai dacă funcția  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $t_0$ . Ecuația vectorială a drumului este  $\mathbf{r} = \mathbf{f}_{t_0}(s)$ , unde  $\mathbf{f}_{t_0}(s) = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Imaginea acestui drum este reprezentată grafic prin dreapta  $(T)$ , tangenta geometrică în punctul  $M_0$  la hodograful lui  $\mathbf{f}$ . Ecuația vectorială a tangentei  $(T)$  este

$$(T) : \quad \mathbf{x} = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.78)$$

iar ecuațiile sale parametrice sunt

$$(T) : \quad x_i = f_i(t_0) + sf'_i(t_0), \quad s \in \mathbb{R}, \quad i \in \overline{1, m}.$$

**Observația 5.8.2.** Ecuatiile parametrice ale tangentei ( $T$ ) sunt echivalente cu

$$(T) : \frac{x_1 - f_1(t_0)}{f'_1(t_0)} = \frac{x_2 - f_2(t_0)}{f'_2(t_0)} = \dots = \frac{x_m - f_m(t_0)}{f'_m(t_0)}. \quad (5.79)$$

**Definiția 5.8.8.** Ecuatiile (5.79) se numesc **ecuațiile canonice ale tangentei ( $T$ )** în punctul  $M_0$  la traiectoria drumului  $\mathbf{f}$ .

**Observația 5.8.3.** Pentru valori mici ale lui  $s = t - t_0$ , membrul doi din (5.78) este aproximarea liniară (funcția afină) a funcției  $\mathbf{f}$  într-o vecinătate a lui  $t_0$ .

**Definiția 5.8.9.** Drumul parametrizat  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește **neted** sau **regulat** dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă,  $\mathbf{f}' \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este continuă și  $\mathbf{f}'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ ; un drum  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  se numește **neted pe porțiuni** sau **regulat pe porțiuni** dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

**Observația 5.8.4.** Drumul  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este neted dacă :

$$\mathbf{f} \in C^1(I); \quad \mathbf{f}'(t) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din Definiția 5.3.7 și Definiția 5.8.9. ■

**Exercițiul 5.8.1.** Să se determine drumul parametrizat în  $\mathbb{R}^2$  care este frontiera bilei cu centrul în origine și raza unitate din spațiul metric  $(\mathbb{R}^2, d_2)$ , unde  $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

**Soluție.** Hodograful drumului este mulțimea punctelor  $M(x, y)$  care satisfac ecuația  $|x| + |y| - 1 = 0$ . Drumul este juxtapunerea drumurilor netede  $(BA), (AD), (DC), (DA)$ , laturile unui pătrat, care au ecuațiile parametrice:

$$\begin{aligned} (BA) : \quad & \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - t, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad ; \quad (AD) : \quad \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 - t, \end{cases} \quad t \in [1, 2] \quad ; \\ (DC) : \quad & \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = t - 3, \end{cases} \quad t \in [2, 3] \quad ; \quad (CA) : \quad \begin{cases} x = t - 4, \\ y = t - 3, \end{cases} \quad t \in [3, 4]. \end{aligned}$$

Fiecare latură a pătratului este traiectoria unui drum neted. În vârfurile pătratului nu putem construi tangenta la drum. Punctele  $A, B, C, D$  sunt *puncte singulare* ale drumului. ■

**Definiția 5.8.10.** Drumurile netede  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$ , cu aceeași orientare, se numesc **drumuri echivalente cu aceeași orientare**, și scriem  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ , dacă există o funcție reală de variabilă reală bijectivă  $\varphi : I \rightarrow J$ , strict crescătoare, derivabilă, cu derivată  $\varphi' : I \rightarrow J$  continuă și nenulă, care se numește **schimbare de parametru**  $s = \varphi(t)$ , astfel încât  $\mathbf{g} \circ \varphi = \mathbf{f}$ .

**Observația 5.8.5.** Deoarece  $\varphi \in \mathcal{F}(I, J)$  este funcție bijectivă, inversa sa,  $\varphi^{-1} \in \mathcal{F}(J, I)$ , este funcție derivabilă, iar derivata funcției inverse este continuă. Mai mult, avem

$$\mathbf{g}(s) = \mathbf{f}(\varphi^{-1}(s)), \quad \forall s \in J,$$

ceea ce arată că relația binară  $\sim$  stabilită între drumurile  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$  este **simetrică**.

**Observația 5.8.6.** Dacă  $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{F}(I_3, \mathbb{R}^m)$  sunt trei drumuri în  $\mathbb{R}^m$  astfel încât  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$  și  $\mathbf{g} \sim \mathbf{h}$ , atunci  $\mathbf{f} \sim \mathbf{h}$ , ceea ce arată că relația  $\sim$  este **tranzitivă**.

Într-adevăr, fie  $\varphi \in \mathcal{F}(I_1, I_2)$ , funcția care realizează echivalența drumurilor  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$ , iar  $\psi \in \mathcal{F}(I_2, I_3)$ , funcția care realizează echivalența drumurilor  $\mathbf{g}$  și  $\mathbf{h}$ . Atunci, avem:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(\varphi(t)), \quad t \in I_1; \quad \mathbf{g}(s) = \mathbf{h}(\psi(s)), \quad s \in I_2,$$

din care deducem

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{h}(\psi(\varphi(t))), \quad t \in I_1,$$

ceea ce arată că funcția  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{F}(I_1, I_3)$  realizează echivalența între drumurile  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{h}$  deoarece  $\psi \circ \varphi$  este o bijecție strict crescătoare de la  $I_1$  la  $I_3$ , derivabilă, cu derivata continuă și diferită de zero. ■

**Observația 5.8.7.** Orice drum neted în  $\mathbb{R}^m$  de forma  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este echivalent cu el însuși,  $\mathbf{f} \sim \mathbf{f}$ , ceea ce arată că  $\sim$  este o relație **reflexivă** în mulțimea drumurilor în  $\mathbb{R}^m$ .

**Observația 5.8.8.** Drumurile netede în  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$ , echivalente și cu aceeași orientare, au aceeași traiectorie, adică  $\mathbf{f}(I) = \mathbf{g}(J)$ .

Relația  $\sim$  fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă este o *relație de echivalență* în mulțimea drumurilor netede în  $\mathbb{R}^m$ . Faptul că bijecția  $\varphi$  care realizează echivalența este strict crescătoare, corespunde intuitiv parcurgerii celor două hodografe în același sens, ceea ce justifică folosirea cuvintelor *cu aceeași orientare* în Definiția 5.8.10.

Se știe că o relație de echivalență pe o mulțime (aici mulțimea drumurilor netede în  $\mathbb{R}^m$ ) împarte acea mulțime în *clase de echivalență*. Două drumuri netede  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  și  $\mathbf{g} \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}^m)$  aparțin aceleiași clase de echivalență dacă  $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ . Această situație conduce în mod natural la următoarea definiție.

**Definiția 5.8.11.** Se numește **curbă netedă** în  $\mathbb{R}^m$  o clasă de echivalență a relației de echivalență  $\sim$  în mulțimea drumurilor în  $\mathbb{R}^m$ .

**Observația 5.8.9.** Drumurile din Exemplitul 5.8.3 și Exemplitul 5.8.4 sunt netede, cu aceeași orientare și echivalente. Ele definesc una și aceeași curbă și anume semicercul superior din cercul cu centrul în origine și raza egală cu unitatea.

**Definiția 5.8.12.** *Dată o curbă netedă în  $\mathbb{R}^m$ , adică o clasă de echivalență în mulțimea drumurilor netede cu aceeași orientare în  $\mathbb{R}^m$ , dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^m)$  este un drum oarecare din această clasă, atunci (5.73) se numesc **ecuațiile parametrice ale curbei**, iar (5.74) este **ecuația vectorială a curbei** respective.*

*Un punct oarecare aparținând imaginii  $\mathbf{f}(I)$  se numește **punct regulat**, sau **punct ordinar**.*

*Unei curbe netede  $i$  se spune și **arc neted**. Curba dată în  $\mathbb{R}^m$  se numește **netedă pe porțiuni** dacă oricare din drumurile ce definesc clasa de echivalență din Definiția 5.8.11 este o justapunere de drumuri netede.*

*Când  $m = 2$  curba corespunzătoare se numește **curbă în plan**, iar dacă  $m = 3$  curba se numește **curbă în spațiu**.*

Toate celelalte noțiuni caracteristice drumurilor în  $\mathbb{R}^m$  se transmit curbelor în  $\mathbb{R}^m$ . De exemplu, *extremitățile* unei curbe în  $\mathbb{R}^m$  sunt extremitățile oricărui drum din clasa corespunzătoare de echivalență.

O curbă în  $\mathbb{R}^m$  se notează fie cu una din literele alfabetului grec sau latin, eventual flancată de paranteze, de exemplu  $(C)$  sau  $(\Gamma)$ , fie precizându-i extremitățile între două paranteze, de exemplu  $(AB)$ .

În încheiere, prezentăm unele noțiuni caracteristice curbelor în plan și curbelor în spațiu.

Dacă  $I$  este un interval de timp și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$  este un drum neted, atunci  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}$  reprezintă poziția la momentul  $t \in I$  a unui punct material în mișcare după legea  $\mathbf{f}$ , iar  $\mathbf{f}(I)$  este *traiectoria particulei*.

Dacă  $\mathbf{f} \in C^2(I)$ , atunci  $\mathbf{f}'(t)$  și  $\mathbf{f}''(t)$  reprezintă respectiv *vectorul viteză* și *vectorul accelerație* ale particulei la momentul  $t$ .

Scalarii nenegativi  $\|\mathbf{f}'(t)\|$  și  $\|\mathbf{f}''(t)\|$  se numesc corespunzător *viteza* și *accelerația* la momentul  $t$  ale particulei materiale în mișcare după legea  $\mathbf{f}$ .

Semnificația mecanică a condiției de regularitate  $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ ,  $t \in I$ , constă în aceea că particula materială, în mișcarea ei, nu are momente de repaos.

A da o curbă parametrizată în spațiu (planul  $Oxy$ ) înseamnă a considera un drum parametrizat

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3) \quad (\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2))$$

care face ca oricărui  $t \in I$  să-i corespundă punctul

$$(x(t), y(t), z(t)) \quad ((x(t), y(t)))$$

al cărui vector de poziție este

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k} \\ (\mathbf{r}(t) &= \mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}). \end{aligned}$$

În acest caz

$$\mathbf{r} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j} + f_3(t)\mathbf{k}, \quad t \in I \quad (\text{respectiv, } \mathbf{r} = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}, \quad t \in I)$$

se numește *ecuația vectorială a curbei în spațiu* (respectiv, în plan).

**Definiția 5.8.13.** *Dacă*

$$\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2)$$

*este un drum neted, sau neted pe porțiuni în  $\mathbb{R}^3$  ( $\mathbb{R}^2$ ), atunci numărul real pozitiv*

$$\mathcal{L} = \int_a^b \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt, \quad (5.80)$$

*unde*

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \quad (\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}),$$

*se numește **lungimea drumului**, sau **lungimea arcului de curbă** care are ca reprezentant drumul considerat. În aceste condiții, drumul considerat se numește **rectificabil**, iar curba considerată este numită **rectificabilă**.*



Fixând  $t_0 \in I = [a, b]$ , pentru orice  $t > t_0$  se definește lungimea  $s(t)$  a arcului de curbă  $(C)$  care are ca reprezentant restricția unui drum al clasei de echivalență la segmentul  $[t_0, t]$ . Dacă curba  $(C)$  este rectificabilă, atunci lungimea  $s(t)$  a porțiunii din curba  $(C)$ , corespunzătoare segmentului  $[t_0, t] \subset [a, b]$ , este dată de

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad t \in [t_0, b]. \quad (5.81)$$

Punctul  $t_0$  se numește *origine de arc* și, de regulă, se ia  $t_0 = a$ .

Folosind proprietățile integralelor definite, deducem

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

în cazul curbelor în spațiu și

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$$

pentru cazul când curba este situată în planul  $xOy$ .

Deoarece  $\dot{s} \in \mathcal{F}([a, b], [0, \mathcal{L}])$  are proprietatea  $\dot{s}(t) > 0, \forall t \in [a, b]$ , rezultă că  $s = s(t)$  este funcție strict crescătoare.

Prin urmare,  $t^{-1} : [0, \mathcal{L}] \rightarrow [a, b]$ , funcția inversă acesteia, poate juca rolul funcției  $\varphi$  din Definiția 5.8.10. Aceasta arată că drumurile:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f} \circ t^{-1} \in \mathcal{F}([0, \mathcal{L}], \mathbb{R}^3); \quad \mathbf{r} = \mathbf{f} \circ t^{-1} \in \mathcal{F}([0, \mathcal{L}], \mathbb{R}^2)$$

sunt echivalente respectiv cu drumurile:

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^3); \quad \mathbf{f} \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}^2),$$

deci reprezintă aceeași curbă  $(C)$ .

În această nouă parametrizare, numită *parametrizarea naturală* a curbei  $(C)$ ,  $s$  se numește *parametru natural*.

**Definiția 5.8.14.** Diferențiala  $ds = s'(t)dt$  a funcției definită în (5.81) se numește **element de arc**.

Dacă drumul neted, sau arcul de curbă netedă  $(\Gamma)$  este în spațiu, atunci

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

iar dacă acestea sunt în planul  $xOy$ , elementul de arc este

$$ds = \|d\mathbf{r}\| = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

În aceste relații  $dx, dy, dz$  sunt diferențialele funcțiilor coordonate ale funcției vectoriale de variabilă reală care definește drumul sau arcul de curbă  $(\Gamma)$ .

Convenim ca punctul  $M$  al curbei corespunzător valorii  $t$  a parametrului să se noteze prin  $M(t)$ , în această situație  $t$  numindu-se *coordonata curbilinie* a punctului  $M$  de pe curbă.

**Definiția 5.8.15.** Se numește **versorul tangentei** în punctul  $M(t)$  al curbei netede  $(\Gamma)$ , de ecuație vectorială (5.76) în cazul  $m = 3$  și de ecuație vectorială (5.75) în cazul  $m = 2$ , versorul  $\boldsymbol{\tau}(t)$  al vectorului  $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}'(t)$ , adică:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}} (\dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}); \quad (5.82)$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} (\dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j}). \quad (5.83)$$

Se vede imediat că  $\boldsymbol{\tau}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \frac{1}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ .

Alți versori importanți ai unei curbe ( $C$ ) sunt introduși mai jos.

Dacă notăm cu  $\omega(t)$  unghiul dintre versorul  $\mathbf{i}$  al axei  $Ox$  și versorul  $\boldsymbol{\tau}(t)$ , atunci versorul tangentei și cel al normalei în punctul curent al unei curbe netede din planul  $xOy$ , corespunzător valorii  $t$  a parametrului, sunt dați de

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \cos \omega(t) \mathbf{i} + \sin \omega(t) \mathbf{j}, \quad \mathbf{n}(t) = -\sin \omega(t) \mathbf{i} + \cos \omega(t) \mathbf{j}. \quad (5.84)$$

Dacă folosim (5.83), constatăm că

$$\cos \omega(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}, \quad \sin \omega(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}}.$$

**Definiția 5.8.16.** Versorul vectorului  $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$  se numește **versorul normalei principale** în punctul  $M(t)$  al curbei netede în spațiu de ecuație vectorială (5.76).

Versorul normalei principale, notat cu  $\boldsymbol{\nu}(t)$ , este

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{1}{\left\| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right\|} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \quad (5.85)$$

**Definiția 5.8.17.** Versorul  $\boldsymbol{\beta}(t)$ ,

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\tau}(t) \times \boldsymbol{\nu}(t), \quad (5.86)$$

se numește **versorul binormalei** în  $M(t)$  la curba de ecuație vectorială (5.76).

**Definiția 5.8.18.** Triedrul  $\{\boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\beta}(t)\}$ , unde versorii  $\boldsymbol{\tau}(t)$ ,  $\boldsymbol{\nu}(t)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(t)$  sunt dați corespunzător de (5.82), (5.85), (5.86), se numește **triedrul lui Frenet**<sup>3</sup> în punctul  $M(t)$  al curbei în spațiu de ecuație vectorială (5.76). Ansamblul

$$\{M(t); \boldsymbol{\tau}(t), \boldsymbol{\nu}(t), \boldsymbol{\beta}(t)\}$$

se numește **reper Frenet**, sau **reper local** în punctul  $M(t)$ .

În cazul curbei a cărei imagine este situată în planul  $xOy$ , reperul Frenet în  $M(t)$  este  $\{M(t); \boldsymbol{\tau}(t), \mathbf{n}(t)\}$  unde  $\boldsymbol{\tau}(t)$  și  $\mathbf{n}(t)$  sunt dați în (5.84).

Când parametrul  $t$  parcurge intervalul  $I = [a, b]$ , punctul  $M(t)$  corespunzător descrie traiectoria curbei, iar triedrul Frenet se mișcă odată cu punctul  $M(t)$ . Se pot stabili formule care să indice viteza de variație a versorilor triedrului Frenet în raport cu arcul traiectoriei. Mai precis, se demonstrează existența funcțiilor pozitive  $R \in \mathcal{F}([a, b])$  și  $T \in \mathcal{F}([a, b])$ , numite *rază de curbură* și respectiv *rază de torsiune* a curbei, astfel încât să aibă loc egalitățile

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \boldsymbol{\nu}, \\ \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R} \boldsymbol{\tau} + \frac{1}{T} \boldsymbol{\beta}, \\ \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{1}{T} \boldsymbol{\nu}. \end{cases}$$

<sup>3</sup>Frenet, Jean Frederic (1816–1900), matematician francez.

Aceste egalități se numesc *formulele lui Frenet* pentru o curbă în spațiu.

Inversa razei de curbură se numește *curbura* curbei considerate, iar inversa razei de torsiune se numește *torsiunea* curbei considerate. Curbura unei drepte în orice punct al ei este egală cu zero, iar torsiunea în orice punct al unei curbe situate într-un plan este, de asemenea, egală cu zero.

Raza de curbură măsoară *abaterea* curbei de la linia dreaptă (care are raza de curbură egală cu  $\infty$ ), iar  $T$  măsoară *abaterea* curbei de la planul determinat de punctul  $M(t)$  și versorii  $\tau(t)$  și  $\nu(t)$ , numit *planul osculator* în  $M(t)$ . Raza de torsiune a unei curbe plane este  $T = \infty$ .

În cazul unei curbe în plan, a cărei traiectorie se află în planul  $xOy$ , formulele lui Frenet devin

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}\mathbf{n}, \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\tau. \end{cases}$$

**Exercițiul 5.8.2.** Să se arate că imaginea drumului parametrizat

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = (t+1)\mathbf{i} + (t^2+2)\mathbf{j} + (3t^2+1)\mathbf{k}$$

este situată într-un plan și să se calculeze lungimea curbei  $(C)$  definită de acest drum.

**Soluție.** Ecuațiile parametrice ale drumului sunt

$$\begin{cases} x = t+1, \\ y = t^2+2, \\ z = 3t^2+1, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului  $t$  din ultimele două ecuații conduce la  $3y - z - 5 = 0$ , care este ecuația unui plan paralel cu axa  $Ox$ . Așadar, un punct curent  $M(x, y, z)$  de pe drumul dat sau de pe curba  $(C)$  verifică ecuația planului de mai sus. În această situație spunem că drumul este *plan*, iar curba  $(C)$  corespunzătoare este o *curbă plană*.

Lungimea curbei  $(C)$  este  $\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 40t^2} dt$ . Efectuând schimbarea de variabilă  $u = 2t\sqrt{10}$ , rezultă că lungimea curbei  $(C)$  este  $\mathcal{L} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \int_0^{2\sqrt{10}} \sqrt{1 + u^2} du$ .

O primitivă a funcției  $u \mapsto \sqrt{1 + u^2}$  este

$$\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{1 + u^2}|,$$

$$\text{deci } \mathcal{L} = \frac{\sqrt{41}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{40} \ln(2\sqrt{10} + \sqrt{41}). \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 5.8.3.** Să se scrie ecuația tangentei  $(T)$  în punctul  $M_0(1, 1, 1)$  la curba

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Punctul  $M_0$  corespunde valorii  $t_0 = 1$  a parametrului  $t$ . Avem:

$$\mathbf{f}'(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}; \quad \mathbf{f}'(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Ecuția vectorială a tangentei  $(T)$  în punctul  $M_0$  la curba dată este

$$(T) : \mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + s\mathbf{f}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R},$$

unde

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Ecuțiile parametrice ale aceleiași tangente sunt:

$$(T) : \begin{cases} x = 1 + s, \\ y = 1 + 2s, \\ z = 1 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului  $s$  conduce la ecuațiile canonice ale tangentei

$$(T) : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

■

**Exercițiul 5.8.4.** Să se găsească vectorul viteză, vectorul accelerație, viteza și accelerația la momentul  $t$  ale particulei materiale  $M(t)$  în mișcare după legea  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbf{f} = (t^2 + 3, t, -t^2)$ .

**Soluție.** Vectorul viteză la momentul  $t$  este  $\mathbf{f}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$  pe când viteza la același moment este  $\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{1 + 8t^2}$ . Vectorul accelerație este constant și are expresia analitică  $\mathbf{f}''(t) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ , iar accelerația este  $\|\mathbf{f}''(t)\| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ . ■

**Exercițiul 5.8.5.** Să se determine lungimea unei bucle din elicea circulară de pas constant.

**Soluție.** Ecuțiile elicei circulare de pas constant au fost deduse în Exemplul 5.8.7. Folosind (5.80), găsim

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

■

**Exercițiul 5.8.6.** Să se determine parametrizarea naturală a curbei

$$\mathbf{r} = \sqrt{2} \cos^2 t \mathbf{i} + \sqrt{2} \sin^2 t \mathbf{j} + \sin 2t \mathbf{k}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**Soluție.** Avem:  $\dot{\mathbf{r}}(t) = -2\sqrt{2} \sin t \cos t \mathbf{i} + 2\sqrt{2} \sin t \cos t \mathbf{j} + 2 \cos 2t \mathbf{k}$ ;  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = 2$ , de unde găsim  $ds = 2dt$ , deci  $s = 2t + C$ .

Dacă presupunem că originea de arc pe curbă este  $t = 0$ , constanta  $C$  are valoare nulă, deci  $s = 2t$ , de unde deducem  $t = \frac{s}{2}$  și parametrizarea naturală este

$$\mathbf{r} = \sqrt{2} \cos^2 \frac{s}{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \sin^2 \frac{s}{2} \mathbf{j} + \sin s \mathbf{k}, \quad s \in [0, \pi].$$

■

## 5.9 Formula lui Taylor pentru o funcție reală de o variabilă reală. Aplicații la studiul local al funcțiilor

Rezultatele stabilite în Secțiunea 5.7 rămân valabile și în cazul  $m = 1$ . În plus, avem

**Teorema 5.9.1.** Dacă  $f \in C^N(I)$  și funcția  $f^{(N)}$  este derivabilă în interiorul intervalului real  $I$ , atunci  $\forall t \in I$  și  $\forall t_0 \in I$  există  $\theta_N \in (0, 1)$  astfel încât

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{(t - \xi_N)^{N-p+1} f^{(N+1)}(\xi_N)}{pN!} (t - t_0)^p, \quad (5.87)$$

unde  $p$  este un număr pozitiv, iar  $\xi_N = t_0 + \theta_N(t - t_0)$ .

*Demonstrație.* Alegem la întâmplare numărul real pozitiv  $p$  și introducem funcțiile:

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\tau) = f(t) - \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(\tau)}{k!} (t - \tau)^k, \quad \tau \in I; \quad (5.88)$$

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(\tau) = (t - \tau)^p, \quad \tau \in I. \quad (5.89)$$

Funcțiile introduse sunt derivabile pe  $\overset{\circ}{I}$  și:

$$\varphi'(\tau) = -\frac{f^{(N+1)}(\tau)}{N!} (t - \tau)^N; \quad \psi'(\tau) = -p(t - \tau)^{p-1}, \quad \tau \in \overset{\circ}{I}. \quad (5.90)$$

$$(5.91)$$

În plus, avem  $\psi'(\tau) \neq 0$ ,  $\forall \tau = t_0 + \theta(t - t_0)$ ,  $\theta \in (0, 1)$ .

Din cele deduse mai sus constatăm că restricțiile funcțiilor  $\varphi$  și  $\psi$  la compactul  $[t_0, t]$ , sau  $[t, t_0]$  satisfac ipotezele teoremei lui Cauchy pentru funcții derivabile [19, p. 289], deci există  $\xi_N = t_0 + \theta_N(t - t_0)$ , cu  $0 < \theta_N < 1$ , astfel încât

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{\psi(t) - \psi(t_0)} = \frac{\varphi'(\xi_N)}{\psi'(\xi_N)}. \quad (5.92)$$

Din (5.88) și (5.89) observăm că

$$\varphi(t) = \psi(t) = 0.$$

Utilizând aceste relații și (5.88) – (5.91) în (5.92), obținem

$$\frac{f(t) - \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k}{(t - t_0)^p} = \frac{f^{(N+1)}(\xi_N)(t - \xi_N)^{N-p+1}}{pN!},$$

de unde se deduce (5.87).

**q.e.d.**

Egalitatea (5.87) este cunoscută sub numele de *formula lui Taylor* pentru o funcție reală de variabilă reală cu *restul de ordin  $N$*  sub forma lui Schlömilch<sup>4</sup>–Roche<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Schlömilch, Oskar (1823–1901), matematician german.

<sup>5</sup>Roche, Jean n. 1901, matematician francez.

Din  $\xi_N = t_0 + \theta_N(t - t_0)$  rezultă  $t - \xi_N = (1 - \theta_N)(t - t_0)$  și formula lui Taylor se scrie în forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{(1 - \theta_N)^{N-p+1} f^{(N+1)}(\xi_N)}{pN!} (t - t_0)^{N+1}. \quad (5.93)$$

Dacă în (5.93) luăm  $p = 1$ , obținem

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{(1 - \theta_N)^N f^{(N+1)}(\xi_N)}{N!} (t - t_0)^{N+1}. \quad (5.94)$$

Această relație se numește *formula lui Taylor* pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(I)$  cu rest de ordin  $N$  sub forma lui Cauchy.

Dacă în (5.93) dăm lui  $p$  valoarea  $p = N + 1$ , atunci (5.93) devine

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{f^{(N+1)}(t_0 + \theta_N(t - t_0))}{(N + 1)!} (t - t_0)^{N+1}, \quad (5.95)$$

cunoscută sub numele de *formula lui Taylor* pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(I)$  cu rest de ordin  $N$  sub forma lui Lagrange<sup>6</sup>.

De asemenea, putem demonstra prin inducție matematică după  $N$  că are loc egalitatea

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \int_{t_0}^x f^{(N+1)}(u) \frac{(x - u)^N}{N!} du \quad (5.96)$$

numită *formula lui Taylor* pentru funcția reală  $f \in \mathcal{F}(I)$  cu restul integral de ordin  $N$ .

Dacă intervalul  $I$  conține originea și considerăm  $t_0 = 0$ , atunci formulele (5.87), (5.93) – (5.96), în care  $t_0 = 0$ , devin *formulele Mac Laurin*<sup>7</sup> cu rest de ordin  $N$  respectiv în *forma lui Schlömilch–Roche*, în *forma lui Cauchy*, în *forma lui Lagrange* și sub *formă de integrală*. De exemplu, formula lui Mac Laurin cu restul sub forma lui Lagrange este

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{f^{(N+1)}(\theta_N t)}{(N + 1)!} t^{N+1}. \quad (5.97)$$

Ținând cont de relațiile:

$$f^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = d^k f(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, \dots, t - t_0}_{k \text{ ori}}); \quad f^{(k)}(0)t^k = d^k f(0; \underbrace{t, t, \dots, t}_{k \text{ ori}})$$

constatăm că formulele (5.95) și (5.97) pot fi scrise în *forma diferențială*:

$$\begin{aligned} f(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} d^k f(t_0; \underbrace{t - t_0, t - t_0, \dots, t - t_0}_{k \text{ ori}}) + \\ + \frac{1}{(N + 1)!} d^{N+1} f(\xi_N; \underbrace{t - t_0, t - t_0, \dots, t - t_0}_{N+1 \text{ ori}}); \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Lagrange, Joseph–Louis (1736 - 1813), matematician, mecanician și astronom, născut în Torino, provincia Piemont din Italia. A trăit o parte a vieții în Prusia și o alta în Franța. A adus contribuții semnificative în toate domeniile analizei matematice, teoriei numerelor, mecanicii clasice și mecanicii cerești. La recomandarea lui Euler și D'Alembert, în 1766 Lagrange i-a succedat lui Euler la conducerea secției de matematici a Academiei de Științe a Prusiei din Berlin, post în care a activat timp de 20 de ani efectuând un mare volum de munca și câștigând câteva premii ale Academiei de Științe a Franței. Tratatul lui Lagrange asupra mecanicii analitice (Mecanică Analitică, a 4-a Ediție, 2 Volume, Editura Gauthier–Villars, Paris, 1888–1889), scris în Berlin și publicat prima dată în 1788, oferă cel mai cuprinzător studiu al mecanicii clasice de la Newton, constituind totodată fundamentul pentru dezvoltarea fizicii matematice din secolul 19. În 1787, la vârsta de 51 de ani, se mută de la Berlin în Franța, devine membru al Academiei de Științe a Franței și rămâne în Franța până la sfârșitul vieții. Prin urmare, Lagrange este considerat deopotrivă om de știință francez și italian. Lagrange a supraviețuit Revoluției din Franța și a devenit primul profesor de analiză matematică a Școlii Politehnice din Paris încă de la deschiderea sa din 1794. Napoleon i-a acordat lui Lagrange Legiunea de Onoare și l-a înobilat în 1808 cu titlul de Conte al Imperiului. Este înmormântat în Panteon și numele său apare printre cele 72 de personalități ale căror nume sunt inscripționate pe Turnul Eiffel.

<sup>7</sup>Mac Laurin, Colin (1698–1746), matematician scoțian.

$$f(t) = f(0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} d^k f(0; \underbrace{t, t, \dots, t}_k \text{ ori}) + \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\theta_N t; \underbrace{t, t, \dots, t}_{N+1} \text{ ori}).$$

Dacă avem în vedere că  $t - t_0 = \Delta t$  este o creștere a variabilei independente în  $t_0$ , iar  $f(t) - f(t_0) = \Delta f(t_0; \Delta t)$  este creșterea funcției  $f$  în  $t_0$  corespunzătoare creșterii  $\Delta t$  a variabilei independente, atunci formula (5.95) se poate scrie în forma echivalentă

$$\Delta f(t_0; \Delta t) = \sum_{k=1}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (\Delta t)^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi_N)}{(N+1)!} (\Delta t)^{N+1},$$

unde  $\xi_N = t_0 + \theta_N \Delta t$ , iar  $\theta_N \in (0, 1)$ .

**Exercițiul 5.9.1.** Să se scrie formula lui Mac Laurin cu restul de ordin  $2n$  sub forma lui Lagrange pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $f(t) = \sin t$ .

**Soluție.** Prin inducție, se demonstrează că derivata de ordinul  $k$  a funcției este

$$f^{(k)}(t) = \sin\left(t + k\frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

din care deducem  $f^{(2m)}(0) = 0$ ,  $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Înlocuind aceste rezultate în relația

$$f(t) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(\theta_{2n})}{(2n+1)!} t^{2n+1},$$

obținută din (5.97) în care  $N = 2n$  și  $0 < \theta_{2n} < 1$ , deducem că pentru funcția  $f(t) = \sin t$  formula lui Mac Laurin cu restul de ordin  $2n$  sub forma lui Lagrange este

$$\sin t = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} t^{2k-1} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \cos(\theta_{2n} t).$$

■

**Exercițiul 5.9.2.** Să se scrie formula lui Mac Laurin cu restul de ordin  $n$  sub forma lui Lagrange pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $f(t) = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Soluție.** Avem  $f^{(k)}(t) = e^t$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Atunci, considerând în (5.97) că  $f(t) = e^t$  și  $N = n$ , obținem

$$e^t = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} t^k + \frac{e^{\theta_n t}}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta_n \in (0, 1).$$

■

**Exercițiul 5.9.3.** Să se scrie formulele lui Mac Laurin cu resturile de ordin  $n$  sub forma lui Lagrange și al lui Cauchy pentru funcția  $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \ln(1+t)$ .

**Soluție.** În acest exercițiu  $f(0) = 0$  și  $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$  pentru  $k \in \mathbb{N}^*$ . Restul de ordin  $n$  sub forma lui Lagrange este  $R_n = (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_n t)^{n+1}}$ ,  $0 < \theta_n < 1$ , iar cel al lui Cauchy este  $R_n = (-1)^n \left( \frac{1-\theta_n}{1+\theta_n t} \right)^n \frac{t^{n+1}}{1+\theta_n t}$ ,  $\theta_n \in (0, 1)$ . Prin urmare, cele două formule ale lui Mac Laurin sunt:

$$\begin{aligned}\ln(1+t) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_n t)^{n+1}}, & t \in (-1, +\infty); \\ \ln(1+t) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + (-1)^n \left( \frac{1-\theta_n}{1+\theta_n t} \right)^n \frac{t^{n+1}}{1+\theta_n t}, & t \in (-1, +\infty).\end{aligned}$$

■

**Exercițiul 5.9.4.** Să se scrie formula lui Mac Laurin cu rest de ordin  $n$  sub forma lui Lagrange și sub forma lui Cauchy pentru funcția binomială  $f \in \mathcal{F}((-1, +\infty))$ ,  $f(t) = (1+t)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Soluție.** Derivatele de ordin superior ale funcției  $f$  sunt

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+t)^{\alpha-k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

iar valorile acestora în origine sunt  $f^{(k)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)$ .

Dacă la aceste rezultate adăugăm și expresia derivatei de ordinul  $n+1$  a funcției calculată în punctul  $\theta_n t$ , unde  $0 < \theta_n < 1$ , rezultă că formula lui Mac Laurin pentru funcția  $f(t) = \ln(1+t)$  este

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} t^k + R_n, \quad t > -1,$$

unde  $R_n$  este restul de ordin  $n$ .

Pentru această funcție, restul de ordin  $n$  sub forma lui Lagrange este

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta_n t)^{\alpha-n-1} t^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1,$$

iar dacă  $R_n$  este restul sub forma lui Cauchy, atunci

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!} (1-\theta_n)^n (1+\theta_n t)^{\alpha-n-1} t^{n+1}.$$

■

**Observația 5.9.1.** În cazul  $N = 0$ , formula lui Taylor (5.96) cu restul sub forma lui Lagrange devine

$$f(t) - f(t_0) = (t-t_0)f'(\xi_0), \quad \xi_0 = t_0 + \theta_0(t-t_0), \quad 0 < \theta_0 < 1,$$

adică formula creșterilor finite (teorema lui Lagrange) pentru funcția reală  $f$  de variabilă reală  $t$ .

**Observația 5.9.2.** În fiecare din formulele (5.93) – (5.96) restul de ordin  $n$  este de forma

$$R_n(t; t_0, f) = o(|t-t_0|^N), \quad t \rightarrow t_0.$$

Atunci, oricare din aceste patru formule se scrie sub forma echivalentă

$$f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k + o(|t-t_0|^N), \quad t \rightarrow t_0. \quad (5.98)$$



**Observația 5.9.3.** Dacă ținem cont de faptul că  $o(|t - t_0|^N) = \alpha(t)|t - t_0|^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ , unde funcția  $\alpha(t)$  are proprietatea  $\lim_{t \rightarrow t_0=0} \alpha(t) = \alpha(0) = 0$ , atunci relația (5.98), în cazul  $N = 1$ , devine

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t)|t - t_0|, \quad t \in I$$

și este aceeași cu egalitatea din definiția diferențiabilității într-un punct a unei funcții reale de o variabilă reală.

În încheierea acestei secțiuni prezentăm unele aplicații ale formulelor lui Taylor la studiul local al funcțiilor reale de variabilă reală.

### 5.9.1 Tabelarea funcțiilor

**Exercițiul 5.9.5.** Să se calculeze  $\sin 33^\circ$  cu o aproximație mai mică decât  $10^{-6}$ .

**Soluție.** Scriem formula lui Taylor pentru funcția  $f(t) = \sin t$ , în care pentru  $t_0$  și  $t$  luăm valorile  $t_0 = \frac{\pi}{6}$  și  $t = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{60} = 33^\circ$ , iar  $R_n$ , restul de ordinul  $n$ , este cel sub forma lui Lagrange. Avem

$$\sin 33^\circ = P_n + R_n,$$

unde  $P_n$  este polinomul Taylor corespunzător.

Determinăm valoarea lui  $n$  astfel încât  $|R_n| \leq 10^{-6}$ .

Ținând cont de expresia restului de ordinul  $n$  sub forma lui Lagrange

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta_n \frac{\pi}{60} + (n+1) \frac{\pi}{2}\right),$$

prin încercări directe constatăm că  $n \geq 3$ .

Atunci, formula lui Taylor cu restul de ordinul trei conduce la aproximările

$$\sin 33^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{60} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{2 \cdot 60^2} \frac{1}{2} - \frac{\pi^3 \cdot \sqrt{3}}{12 \cdot 60^3} \approx 0,54464.$$

■

Tabelarea valorilor funcțiilor trigonometrice și ale funcției logaritmice se bazează pe formula lui Taylor.

Aplicând procedeul din Exercițiul 5.9.5, putem determina valori aproximative ale oricărei funcții  $f \in C^n(I)$ . Operațiile care se efectuează pentru obținerea valorilor aproximative fiind iterative, există posibilitatea programării calculelor și determinarea lor cu ajutorul computerului.

### 5.9.2 Convexitatea funcțiilor

Cu ajutorul formulei lui Taylor cu rest de ordin 1 sub forma lui Lagrange se pot stabili condiții necesare pentru *convexitatea*, sau *concavitata* curbelor  $y = f(x)$ ,  $x \in I \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{F}(I)$ ,  $f \in C^2(I)$ .

**Definiția 5.9.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(I)$  se numește **convexă** în vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(t_0)$ ,  $V \subset I$ , unde  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , dacă graficul restricției  $f|_V$  este situat deasupra tangentei la grafic în punctul  $M_0(t_0, f(t_0))$ , adică

$$f(t) \geq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad \forall t \in V. \quad (5.99)$$

Scriind formula lui Taylor în vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(t_0)$ ,  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , cu restul de ordin 1 sub forma lui Lagrange,

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(t - t_0)^2, \quad (5.100)$$

din (5.99) și (5.100), deducem  $f''(\xi_1) \geq 0$ ,  $\xi_1 = t_0 + \theta_1(t - t_0)$ ,  $0 < \theta_1 < 1$ .

Prin urmare, o condiție necesară ca funcția  $f \in C^2(I)$  să fie convexă este

$$f''(t) \geq 0, \quad \forall t \in I.$$

**Definiția 5.9.2.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(I)$  se numește **concavă** pe vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(t_0)$ ,  $V \subset I$ ,  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , dacă graficul funcției  $f|_V$  este situat sub tangenta la grafic în punctul  $M_0(t_0, f(t_0))$ , adică

$$f(t) \leq f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad \forall t \in V$$

Procedând analog, deducem că o condiție necesară ca  $f \in C^2(I)$  să fie funcție concavă este

$$f''(t) \leq 0, \quad \forall t \in V \cap I.$$

### 5.9.3 Contactul de ordin $n$ a două curbe plane

Fie funcțiile reale de variabilă reală  $f, g \in C^{n+1}([a, b])$ ,  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  și  $t_0 \in [a, b]$ .

**Definiția 5.9.3.** Curbele plane:

$$(C_1): x = f(t), \quad t \in [a, b]; \quad (C_2): x = g(t), \quad t \in [a, b]$$

au un **contact** de ordin cel puțin  $n$  în  $M_0(t_0, x_0)$  dacă sunt îndeplinite condițiile

$$f(t_0) = g(t_0) = x_0, \quad f'(t_0) = g'(t_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(t_0) = g^{(n)}(t_0).$$

Dacă, în plus,  $f^{(n+1)}(t_0) \neq g^{(n+1)}(t_0)$ , contactul este de ordinul  $n$ .

**Observația 5.9.4.** Dacă  $(C_1)$  și  $(C_2)$  au contact de ordin cel puțin  $n$  în punctul  $M_0$ , atunci funcțiile  $f$  și  $g$  au același polinom Taylor de grad  $n$  centrat în  $t_0$ .

**Definiția 5.9.4.** Fie curba  $(C): x = f(t)$ ,  $t \in I$ ,  $f \in C^2(I)$ ,  $t_0 \in I$  pentru care  $f''(t_0) \neq 0$  și  $M_0 \in (C)$  punctul corespunzător valorii  $t_0$ .

Cercul care trece prin punctul  $M_0(t_0, f(t_0))$  și are contact de ordinul cel puțin 2 cu  $(C)$  în punctul  $M_0$  se numește **cercul osculator** al curbei  $(C)$  în punctul  $M_0$ . Centrul cercului osculator se numește **centru de curbură**, iar raza sa se numește **rază de curbură** a curbei  $(C)$  în  $M_0$ . Inversa razei de curbură se numește **curbura** în  $M_0$  a curbei  $(C)$ .

Determinarea cercului osculator în  $M_0 \in (C)$  presupune aflarea numerelor reale  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $R > 0$  cu proprietatea că cercul de ecuație  $(t - \alpha)^2 + (x - \beta)^2 - R^2 = 0$  are un contact de ordinul cel puțin 2 în  $M_0$  cu curba  $(C)$ .

În cazul cercului osculator, contactul de cel puțin ordinul 2 al acestuia cu curba  $(C)$  de ecuație  $x = f(t)$  în punctul  $t_0$  nu se încadrează în Definiția 5.9.3. În acest caz, condițiile de contact se rezumă la anularea în punctul  $t_0$  a funcției  $\Phi(t) = F(t, f(t))$  și a primelor două derivate ale sale, unde  $F(t, x)$  este membrul întâi din ecuația cercului osculator.

Impunerea condițiilor de contact de ordin cel puțin 2 conduce la sistemul

$$\begin{cases} F(t_0, f(t_0)) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, f(t_0)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, f(t_0))f'(t_0) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_0, f(t_0)) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}(t_0, f(t_0))f'(t_0) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t_0, f(t_0))(f'(t_0))^2 + \frac{\partial F}{\partial x}(t_0, f(t_0))f''(t_0) = 0, \end{cases}$$

unde  $F(t, x) = (t - \alpha)^2 + (x - \beta)^2 - R^2$ .

După înlocuirea lui  $F$  și a derivatelor sale, sistemul devine

$$\begin{cases} (t_0 - \alpha)^2 + (f(t_0) - \beta)^2 - R^2 & = 0 \\ t_0 - \alpha + (f(t_0) - \beta)f'(t_0) & = 0 \\ 1 + (f'(t_0))^2 + (f(t_0) - \beta)f''(t_0) & = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim că expresiile celor trei numere care definesc cercul osculator sunt

$$\begin{cases} \alpha & = t_0 - \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} f'(t_0) \\ \beta & = f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} \\ R & = \frac{(1 + (f'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}. \end{cases}$$

Numerele reale  $\alpha$  și  $\beta$  sunt coordonatele centrului de curbura, iar numărul pozitiv  $R$  este raza de curbura.

Dacă  $f \in C^2(I)$  și  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$ , atunci într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(t_0)$  avem *aproximarea liniară*

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} f'(t_0) = P_1(t; t_0, f)$$

și *aproximarea pătratică*

$$f(t) \cong f(t_0) + \frac{t - t_0}{1!} f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} f''(t_0) = P_2(t; t_0, f).$$

Aproximarea liniară reprezintă dreapta care are contact de ordin cel puțin 1 cu curba  $(C)$  în punctul  $M_0(t_0, f(t_0))$ , adică tangenta  $(T)$  în punctul  $M_0$  la curba  $(C)$ .

Aproximarea pătratică este o parabolă cu vârful în punctul  $M_0$  și axa de simetrie normală în  $M_0$  la curba  $(C)$ . Această parabolă are contact de ordin cel puțin 2 cu  $(C)$  în  $M_0$ .

Aproximările  $P_1(t; t_0, f)$  și  $P_2(t; t_0, f)$  sunt polinoamele Taylor de gradul 1 și respectiv de gradul 2 ale funcției  $f$ , ambele centrate în punctul  $t_0 \in I$ .

Astfel, am dat interpretări polinoamelor Taylor de gradele 1 și 2, asociate funcției  $f$  și centrate în  $t_0$ .

**Observația 5.9.5.** Curbele  $(C_1)$  și  $(C_2)$  au contact de ordin cel puțin 1 în punctul  $M_0(t_0, x_0)$ , unde  $x_0 = f(t_0) = g(t_0)$ , dacă și numai dacă au în punctul comun  $M_0$  aceeași tangentă  $(T)$ . Curbele au contact de ordin cel puțin 2 în  $t_0$  dacă și numai dacă au aceeași curbura în punctul  $M_0$ .

Dacă cele două curbe au în punctul  $M_0$  un contact de ordin cel puțin 2, atunci centrul  $C_0$  al cercului osculator se află pe normala comună  $(N)$  în  $M_0$ , iar distanța  $d(C_0, M)$  este raza de curbura în punctul  $M_0$ .

### 5.9.4 Natura punctelor de extrem ale unei funcții reale de o variabilă reală

Fie funcția reală de variabilă reală  $f \in \mathcal{F}(I)$  definită pe intervalul  $I \subset \mathbb{R}$  și  $t_0 \in I$ .

**Definiția 5.9.5.** Punctul  $t_0$  se numește **punct de extrem** al funcției  $f$  dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(t_0)$  astfel încât diferența  $f(t) - f(t_0)$  să păstreze semn constant pe mulțimea  $I \cap V$ .

Conform Teoremei lui Fermat pentru o funcție reală de variabilă reală [18, p. 272], dacă funcția  $f$  este derivabilă în  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  și dacă  $t_0$  este punct de extrem, atunci  $f'(t_0) = 0$ .

Să presupunem că  $f \in C^n(I)$ ,  $n \geq 2$ , și că  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  este astfel încât

$$f'(t_0) = \dots = f^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad f^{(n)}(t_0) \neq 0, \quad n \geq 2.$$

Se pune problema dacă un astfel de punct  $t_0 \in \overset{\circ}{I}$  este sau nu punct de extrem al funcției  $f$ . În acest scop, utilizăm formula lui Taylor pentru funcția  $f$ , în vecinătatea punctului  $t_0$ , cu restul de ordin  $n-1$  sub forma lui Lagrange, care în acest caz devine

$$f(t) - f(t_0) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} (t - t_0)^n, \quad t \in I, \quad (5.101)$$

unde  $\xi_n = t_0 + \theta_n(t - t_0)$ , iar  $\theta_n \in (0, 1)$ .

Deoarece derivata de ordinul  $n$  a funcției  $f$  este funcție continuă în  $t_0$ , rezultă că (5.101) se poate scrie în forma

$$f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^n}{n!} \left( f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) \right),$$

unde funcția  $\alpha(t)$  are proprietatea  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = 0 = \alpha(0)$ . De aici rezultă  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left( f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) \right) = f^{(n)}(t_0)$ .

Dacă  $f^{(n)}(t_0) > 0$ , există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(t_0)$  astfel încât  $f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) > 0$ ,  $\forall t \in V \cap I$ , iar dacă  $f^{(n)}(t_0) < 0$ , există o vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(t_0)$  cu proprietatea  $f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) < 0$ ,  $\forall t \in V \cap I$ .

Prin urmare, dacă numărul natural  $n$  din formula (5.101) este de forma  $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 1$ , creșterea funcției  $f$  în  $t_0$ ,  $\Delta f(t_0, \Delta t) = f(t) - f(t_0)$ , corespunzătoare creșterii  $\Delta t$  a argumentului, are semn variabil în orice vecinătate a punctului  $t_0$ , deci  $M_0(t_0, f(t_0))$  nu este punct de extrem local al funcției  $f$ .

În acest caz  $t_0$  este *punct de inflexiune* al funcției  $f$ .

Dacă  $n = 2k$ ,  $k \geq 1$ , și  $f^{(2k)}(t_0) > 0$ ,  $f^{(n)}(t_0) + \alpha(t) > 0$ ,  $\forall t \in V \cap I$ , de unde rezultă  $\Delta f(t_0, \Delta t) \geq 0$  sau  $f(t) \geq f(t_0)$ ,  $\forall t \in V \cap I$ , ceea ce arată că  $t_0$  este un *punct de minim local*.

Dacă  $f^{(2k)}(t_0) < 0$  și  $n = 2k$ , atunci  $f^{(2k)}(t_0) + \alpha(t) < 0$ ,

$\forall t \in V \cap I$ , de unde rezultă  $\Delta f(t_0, \Delta t) \leq 0$  sau  $f(t) \leq f(t_0)$ ,  $\forall t \in V \cap I$ .

În această situație  $t_0$  este un *punct de maxim local* al funcției  $f$ .

### 5.9.5 Metoda tangentei

Fie  $\varphi \in C^2([a, b])$  cu proprietatea  $\varphi'(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b] = I$ .

**Definiția 5.9.6.** Șirul de puncte  $(t_n)_{n \geq 0}$ ,  $t_n \in I$  și

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi(t_n)}{\varphi'(t_n)}, \quad (5.102)$$

unde  $t_0$  este ales arbitrar în  $I$ , se numește **procedura lui Newton** asociată funcției  $\varphi$  în  $t_0$ .

**Teorema 5.9.2.** Dacă  $\xi \in (a, b)$  este unica soluție a ecuației  $\varphi(t) = 0$  și  $\varphi'(\xi) \neq 0$ , atunci există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\xi)$  cu proprietatea că oricare ar fi  $t_0 \in V \cap [a, b]$ , avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \xi$ .

*Demonstrație.* Funcțiile  $\varphi', \varphi'' \in \mathcal{F}([a, b])$  fiind continue, există  $m > 0$  și  $M > 0$  astfel încât

$$|\varphi'(t)| \geq m, \quad |\varphi''(t)| \leq M, \quad \forall t \in I. \quad (5.103)$$

Conform formulei lui Taylor cu restul de ordin 1 sub formă integrală, avem

$$\varphi(t) = \varphi(t_n) + (t - t_n)\varphi'(t_n) + \int_{t_n}^t (t - u)\varphi''(u)du, \quad t \in I, \quad n \geq 0.$$

Pentru  $t = \xi$ , această egalitate devine

$$0 = \varphi(t_n) + (\xi - t_n)\varphi'(t_n) + \int_{t_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du. \quad (5.104)$$

Pe de altă parte, din (5.102) rezultă

$$\varphi(t_n) + (\xi - t_n)\varphi'(t_n) = (\xi - t_{n+1})\varphi'(t_n). \quad (5.105)$$

Din (5.104) și (5.105) deducem

$$\xi - t_{n+1} = -\frac{1}{\varphi'(t_n)} \int_{t_n}^{\xi} (\xi - u)\varphi''(u)du, \quad n \geq 0.$$

Modulul ambilor membri ai acestei egalități și inegalitățile (5.103) conduc la

$$|\xi - t_{n+1}| \leq \frac{1}{\delta}(\xi - t_n)^2, \quad \delta = \frac{2m}{M}.$$

Considerând  $V = (\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2}) \in \mathcal{V}(\xi)$  și  $t_0 \in V \cap [a, b]$ , din inegalitatea precedentă obținem

$$|\xi - t_n| \leq \frac{1}{\delta}|\xi - t_{n-1}|^2 < \frac{\delta}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

de unde deducem  $t_n \rightarrow \xi$  și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

**Observația 5.9.6.** Dacă în locul lui  $\xi$  se ia  $t_n$ , atunci abaterea de la  $\xi$  (eroarea) este mai mică decât  $\delta/4^n$ .

**Exercițiul 5.9.6.** Folosind procedura lui Newton să se determine o aproximare a numărului irațional  $\sqrt[3]{2}$  cu o eroare de  $10^{-5}$ .

**Soluție.** Se observă că  $\xi$  este singura soluție reală a ecuației  $t^3 - 2 = 0$  și că ea se află în intervalul  $[1, 2]$ . Considerăm funcția  $\varphi : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(t) = t^3 - 2$ ,  $t \in [1, 2]$ . Procedura lui Newton este

$$t_{n+1} = t_n - \frac{t_n^3 - 2}{3t_n^2} = \frac{2(t_n^3 + 1)}{3t_n^2}, \quad n \geq 0.$$

Luând  $t_0 = 2$ , din relația de recurență (5.102) se obțin succesiv termenii șirului  $(t_n)$  care, conform Teoremei 5.9.2, converge la  $\xi = \sqrt[3]{2}$ . Efectuând calculele până când primele cinci zecimale se repetă, găsim:  $t_1 = 1,5$ ;  $t_2 = 1,29629$ ;  $t_3 = 1,26093$ ;  $t_4 = 1,25992$ ;  $t_5 = 1,259921$ .

Prin urmare,  $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992$ . ■

**Observația 5.9.7.** Procedura lui Newton poate fi programată pe computer cu datele de intrare  $\varphi(t_0)$ ,  $\varphi'(t_0)$  și  $t_0$ . Criteriul de oprire al algoritmului poate fi repetarea primelor  $p$  zecimale ale numărului  $t_n$ . Se poate demonstra că algoritmul este **rapid convergent** la soluția problemei dacă  $t_0$  este cât mai apropiat de  $\xi$ .

**Observația 5.9.8.** Tangenta  $(T_n)$  în punctul  $M_n(t_n, \varphi(t_n))$  la graficul funcției  $\varphi$ , de ecuație

$$(T_n): x - \varphi(t_n) = \varphi'(t_n)(t - t_n),$$

intersectează axa absciselor  $Ot$  în punctul  $(t_{n+1}, 0)$ . Numărul real  $t_{n+1}$  satisface egalitatea

$$-\varphi(t_n) = \varphi'(t_n)(t_{n+1} - t_n). \quad (5.106)$$

Tangenta  $(T_{n+1})$  la graficul funcției  $\varphi$  în punctul  $M_{n+1}(t_{n+1}, \varphi(t_{n+1}))$  intersectează  $Ot$  în punctul de abscisă  $t_{n+2}$ , căruia îi corespunde pe grafic punctul  $M_{n+2}(t_{n+2}, \varphi(t_{n+2}))$ , în care tangenta este  $(T_{n+2})$ .

Procedeul continuă obținându-se șirul  $(t_n)_{n \geq 0}$ .

Dacă din (5.106) determinăm  $t_{n+1}$  în funcție de  $t_n$ , constatăm că obținem procedura lui Newton.

Procedura lui Newton de determinare aproximativă a soluției unice a ecuației  $\varphi(t) = 0$ ,  $t \in I = [a, b]$ , este cunoscută și sub numele de **metoda tangentei**.

## Capitolul 6

# Diferențiabilitatea și derivabilitatea parțială ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

### 6.1 Direcție în $\mathbb{R}^n$

Considerăm spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^n$ , vectorii  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , cu  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  și punctele  $A, B \in \mathbb{E}^n$ , astfel încât  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ , unde  $\mathbb{E}^n$  este spațiul afin Euclidian de dimensiune  $n$  al cărui spațiu vectorial asociat este  $\mathbb{R}^n$ , iar  $O$  este originea reperului din  $\mathbb{E}^n$ .

**Definiția 6.1.1.** Se numește **dreaptă** determinată de punctele  $A$  și  $B$ , sau de vectorii  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$ , mulțimea

$$(D) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Definiția 6.1.2.** Mulțimea  $(SD) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{R}^n$  se numește **semidreapta** cu originea în  $A$ , care trece prin  $B$ ,

**Definiția 6.1.3.** Prin **segment închis de extremități**  $A$  și  $B$ , se înțelege mulțimea

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Analog se definesc *segmentul deschis*  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n,$$

*segmentul închis la stânga și deschis la dreapta*  $[\mathbf{a}, \mathbf{b})$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in [0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n,$$

precum și *segmentul deschis la stânga și închis la dreapta*  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Definiția 6.1.4.** Se numește **direcție** în  $\mathbb{R}^n$  o semidreaptă cu originea în  $O$ .

**Observația 6.1.1.** Orice vector nenul din  $\mathbb{R}^n$  determină o direcție în  $\mathbb{R}^n$ .

Este posibil ca două puncte distincte  $A$  și  $B$  din  $\mathbb{R}^n$  să determine aceeași direcție. Aceasta se întâmplă când vectorii  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OB}$  sunt coliniari și de același sens.

Vectorii  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  și  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  sunt coliniari și de același sens dacă și numai dacă coordonatele lor sunt proporționale, iar cele corespunzătoare sunt de același semn.

**Observația 6.1.2.** O direcție conține un unic vector de normă unitate care se numește **versorul direcției** respective. O direcție în  $\mathbb{R}^n$  se poate defini dând un versor.

**Observația 6.1.3.** În cazul  $n = 2$ , versorul  $\mathbf{s}$  al unei direcții date poate fi exprimat cu ajutorul unghiului  $\theta$  dintre versorii  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  și  $\mathbf{s}$ . Se vede imediat că  $\mathbf{s} = (\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (\sin \theta)\mathbf{e}_2$ , unde  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  este cel de al doilea versor care, împreună cu  $\mathbf{e}_1$ , formează baza canonică în  $\mathbb{R}^2$ .

Observație similară are loc și în cazul  $n = 3$  când versorul  $\mathbf{s}$  al unei direcții în spațiu se scrie în forma  $\mathbf{s} = \cos \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cos \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cos \alpha_3 \mathbf{e}_3$ , unde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ , iar  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , este unghiul dintre versorul  $\mathbf{e}_i$  al bazei și versorul  $\mathbf{s}$ . Coordonatele lui  $\mathbf{s}$  se numesc *cosinii directori* ai direcției. Deoarece  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^3$  este versor, rezultă  $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$ .

## 6.2 Derivata după o direcție a unei funcții reale de variabilă vectorială

Definiția derivabilității și a derivatei într-un punct al unei funcții vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ ,  $A \subset \mathbb{R}$ , nu poate fi extinsă întocmai la cazul funcțiilor reale de variabilă vectorială de forma

$$f \in \mathcal{F}(D); \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

unde  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $n \geq 2$ . Pentru funcții de tipul (6.1) putem considera un gen de derivată a funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  după direcții, adică limita raportului incremental dintre creșterea funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  corespunzătoare creșterii  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  a variabilei independente  $\mathbf{x}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  și norma creșterii lui  $\mathbf{x}$  în  $\mathbf{x}_0$ , raport luat însă după puncte care se găsesc pe o anumită dreaptă care trece prin  $\mathbf{x}_0$ , deci în punctele unei direcții.

Presupunem atunci că domeniul de definiție al funcției reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$  și fie  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ . Atunci, există  $r > 0$ , astfel încât  $B(\mathbf{a}, r) \subset D$ .

Fie  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$  un vector cu proprietatea

$$\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2} = 1, \quad (6.2)$$

deci un versor din  $\mathbb{R}^n$  care definește o direcție în  $\mathbb{R}^n$ .

Să considerăm dreapta  $(D)$  care trece prin extremitatea  $A$  a vectorului  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  și care are direcția  $\mathbf{s}$ . Un punct oarecare  $M$ , astfel încât  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  este pe dreapta  $(D)$  dacă  $\mathbf{x}$  este de forma



$\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{s}$ , unde  $t \in \mathbb{R}$ . Pentru ca acest punct să fie în bila deschisă  $B(\mathbf{a}, r)$  trebuie ca  $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r$ , unde  $d \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  este metrica Euclidiană pe  $\mathbb{R}^n$ . După cum știm Însa,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} + t\mathbf{s} - \mathbf{a}\| = \|t\mathbf{s}\| = |t| \|\mathbf{s}\| = |t|.$$

Din acest rezultat rezultă că diametrul de direcție  $\mathbf{s}$  al bilei  $B(\mathbf{a}, r)$  este mulțimea  $\{\mathbf{x} \in D : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{s}, t \in (-r, r)\}$ , adică segmentul deschis  $(\mathbf{a} - r\mathbf{s}, \mathbf{a} + r\mathbf{s})$ .

Să considerăm acum funcția reală de variabilă reală  $g \in \mathcal{F}((-r, r))$  care să fie restricția funcției  $f$  la segmentul deschis  $(\mathbf{a} - r\mathbf{s}, \mathbf{a} + r\mathbf{s})$ , adică

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}), \quad t \in (-r, r), \quad (6.3)$$

sau

$$g(t) = f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, \dots, a_n + ts_n), \quad t \in (-r, r). \quad (6.4)$$

**Definiția 6.2.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D = \overset{\circ}{D}$ , este **derivabilă** în punctul  $\mathbf{a}$  după direcția  $\mathbf{s}$  sau după versorul  $\mathbf{s}$ , dacă funcția  $g$  din (6.3), sau din (6.4), este derivabilă în  $t = 0$ . Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă în punctul  $\mathbf{a} \in D$  după versorul  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ , atunci numărul real  $g'(0)$  se numește **derivata** funcției reale  $f$  în punctul  $\mathbf{a}$  după direcția  $\mathbf{s}$  și se notează cu  $\frac{df}{ds}(\mathbf{a})$ .

Din această definiție deducem

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{a}) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{t}. \quad (6.5)$$

Dacă  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{s}$  și  $f$  este derivabilă în  $\mathbf{x}$  după direcția  $\mathbf{s}$ , atunci vom avea

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) = g'(t). \quad (6.6)$$

Pentru a înțelege semnificația numărului real definit de (6.5), să considerăm cazul  $n = 2$ . Vom nota  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , iar pe  $f(x_1, x_2)$  îl vom nota cu  $z$ . Mulțimea  $(S)$  a punctelor din  $\mathbb{R}^3$  definită prin

$$(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\},$$

unde funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este cel puțin continuă pe  $D$ , se numește *suprafață*.

Punctul  $A(x_0, y_0)$ , extremitatea vectorului  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ , fiind din mulțimea deschisă  $D$ , aparține lui  $D$  împreună cu un întreg disc deschis cu centrul în  $\mathbf{a}$  și rază egală cu  $r > 0$ . Dacă este dat versorul  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ , acesta determină diametrul  $A_1 A_2$  al discului, paralel cu  $\mathbf{s}$ . Porțiunea din planul  $(P)$ , perpendicular pe planul  $Oxy$ , care intersectează planul  $Oxy$  după o dreaptă ce conține diametrul  $A_1 A_2$ , are în comun cu suprafața  $(S)$  un arc de curbă plană care trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  și care are extremitățile în punctele

$$M_1(x_0 - r s_1, y_0 - r s_2, f(x_0 - r s_1, y_0 - r s_2)) \quad \text{și} \quad M_2(x_0 + r s_1, y_0 + r s_2, f(x_0 + r s_1, y_0 + r s_2)).$$

Pentru a înțelege semnificația geometrică a derivatei după o direcție, alegem în planul  $(P)$  un reper format din dreapta care trece prin punctele  $A_1$  și  $A_2$ , drept axă a absciselor  $At$ , și mediatoarea segmentului  $A_1 A_2$  ca axă a ordonatelor, unde  $A$ , originea reperului, este mijlocul segmentului  $A_1 A_2$ .

Versorul axei absciselor  $At$  este  $\mathbf{s}$ , iar arcul de curbă  $(M_1 M_2)$  are ecuația carteziană explicită  $u = g(t)$ ,  $t \in (-r, r)$ . Deoarece  $g$  este derivabilă în  $t = 0$ , există tangenta orientată  $(T)$  la arcul de curbă  $u = g(t)$  în punctul  $M_0(0, g(0))$  de pe grafic, sensul de parcurs al tangentei fiind imprimat de sensul de parcurs pe curbă care la rândul-i este imprimat de sensul de creștere a lui  $t \in (-r, r)$ . Fie  $\alpha_0$  unghiul dintre  $\mathbf{s}$  și versorul  $\boldsymbol{\tau}$  al tangentei  $(T)$ . Se știe că  $g'(0) = \text{tg } \alpha_0$  și deci  $\frac{df}{ds}(\mathbf{a}) = \text{tg } \alpha_0$ , ceea ce arată că derivata funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ , după direcția  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ , este panta tangentei  $(T)$ .

De asemenea, putem interpreta  $\frac{df}{ds}(\mathbf{a})$  drept viteza de variație a funcției  $f$ , în punctul  $\mathbf{x}_0$ , pe direcția  $\mathbf{s}$ .

**Exercițiul 6.2.1.** Să se calculeze derivata funcției reale  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$  în punctul  $M_0(1, 1)$  după direcția  $\mathbf{s} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

**Soluție.** Funcția  $g$  din (6.4) este  $g(t) = f(1 + \frac{1}{2}t, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t) = (1 + \frac{1}{2}t)^2 - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)^2 = (1 - \sqrt{3})t - \frac{1}{2}t^2$ .  
Avem  $g'(t) = 1 - \sqrt{3} - t$  de unde  $g'(0) = 1 - \sqrt{3}$  și deci  $\frac{df}{ds}(1, 1) = 1 - \sqrt{3}$ . ■

**Exercițiul 6.2.2.** Să se calculeze derivata funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x_1, x_2, x_3) = e^{\frac{x_3}{x_1} \sin x_2},$$

în punctul  $\mathbf{a} = (3, 0, -1)$  după direcția  $\mathbf{v} = (2, -5, 7)$ .

**Soluție.** Determinăm întâi versorul vectorului  $\mathbf{v}$ . Deoarece  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{78}$ , deducem că

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \left( \frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}} \right).$$

Funcția  $g$  este dată de  $g(t) = f(3 + \frac{2}{\sqrt{78}}t, -\frac{5}{\sqrt{78}}t, -1 + \frac{7}{\sqrt{78}}t) = -e^{\frac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}}} \sin \frac{5t}{\sqrt{78}}$ .

Avem  $g'(t) = -e^{\frac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}}} \left( \left( \frac{7t - \sqrt{78}}{2t + 3\sqrt{78}} \right)' \sin \frac{5t}{\sqrt{78}} + \frac{5t}{\sqrt{78}} \cos \frac{5t}{\sqrt{78}} \right)$ , de unde găsim  $g'(0) = -\frac{5}{\sqrt{78}} e^{-\frac{1}{3}}$ . Deci  $\frac{df}{ds}(3, 0, -1) = -\frac{5}{\sqrt{78} e^{\frac{1}{3}}}$ . ■

Deoarece  $\frac{df}{ds}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in D$ , este derivata ordinară a funcției auxiliare  $g$ , derivata după o direcție are aceleași proprietăți ca derivabilitatea obișnuită a funcțiilor reale de variabilă reală. De exemplu, au loc următoarele identități care rezultă direct din identități bine cunoscute în care intervin funcții reale de o variabilă reală:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(f_1 \pm f_2) = \frac{df_1}{ds} \pm \frac{df_2}{ds}, \\ \frac{d}{ds}(c \cdot f) = c \cdot \frac{df}{ds}, \quad c = \text{const.}, \\ \frac{d}{ds}(f_1 \cdot f_2) = f_2 \cdot \frac{df_1}{ds} + f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}, \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{f_1}{f_2} \right) = \frac{f_2 \cdot \frac{df_1}{ds} - f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}}{f_2^2}, \end{cases} \quad (6.7)$$

în ipoteza că numitorul din ultima identitate nu se anulează și că toate derivatele din membrii doi a tuturor identităților există.

Vom folosi acum Definiția 6.2.1 și relația (6.6) pentru a demonstra o teoremă a valorii medii pentru derivatele după o direcție.

**Teorema 6.2.1.** Fie  $f \in \mathcal{F}(D)$ , o funcție reală de  $n$  variabile reale,  $\mathbf{a} \in D$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{s}\| = 1$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dacă segmentul închis  $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{s}]$  este conținut în  $D$  și există derivata lui  $f$  după direcția  $\mathbf{s}$  în orice punct  $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{s}]$ , atunci există  $\theta \in (0, 1)$ , astfel încât

$$f(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{s}) - f(\mathbf{a}) = \lambda \frac{df}{ds}(\mathbf{a} + \theta \lambda \mathbf{s}). \quad (6.8)$$

*Demonstrație.* Funcția  $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{s})$  este continuă pe intervalul închis  $[0, \lambda] \subset \mathbb{R}$  și derivabilă pe intervalul  $(0, \lambda)$ . Aplicând teorema creșterilor finite a lui Lagrange funcției  $g$  deducem că există  $\theta \in (0, 1)$ , astfel încât

$$g(\lambda) - g(0) = \lambda g'(\theta \lambda). \quad (6.9)$$

Dar

$$g(\lambda) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}), \quad g(0) = f(\mathbf{a}), \quad g'(\theta \lambda) = \frac{df}{ds}(\mathbf{a} + \theta \lambda \mathbf{s}). \quad (6.10)$$

Înlocuirea lui (6.10) în (6.9) conduce la (6.8) și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

**Observația 6.2.1.** Dacă  $n = 1$ , singurii versori în  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  sunt  $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$  și  $-\mathbf{e}_1$ , unde  $O$  este originea pe axa reală, iar  $A_1$  este punctul de abscisă 1 de pe această axă. Considerând acum o funcție reală definită pe o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}$ , deci pe o reuniune de intervale deschise din  $\mathbb{R}$ , din cele de mai sus constatăm că derivata într-un punct  $a$  al domeniului de definiție după direcția  $\mathbf{e}_1$  coincide cu derivata obișnuită a lui  $f$  în punctul  $a$  adică  $\frac{df}{d\mathbf{e}_1}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a)$ . Să remarcăm că nu trebuie confundată derivata lui  $f$  în punctul  $a$  după versorul  $\mathbf{e}_1$  cu derivata la dreapta a funcției  $f$  în punctul  $a$ , după cum derivata lui  $f$  în punctul  $a$  după versorul  $-\mathbf{e}_1$  nu este aceeași cu derivata la stânga a funcției  $f$  în punctul  $a$ .

**Exercițiul 6.2.3.** Să se studieze dacă funcția reală de două variabile reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

are derivată în origine după un versor oarecare  $\mathbf{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , unde  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

**Soluție.** Construim funcția  $g$  din (6.3). Găsim

$$g(t) = \begin{cases} \sin 2\theta, & \text{dacă } t \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } t = 0. \end{cases}$$

Atunci,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \sin 2\theta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t},$$

din care deducem că dacă  $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  funcția  $f$  nu este derivabilă în origine în raport cu direcția  $\mathbf{s}$ .

Pentru direcțiile  $\mathbf{s}$  în care  $\theta \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$  rezultă  $g'(0) = 0$ , deci funcția  $f$  este derivabilă în origine după aceste direcții  $\mathbf{s}$  și  $\frac{df}{ds}(0, 0) = 0$ . ■

Dacă pentru o funcție reală de o variabilă reală derivabilitatea într-un punct implică continuitatea în acel punct, pentru o funcție reală de mai multe variabile reale acest rezultat nu are loc dacă derivabilitatea este cea după o direcție. Mai mult, nici chiar derivabilitatea lui  $f \in \mathcal{F}(D)$ , într-un punct din  $D \subset \mathbb{R}^n$ , după orice direcție din  $\mathbb{R}^n$ , nu implică continuitatea funcției în acel punct. Această afirmație rezultă din exemplul următor.

**Exemplul 6.2.1.** Funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y - x^2)^2 + x^8}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$  este derivabilă în origine în raport cu orice versor din  $\mathbb{R}^2$ , dar  $f$  nu este continuă în origine.

Într-adevăr, fie  $\mathbf{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , un versor oarecare din  $\mathbb{R}^2$ . Calculând funcția  $g$  după (6.3), sau (6.4) găsim

$$g(t) = f(\mathbf{0} + t\mathbf{s}) = \frac{t^3 \cos^5 \theta}{t^6 \cos^8 \theta + (\sin \theta - t \cos^2 \theta)^2}.$$

Dacă  $\theta \neq 0$  și  $\theta \neq \pi$ , atunci

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^5 \theta}{t^6 \cos^8 \theta + (\sin \theta - t \cos^2 \theta)^2} = \frac{0}{\sin^2 \theta} = 0,$$

ceea ce arată că  $f$  este funcție derivabilă în origine după orice versor  $\mathbf{s}$  diferit de unul din versorii  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  și  $-\mathbf{e}_1$ , iar derivata funcției date în origine după versorul  $\mathbf{s}$  este egală cu zero. Dacă  $\theta = 0$ , atunci  $g(t) = \frac{t}{t^4 + 1}$

și  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 1$ , prin urmare avem  $\frac{df}{d\mathbf{e}_1}(\mathbf{0}) = 1$ . În cazul  $\theta = \pi$ ,

$$g(t) = -\frac{t}{t^4 + 1} \implies \frac{df}{d(-\mathbf{e}_1)}(\mathbf{0}) = -1.$$

Prin urmare, funcția  $f$  este derivabilă în origine după orice versor  $\mathbf{s} = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$ .

Pentru studiul continuității funcției  $f$  în origine folosim definiția continuității cu șiruri.

Luând șirul din  $\mathbb{R}^2$  cu termenul general  $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ , convergent la  $\mathbf{0} = (0, 0)$ , șirul valorilor funcției are termenul general  $f(x_n) = n^3$ , iar acest șir are limita  $+\infty$ . Deoarece limita este diferită de valoarea funcției în origine, care este zero, rezultă că  $f$  nu este continuă în origine. ■

## 6.3 Derivabilitatea parțială și derivate parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

Fie  $f$  o funcție reală definită pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a} \in D$  și  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  baza canonică din spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 6.3.1.** Spunem că funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este **derivabilă parțial** în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$ , dacă  $f$  este derivabilă în punctul  $\mathbf{a}$  după versorul  $\mathbf{e}_j$ .

Variabila  $x_j$  poate fi oricare din variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ale funcției  $f$ .

**Definiția 6.3.2.** Dacă  $f$  este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$ , atunci  $\frac{df}{d\mathbf{e}_j}(\mathbf{a})$  se numește **derivata parțială de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$** .

a unei funcții reale în raport cu o variabilă

Derivata parțială de ordinul întâi a lui  $f$  în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$  se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}); \quad f'_{x_j}(\mathbf{a}); \quad f_{,x_j}(\mathbf{a}); \quad f_{,j}(\mathbf{a}).$$

**Definiția 6.3.3.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este **derivabilă parțial pe  $D$ , sau pe o submulțime  $B \subset D$ , în raport cu variabila  $x_j$** , dacă  $f$  este derivabilă parțial în orice punct  $\mathbf{a} \in D$ , sau  $\mathbf{a} \in B$ , în raport cu variabila  $x_j$ .

Folosind definiția derivatei după o direcție, derivata parțială a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  în raport cu variabila  $x_j$  este

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) &= \frac{df}{de_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{t}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

În cazul  $n = 2$ , vom scrie  $(x, y)$  în loc de  $(x_1, x_2)$ , iar în cazul  $n = 3$  punctul curent al spațiului  $(x_1, x_2, x_3)$  îl vom nota prin  $(x, y, z)$ .

Dacă funcția reală de două variabile reale  $z = f(x, y)$ , definită pe un domeniu  $D$  din  $\mathbb{R}^2$ , este derivabilă în punctul  $\mathbf{a} = (a, b)$  în raport cu variabila  $x$  și în raport cu variabila  $y$ , atunci derivatele parțiale de ordinul întâi  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t}. \end{cases} \quad (6.12)$$

În cazul  $n = 3$ , derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției reale  $u = f(x, y, z)$ , în punctul  $(a, b, c)$ , dacă există, sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b, c) - f(a, b, c)}{t}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b + t, c) - f(a, b, c)}{t}; \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + t) - f(a, b, c)}{t}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Pentru a înțelege semnificația relației (6.11), considerăm funcția reală  $\varphi_j$ , restricția funcției  $f$  la segmentul deschis din  $D$  care conține extremitatea  $A$  a vectorului  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  și are direcția versorului  $\mathbf{e}_j$ . Un punct oarecare al acestui diametru are vectorul de poziție  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{e}_j$ , unde  $t$  aparține unui interval  $I$  care conține originea  $t = 0$ . Valorile funcției  $f$  pe acest diametru sunt egale cu valorile funcției  $\varphi_j$  pe intervalul  $I$ , iar acestea din urmă sunt date de

$$\varphi_j(t) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) \quad (6.14)$$

În acest mod ultimul membru din (6.11) este

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j(0)}{t} = \varphi'_j(0). \quad (6.15)$$

Din (6.11), (6.14) și (6.15) rezultă că derivata parțială  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a})$  este derivata obișnuită, în origine, a funcției  $\varphi_j$ , adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \varphi'_j(0). \quad (6.16)$$

Identitatea (6.16) dă o *metodă practică* de calculare a derivatelor parțiale ale unei funcții de  $n$  variabile reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  în situația în care funcția  $f$  este definită printr-o formulă explicită ca rezultat al unor operații algebrice, trigonometrice, etc. asupra coordonatelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Pentru calculul derivatei parțiale de ordinul întâi în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$ , considerăm că expresia matematică  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este funcție numai de variabila  $x_j$ , celelalte variabile fiind tratate drept constante, derivăm funcția de variabila  $x_j$  astfel obținută conform regulilor cunoscute de derivare a funcțiilor reale de o variabilă reală, după care se înlocuiește  $x_i$  cu  $a_i$ , unde  $i \in \overline{1, n}$ .

**Definiția 6.3.4.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este **derivabilă parțial** pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  dacă  $f$  este derivabilă parțial în orice punct  $\mathbf{a} \in D$  în raport cu toate variabilele  $x_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ .

**Definiția 6.3.5.** Fie  $f \in \mathcal{F}(D)$  o funcție reală derivabilă parțial pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Funcțiile

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t}, \quad (6.17)$$

se numesc **derivatele parțiale de ordinul întâi** ale funcției  $f$ .

Pentru derivata parțială de ordinul întâi a funcției  $f$  în raport cu variabila  $x_k$ , în punctul  $\mathbf{x} \in D$ , se poate utiliza și una din notațiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}); \quad f'_{x_k}(\mathbf{x}) = f_{,x_k}(\mathbf{x}); \quad f_{,k}(\mathbf{x}).$$

Deoarece derivarea parțială a funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  în raport cu variabila  $x_j$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , este derivarea ordinară, obișnuită, a funcției reale de variabilă reală  $\varphi_j$ , are aceleași proprietăți ca și derivarea obișnuită. De exemplu, avem

$$\begin{cases} (f_1 \pm f_2)_{,j} = f_{1,j} \pm f_{2,j}, \\ (cf)_{,j} = c f_{,j}, \quad c = \text{const.}, \\ (f_1 \cdot f_2)_{,j} = f_{1,j} \cdot f_2 + f_1 \cdot f_{2,j}, \\ \left(\frac{f_1}{f_2}\right)_{,j} = \frac{f_{1,j} \cdot f_2 - f_1 \cdot f_{2,j}}{f_2^2}, \end{cases} \quad (6.18)$$

în ipoteza că derivatele din membrul doi din fiecare egalitate există și că numitorul din ultima egalitate este diferit de zero.

**Definiția 6.3.6.** Funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este **de clasă  $C^1$**  pe mulțimea deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  dacă  $f$  este continuă, derivabilă parțial pe  $D$  și toate derivatele parțiale  $f_{,j}$  sunt funcții continue pe  $D$ .

**Exercițiul 6.3.1.** Folosind relațiile (6.12), să se studieze dacă funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = x^2 + xy,$$

este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{a} = (5, -3)$ , precizându-se totodată derivatele parțiale de ordinul întâi în acest punct.

**Soluție.** Fie  $g_1(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$  și  $g_2(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_2)$  unde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  și  $t \in \mathbb{R}$ . După Definiția 6.3.1 și Definiția 6.3.2 trebuie să studiem derivabilitatea în  $t = 0$  a funcțiilor  $g_1$  și  $g_2$ . Pentru aceasta calculăm  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_1(t) - g_1(0)}{t}$  și  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_2(t) - g_2(0)}{t}$ . Constatăm că aceste limite există, sunt finite și egale respectiv cu 7 și 5. Prin urmare  $g'_1(0) = 7$ , iar  $g'_2(0) = 5$ , ceea ce arată că există  $\frac{df}{d\mathbf{e}_1}(\mathbf{a})$  și  $\frac{df}{d\mathbf{e}_2}(\mathbf{a})$  și acestea sunt egale cu 7, respectiv 5. După Definiția 6.3.1 avem că  $f$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{a} = (5, -3)$ . În baza Definiției 6.3.2 rezultă că  $\frac{\partial f}{\partial x}(5, -3) = 7$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}(5, -3) = 5$ . ■

**Exercițiul 6.3.2.** Folosind metoda practică de calcul a derivatelor parțiale de ordinul întâi ale unei funcții reale de mai multe variabile reale și relațiile (6.18) să se determine derivatele parțiale ale funcțiilor:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1^6 x_2^2}{x_3} + 3x_1, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_3 \neq 0; \\ \text{(ii)} \quad f(x_1, x_2) &= e^{ax_1} \cos bx_2, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

unde  $a$  și  $b$  sunt constante reale.

**Soluție.** Folosind (6.18) – (6.18), în cazul (i), obținem:

$$f_{,1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{6x_1^5 x_2^2}{x_3} + 3; \quad f_{,2}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_1^6 x_2}{x_3}; \quad f_{,3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{x_1^6 x_2^2}{x_3^2},$$

iar în cazul (ii), avem:

$$f_{,1}(x_1, x_2) = a e^{ax_1} \cos bx_2; \quad f_{,2}(x_1, x_2) = -b e^{ax_1} \sin bx_2.$$

■

**Exercițiul 6.3.3.** Să se determine derivatele parțiale  $f_{,x}(x, y)$  și  $f_{,y}(x, y)$ , unde  $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ .

**Soluție.** Aplicând regula practică de calculare a derivatelor parțiale, găsim:

$$f_{,x}(x, y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad f_{,y}(x, y) = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

■

**Exercițiul 6.3.4.** Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \quad f(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|^2} (x_1 + x_2^3 + x_3^5 + \dots + x_n^{2n-1}),$$

$$\text{unde } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ și } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

**Soluție.** Folosind regulile de derivare (6.18), găsim:

$$\begin{cases} f_{,1}(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|^2} (1 + 2x_1(x_1 + x_2^3 + x_3^5 + \dots + x_n^{2n-1})); \\ f_{,2}(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|^2} (3x_2 + 2(x_1 + x_2^3 + x_3^5 + \dots + x_n^{2n-1})); \\ \vdots \\ f_{,n}(\mathbf{x}) = e^{\|\mathbf{x}\|^2} ((2n-1)x_n^{2n-1} + 2(x_1 + x_2^3 + x_3^5 + \dots + x_n^{2n-1})). \end{cases}$$

■

Derivabilitatea parțială a unei funcții reale de mai multe variabile reale nu implică continuitatea acesteia. Exemplul de mai jos vine în sprijinul afirmației făcute.

**Exemplul 6.3.1.** *Funcția reală de două variabile reale*

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

este derivabilă parțial în origine, dar nu este continuă în origine.

Într-adevăr, prin calcul direct, constatăm că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0,$$

ceea ce arată că  $f$  este derivabilă parțial în origine și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pentru studiul continuității funcției  $f$  în origine, folosim definiția cu șiruri. În acest scop, fie șirurile  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$  și  $(\mathbf{z}_n)_{n \geq 1}$  care au termenii generali  $\mathbf{x}_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  și  $\mathbf{z}_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$ . Ambele șiruri sunt convergente la  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . Șirurile valorilor funcției au respectiv termenii generali  $f(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{2}$  și  $f(\mathbf{z}_n) = \frac{2}{5}$  și, după cum se vede, sunt convergente la limite diferite, ceea ce arată că funcția  $f$  nu este continuă în origine. ■

**Definiția 6.3.7.** Fie funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{x}_0$ . Vectorul

$$(\nabla f)(\mathbf{x}_0) = (f_{,1}(\mathbf{x}_0), f_{,2}(\mathbf{x}_0), \dots, f_{,n}(\mathbf{x}_0)) = \sum_{j=1}^n f_{,j}(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_j, \quad (6.19)$$

se numește **gradientul**, sau **derivata** funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ .

**Definiția 6.3.8.** Operatorul  $\nabla : \mathcal{F}(D) \rightarrow \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$  definit prin

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (6.20)$$

unde  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , este operația de derivare parțială față de variabila  $x_j$ , se numește **operatorul nabla**, sau **operatorul lui Hamilton**<sup>1</sup>.

Operatorul lui Hamilton aplicat funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , este gradientul funcției  $f$  în  $\mathbf{x}$ .

## 6.4 Diferențiabilitatea și diferențiala de ordinul întâi ale unei funcții reale de variabilă vectorială

Fie funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , și funcția afină reală

$$A : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) + c, \quad (6.21)$$

<sup>1</sup>Hamilton, William Rowan (1805–1865), matematician irlandez.



unde  $c$  este o constantă reală, iar  $T$  este o formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , deci  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ .

Dacă în baza canonică

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n,$$

un vector oarecare  $\mathbf{x}$  are expresia analitică

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}X, \quad (6.22)$$

unde

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_n, \quad \text{ori} \quad (6.23)$$

iar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad (6.24)$$

este matricea coordonatelor vectorului  $\mathbf{x}$  în baza  $\mathcal{B}$ , atunci, după Teorema 4.10.1, avem

$$T(\mathbf{x}) = A_{\top} X, \quad (6.25)$$

unde  $A_{\top} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$  este matricea lui  $T$  în perechea de baze  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\{1\} \subset \mathbb{R}$  și are expresia

$$A_{\top} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n), \quad (6.26)$$

unde

$$a_i = T(\mathbf{e}_i), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (6.27)$$

Ne propunem să aproximăm  $f(\mathbf{x})$  prin numărul real (6.21), astfel încât să fie satisfăcute condițiile

$$A(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0), \quad (6.28)$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} A(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}). \quad (6.29)$$

Din (6.21) și (6.28), deducem

$$c = f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x}_0). \quad (6.30)$$

Folosind (6.30) în (6.21) și ținând cont de faptul că  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , stabilim că

$$A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.31)$$

Din (6.29), (6.31) și

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = T(\mathbf{0}) = 0,$$

rezultă că aproximarea dorită se poate realiza dacă  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ , ceea ce arată că funcția  $f$  trebuie să fie continuă în  $\mathbf{x}_0$ .

Până acum aplicația  $T$  este nedeterminată deoarece nu se cunosc numerele  $a_j$  din (6.7). Acestea se determină din condiția ca  $f(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x})$  să se "apropie" de zero "mai repede" de cum se apropie de zero numărul real pozitiv  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ , unde  $\|\cdot\|$  este norma Euclidiană pe  $\mathbb{R}^n$ . Această condiție suplimentară conduce la

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \quad (6.32)$$

sau echivalent

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (6.33)$$

Dacă raportul din (6.32) se notează cu  $\alpha(\mathbf{h})$ , adică

$$\alpha(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}, \quad (6.34)$$

atunci condiția (6.33), cu notația (6.34), se scrie

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(\mathbf{h}) = 0. \quad (6.35)$$

Funcția  $\alpha$  se poate prelungi prin continuitate în origine punând

$$\alpha(\mathbf{0}) = 0. \quad (6.36)$$

Analizând acum (6.34) – (6.36), deducem că ultima condiție impusă se poate formula astfel: să existe o funcție reală  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  care să satisfacă (6.35) și (6.36) astfel încât să aibă loc

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D, \quad (6.37)$$

sau

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (6.38)$$

Egalitatea (6.37), sau (6.38) conduce în mod natural la noțiunile de diferențiabilitate și diferențială de ordinul întâi ale unei funcții reale de mai multe variabile reale.

**Definiția 6.4.1.** Funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$ , definită pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^n$ , este **diferențiabilă** în  $\mathbf{x}_0 \in D$  dacă există forma liniară  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$  și funcția reală  $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , cu proprietățile (6.35), (6.36), astfel încât să aibă loc (6.37), sau (6.38). Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă dacă  $f$  este diferențiabilă în orice punct  $\mathbf{x} \in D$ .

**Definiția 6.4.2.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ , atunci forma liniară  $T$  din  $\mathbb{R}^n$  se numește **diferențiala de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$**  și se notează cu

$$T = T(\cdot) = df(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \cdot) = df(\mathbf{x}_0)(\cdot). \quad (6.39)$$

**Teorema 6.4.1. (Unicitatea diferențialei)** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$ , atunci diferențiala sa în  $\mathbf{x}_0$  este unică.

*Demonstrație.* Să presupunem că aplicația  $T = df(\mathbf{x}_0)$  nu este unică și că mai există o formă liniară  $S$  pe  $\mathbb{R}^n$  astfel încât să fie verificată o egalitate asemănătoare cu (6.33)

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - S(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (6.40)$$

În baza axiomelor  $(N_1) - (N_3)$  din definiția normei, pentru orice  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , avem

$$\begin{aligned} & \frac{S(\mathbf{h}) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \leq \\ & \leq \frac{S(\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) + f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{h}\|} + \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Trecând la limită în (6.41) pentru  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$  și ținând cont de (6.32) și (6.40), obținem

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{S(\mathbf{h}) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (6.42)$$

Dacă  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  este arbitrar dar fixat, atunci luând în (6.42)  $\mathbf{h} = t\mathbf{y}$ , unde  $t > 0$  și ținând cont că  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \Rightarrow t \rightarrow 0$ , obținem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t\mathbf{y}) - T(t\mathbf{y})}{t\|\mathbf{y}\|} = 0,$$

din care, în baza omogeneității lui  $S$  și  $T$ , rezultă

$$\frac{S(\mathbf{y}) - T(\mathbf{y})}{\|\mathbf{y}\|} = 0.$$

De aici avem evident

$$S(\mathbf{y}) = T(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Dacă la acest rezultat adăugăm și faptul că  $T(\mathbf{0}) \equiv S(\mathbf{0})$  deducem  $T = S$ , ceea ce arată că diferențiala lui  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este unică. **q.e.d.**

Teorema următoare stabilește legătura dintre diferențiabilitatea și derivabilitatea unei funcții reale de mai multe variabile reale.

**Teorema 6.4.2.** Dacă funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci  $f$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{x}_0$  și

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{e}_j) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j), \quad j \in \overline{1, n}. \quad (6.43)$$

*Demonstrație.* Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  atunci (6.37) are loc și pentru  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$ ,  $t \neq 0$ . Ținând cont că  $T$  este aplicație liniară, rezultă

$$T(t\mathbf{e}_j) = tT(\mathbf{e}_j) = tdf(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) = ta_j = tdf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j)$$

și ca atare (6.37) se scrie în forma

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) = f(\mathbf{x}_0) + tT(\mathbf{e}_j) + |t|\alpha(t\mathbf{e}_j), \quad t \in \mathbb{R}^*, \quad \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j \in D, \quad (6.44)$$

sau în forma echivalentă

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) + \frac{|t|}{t}\alpha(t\mathbf{e}_j). \quad (6.45)$$

Trecerea la limită pentru  $t \rightarrow 0$  în (6.45), în care se ține cont de (6.35), conduce la

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) = T(\mathbf{e}_j) = a_j, \quad j \in \overline{1, n}, \quad (6.46)$$

care arată că  $f$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{x}_0$  și are loc (6.43). **q.e.d.**

Cu acest rezultat putem afirma că matricea  $A_{\top}$  este

$$A_{\top} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right). \quad (6.47)$$

**Definiția 6.4.3.** Matricea  $A_{\top}$  din (6.44) se numește **matricea jacobiană a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$**  și, alteori, se notează cu  $J_f(\mathbf{x}_0)$ .

**Observația 6.4.1.** Vectorul care în baza canonică din  $\mathbb{R}^n$  are drept coordonate elementele corespunzătoare ale matricei  $A_{\top} = J_f(\mathbf{x}_0)$  este tocmai  $f'(\mathbf{x}_0) = (\nabla f)(\mathbf{x}_0)$ , deci putem scrie

$$f'(\mathbf{x}_0) = (\nabla f)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e} J_f^{\top}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_i. \quad (6.48)$$

**Corolarul 6.4.1.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i = ((\nabla f)(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{h} = J_f(\mathbf{x}_0) H, \quad (6.49)$$

oricare ar fi vectorul

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e} H \in \mathbb{R}^n. \quad (6.50)$$

*Demonstrație.* Dacă se calculează  $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})$  în care  $\mathbf{h}$  are expresia (6.50), se ține cont de faptul că diferențiala funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este aplicație liniară, se are în vedere (6.48) și expresia produsului scalar standard în  $\mathbb{R}^n$ , se obține (6.49). **q.e.d.**

**Teorema 6.4.3.** Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$ , definită pe mulțimea nevidă deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$ , este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci  $f$  este continuă în  $\mathbf{x}_0$ , derivabilă în  $\mathbf{x}_0$  după orice versor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  și are loc egalitatea

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{s}) = (\nabla f)(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{s}. \quad (6.51)$$

*Demonstrație.* Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci are loc (6.37) sau, echivalenta ei, (6.38). Trecând la limită în (6.38) pentru  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , ținând cont de faptul că  $T$  este aplicație continuă de valoare nulă în originea lui  $\mathbb{R}^n$  și de faptul că funcția  $\alpha$  are proprietatea (6.35), deducem că  $f$  este funcție continuă în  $\mathbf{x}_0$ .

Să luăm acum în (6.37)  $\mathbf{h} = t\mathbf{s}$ , unde  $\mathbf{s}$  este un versor din  $\mathbb{R}^n$ , iar  $t \in \mathbb{R}^*$  este astfel încât  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s} \in D$ . Dacă ținem cont de notația (6.39), constatăm că pentru alegerea de mai sus egalitatea (6.37) devine

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{x}_0) = t df(\mathbf{x}_0) \quad (6.52)$$

Dacă în egalitatea (6.52) împărțim prin  $t$ , trecem la limită pentru  $t \rightarrow 0$  și ținem cont de (6.35) și Definiția 6.2.1, obținem (6.51). **q.e.d.**

Considerăm funcțiile  $\text{pr}_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $\text{pr}_j(\mathbf{x}) = x_j$ ,  $\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , care sunt

diferențiabile în orice punct din  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  deoarece

$$\text{pr}_j(\mathbf{x}) = \text{pr}_j(\mathbf{a}) + 1 \cdot (x_j - a_j) + 0 \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Diferențiala oricăreia dintre ele este

$$d \text{pr}_j(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = 1 \cdot h_j, \quad \forall \mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \quad j \in \overline{1, n}.$$

Deoarece diferențiala funcției  $\text{pr}_j$  în punctul  $\mathbf{a}$  nu depinde de  $\mathbf{a}$  rezultă că în orice punct  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  avem

$$d \text{pr}_j(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = h_j, \quad (6.53)$$

Folosind în (6.53) definiția (6.52) a funcțiilor *proiecție*  $\text{pr}_j$ , deducem

$$dx_j(\mathbf{h}) = h_j. \quad (6.54)$$

Diferențialele funcțiilor proiecție (6.52) le vom spune *diferențialele variabilelor independente*.

Înlocuirea lui (6.53) în (6.49) conduce la

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.55)$$

**Observația 6.4.2.** Din (6.53) rezultă că diferențiala funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$  este combinație liniară de diferențialele variabilelor independente  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , coeficienții combinației liniare fiind derivatele parțiale ale funcției  $f$ , adică

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i. \quad (6.56)$$

**Observația 6.4.3.** Diferențialele variabilelor independente sunt evident elemente ale spațiului dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  și, mai mult, din (6.55) rezultă că mulțimea  $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$  este bază în  $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

**Definiția 6.4.4.** Operatorul  $d$  definit prin

$$d = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i, \quad (6.57)$$

care este o combinație liniară a operatorilor de derivare parțială  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , cu coeficienți diferențialele variabilelor independente, se numește **operatorul de diferențiere de ordinul întâi**.

Având în vedere (6.57) și proprietățile (6.18) ale operațiilor de derivare parțială deducem

**Teorema 6.4.4.** Dacă funcțiile  $f_1 \in \mathcal{F}(D)$  și  $f_2 \in \mathcal{F}(D)$  sunt diferențiabile în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , iar  $\lambda_1, \lambda_2$  sunt numere reale arbitrare, atunci funcțiile:  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{F}(D)$ ;  $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{F}(D)$ ;  $\frac{f_1}{f_2} \in \mathcal{F}(D)$ , (cu condiția  $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$ ), sunt diferențiabile în  $\mathbf{x}_0$  și

$$\begin{cases} d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 df_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 df_2(\mathbf{x}_0), \\ d(f_1 \cdot f_2)(\mathbf{x}_0) = f_2(\mathbf{x}_0) df_1(\mathbf{x}_0) + f_1(\mathbf{x}_0) df_2(\mathbf{x}_0), \\ d\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x}_0) = \frac{f_2(\mathbf{x}_0) df_1(\mathbf{x}_0) - f_1(\mathbf{x}_0) df_2(\mathbf{x}_0)}{f_2^2(\mathbf{x}_0)}. \end{cases} \quad (6.58)$$

**Definiția 6.4.5.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , atunci aplicația

$$\mathbf{x} \in D \mapsto df(\mathbf{x}) \in (\mathbb{R}^n)^*, \quad df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) dx_i, \quad (6.59)$$

se numește **funcția diferențială de ordinul întâi a funcției  $f$  pe mulțimea deschisă  $D$** .

În cazul  $n = 2$ , (6.59) se scrie în forma

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy, \quad (6.60)$$

iar în cazul  $n = 3$ , forma lui (6.59) este

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz. \quad (6.61)$$

**Exercițiul 6.4.1.** Folosind regulile de diferențiere din Teorema 6.4.4 să se calculeze funcția diferențială a funcției

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = x \cos 3y - y^2 \sin 2x$$

după care, utilizând (6.59), să se precizeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ .

**Soluție.** Folosind (6.58), găsim

$$\begin{aligned} df(x, y) &= d(x \cos 3y - y^2 \sin 2x) = d(x \cos 3y) - d(y^2 \sin 2x) = \\ &= \cos 3y dx - 3x \sin 3y dy - 2y \sin 2x dy - 2y^2 \cos 2x dx = \\ &= (\cos 3y - 2y^2 \cos 2x) dx - (3x \sin 3y + 2y \sin 2x) dy, \end{aligned} \quad (6.62)$$

de unde, luând în considerație (6.59), deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos 3y - 2y^2 \cos 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -(3x \sin 3y + 2y \sin 2x).$$

■

**Exemplul 6.4.1.** Aplicația  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  nu este diferențiabilă în origine.

Presupunem contrariul, și anume că funcția  $f$  este diferențiabilă în origine. Atunci, există aplicația liniară  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , care în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are expresia analitică

$$T(\mathbf{h}) = T(h_1 \mathbf{e}_1 + h_2 \mathbf{e}_2) = a_1 h_1 + a_2 h_2, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2,$$

unde  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ , astfel încât (vezi (6.32))

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{h}\| - a_1 h_1 - a_2 h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (6.63)$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{h}\| - a_1 h_1 - a_2 h_2}{\|\mathbf{h}\|} = 1 - a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta, \quad (6.64)$$

unde  $\theta$  este unghiul dintre  $\mathbf{e}_1$  și  $\mathbf{h}$ . Din (6.63) și (6.64) rezultă egalitatea

$$1 - a_1 \cos \theta - a_2 \sin \theta = 0, \quad (6.65)$$

care nu este posibilă în ipoteza că  $\theta$  este arbitrar între 0 și  $2\pi$ .

Presupunerea făcută este falsă, prin urmare funcția  $f$  nu este diferențiabilă în origine. ■

#### Exemplul 6.4.2. Funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

este diferențiabilă în origine.

Într-adevăr, remarcând mai întâi că funcția dată este derivabilă în origine și că  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , deducem că egalitatea (6.38) se scrie în forma

$$f(x, y) = f(0, 0) + \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2} \implies e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2},$$

din care deducem

$$\alpha(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Folosind notația  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , constatăm că  $\alpha(x, y)$  se exprimă în forma

$$\alpha(x, y) = \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}}.$$

Dacă ținem cont că  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \iff \rho \rightarrow 0$ , atunci

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(x, y) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(\mathbf{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} e^{-\frac{1}{\rho^2}}.$$

Aplicând regula lui L'Hospital, găsim că ultima limită este egală cu zero și deci funcția  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . ■

## 6.5 Condiție suficientă de diferențiabilitate

Diferențiabilitatea într-un punct a unei funcții reale de mai multe variabile reale implică continuitatea sa în acest punct, derivabilitatea după orice direcție și, în particular, derivabilitatea parțială a funcției în acel punct.

Existența derivatelor parțiale ale funcției  $f$  într-un punct nu asigură diferențiabilitatea lui  $f$  în acel punct.

Pentru a justifica afirmația aceasta este de ajuns să considerăm Exemplul 6.3.1. Presupunând că funcția din acest exemplu este diferențiabilă, atunci trebuie să existe funcția reală de două variabile reale  $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$  cu proprietatea

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \alpha(x, y) = \alpha(0, 0) = 0$$

astfel încât să avem

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y - 0) + \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Cum  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$  și  $f(0, 0) = 0$ , folosind (6.12), deducem  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$  și cu aceste calcule egalitatea de mai sus devine

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ pentru } (x, y) \neq (0, 0).$$

Această egalitate trebuie să aibă loc și pentru  $y = x \neq 0$ . În acest caz particular, egalitatea devine

$$1 = 2\sqrt{2}\alpha(x, x)|x|.$$

Trecând la limită pentru  $x \rightarrow 0$  în acest ultim rezultat găsim  $1 = 0$ , ceea ce arată că funcția  $f$  nu este diferențiabilă în origine deși are derivate parțiale în acest punct.

Așadar, simpla existență a derivatelor parțiale într-un punct ale unei funcții reale de mai multe variabile reale nu asigură diferențiabilitatea acesteia în punct.

Ne punem atunci întrebarea: *ce condiții suplimentare trebuie să satisfacă derivatele parțiale ale funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  astfel încât  $f$  să fie diferențiabilă într-un punct din  $D$ ?* Teorema următoare dă răspunsul la această întrebare.

**Teorema 6.5.1. (Condiție suficientă de diferențiabilitate)** *Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă parțial într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$  a punctului  $\mathbf{a} \in D$ , iar derivatele parțiale sunt continue în  $\mathbf{a}$ , atunci  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{a}$ .*

*Demonstrație.* Fără a micșora din generalitate, putem presupune că vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{a})$  este bila deschisă cu centrul în  $\mathbf{a}$  și rază  $\varepsilon > 0$ , pe care având în vedere că  $D$  este mulțime deschisă, o putem considera inclusă în  $D$ . Amintind că mulțimea  $B(\mathbf{a}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in D : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$ , să procedăm la evaluarea creșterii funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{a}$  corespunzătoare creșterii  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ . Această creștere se poate scrie în forma

$$\Delta f(\mathbf{a}; \Delta \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (g_i(x_i) - g_i(a_i)), \quad (6.66)$$

unde

$$\begin{cases} g_1 : [x_1, a_1] \rightarrow \mathbb{R}, & g_1(t) = f(t, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ g_2 : [x_2, a_2] \rightarrow \mathbb{R}, & g_2(t) = f(a_1, t, x_3, \dots, x_n), \\ \vdots \\ g_n : [x_n, a_n] \rightarrow \mathbb{R}, & g_n(t) = f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, t). \end{cases} \quad (6.67)$$

Fiecare din funcțiile din (6.62) satisface ipotezele teoremei lui Lagrange referitoare la o funcție reală de variabilă reală continuă pe un compact și derivabilă pe interiorul aceluia interval, ca urmare putem afirma că există  $\xi_i \in (x_i, a_i)$  astfel încât

$$g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i)g'(\xi_i), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (6.68)$$

Însă, se vede ușor că

$$\begin{cases} g'_1(\xi_1) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \\ g'_2(\xi_2) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n), \\ \vdots \\ g'_n(\xi_n) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \xi_n). \end{cases} \quad (6.69)$$



Înlocuirea relațiilor (6.69) în (6.68) și a rezultatului în (6.66), conduce la

$$\begin{aligned}\Delta f(\mathbf{a}; \Delta \mathbf{x}) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} (x_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, \xi_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \xi_n).\end{aligned}\quad (6.70)$$

Să scădem din ambii membri ai lui (6.70) expresia

$$T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i).$$

Notând  $h_i = x_i - a_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$  și  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ , constatăm că aplicația

$$T \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad T(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) h_i, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.71)$$

este o formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , deci  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ .

După efectuarea operației anunțate în (6.70) și împărțirea în ambii membri a egalității obținute cu  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ , obținem

$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} &= \\ \frac{x_1 - a_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right) + \\ \frac{x_2 - a_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right) + \\ &\vdots \\ \frac{x_n - a_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right).\end{aligned}\quad (6.72)$$

Luând valoarea absolută în ambii membri ai lui (6.72) și ținând cont că

$$\frac{|x_i - a_i|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

deducem

$$\begin{aligned}\frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x} - \mathbf{a})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} &\leq \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right| + \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right| + \\ &\vdots \\ \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, \dots, a_n) \right|.\end{aligned}\quad (6.73)$$

Deoarece derivatele parțiale ale funcției  $f$  sunt continue în  $\mathbf{a}$ , există limita termenilor din membrul doi a inegalității (6.73) pentru  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$  și aceasta este egală cu zero. Prin urmare,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - T(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} = 0. \quad (6.74)$$

Dacă expresia căreia i se calculează limita în (6.74) o notăm cu  $\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a})$  și mai adăugăm  $\alpha(\mathbf{0}) = 0$ , atunci din (6.74) obținem (6.38), unde  $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  satisface (6.35) și (6.36) ceea ce, în baza Definiției 6.4.1, arată că funcția  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{a}$  și teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

**Corolarul 6.5.1.** Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , atunci  $f$  este diferențiabilă pe  $D$ .

## 6.6 Derivate parțiale de ordin superior ale unei funcții reale de mai multe variabile reale

Fie  $D$  o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{F}(D)$  o funcție reală derivabilă pe  $D$  și  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , cele  $n$  derivate parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$ .

**Definiția 6.6.1.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este de două ori derivabilă în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , în această ordine, în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$  dacă funcția  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă în raport cu variabila  $x_i$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , deci dacă există limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t \mathbf{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (6.75)$$

și aceasta aparține lui  $\mathbb{R}$ .

**Definiția 6.6.2.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este de două ori derivabilă în  $\mathbf{x}_0$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , atunci limita finită din (6.75) se numește **derivata parțială de ordinul al doilea a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$**  și se notează cu unul din simbolurile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad f''_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0), \quad f_{,x_j x_i}(\mathbf{x}_0), \quad f_{,ji}(\mathbf{x}_0).$$

Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t \mathbf{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)}{t}. \quad (6.76)$$

**Observația 6.6.1.** Din definițiile de mai sus rezultă că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \quad (6.77)$$

adică o derivată parțială de ordinul al doilea, a unei funcții reale de o variabilă reală  $f$ , este derivata parțială a unei derivate parțiale de ordinul întâi a aceleiași funcții  $f$ .

**Observația 6.6.2.** Într-un punct  $\mathbf{x}_0 \in D$  pot exista cel mult  $n^2$  derivate parțiale de ordinul al doilea.

**Definiția 6.6.3.** Dacă  $i \neq j$ , atunci derivatele parțiale de ordinul al doilea  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$  se numesc **derivate parțiale mixte**, iar când  $i = j$  convenim să scriem  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}_0)$  în loc de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ .

**Definiția 6.6.4.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  se numește **derivabilă parțial de două ori** în  $\mathbf{x}_0$  dacă există  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  pentru orice  $i \in \overline{1, n}$  și pentru orice  $j \in \overline{1, n}$ .

**Definiția 6.6.5.** Dacă există  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$  pentru orice  $\mathbf{x} \in D$ , pentru orice  $i \in \overline{1, n}$  și pentru orice  $j \in \overline{1, n}$ , atunci funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este **derivabilă parțial de două ori** pe  $D$ .

**Definiția 6.6.6.** Dacă funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă parțial de două ori pe  $D$ , atunci funcțiile

$$\mathbf{x} \in D \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x} + t \mathbf{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})}{t} \in \mathbb{R},$$

unde  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se numesc **derivatele parțiale de ordinul al doilea** ale funcției  $f$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\cdot); \quad f_{,ji}; \quad f_{,ji}(\cdot); \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\cdot).$$

**Definiția 6.6.7.** Prin definiție, **derivatele parțiale de ordinul  $m$ ,  $m \geq 2$** , ale funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  sunt derivatele parțiale de ordinul întâi ale derivatelor parțiale de ordinul  $m - 1$ , în ipoteza că acestea din urmă există.

**Definiția 6.6.8.** Funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  se numește **de clasă  $C^m$ ,  $m \geq 2$** , și scriem  $f \in C^m(D)$ , dacă  $f$  admite derivate parțiale până la ordinul  $m$  inclusiv, iar  $f$  și toate derivatele sale parțiale până la ordinul  $m$  sunt funcții continue pe  $D$ .

**Observația 6.6.3.** Dacă notăm cu  $C^0(D)$  mulțimea funcțiilor continue pe  $D$  rezultă că orice funcție de clasă  $C^1$  pe  $D$  este și de clasă  $C^0(D)$ .

Într-adevăr, dacă  $f \in C^1(D)$ , atunci conform Corolarului 6.6.4,  $f$  este diferențiabilă pe  $D$ , iar din Teorema 6.4.3 rezultă că  $f$  este funcție continuă, deci  $f \in C^0(D)$ . ■

Ținând cont de această observație rezultă că orice funcție reală de clasă  $C^q(D)$  este totodată și o funcție de clasă  $C^{q-1}(D)$ , unde  $q \geq 1$ .

**Definiția 6.6.9.** Clasa funcțiilor indefinit derivabile parțial pe  $D$  este mulțimea tuturor funcțiilor reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  care admit derivabile parțiale de orice ordin, continue pe  $D$ . Această mulțime se notează cu  $C^\infty(D)$ .

**Observația 6.6.4.** Din rezultatele de mai sus deducem că are loc următorul șir de incluziuni

$$C^\infty(D) \subset \dots \subset C^m(D) \subset C^{m-1}(D) \subset \dots \subset C^1(D) \subset C^0(D).$$

**Exemplul 6.6.1.** Funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = x|x|y,$$

nu este derivabilă parțial pe  $D$ , iar derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea, care există, sunt egale.

Într-adevăr, folosind definiția derivatelor parțiale într-un punct, deducem

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2|x|y, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x|x|, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Folosind aceste rezultate și (6.76), se găsește:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} 2 \frac{|x|}{x} y, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \\ \text{nu există}, & \text{dacă } (x, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}, \end{cases} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2|x|, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^2; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2|x|, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, & \text{dacă } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Prin urmare, nefiind derivabilă parțial de două ori în raport cu variabila  $x$  în puncte de forma  $(0, y)$ , unde  $y \in \mathbb{R}$ , funcția  $f$  nu este de două ori derivabilă. De asemenea, derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea, acolo unde există, sunt egale. ■

**Exercițiul 6.6.1.** Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției

$$f \in \mathcal{F}(D), \quad f(x, y, z) = 3x^2y - \frac{x+y}{z} + 2z,$$

unde  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathbb{R}^2, z > 0\}$ .

**Soluție.** Folosind regulile de derivare parțială care rezultă din (6.18), găsim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= 6xy - \frac{1}{z}; & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 3x^2 - \frac{1}{z}; & \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{x+y}{z^2} + 2; \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 6xy - \frac{1}{z} \right) = 6y; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 3x^2 - \frac{1}{z} \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x+y}{z^2} + 2 \right) = -\frac{2(x+y)}{z^3}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 3x^2 - \frac{1}{z} \right) = 6x; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 6xy - \frac{1}{z} \right) = 6x; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( 6xy - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x+y}{z^2} + 2 \right) = \frac{1}{z^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left( 3x^2 - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{z^2}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x+y}{z^2} + 2 \right) = \frac{1}{z^2}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția considerată este derivabilă parțial de două ori pe  $D$ , iar derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea sunt egale. ■

**Exercițiul 6.6.2.** Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale funcției  $f$ , în origine, nu sunt egale.

**Soluție.** Pentru a calcula derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea în origine ale funcției date trebuie să calculăm mai întâi derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$  într-o vecinătate a originii. Pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$ , aplicând regulile de calcul cu derivatele parțiale, se vede ușor că :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul întâi și doi ale funcției  $f$  în origine aplicăm formula de calcul (6.21) și (6.76). Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{t} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1.$$

Din cele de mai sus rezultă că  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ . ■

Din exemplele date constatăm că există funcții pentru care derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea într-un punct, sau pe o mulțime sunt egale, în timp ce pentru altele acestea, măcar într-un punct, nu sunt egale.

În continuare, vom prezenta condiții suficiente ce trebuie să le satisfacă funcția  $f$  astfel încât derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale sale într-un punct, sau pe o mulțime de puncte să fie egale.

**Teorema 6.6.1. (Criteriul lui Schwarz)** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală de variabilele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și  $i \neq j$ , unde  $i \in \overline{1, n}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Dacă există derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x})$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$  pe o vecinătate  $V \subset D$  a punctului  $\mathbf{x}_0$  și dacă aceste derivate parțiale sunt continue în  $\mathbf{x}_0$ , atunci  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ .

*Demonstrație.* Pentru simplitate și fără a pierde din generalitate, vom considera cazul funcțiilor reale  $f$  de două variabile reale  $x$  și  $y$ . Fie  $h \in \mathbb{R}$  arbitrar fixat încât dreptunghiul cu două din vârfurile opuse în punctul  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  și în punctul de coordonate  $(x_0 + h, y_0 + h)$  să fie incluse în vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ . Definim acum funcțiile:

$$\varphi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(x_0 + t, y_0 + h) - f(x_0 + t, y_0), \quad t \in [0, h]; \quad (6.78)$$

$$\psi : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = f(x_0 + h, y_0 + t) - f(x_0, y_0 + t), \quad t \in [0, h]. \quad (6.79)$$

Mai întâi observăm că

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \psi(h) - \psi(0). \quad (6.80)$$

Apoi, întrucât funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  satisfac ipotezele teoremei creșterilor finite a lui Lagrange, există  $0 < \theta_1 < 1$  și  $0 < \theta_2 < 1$ , astfel încât:

$$\begin{cases} \varphi(h) - \varphi(0) &= h \varphi'(\theta_1 h); \\ \psi(h) - \psi(0) &= h \psi'(\theta_2 h). \end{cases} \quad (6.81)$$

Din (6.80) și (6.81) obținem

$$\varphi'(\theta_1 h) = \psi'(\theta_2 h). \quad (6.82)$$

Însă:

$$\varphi'(\theta_1 h) = f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0); \quad (6.83)$$

$$\psi'(\theta_2 h) = f_{,2}(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h) - f_{,2}(x_0, y_0 + \theta_2 h). \quad (6.84)$$

Membrul doi din (6.83) este creșterea funcției  $f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, \cdot)$  în punctul  $y_0$  corespunzătoare creșterii  $h$  a variabilei independente. Aplicând acestei funcții teorema lui Lagrange, deducem că există  $\tau_1 \in (0, 1)$ , astfel încât să avem

$$f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0) = h f_{,12}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \tau_1 h). \quad (6.85)$$

Un raționament asemănător aplicat însă funcției  $f_{,2}(\cdot, y_0 + \theta_2 h)$  conduce la existența numărului pozitiv subunitar  $\tau_2$ , astfel încât membrul doi din (6.84) să se scrie în forma

$$f_{,2}(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h) - f_{,2}(x_0, y_0 + \theta_2 h) = h f_{,21}(x_0 + \tau_2 h, y_0 + \theta_2 h). \quad (6.86)$$

Atunci, din (6.82) – (6.86), obținem

$$f_{,12}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \tau_1 h) = f_{,21}(x_0 + \tau_2 h, y_0 + \theta_2 h). \quad (6.87)$$

Trecând la limită în (6.87) pentru  $h \rightarrow 0$  și ținând cont că derivatele parțiale mixte sunt continue în  $(x_0, y_0)$ , obținem

$$f_{,12}(x_0, y_0) = f_{,21}(x_0, y_0).$$

Prin urmare, în cazul  $n = 2$ , teorema este demonstrată.

Pentru a arăta că teorema rămâne adevărată în cazul  $n > 2$ , considerăm  $i < j$ , fapt ce nu particularizează problema studiată, și funcția reală de două variabile reale  $x$  și  $y$

$$g(\cdot, \cdot) = f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0i-1}, \cdot, x_{0i+1}, \dots, x_{0j-1}, \cdot, x_{0j+1}, \dots, x_{0n}), \quad (6.88)$$

unde  $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$  sunt coordonatele punctului  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , definită pe o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^2$  care conține punctul de coordonate  $(x_{0i}, x_{0j})$ . Aplicând rezultatul obținut mai sus funcției  $g$ , avem

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_{0i}, x_{0j}) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_{0i}, x_{0j}).$$

Observând că

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_{0i}, x_{0j}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{0i}, x_{0j}), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x_{0i}, x_{0j}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_{0i}, x_{0j}), \end{cases}$$

și ținând cont de rezultatul anterior, deducem că teorema este adevărată și pentru  $n > 2$ .

**q.e.d.**

**Corolarul 6.6.1.** Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , există funcțiile derivatele parțiale de ordinul al doilea  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  și  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  pe mulțimea  $D$  și sunt continue pe  $D$ , atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (6.89)$$

**Teorema 6.6.2. (Criteriul lui Young<sup>2</sup>)** Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă parțial într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ , unde  $\mathbf{x}_0$  este un punct al mulțimii deschise  $D \subset \mathbb{R}^n$  și derivatele parțiale  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(V)$  sunt diferențiabile în  $\mathbf{x}_0$ , atunci există derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  în  $\mathbf{x}_0$ , iar cele mixte sunt egale.

*Demonstrație.* Vom considera mai întâi cazul  $n = 2$ . Fie  $(x_0, y_0) \in D$ , fixat,  $(x, y)$  un punct arbitrar din  $V \in \mathcal{V}((x_0, y_0))$ , cu  $V \subset D$ ,  $x \neq x_0$ ,  $y \neq y_0$  și funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  din respectiv (6.78) și (6.79), funcții care satisfac (6.82), unde cei doi membri ai acestei din urmă relații sunt dați în (6.83) și (6.84). Pentru a calcula diferența din membrul drept a lui (6.83) adunăm și scădem termenul  $f_{,1}(x_0, y_0)$  după care observăm că expresiile  $f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0, y_0)$  și  $f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0) - f_{,1}(x_0, y_0)$  pot fi evaluate în baza diferențiabilității derivatelor parțiale ale funcției  $f$  după cum urmează:

$$f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + h) - f_{,1}(x_0, y_0) = f_{,11}(x_0, y_0)\theta_1 h + f_{,12}(x_0, y_0)h + |h|\sqrt{1 + \theta_1^2}\alpha_1(\theta_1 h, h); \quad (6.90)$$

<sup>2</sup>Young, W. H. (1863–1942), matematician englez.

$$f_{,1}(x_0 + \theta_1 h, y_0) - f_{,1}(x_0, y_0) = f_{,11}(x_0, y_0) \theta_1 h + |h| \theta_1 \alpha_2(\theta_1 h). \quad (6.91)$$

Din (6.83), (6.90) și (6.91) găsim

$$\varphi'(\theta_1 h) = h f_{,12}(x_0, y_0) + |h| \alpha(h), \quad (6.92)$$

unde  $\alpha(h) = \sqrt{1 + \theta_1^2} \alpha_1(\theta_1 h, h) + \theta_1 \alpha_2(\theta_1 h)$  și deci  $\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0$ .

Folosind diferențiabilitatea funcției  $f_{,2}$  și expresia (6.84) a lui  $\psi'(\theta_2 h)$ , printr-un calcul similar celui de mai sus, găsim

$$\psi'(\theta_2 h) = h f_{,21}(x_0, y_0) + |h| \beta(h), \quad (6.93)$$

unde funcția  $\beta$  definită într-o vecinătate a lui  $h = 0$ , are proprietatea  $\lim_{h \rightarrow 0} \beta(h) = 0$ .

Din (6.82), (6.92) și (6.93), după împărțirea cu  $h$  și trecere la limită pentru  $h \rightarrow 0$ , obținem  $f_{,12}(x_0, y_0) = f_{,21}(x_0, y_0)$ . Dacă  $n > 2$  și  $i$  și  $j$  sunt doi indici diferiți cuprinși între 1 și  $n$ , iar  $i < j$ , atunci se consideră funcția  $g$  din (6.88), se aplică raționamentul de mai sus și se găsește  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}_0)$  și teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

**Corolarul 6.6.2.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este derivabilă parțial pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  și derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  sunt funcții diferențiabile pe  $D$ , atunci există derivatele parțiale ale funcției  $f$  pe mulțimea  $D$  și cele mixte sunt egale.

Pentru simplificarea notațiilor să facem precizarea că atunci când vom avea o derivată parțială de forma

$$\underbrace{\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_1}}}_{k_1 \text{ ori}} \underbrace{\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_2}}}_{k_2 \text{ ori}} \dots \underbrace{\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_\ell} \partial x_{i_\ell} \dots \partial x_{i_\ell}}}_{k_\ell \text{ ori}}(\mathbf{x}_0),$$

unde  $k_1 + k_2 + \dots + k_\ell = m$ , vom folosi în loc notația  $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \dots \partial x_{i_\ell}^{k_\ell}}(\mathbf{x}_0)$ .

**Definiția 6.6.10.** Se numește **multi-indice**, sau  **$m$ -indice**, orice sistem ordonat de  $m$  numere naturale  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ , adică un element al mulțimii  $\mathbb{N}^m$ .

**Definiția 6.6.11.** Pentru orice multi-indice  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , numărul natural  $|\alpha|$  definit de  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$  se numește **ordinul** lui  $\alpha$ .

De exemplu, perechea  $(1, 5)$  este un 2-indice de ordin 6, perechea  $(0, 0)$  este un 2-indice de ordin 0, iar sextetul  $(2, 1, 3, 0, 0, 2)$  este un 6-indice de ordin 8.

Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este o funcție reală de clasă  $C^m$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , atunci pentru orice  $m$ -indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  cu  $|\alpha| \leq m$  este definită funcția  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in (\mathcal{D})$ , care aparține clasei de funcții  $C^{m-|\alpha|}$ , obținută derivând succesiv funcția  $f$  de  $\alpha_n$  ori în raport cu variabila  $x_n$  ( $\alpha_n$  poate fi și zero, deci nu se derivează în raport cu  $x_n$ ), de  $\alpha_{n-1}$  ori în raport cu  $x_{n-1}$ , ... și de  $\alpha_1$  ori în raport cu variabila  $x_1$ . Pentru această funcție se utilizează uneori și notația  $D^\alpha f$ .

**Corolarul 6.6.3.** Dacă  $f \in C^m(D)$ , atunci  $D^\alpha f = D^{\sigma(\alpha)} f$  în fiecare punct  $\mathbf{x} \in D$ , adică

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} \partial x_{\sigma(2)}^{\alpha_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}}(\mathbf{x}), \quad (6.94)$$



unde  $\sigma$  este o permutare a mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

*Demonstrație.* Afirmția rezultă din Teorema 6.6.1 aplicată derivatelor parțiale de ordinul  $|\alpha| - 1$ . **q.e.d.**

**Observația 6.6.5.** Corolarul 6.6.3 afirmă că derivatele parțiale mixte de ordin  $|\alpha|$  sunt egale. De exemplu, pentru o funcție reală  $f$  de două variabile reale  $x$  și  $y$  de clasă  $C^2$  pe un domeniu plan  $D$ , avem  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ , iar dacă  $f \in C^3(D)$ , atunci  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ .

**Definiția 6.6.12.** Aplicația  $D^\alpha : C^n(D) \rightarrow C^{m-|\alpha|}(D)$ ,  $f \mapsto D^\alpha f$ , se numește **operator diferențial de multi-indice  $\alpha$** . Mai general, se numește **operator diferențial liniar de ordin  $\leq m$**  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , orice combinație liniară de forma  $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot D^\alpha$ , unde funcțiile continue  $a_\alpha \in \mathcal{F}(D)$  se numesc **coeficienții operatorului diferențial**.

De exemplu, în cazul  $n = 3$ , un operator diferențial liniar de ordin 2 care joacă un rol important în ecuațiile fizice matematice este

$$\Delta : C^2(D) \rightarrow C^0(D), \quad \Delta = D^{(2,0,0)} + D^{(0,2,0)} + D^{(0,0,2)}, \quad f \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

care se numește **laplacianul în trei variabile** (după numele renumitului matematician francez Laplace, Pierre (1749–1827)). Asemănător, se poate introduce laplacianul în două variabile.

**Corolarul 6.6.4.** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  admite toate derivatele parțiale de ordinul  $m - 1$  pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ ,  $V \subset D$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , și aceste derivate parțiale sunt diferențiabile în  $\mathbf{x}_0$ , atunci există toate derivatele parțiale de ordinul  $m$  ale funcției  $f$  și derivatele parțiale mixte de ordinul  $m$  sunt egale, adică

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} \partial x_{\sigma(2)}^{\alpha_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}}(\mathbf{x}_0). \quad (6.95)$$

**Observația 6.6.6.** Concluzia Corolarului 6.6.4 se extinde ușor la o submulțime de puncte din  $D$ .

## 6.7 Diferențiale de ordin superior ale funcțiilor reale de variabilă vectorială

Anterior am constatat că funcția reală  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$  dacă există forma liniară pe  $\mathbb{R}^n$ ,  $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ , și funcția reală  $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{0}) = 0, \quad (6.96)$$

astfel încât, pentru orice  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  cu proprietatea  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in D$ , să avem

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0) = T(\mathbf{y}) + \alpha(\mathbf{y})\|\mathbf{y}\|. \quad (6.97)$$

Să considerăm acum că  $\mathbf{y} = t\mathbf{h}$ , unde  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  este fixat, iar  $t \in \mathbb{R}$  este variabil astfel încât  $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} \in D$ . Având în vedere că  $T(t\mathbf{h}) = tT(\mathbf{h})$ , din (6.97) în care considerăm că  $t \neq 0$ , obținem

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = T(\mathbf{h}) + \frac{|t|}{t} \|\mathbf{h}\| \alpha(t\mathbf{h}). \quad (6.98)$$

Trecând la limită în (6.98) pentru  $t \rightarrow 0$  și având în vedere că raportul  $\frac{|t|}{t}$  este mărginit, că  $t \rightarrow 0 \iff t\mathbf{h} \rightarrow 0$  și că are loc (6.96), obținem  $T(\mathbf{h}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$ . Amintind că pentru  $T(\mathbf{h})$  am utilizat notația  $T(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$  și observând că membrul doi din (6.98) este derivata în  $t = 0$  a funcției  $t \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ , constatăm că dacă  $f \in \mathcal{F}(D)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$ , atunci

$$df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})|_{t=0}. \quad (6.99)$$

Egalitatea (6.99) sugerează introducerea noțiunii de *diferențială de ordin superior* a unei funcții reale de  $n$  variabile reale  $f \in \mathcal{F}(D)$ , unde  $D$  este mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 6.7.1.** Se numește **diferențiala de ordinul al doilea** a funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , forma biliniară  $d^2 f(\mathbf{x}_0) = d^2 f(\mathbf{x}_0; \cdot, \cdot) = d^2 f(\mathbf{x}_0)(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ale cărei valori se calculează după legea

$$d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k}) = d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})|_{t=s=0}, \quad (6.100)$$

dacă derivata de ordinul al doilea a funcției  $(t, s) \mapsto f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})$  în punctul  $(t, s) = (0, 0)$  există.

**Teorema 6.7.1.** Dacă  $f \in C^2(D)$ , atunci  $f$  admite diferențială de ordinul al doilea în orice punct  $\mathbf{x} \in D$  și

$$d^2 f(\mathbf{x}; \mathbf{h}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{,ij}(\mathbf{x}) h_i k_j, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.101)$$

*Demonstrație.* Folosind rezultatele precedente, putem demonstra că are loc egalitatea

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = f_{,1}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})h_1 + \dots + f_{,n}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})h_n. \quad (6.102)$$

Funcțiile reale de două variabile reale  $(t, s) \mapsto f_{,i}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})$  depind de variabila reală  $s$  tot prin intermediul combinației  $\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}$ , prin urmare, aplicând regula de derivare (6.102) acestor funcții, obținem

$$\frac{d}{ds} f_{,i}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^n f_{,ij}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})k_j, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (6.103)$$

Atunci, din (6.102) și (6.103), deducem

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{,ij}(\mathbf{x} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k}) h_i k_j. \quad (6.104)$$

Din (6.104) și (6.100) rezultă evident (6.101).

**q.e.d.**

**Observația 6.7.1.** Deoarece  $f \in C^2(D)$ , din Teorema 6.6.1 rezultă

$$f_{,ij}(\mathbf{x}) = f_{,ji}(\mathbf{x}), \quad \forall i \neq j, \quad i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, n}, \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad (6.105)$$

și atunci constatăm că  $d^2 f(\mathbf{x}; \cdot, \cdot)$  este o formă biliniară simetrică pe  $\mathbb{R}^n$  a cărei matrice în baza canonică din  $\mathbb{R}^n$  este matricea simetrică de tipul  $n \times n$

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}) & f_{,12}(\mathbf{x}) & \dots & f_{,1n}(\mathbf{x}) \\ f_{,12}(\mathbf{x}) & f_{,22}(\mathbf{x}) & \dots & f_{,2n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,1n}(\mathbf{x}) & f_{,2n}(\mathbf{x}) & \dots & f_{,nn}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (6.106)$$

**Definiția 6.7.2.** Matricea  $H_f(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  se numește **hessiana funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$** .

Denumirea de hessiană a unei funcții se datorează lui Hesse<sup>3</sup>.

Dat fiind că vectorii arbitrari  $\mathbf{h}$  și  $\mathbf{k}$  din  $\mathbb{R}^n$ , în baza canonică  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , se scriu în forma

$$\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}H, \quad \mathbf{k} = \sum_{j=1}^n k_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}K, \quad (6.107)$$

unde  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$ , iar  $H$  și  $K$  sunt matricele coloană cu  $n$  linii ale coordonatelor vectorilor  $\mathbf{h}$  și respectiv  $\mathbf{k}$  în baza  $\mathcal{B}$ , din (6.101), (6.106) și (6.107), rezultă

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = H^\top \cdot H_f(\mathbf{x}_0) \cdot K, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.108)$$

Având în vedere că  $h_i = dx_i(\mathbf{h})$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  și  $k_j = dx_j(\mathbf{k})$ ,  $j \in \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ , din (6.108) obținem

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{,ij}(\mathbf{x}_0) (dx_i dx_j)(\mathbf{h}, \mathbf{k}), \quad (6.109)$$

unde prin  $(dx_i dx_j)(\mathbf{h}, \mathbf{k})$  înțelegem produsul  $dx_i(\mathbf{h}) dx_j(\mathbf{k})$  adică produsul  $h_i k_j$ . În acest mod deducem că aplicația diferențială de ordinul al doilea în punctul  $\mathbf{x} \in D$  este forma pătratică în diferențialele variabilelor independente  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{,ij}(\mathbf{x}) dx_i dx_j, \quad (6.110)$$

a cărei coeficienți sunt elementele matricei hessiene asociată funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$ .

Dacă notăm cu  $dX$  matricea coloană care are ca elemente diferențialele variabilelor independente, atunci (6.110) se scrie în forma matriceală echivalentă

$$d^2 f(\mathbf{x}) = (dX)^\top \cdot H_f(\mathbf{x}) \cdot dX. \quad (6.111)$$

**Observația 6.7.2.** Dacă  $f(\mathbf{x}) = pr(\mathbf{x}) = x_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , atunci

$$d^2 f(\mathbf{x}) = d^2 x_k = 0, \quad i \in \overline{1, n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.112)$$

<sup>3</sup>Hesse, Oscar (1811–1874), matematician german.

Într-adevăr, în această situație se vede că avem  $f_{,ij}(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \overline{1, n}$ ,  $j \in \overline{1, n}$ . Folosind acum aceste rezultate în (6.110) în care funcția  $f$  este cea din enunțul observației de mai sus, deducem (6.112). ■

**Observația 6.7.3.** În operația de diferențiere, diferențialele variabilelor independente se comportă ca și constantele, ale căror diferențiale sunt evident identic nule.

**Observația 6.7.4.** Diferențiala a doua este diferențiala diferențialei de ordinul întâi.

Convenim ca pentru produsul  $dx_i dx_i$  să utilizăm notația  $dx_i^2$  neexistând pericolul confuziei cu diferențiala de ordinul întâi a funcției  $\mathbf{x} \mapsto g(\mathbf{x}) = x_i^2$ . Pentru funcția  $g$  diferențiala de ordinul întâi este :  $dg(\mathbf{x}) = 2x_i dx_i$ .

Să considerăm operatorul de diferențiere de ordinul întâi

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \quad (6.113)$$

și, în baza lui (6.112), să observăm că  $d$  aplicat lui  $d$  însuși, deci  $d^2$ , este

$$d^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{(2)} \quad (6.114)$$

unde puterea a doua din membrul al doilea, scrisă între paranteze, semnifică faptul că expresia din membrul doi al lui (6.113) se ridică formal la puterea a doua după o formulă clasică de tip binomial, păstrându-se puterile pentru diferențialele variabilelor independente  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  și înlocuind puterile operatorilor de derivare parțială  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  prin ordinele de derivare respective, adică:  $\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ;  $\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Astfel, expresia diferențialei a doua a funcției reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  într-un punct  $\mathbf{x} \in D$  este

$$d^2 f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{(2)} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) dx_i dx_j. \quad (6.115)$$

**Exemplul 6.7.1.** În cazul  $n = 2$ , deci al unei funcții reale  $f$  de două variabile reale  $x$  și  $y$ , diferențiala a doua a acesteia într-un punct  $(x, y)$  al domeniului de definiție este

$$d^2 f(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) dy^2, \quad (6.116)$$

iar în cazul  $n = 3$ , deci al unei funcții reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  de trei variabile reale  $x, y$  și  $z$ , diferențiala a doua a lui  $f$  într-un punct  $(x, y, z) \in D$ , este

$$\begin{aligned} d^2 f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{(2)} f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) dy^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) dz^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) dy dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) dz dx \right). \end{aligned} \quad (6.117)$$

Definiția 6.7.1 și Teorema 6.7.1 pot fi extinse în următoarele sensuri.

**Definiția 6.7.3.** Fie  $N \in \mathbb{N}^*$ . Se numește **diferențială de ordinul  $N$**  a funcției reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x}$  al mulțimii deschise  $D \subset \mathbb{R}^n$ , aplicația  $n$ -liniară

$$d^N f(\mathbf{x}) = d^N f(\mathbf{x})(\cdot, \cdot, \dots, \cdot) = d^N f(\mathbf{x}; \cdot, \cdot, \dots, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

definită prin

$$d^N f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) = \frac{d}{dt_1} \frac{d}{dt_2} \dots \frac{d}{dt_N} f(\mathbf{x} + t_1 \mathbf{h}^1 + t_2 \mathbf{h}^2 + \dots + t_N \mathbf{h}^N) /_{t_1=t_2=\dots=t_N=0}, \quad (6.118)$$

oricare ar fi  $\mathbf{h}^j \in \mathbb{R}^n$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ , dacă derivatele din membrul doi a relației (6.118) există.

Pentru ca Definiția 6.7.2 să fie consistentă trebuie ca funcția

$$(t_1, t_2, \dots, t_N) \mapsto f(\mathbf{x} + t_1 \mathbf{h}^1 + t_2 \mathbf{h}^2 + \dots + t_N \mathbf{h}^N),$$

unde  $(t_1, t_2, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$  este astfel încât  $\mathbf{x} + t_1 \mathbf{h}^1 + t_2 \mathbf{h}^2 + \dots + t_N \mathbf{h}^N \in D$ , să fie de  $N$  ori derivabilă în punctul  $(t_1, t_2, \dots, t_N) = (0, 0, \dots, 0)$ . Acest lucru se întâmplă dacă  $f \in C^N(D)$ . Mai precis, avem

**Teorema 6.7.2.** Dacă  $f \in C^N(D)$ , atunci  $f$  admite diferențială de ordin  $N$  în orice punct  $\mathbf{x}$  din  $D$ , iar valoarea în  $(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) \in (\mathbb{R}^n)^N$ , unde  $\mathbf{h}^k = \sum_{i_k=1}^n h_{i_k}^k \mathbf{e}_{i_k}$ ,  $k \in \overline{1, N}$ , a acesteia este

$$d^N f(\mathbf{x})(\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_N=1}^n \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_N}}(\mathbf{x}) h_{i_1}^1 h_{i_2}^2 \dots h_{i_N}^N. \quad (6.119)$$

*Demonstrație.* Pentru  $N \geq 2$ , se procedează ca în Teorema 6.7.1.

**q.e.d.**

Dacă avem în vedere că  $dx_{i_k}(\mathbf{h}^k) = h_{i_k}^k$ ,  $i_k \in \overline{1, n}$  și  $k \in \overline{1, N}$ , din (6.119) constatăm că aplicația diferențială de ordinul  $N$  a funcției  $f$  în  $\mathbf{x} \in D$  este

$$d^N f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_N=1}^n \frac{\partial^N f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_N}}(\mathbf{x}) dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_N}. \quad (6.120)$$

Dacă folosim rezultatele din Corolarul 6.6.3, se constată că diferențială de ordinul  $N$  a funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  se scrie în forma

$$d^N f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=N} \frac{N!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \frac{\partial^N f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x}) dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n}. \quad (6.121)$$

Prin utilizarea formulei multinomului

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^N = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=N} \frac{N!}{k_1!k_2!\dots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}, \quad (6.122)$$

constatăm că (6.121) se scrie în forma simbolică

$$d^N f(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{(N)} f(\mathbf{x}), \quad (6.123)$$

unde operatorul din fața lui  $f(\mathbf{x})$  din membrul doi se calculează folosind formula multinomului (6.122), înțelegând prin aceasta că dacă  $a_i = \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , atunci

$$a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n} = \frac{\partial^N}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n} \text{ și } (a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_n^{k_n}) f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^N f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}(\mathbf{x}) dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n}.$$

**Observația 6.7.5.** Valoarea în  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) \in (\mathbb{R}^n)^N$  a diferențialei funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$  este o funcție omogenă de grad  $N$  pe  $\mathbb{R}^n$ .

Într-adevăr, valoarea în  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) \in (\mathbb{R}^n)^N$  a diferențialei funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$  este dată de (6.119) și dacă avem în vedere Definiția 4.11.1, constatăm că afirmația este adevărată. ■

**Observația 6.7.6.** În cazul particular  $n = 1$ , relația (6.121) devine

$$d^N f(x) = f^{(N)}(x) dx^N \quad (6.124)$$

și reprezintă diferențiala de ordinul  $N$  a funcției reale  $f$  de variabila reală  $x$ .

**Definiția 6.7.4.** Dacă  $\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) \in (\mathbb{R}^n)^N$  este fixat, atunci aplicația

$$\mathbf{x} \in D \mapsto d^N f(\mathbf{x}; \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N) \in \mathbb{R},$$

unde expresia lui  $d^N f(\mathbf{x}; \mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N)$  este dată în (6.119), se numește **diferențiala de ordinul  $N$  a funcției reale  $f$  de  $n$  variabile reale**.

**Observația 6.7.7.** Din modul cum a fost introdusă diferențiala de ordinul  $N$  a unei funcții reale de variabilă vectorială rezultă că aceasta este diferențiala funcției diferențiala de ordinul  $N - 1$ .

**Exemplul 6.7.2.** Dacă  $f$  este o funcție reală de două variabile reale  $x$  și  $y$  de clasă  $C^N(D)$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^2$ , atunci

$$\begin{aligned} d^3 f(x, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(3)} f(x, y) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) dy^3 \end{aligned} \quad (6.125)$$

și, în general, pentru  $N \geq 4$ ,

$$d^N f(x, y) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(N)} f(x, y) = \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k} \partial y^k}(x, y) dx^{N-k} dy^k, \quad (6.126)$$

unde  $C_N^k$  reprezintă combinații de  $n$  elemente luate câte  $k$ . ■

**Exemplul 6.7.3.** Pentru o funcție reală  $f$  de trei variabile reale  $x, y$  și  $z$  de clasă  $C^N(D)$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^3$ , iar  $N \geq 3$ , avem

$$\begin{aligned} d^3 f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{(3)} f(x, y, z) = \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y, z) dx^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y, z) dy^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(x, y, z) dz^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y, z) dx^2 dy + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(x, y, z) dx^2 dz + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y, z) dx dy^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(x, y, z) dy^2 dz + \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(x, y, z) dx dz^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(x, y, z) dy dz^2 + 6 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) dx dy dz \end{aligned} \quad (6.127)$$

Diferențiala de ordin  $N$  a aceleiași funcții este

$$\begin{aligned} d^N f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{(N)} f(x, y, z) = \\ &= \sum_{k_1+k_2+k_3=N} \frac{N!}{k_1!k_2!k_3!} \cdot \frac{\partial^N f}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}}(x, y, z) dx^{k_1} dy^{k_2} dz^{k_3}, \end{aligned} \quad (6.128)$$

unde  $k_j, j = 1, 2, 3$ , ia toate valorile de la 0 până la  $N$  astfel încât  $k_1 + k_2 + k_3 = N$ . ■

**Exercițiul 6.7.1.** Să se calculeze  $d^N f(x, y)$ , unde  $f(x, y) = e^x \sin y$ .

**Soluție.** Aplicând formula (6.126), găsim  $d^N(e^x \sin y) = e^x \sum_{k=0}^N C_N^k \sin(y + k \frac{\pi}{2}) dx^{N-k} dy^k$ . ■

**Exercițiul 6.7.2.** Să se calculeze  $d^N f(x, y)$ , unde  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ .

**Soluție.** Aplicăm din nou formula (6.126) de calcul a diferențialei de ordinul  $N$  al unei funcții reale de două variabile reale. Pentru aceasta este nevoie de derivata parțială

$$\frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k} \partial y^k}(x, y) = \frac{\partial^N \left( \frac{x+y}{x-y} \right)}{\partial x^{N-k} \partial y^k}.$$

Vom calcula întâi derivata  $\frac{\partial^{N-k} f}{\partial x^{N-k}}(x, y)$ . Pentru că  $y$  este constant, notând  $u(x) = x + y$ ,  $v(x) = \frac{1}{x - y}$  și aplicând regula lui Leibniz de derivare de ordin  $N - k$  a produsului  $u(x)v(x)$ , obținem

$$\frac{\partial^{N-k} f}{\partial x^{N-k}}(x, y) = 2(-1)^{N-k}(N-k)! \frac{y}{(x-y)^{N-k+1}}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (6.129)$$

Egalitatea (6.129) trebuie derivată în raport cu  $y$  de  $k$  ori. Funcției din membrul al doilea al egalității (6.129) îi aplicăm de asemeni regula lui Leibniz de derivare a produsului  $u_1(y)v_1(y)$ , unde  $u_1(y) = y$  și  $u_2(y) = \frac{1}{(x-y)^{N-k+1}}$ . În final, se obține

$$\frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k} \partial y^k}(x, y) = (-1)^{N-k} \frac{(N-1)!(kx + (N-k)y)}{(x-y)^{N+1}}. \quad (6.130)$$

Aplicând (6.126) și folosind (6.130), găsim

$$d^N f(x, y) = \sum_{k=0}^N C_N^k (-1)^{N-k} \frac{(N-1)!(kx + (N-k)y)}{(x-y)^{N+1}} dx^{N-k} dy^k,$$

$$\text{sau } d^N f(x, y) = (N-1)! N! \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!k!} \frac{(kx + (N-k)y)}{(x-y)^{N+1}} dx^{N-k} dy^k. \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 6.7.3.** Să se calculeze diferențiala de ordinul  $N$  a funcției

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \ln(x^x y^y z^z), \quad \text{unde } D = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

**Soluție.** Observăm că  $f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$  și atunci vom avea

$$d^N f(x, y, z) = d^N (x \ln x) + d^N (y \ln y) + d^N (z \ln z).$$

Fiecare din diferențialele din membrul doi al egalității de mai sus reprezintă diferențiala unei aceleiași funcții reale de o variabilă reală în diverse puncte. După cum se vede, funcția este  $t > 0 \mapsto f(t) = t \ln t$ . Aplicăm formula (6.124). Pentru calculul derivatei de ordinul  $N$  a funcției  $t \mapsto t \ln t$  aplicăm formula (5.19) și găsim

$$f^{(N)}(t) = t(\ln t)^{(N)} + N(\ln t)^{(N-1)} = (-1)^N \frac{(N-2)!}{t^{N-1}}, \quad N \geq 2,$$

cu ajutorul căreia diferențiala căutată de ordin  $N \geq 2$  este

$$d^N f(x, y, z) = (-1)^N (N-2)! \left( x^{1-N} dx^N + y^{1-N} dy^N + z^{1-N} dz^N \right).$$

Diferențiala de ordinul unu o calculăm separat utilizând regulile de calcul ale operatorului de diferențiere (6.60). După un calcul simplu, găsim:  $df(x, y, z) = (1 + \ln x)dx + (1 + \ln y)dy + (1 + \ln z)dz$ . Astfel, am determinat diferențialele de orice ordin ale funcției date.  $\blacksquare$

## 6.8 Formula lui Taylor pentru funcții reale de o variabilă vectorială

**Teorema 6.8.1. (Formula lui Taylor)** Fie  $f \in C^{N+1}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  mulțime deschisă,  $\mathbf{x}_0 \in D$  și  $r > 0$ , astfel încât  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$ . Atunci, pentru orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$  există un punct  $\xi_N \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ , astfel încât

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \dots + \\ & + \frac{1}{N!} d^N f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{N \text{ ori}}) + \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\xi_N; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{(N+1) \text{ ori}}). \end{aligned} \quad (6.131)$$

**Demonstrație.** Fixăm un versor  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ . Atunci, pentru orice  $t \in (-r, r)$  avem că  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{s} \in B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$  și se poate considera funcția

$$g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}), \quad t \in (-r, r). \quad (6.132)$$



Deoarece  $f \in C^{N+1}(D)$  rezultă că  $g \in C^{N+1}\left((-r, +r)\right)$  și în plus, conform (6.118), avem:

$$g^{(k)}(0) = d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{s}, \dots, \mathbf{s}}_{k \text{ ori}}), \quad k \in \overline{1, N}; \quad (6.133)$$

$$g^{(N+1)}(\theta_N t) = d^{N+1} f(\xi_N; \underbrace{\mathbf{s}, \mathbf{s}, \dots, \mathbf{s}}_{(N+1) \text{ ori}}), \quad (6.134)$$

unde  $\theta_N \in (0, 1)$  și  $\xi_N = \mathbf{x}_0 + \theta_N(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ .

Funcția  $g$  din (6.132) satisface ipotezele Teoremei 5.9.1, deci putem scrie formula lui Mac–Laurin (5.97), deci există  $\theta_N \in (0, 1)$ , astfel încât

$$g(t) = g(0) + \frac{t}{1!}g'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + \dots + \frac{t^N}{N!}g^{(N)}(0) + \frac{t^{N+1}}{(N+1)!}g^{(N+1)}(\theta_N t). \quad (6.135)$$

Datorită faptului că diferențiala de ordinul  $k$  a unei funcții reale de variabilă vectorială este formă de gradul  $k$  pe  $\mathbb{R}^n$ , din (6.133) și (6.134), deducem:

$$t^k g^{(k)}(0) = d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{ts, ts, \dots, ts}_{k \text{ ori}}), \quad k \in \overline{1, N}; \quad t^{N+1} g^{(N+1)}(\theta_N) = d^{N+1} f(\xi_N; \underbrace{ts, ts, \dots, ts}_{(N+1) \text{ ori}}). \quad (6.136)$$

Deoarece  $ts = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , din (6.135) și (6.136) rezultă (6.131) și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

Deoarece  $d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{k \text{ ori}})$  este polinom omogen de gradul  $k$  în coordonatele  $x_1 - x_{01}, x_2 -$

$x_{02}, \dots, x_n - x_{0n}$  ale vectorului  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ , rezultă că suma primilor  $N + 1$  termeni din membrul doi al lui (6.131) este un polinom de gradul  $N$  în aceste variabile care se numește *polinomul Taylor de grad  $N$  asociat funcției  $f$ , centrat în  $\mathbf{x}_0$*  și se notează cu  $T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f)$ . Deci,

$$T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} d^k f(\mathbf{x}_0; \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{k \text{ ori}}). \quad (6.137)$$

Cu această notație, (6.131) se scrie în forma mai simplă

$$f(\mathbf{x}) = T_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) + R_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f), \quad (6.138)$$

unde funcția  $R_N(\cdot; \mathbf{x}_0, f) : D \rightarrow \mathbb{R}$ , ale cărei valori sunt

$$R_N(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0, f) = \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(\mathbf{x}_0 + \theta_N(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0); \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0}_{(N+1) \text{ ori}}), \quad (6.139)$$

cu  $\theta_N \in (0, 1)$ , se numește *rest de ordinul  $N$ , al funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$* , în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , sub forma lui Lagrange.

Formula (6.138) se numește *formula lui Taylor în punctul  $\mathbf{x}_0$  atașată funcției  $f$  cu rest de ordin  $N$  sub forma lui Lagrange dat de (6.139)*.

**Exemplul 6.8.1.** Formula lui Taylor într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$ , cu rest de ordin  $N$  sub

forma lui Lagrange, pentru funcția reală  $f$ , definită pe mulțimea deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^2$ , este

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ & + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^{(2)} f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{\partial^N f}{\partial x^{N-k} \partial y^k}(x_0, y_0)(x - x_0)^{N-k}(y - y_0)^k + \\ & + \frac{1}{(N+1)!} \sum_{k=0}^{N+1} C_{N+1}^k \frac{\partial^{N+1} f}{\partial x^{N+1-k} \partial y^k}(\xi_N)(x - x_0)^{N+1-k}(y - y_0)^k, \end{aligned} \quad (6.140)$$

$$\xi_N = (x_0 + \theta_N(x - x_0), y_0 + \theta_N(y - y_0)), \text{ iar } \theta_N \in (0, 1).$$

**Exercițiul 6.8.1.** Să se scrie formula lui Taylor în punctul  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (0, \pi)$  cu rest de ordin doi pentru funcția reală  $f(x, y) = y \cdot \sin xy$ .

**Soluție.** Pentru funcția dată, avem:

$$f(\mathbf{x}_0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \pi^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) = 2\pi. \quad (6.141)$$

Înlocuind (6.141) în (6.140), în care  $N = 2$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = \pi$ , obținem

$$y \cdot \sin xy = \pi^2 x + \pi x(y - \pi) + \left( x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + (y - \pi) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right)^{(3)} f(\xi_2). \quad (6.142)$$

În formula lui Taylor (6.142), ridicarea la puterea a treia este simbolică și se face după regula (6.125). Neglijând ultimul termen din (6.142), găsim  $y \cdot \sin xy \approx \pi^2 x + \pi x(y - \pi)$ . ■

## 6.9 Funcții omogene. Identitatea lui Euler

Fie  $\mathbb{R}^n$  spațiul Euclidian  $n$ -dimensional,  $\mathbb{E}^n$  spațiul punctual afîn Euclidian asociat spațiului  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$  reperul canonic din  $\mathbb{E}^n$ , unde  $\mathcal{B}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ ,  $M$  punctul din  $\mathbb{E}^n$  cu proprietatea  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}$  și  $(OM)$  semidreapta cu originea în  $O$  care trece prin  $M$ .

**Definiția 6.9.1.** Mulțimea  $E \subset \mathbb{R}^n$  se numește **con deschis cu vârful în origine** dacă  $E$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$  și o dată cu punctul  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  conține semidreapta deschisă  $(OM)$ .

**Definiția 6.9.2.** Fie  $E \subset \mathbb{R}^n$  un con cu vârful în origine. Funcția reală  $f \in \mathcal{F}(E)$  se numește **omogenă de grad  $k$**  dacă, pentru orice număr  $t > 0$  și orice  $\mathbf{x} \in E$ , avem

$$f(t\mathbf{x}) = t^k f(\mathbf{x}) \iff f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (6.143)$$

**Exemplul 6.9.1.** Funcția reală de două variabile reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

unde  $a, b, c$  sunt constante reale, este funcție omogenă de grad doi.

Într-adevăr, se verifică imediat că  $f$  satisface (6.143) în care  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  și  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . ■

**Teorema 6.9.1.** Fie  $E \subset \mathbb{R}^n$ , con deschis cu vârful în origine. Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(E)$  este omogenă de grad  $k$  și diferențiabilă într-un punct  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$ , atunci

$$a_1 f_{,1}(\mathbf{a}) + a_2 f_{,2}(\mathbf{a}) + \dots + a_n f_{,n}(\mathbf{a}) = k f(\mathbf{a}). \quad (6.144)$$

*Demonstrație.* Considerăm funcția reală de variabilă reală  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*)$ ,  $\varphi(t) = f(t\mathbf{a})$ ,  $\forall t > 0$ . Deoarece  $f$  este omogenă de grad  $k$  pe conul deschis  $E$ , rezultă

$$\varphi(t) = t^k f(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \forall t > 0. \quad (6.145)$$

Funcția  $f$  fiind diferențiabilă în punctul  $\mathbf{a}$ , rezultă că funcția  $\varphi$  din (6.145) este derivabilă în punctul  $t = 1$ . Aplicând regula lanțului de derivare a unei funcții compuse, avem

$$\frac{d\varphi}{dt}(1) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(t\mathbf{a}) \frac{d(t a_j)}{dt}(t) \right)_{t=1} = \sum_{j=1}^n a_j f_{,j}(\mathbf{a}). \quad (6.146)$$

Pe de altă parte, folosind expresia (6.145) a funcției  $\varphi$ , deducem

$$\frac{d\varphi}{dt}(1) = \left( k t^{k-1} f(a_1, a_2, \dots, a_n) \right)_{t=1} = k f(a_1, a_2, \dots, a_n) = k f(\mathbf{a}). \quad (6.147)$$

Din (6.146) și (6.147) rezultă (6.144).

q.e.d.

**Corolarul 6.9.1.** Funcția reală  $f \in \mathcal{F}(E)$ , omogenă de grad  $k$  și diferențiabilă pe conul deschis  $E \subset \mathbb{R}^n$ , satisface identitatea lui Euler

$$x_1 f_{,1}(\mathbf{x}) + x_2 f_{,2}(\mathbf{x}) + \dots + x_n f_{,n}(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E. \quad (6.148)$$

**Teorema 6.9.2.** Dacă funcția reală  $f \in \mathcal{F}(E)$  este diferențiabilă pe conul deschis cu vârful în origine  $E \subset \mathbb{R}^n$  și este verificată egalitatea (6.148) în orice punct din  $E$ , atunci  $f$  este funcție omogenă de grad  $k$ .

*Demonstrație.* Considerăm funcția reală de variabilă reală  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi(t) = \frac{f(t\mathbf{x})}{t^k}$ , unde  $\mathbf{x} \in E$  este

un punct arbitrar dar fixat din  $E$ . Din ipotezele teoremei, rezultă că funcția  $\psi$  este derivabilă și

$$\psi'(t) = \frac{\sum_{j=1}^n tx_j f_{,j}(\mathbf{tx}) - kf(\mathbf{tx})}{t^{k+1}}, \quad \forall t > 0. \quad (6.149)$$

Din (6.148) și (6.149) deducem  $\psi'(t) = 0, \forall t > 0$ . Deci  $\psi$  este funcție constantă pe  $(0, +\infty)$ . Urmează că, pentru orice  $t > 0$  avem  $\psi(t) = \psi(1)$ , adică  $\frac{f(\mathbf{tx})}{t^k} = f(\mathbf{x})$ , de unde  $f(\mathbf{tx}) = t^k f(\mathbf{x})$ . **q.e.d.**

**Teorema 6.9.3.** Dacă funcția  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $E$  este un con deschis cu vârful în origine, este omogenă de grad  $m$  și diferențiabilă, atunci derivatele parțiale de ordinul întâi ale sale sunt funcții omogene de grad  $m-1$ .

*Demonstrație.* Funcția  $f$  fiind omogenă de grad  $m$ , satisface identitatea

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (6.150)$$

oricare ar fi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$  și pentru orice  $t > 0$ .

Deoarece  $f$  este diferențiabilă, se poate deriva în raport cu variabila de pe locul  $i$  în ambii membri ai identității (6.150). Obținem  $tf_{,i}(\mathbf{tx}) = t^m f_{,i}(\mathbf{x})$ ,  $i \in \overline{1, n}$  care, după simplificare prin  $t$ , conduce la  $f_{,i}(\mathbf{tx}) = t^{m-1} f_{,i}(\mathbf{x})$ .

Deci, oricare derivată parțială de ordinul întâi ale funcției  $f$  este funcție omogenă de grad  $m-1$ . **q.e.d.**

**Observația 6.9.1.** Dacă funcția omogenă de grad  $m$  este de două ori diferențiabilă pe conul deschis  $E \subset \mathbb{R}^n$ , cu vârful în origine, atunci derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui  $f$  sunt funcții omogene de grad  $m-2$ .

**Teorema 6.9.4.** Dacă funcția  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $E$  este con deschis cu vârful în origine, este omogenă de gradul  $m$  și diferențiabilă, atunci derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  satisfac identitatea

$$\left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(\mathbf{x}) = m(m-1)f(\mathbf{x}). \quad (6.151)$$

*Demonstrație.* În identitatea (6.148) trecem pe  $\mathbf{x}$  în  $\mathbf{tx}$ . Se obține identitatea

$$t(x_1 f_{,1}(\mathbf{tx}) + x_2 f_{,2}(\mathbf{tx}) + \dots + x_n f_{,n}(\mathbf{tx})) = mf(\mathbf{tx}). \quad (6.152)$$

Considerând în (6.152) că  $\mathbf{x}$  este fixat și derivând în raport cu  $t$ , deducem

$$\sum_{i=1}^n x_i f_{,i}(\mathbf{tx}) + t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f_{,ij}(\mathbf{tx}) = m \sum_{i=1}^n x_i f_{,i}(\mathbf{tx}). \quad (6.153)$$

În egalitatea (6.153) facem  $t = 1$  și folosim (6.148). Obținem

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f_{,ij}(\mathbf{x}) = m(m-1)f(\mathbf{x}). \quad (6.154)$$

Însă

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j f_{,ij}(\mathbf{x}) = \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(2)} f(\mathbf{x}), \quad (6.155)$$

astfel că din (6.154) și (6.155) rezultă (6.151) și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**



## Capitolul 7

# Teoria diferențiabilității și derivabilității funcțiilor vectoriale de argument vectorial

### 7.1 Derivabilitatea funcțiilor vectoriale de argument vectorial

Fie  $D$  o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$$

o funcție vectorială de argumentul vectorial  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  și  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$  un punct fixat dar arbitrar, unde  $m \geq 1$  și  $n \geq 1$  sunt numere naturale.

**Definiția 7.1.1.** Spunem că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$  dacă funcția vectorială de variabilă reală

$$t \mapsto \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}, \quad t \in \mathbb{R}^*, \quad \mathbf{a} + t\mathbf{e}_j \in D, \quad (7.1)$$

are limită în  $t = 0$  și această limită aparține lui  $\mathbb{R}^m$ .

**Definiția 7.1.2.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_j$  în punctul  $\mathbf{a} \in D$ , atunci limita în  $t = 0$  a funcției din (7.1) se numește **derivata parțială de ordinul întâi** a funcției  $\mathbf{f}$  în raport cu variabila  $x_j$  în punctul  $\mathbf{a}$ .

Derivata parțială a funcției  $\mathbf{f}$ , în raport cu variabila  $x_j$ , în punctul  $\mathbf{a}$  se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}'_{x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,j}(\mathbf{a}); \quad D_j \mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Prin urmare, dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{a}$  în raport cu  $x_j$ , atunci

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t}. \quad (7.2)$$

**Observația 7.1.1.** *Exista cel mult  $n$  derivate parțiale de forma (7.2), denumite derivate parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  în punctul  $\mathbf{a}$ .*

**Definiția 7.1.3.** *Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  se numește derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_j$  pe mulțimea  $D$  dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_j$  în orice punct  $\mathbf{x} \in D$ .*

**Definiția 7.1.4.** *Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_j$  pe mulțimea  $D$ , atunci funcția*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}, \quad \mathbf{x} \in D, \quad (7.3)$$

*se numește derivata parțială de ordinul întâi în raport cu variabila  $x_j$  a funcției  $\mathbf{f}$ .*

**Observația 7.1.2.** *Exista cel mult  $n$  funcții derivate parțiale de forma (7.3), numite derivate parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  pe mulțimea  $D$ .*

**Teorema 7.1.1.** *Funcția vectorială de variabilă vectorială*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$$

*este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_j$  dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in \mathcal{F}(D)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt derivabile parțial în raport cu  $x_j$  în punctul  $\mathbf{a}$  și*

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \mathbf{e}'_i, \quad (7.4)$$

*unde  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^m$ .*

*Demonstrație.* Avem evident

$$\frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{t} = \sum_{i=1}^m \frac{f_i(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{a})}{t} \mathbf{e}'_i,$$

din care, folosind Teorema 4.1.4, rezultă concluzia teoremei cât și identitatea (7.4).

**q.e.d.**

**Definiția 7.1.5.** *Spunem că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{a} \in D$  (respectiv derivabilă parțial pe  $D$ ) dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{a}$  (respectiv pe  $D$ ) în raport cu toate variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .*



**Definiția 7.1.6.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  se numește de clasă  $C^1$  pe  $D$  dacă  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial pe  $D$  și funcțiile  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ ,  $j \in \overline{1, n}$ , sunt continue pe  $D$ . În acest caz, scriem  $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$

**Observația 7.1.3.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$  dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i \in C^1(D)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ .

**Definiția 7.1.7.** Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{a} \in D$ , atunci matricea

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

se numește **matricea jacobiană** a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$ .

Dacă  $m = n$  rezultă că  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$  din (7.5) este matrice pătratică de ordinul  $n$ , iar determinantul ei se numește *jacobianul*, sau *determinantul funcțional* al funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_n$  în punctul  $\mathbf{a} \in D$  și se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{a}); \quad \det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}); \quad \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{a}).$$

**Exercițiul 7.1.1.** Să se determine matricele jacobiene ale funcțiilor:

- (i)  $\mathbf{f}(x, y) = (x^4 + xy^3, x^2y^2 - 3y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- (ii)  $\mathbf{f}(x, y) = (x \cos y, x \sin y, x \cos y \sin y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

**Soluție.** Funcțiile de mai sus sunt derivabile parțial în orice punct din  $\mathbb{R}^2$ .

Matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  de la punctul (i) este

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 + y^3 & 3xy^2 \\ 2xy^2 & 2x^2y - 6y \end{pmatrix}.$$

Matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  de la punctul (ii) este matricea cu trei linii și două coloane

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y \\ \sin y & x \cos y \\ \cos y \sin y & x \cos 2y \end{pmatrix}.$$

**Exercițiul 7.1.2.** Să se scrie matricea jacobiană și să se calculeze jacobianul funcției

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

unde  $A$  este o submulțime a intervalului bidimensional nemărginit  $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ , într-un punct oarecare din interiorul  $D$  al mulțimii  $A$ .

**Soluție.** Dacă coordonatele vectorului reprezentând valoarea funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $(\rho, \theta) \in A$  se notează cu  $x$  și  $y$ , atunci ecuația vectorială

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{unde} \quad \mathbf{x} = (\rho, \theta), \quad \mathbf{y} = (x, y),$$

este echivalentă cu ecuațiile

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Aceste ecuații stabilesc legătura dintre *coordoanatele polare*  $(\rho, \theta)$  ale unui punct al mulțimii  $A$ , aflată într-un plan, și coordonatele carteziene  $(x, y)$  ale unui punct al mulțimii  $\mathbf{f}(A) \subset \mathbb{R}^2$ , cu precizarea suplimentară că dacă  $Oxy$  este reperul Cartezian în plan, atunci semidreapta  $Ox$  este *axa polară* a *reperului polar* din același plan.

Matricea jacobiană a funcției considerate este

$$J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\rho, \theta) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, \theta) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\rho, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Jacobianul funcției  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare al interiorului domeniului de definiție este

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)}(\rho, \theta) = \frac{D\mathbf{f}}{D\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \det J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Se observă că  $\det J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta) > 0$  în orice punct din interiorul mulțimii  $A$ . ■

**Exercițiul 7.1.3.** Fie  $A$  o submulțime a intervalului tridimensional nemărginit  $[0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$  și funcția vectorială

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) : A \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta).$$

Să se scrie matricea jacobiană și să se calculeze jacobianul acestei funcții într-un punct oarecare din interiorul mulțimii  $A$ .

**Soluție.** Matricea jacobiană într-un punct oarecare din interiorul mulțimii  $A$  este

$$J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \\ \frac{\partial f_3}{\partial \rho}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_3}{\partial \theta}(\rho, \theta, \varphi) & \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}(\rho, \theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Calculând derivatele parțiale ale funcțiilor  $f_1, f_2, f_3$ , coordonatele vectorului  $\mathbf{f}$ , și înlocuind apoi rezultatele în expresia matricei jacobiene, găsim

$$J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobianul funcției considerate într-un punct  $(\rho, \theta, \varphi)$  din interiorul  $D$  al domeniului de definiție  $A$  este

$$\det J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta.$$

Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  din acest exemplu exprimă legătura între coordonatele carteziene și coordonatele polare ale unui punct din spațiu. Dacă  $(\rho, \theta, \varphi) \in D$ , atunci  $\det J_{\mathbf{f}}(\rho, \theta, \varphi) > 0$ . ■

**Exercițiul 7.1.4.** Fie funcția vectorială de argument vectorial

$$\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = (x_1^2 + 7x_2 + \ln x_3, \frac{x_1}{x_4}),$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 > 0, x_4 \neq 0\}$ .

Să se scrie matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare al domeniului de definiție.

**Soluție.** Funcția considerată este derivabilă în orice punct din  $D$ . Avem

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 7 & \frac{1}{x_3} & 0 \\ \frac{1}{x_4} & 0 & 0 & -\frac{x_1}{x_4^2} \end{pmatrix}.$$

■

## 7.2 Diferențiabilitatea unei funcții vectoriale de variabilă vectorială

Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , o funcție vectorială de argument vectorial și  $\mathbf{x}_0$  un punct din  $D$ .

**Definiția 7.2.1.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este **diferențiabilă** în  $\mathbf{x}_0$  dacă există o aplicație liniară  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  astfel încât

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{0}. \quad (7.6)$$

**Observația 7.2.1.** Condiția (7.6) este echivalentă cu existența funcției

$$\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \quad (7.7)$$

cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (7.8)$$

astfel încât să aibă loc identitatea

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (7.9)$$

**Observația 7.2.2.** Condiția (7.6) poate fi dată și în forma

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}, \quad (7.10)$$

iar (7.9) este echivalentă cu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h}), \quad (7.11)$$

oricare ar fi  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  astfel încât  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D$ .

**Observația 7.2.3.** Din (7.7) și (7.11) se constată că termenii

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0); \quad \|\mathbf{h}\| \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{h})$$

sunt infiniți mici de ordinul lui  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  și respectiv de ordinul lui  $\|\mathbf{h}\|$ . Prin urmare, (7.7) și (7.11) se pot scrie după cum urmează:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{o}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|), \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(\|\mathbf{h}\|), \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

**Definiția 7.2.2.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci aplicația liniară  $\mathbf{T}$  din (7.11) se numește **diferențiala** funcției  $\mathbf{f}$  în  $\mathbf{x}_0$  și se notează cu unul din simbolurile:

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0); \quad d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\cdot); \quad d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \cdot).$$

**Teorema 7.2.1.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  dacă și numai dacă funcțiile coordonate sunt diferențiabile în  $\mathbf{x}_0$ . Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$ , atunci

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = (df_1(\mathbf{x}_0), df_2(\mathbf{x}_0), \dots, df_m(\mathbf{x}_0)) \in (L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))^m. \quad (7.12)$$

*Demonstrație.* Observăm că (7.11) are loc dacă și numai dacă

$$f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) = T_i(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \alpha_i(\mathbf{h}), \quad (7.13)$$

pentru toți indicii  $i$  de la 1 până la  $m$  și pentru orice  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  astfel încât  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in D$ , unde

$$\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m), \quad T_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \quad i \in \overline{1, m} \quad (7.14)$$

și

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha_i(\mathbf{h}) = 0, \quad i \in \overline{1, m}. \quad (7.15)$$

Din (7.13), (7.15) și Definiția 6.3.1 rezultă că funcțiile  $f_i \in \mathcal{F}(D)$  sunt diferențiabile în  $\mathbf{x}_0$  și

$$T_i(\mathbf{h}) = df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}), \quad (7.16)$$

deci

$$T_i = df_i(\mathbf{x}_0), \quad i \in \overline{1, m}, \quad (7.17)$$

unde aplicațiile  $T_i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt cele din (7.14).

Înlocuind (7.16) în (7.14) și ținând cont că  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , rezultă (7.12).

**q.e.d.**

**Teorema 7.2.2.** *Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci diferențiala lui  $\mathbf{f}$  în  $\mathbf{x}_0$  este unică.*

*Demonstrație.* Presupunem că ar mai exista o aplicație liniară

$$\mathbf{S} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

astfel încât într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{0})$  să aibă loc identitatea

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{S}(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\beta(\mathbf{h}), \quad (7.18)$$

unde funcția vectorială de argument vectorial  $\beta \in \mathcal{F}(V, \mathbb{R}^m)$  are proprietatea

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \beta(\mathbf{h}) = \beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (7.19)$$

Notând  $\mathbf{u} = \mathbf{T} - \mathbf{S}$  avem mai întâi că  $\mathbf{u} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , iar din scăderea identităților (7.11) și (7.18), obținem

$$\mathbf{u}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\gamma(\mathbf{h}), \quad (7.20)$$

unde

$$\gamma(\mathbf{h}) = \alpha(\mathbf{h}) - \beta(\mathbf{h}). \quad (7.21)$$

Dacă fixăm un vector nenul  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , atunci vectorul  $\mathbf{h} = t\mathbf{y}$ , coliniar cu  $\mathbf{y}$ , tinde la vectorul nul din  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă  $t \rightarrow 0$ . Înlocuind  $\mathbf{h} = t\mathbf{y}$ , cu  $t \neq 0$ , în (7.20) și ținând cont că  $\mathbf{u}$  este aplicație liniară, deducem

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \frac{|t|}{t} \|\mathbf{y}\| \gamma(t\mathbf{y}), \quad t \in \mathbb{R}^*. \quad (7.22)$$

Dacă în (7.22) trecem la limită pentru  $t \rightarrow 0$  și ținem cont că funcția  $t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{|t|}{t}$  este mărginită și că, în baza lui (7.7) și (7.19), avem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t\mathbf{y}) = \lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t\mathbf{y}) - \lim_{t \rightarrow 0} \beta(t\mathbf{y}) = \mathbf{0},$$

obținem

$$\mathbf{u}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (7.23)$$

Cum  $\mathbf{u} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , avem și

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (7.24)$$

Relațiile (7.23) și (7.24) arată că  $\mathbf{u}$  este identic nul din  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , deci  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{S}$ .

**q.e.d.**

**Teorema 7.2.3.** *Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , atunci  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{x}_0$  și matricea aplicației liniare  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  în perechea de baze canonice  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m$  este  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  atunci are loc (7.6), sau (7.10). Luând în (7.10)  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$  și folosind liniaritatea lui  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , după împărțirea în ambii membri cu  $t \neq 0$ , trecerea la limită pentru  $t \rightarrow 0$  și considerarea proprietății (7.7), obținem

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|} - \mathbf{T}(\mathbf{e}_j) \right) = \mathbf{0}. \quad (7.25)$$

Primul factor al primului membru din (7.25) este mărginit. Pentru ca limita din (7.25) să fie vectorul nul din  $\mathbb{R}^m$  trebuie ca

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|} - \mathbf{T}(\mathbf{e}_j) \right) = \mathbf{0},$$

din care deducem

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{|t|}. \quad (7.26)$$

Din (7.26) rezultă că  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial în punctul  $\mathbf{x}_0$  și

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_j), \quad j \in \overline{1, n}. \quad (7.27)$$

Deoarece coordonatele vectorului  $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$  în baza canonică  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^m$  sunt  $T_i(\mathbf{e}_j)$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , iar cele ale vectorului  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$  în aceeași bază sunt  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ , din (7.27) rezultă

$$T_i(\mathbf{e}_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = df_i(\mathbf{x}_0; \mathbf{e}_j) = df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_j), \quad i \in \overline{1, m}, \quad j \in \overline{1, n}. \quad (7.28)$$

Din (7.28) rezultă că

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j \mathbf{e}'_i,$$

sau matriceal

$$\mathbf{T}(\mathbf{h}) = \mathbf{e}' \left( J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) H \right), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (7.29)$$

unde

$$\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m, \quad \mathbf{h} = \mathbf{e}H, \quad H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

iar  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$  și teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Corolarul 7.2.1.** Aplicația afină  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{e}' \left( J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) (X - X_0) \right)$ , unde  $\mathbf{x} = \mathbf{e}X$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}X_0$ , aproximează oricât de bine valorile funcției  $\mathbf{f}$  într-o vecinătate suficient de mică a lui  $\mathbf{x}_0$ .

*Demonstrație.* Afirmția este consecință imediată a egalității (7.9) dacă se are în vedere condiția (7.8). **q.e.d.**

**Teorema 7.2.4.** Dacă funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ , atunci  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă pe  $D$ .

*Demonstrație.* Concluzia rezultă din Teorema 7.2.1 și Corolarul 6.5.1 aplicat funcțiilor  $f_1, f_2, \dots, f_m$ . **q.e.d.**

**Exercițiul 7.2.1.** Să se determine aproximarea liniară a funcției

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(x, y) = (x^4 + xy^3, x^2y^2 - 3y^2),$$

într-o vecinătate a punctului  $(1, -1)$ .

**Soluție.** Observăm mai întâi că  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(1, -1) = (0, -2)$  și apoi că, din Corolarul 7.2.1, avem

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (0, -2) + \mathbf{e}\left(J_{\mathbf{f}}((1, -1))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right),$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

În acest fel, se găsește

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{e}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}\right) = (3x + 3y, 2x + 4y).$$

De exemplu,  $\mathbf{f}(98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2}) \approx (-24 \cdot 10^{-2}, -228 \cdot 10^{-2})$ .

Valoarea exactă a funcției în punctul  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = (98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2})$  este

$$\mathbf{f}(98 \cdot 10^{-2}, -106 \cdot 10^{-2}) = (-244 \cdot 10^{-3}, -2291 \cdot 10^{-3}).$$

Comparând, constatăm că aproximarea liniară este destul de apropiată de valoarea exactă. ■

### 7.3 Derivate și diferențiale de ordin superior ale funcțiilor vectoriale de mai multe variabile reale

Considerăm  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  o funcție derivabilă parțial pe  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Atunci, există derivatele parțiale  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ ,  $\forall j \in \overline{1, n}$ .

**Definiția 7.3.1.** Funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă în punctul  $\mathbf{a} \in D$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , în această ordine, dacă funcția  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}$  este derivabilă parțial în  $\mathbf{a}$  în raport cu variabila  $x_i$ .

**Observația 7.3.1.** Din Definiția 7.3.1 rezultă că funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este derivabilă în  $\mathbf{a}$  în raport cu variabilele de pe locurile  $j$  și  $i$  dacă există și aparține lui  $\mathbb{R}^m$  limita în  $t = 0$  a funcției

$$t \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t}, \quad (7.30)$$

unde  $t \in \mathbb{R}^*$  este astfel încât  $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i \in D$ .

**Definiția 7.3.2.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă în punctul  $\mathbf{a} \in D$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , atunci limita în  $t = 0$  a funcției (7.30) se numește **derivata parțială de ordinul al doilea** a lui  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , în această ordine.

Derivatele parțiale de ordinul al doilea se notează cu unul din simbolurile:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}''_{x_j x_i}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,x_j x_i}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{f}_{,ji}(\mathbf{a}).$$

Așadar,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t}.$$

**Teorema 7.3.1.** Funcția  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este de două ori derivabilă parțial în  $\mathbf{a}$ , în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , dacă și numai dacă funcțiile coordonate  $f_i$ ,  $i \in \overline{1, m}$ , sunt de două ori derivabile parțial în  $\mathbf{a}$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$  și

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \mathbf{e}'_k. \quad (7.31)$$

*Demonstrație.* Din (7.30) avem

$$\frac{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t} = \sum_{k=1}^m \frac{\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i) - \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a})}{t} \mathbf{e}'_k. \quad (7.32)$$

Trecând la limită pentru  $t \rightarrow 0$  în (7.32) și ținând cont de Definiția 7.3.1, Definiția 7.3.2 și Teorema 4.1.4, constatăm că concluziile teoremei sunt adevărate. **q.e.d.**

**Observația 7.3.2.** Într-un punct  $\mathbf{a} \in D$  pot exista cel mult  $n^2$  derivate parțiale de ordinul al doilea funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ . Derivatele parțiale de ordinul al doilea pentru care  $i \neq j$ , în număr de  $n(n-1)$ , se numesc **derivate parțiale mixte** ale funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$ . În cazul  $i = j$ , derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $\mathbf{f}$  corespunzătoare se convine să se noteze cu  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i^2}(\mathbf{a})$ .



**Observația 7.3.3.** În baza Teoremei 7.3.1 rezultă că tot ce s-a demonstrat referitor la derivabilitatea de ordin superior a funcțiilor reale de mai multe variabile reale se transmite întocmai funcțiilor vectoriale de argument vectorial. De exemplu, dacă  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  este un multi-indice și există derivatele parțiale de ordinul  $|\alpha|$  ale funcțiilor coordonate  $f_1, f_2, \dots, f_m$  ale funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ , atunci

$$D^\alpha \mathbf{f} = \sum_{k=1}^m D^\alpha f_k \mathbf{e}'_k.$$

Referitor la diferențiabilitatea și diferențialele de ordin superior ale funcției  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ , putem stabili ușor alte rezultate pornind de la diferențiabilitatea și diferențialele de ordin superior ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale.

De exemplu, diferențiala de ordinul doi a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a} \in D$  este aplicația biliniară

$$d^2 \mathbf{f}(\mathbf{a})(\cdot, \cdot) = d^2 \mathbf{f}(\mathbf{a}; \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

ale cărei valori se calculează după regula

$$d^2 \mathbf{f}(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{a} + t\mathbf{h} + s\mathbf{k})|_{t=s=0}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n. \quad (7.33)$$

Folosind (7.33), se poate arăta că expresia acestei diferențiale secunde este

$$d^2 \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{,ij}(\mathbf{a}) dx_i dx_j. \quad (7.34)$$

În mod analog, pentru diferențiala de ordinul al treilea se ajunge la expresia

$$d^3 \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{f}_{,ijk}(\mathbf{a}) dx_i dx_j dx_k, \quad (7.35)$$

iar pentru diferențiala de ordinul  $N$  se găsește

$$d^N \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \sum_{|k|=N} \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_n!} D^k \mathbf{f}(\mathbf{a}) dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n}, \quad (7.36)$$

unde  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  este un multindice de ordinul  $N$ .

## 7.4 Diferențiabilitatea și derivabilitatea funcțiilor vectoriale compuse

Fie

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad D = \overset{\circ}{D}, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$$

și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_p) \in \mathcal{F}(\varphi(D), \mathbb{R}^p)$ , unde  $\varphi(D) \subset \mathbb{R}^m$  este imaginea funcției vectoriale de mai multe variabile reale  $\varphi$  pe care o vom considera de asemenea mulțime deschisă. În aceste ipoteze se poate defini *funcția compusă*

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi, \quad \mathbf{x} \in D \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\mathbf{f} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^p. \quad (7.37)$$

Funcția compusă  $\mathbf{F}$  are ca valori vectori din  $\mathbb{R}^p$ , drept variabilă independentă vectorul  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbb{R}^n$  și depinde de cele  $n$  variabile  $x_1, x_2, \dots, x_n$  prin intermediul variabilelor reale  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , unde

$$u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i \in \overline{1, m}, \quad (7.38)$$

sau

$$\mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \varphi(\mathbf{x}) \in \varphi(D) \subset \mathbb{R}^m. \quad (7.39)$$

Scrie detaliat, valorile funcției compuse  $\mathbf{F}$  sunt date de

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{f}\left(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\right). \quad (7.40)$$

Numerele naturale  $n$ ,  $m$  și  $p$  pot lua orice valoare mai mare sau egală cu 1. În partea a doua a acestui paragraf vom considera câteva cazuri particulare frecvent întâlnite în aplicațiile practice ale calculului diferențial.

Următoarea teoremă arată în ce condiții funcția compusă  $\mathbf{F}$  este diferențiabilă și cum se exprimă diferențiala acesteia în funcție de diferențialele funcțiilor ce o compun.

**Teorema 7.4.1. (Regula lanțului)** Dacă funcția  $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\varphi(D), \mathbb{R}^p)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{u}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0) \in \varphi(D)$ , atunci funcția compusă  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  și

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\varphi(\mathbf{x}_0). \quad (7.41)$$

*Demonstrație.* Deoarece  $\varphi$  și  $\mathbf{f}$  sunt diferențiabile în punctele menționate, există funcțiile vectoriale de argument vectorial  $\alpha$  și  $\beta$  definite într-o vecinătate a lui  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  și respectiv într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$  (aceste vecinătăți pot fi chiar  $\mathbb{R}^n$  și respectiv  $\mathbb{R}^m$ ), cu proprietățile

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \lim_{\substack{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x})}} \beta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad (7.42)$$

astfel încât să aibă loc egalitățile:

$$\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0) = d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x} \in D; \quad (7.43)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\|\beta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{u} \in \varphi(D), \quad (7.44)$$

unde  $d\varphi(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  și  $d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  sunt diferențialele funcțiilor vectoriale de argument vectorial  $\varphi$  și  $\mathbf{f}$  în respectiv punctele  $\mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{u}_0$ .

Din paragraful precedent, avem:

$$d\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}' \left( J\varphi(\mathbf{x}_0) dX \right), \quad J\varphi(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}); \quad (7.45)$$

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{e}'' \left( J\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) dU \right), \quad J\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R}), \quad (7.46)$$

unde  $dX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  are elementele egale cu diferențialele variabilelor independente  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  și  $dU \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$  are ca elemente diferențialele  $du_1, du_2, \dots, du_m$  ale variabilelor intermediare. În relațiile (7.45) (7.46) avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m; \\ \mathbf{e}' &= (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m; \\ \mathcal{B}'' &= \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_p\} \subset \mathbb{R}^p; \\ \mathbf{e}'' &= (\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_p) \in (\mathbb{R}^p)^p, \end{aligned}$$

unde  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}''$  sunt bazele canonice spațiile Euclidiene  $\mathbb{R}^m$ , respectiv  $\mathbb{R}^p$ , iar

$$dX(\mathbf{h}) = H, \quad \forall \mathbf{h} = \mathbf{e}H = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n, \quad (7.47)$$

$$dU(\mathbf{v}) = V, \quad \forall \mathbf{v} = \mathbf{e}'V = \sum_{j=1}^m v_j \mathbf{e}'_j \in \mathbb{R}^m, \quad (7.48)$$

unde

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

este baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,$$

$H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{h}$  în baza  $\mathcal{B}$ , iar  $V \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$  este matricea coordonatelor lui  $\mathbf{v}$  în baza  $\mathcal{B}'$ .

Din (7.44) (7.39), (7.37) și (7.43), obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) &= d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \left( d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) + \\ &+ \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\| \beta(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)), \quad \mathbf{x} \in D. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Deoarece  $d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$  rezultă că

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \left( d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) &= \\ = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \left( d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0; \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) &= \\ = \left( d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\varphi(\mathbf{x}_0) \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0; \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Înlocuirea lui (7.50) în (7.49) conduce la

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \left( d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\varphi(\mathbf{x}_0) \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (7.51)$$

unde am făcut notația

$$\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) + \frac{\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \beta(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)). \quad (7.52)$$

În relațiile (7.51) și (7.52) variabila  $\mathbf{x}$  trebuie să fie diferită de  $\mathbf{x}_0$ .

Să arătăm că are loc

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^p}. \quad (7.53)$$

Pentru aceasta, considerăm  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}$ , unde  $\mathbf{s}$  este un versor arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ . Atunci  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \iff t \rightarrow 0$  și

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \left\| \frac{\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} \right\| = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\varphi(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}_0)}{t} \right\| &= \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{x}_0)}{t} \right\| = \\ &= \left\| \frac{d\varphi}{ds}(\mathbf{x}_0) \right\| = \|d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{s})\|. \end{aligned} \quad (7.54)$$

În deducerea relațiilor (7.54) am folosit faptul că aplicația normă  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$  este funcție continuă pe  $\mathbb{R}^n$  (vezi Exemplul 4.2.6).

Aplicația liniară  $d\varphi(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , fiind mărginită (vezi Corolarul 4.10.1 și Teorema 4.9.1), avem

$$\|d\varphi(\mathbf{x}_0)(\mathbf{s})\| \leq \|d\varphi(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{s}\| = \|d\varphi(\mathbf{x}_0)\|. \quad (7.55)$$

În mod analog demonstrăm

$$\|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)(\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\| \leq \|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\| \cdot \|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|. \quad (7.56)$$

Aplicând norma ambilor membri din (7.52) și folosind inegalitatea lui Minkowski și inegalitatea (7.56), deducem

$$\begin{aligned} \|\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| &\leq \|d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)\| \|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| + \\ &+ \frac{\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\beta(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0))\|. \end{aligned} \quad (7.57)$$

unde  $\mathbf{x} \in D \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ . Deoarece funcția  $\varphi$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{x}_0$  rezultă că este continuă în  $\mathbf{x}_0$  și deci  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \implies \mathbf{u} = \varphi(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0$ . Ca urmare, avem

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \beta(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}_0)) = \lim_{\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_0} \beta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}. \quad (7.58)$$

Prin trecere la limită în (7.57), pentru  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ , și folosirea lui (7.54), (7.55) și (7.58), găsim că  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq 0$ , din care rezultă (7.53).

Să revenim la (7.51). Deoarece

$$d\varphi(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p),$$

rezultă că

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\varphi(\mathbf{x}_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p). \quad (7.59)$$

Folosind (7.45), (7.46), Teorema 4.10.3 și (7.59), deducem că matricea aplicației liniare din (7.59) în perechea de baze  $(\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{B}'' \subset \mathbb{R}^p)$  este  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}_0)$ , prin urmare putem scrie

$$d\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) \circ d\varphi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}'' \left( J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}_0) dX \right). \quad (7.60)$$

Din (7.51), (7.53), (7.60) și teorema de unicitate a diferențialei funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , rezultă că funcția  $\mathbf{F}$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  și are loc (7.41). ■

**Corolarul 7.4.1.** În ipotezele Teoremei 7.4.1, avem

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}_0). \quad (7.61)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, aceasta rezultă din (7.60),

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{e}'' \left( J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) dX \right) \quad (7.62)$$

și unicitatea diferențialei.

**q.e.d.**

**Corolarul 7.4.2.** În ipotezele Teoremei 7.4.1, există derivatele parțiale ale funcțiilor coordonate  $F_i$ ,  $i \in \overline{1, p}$ , ale funcției compuse  $\mathbf{F}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  în raport cu toate variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și aceste sunt date de:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial u_k}(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i \in \overline{1, p}, \quad j \in \overline{1, n}; \quad (7.63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial u_k}(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad j \in \overline{1, n}. \quad (7.64)$$

*Demonstrație.* Să specificăm mai întâi că, utilizând o altă notație pentru derivatele parțiale de ordinul întâi, egalitățile (7.63) și (7.64) se scriu în formele:

$$F_{i,j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m f_{i,k}(\mathbf{u}_0) \varphi_{k,j}(\mathbf{x}_0) \quad (7.65)$$

$$\mathbf{F}_{\cdot,j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^m \mathbf{f}_{\cdot,k}(\mathbf{u}_0) \varphi_{k,j}(\mathbf{x}_0). \quad (7.66)$$

Din definiția matricei jacobiene a unei funcții vectoriale de argument vectorial rezultă:

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) = \|f_{i,k}\|_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq k \leq m}}; \quad J_{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \|\varphi_{k,j}\|_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}; \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = \|F_{i,j}\|_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}. \quad (7.67)$$

Atunci, egalitățile (7.63), sau (7.65) rezultă din (7.67), (7.61) și regula de înmulțire a două matrice. Putem spune că (7.63), sau (7.65) reprezintă *regula de derivare a funcțiilor reale compuse de mai multe variabile reale*, cunoscută și sub denumirea *regula lanțului*. **q.e.d.**

**Corolarul 7.4.3.** Fiecare din operatorii de derivare parțială de ordinul întâi  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ,  $j \in \overline{1,n}$ , este o combinație liniară de operatorii de derivare parțială  $\frac{\partial}{\partial u_k}$ ,  $k \in \overline{1,m}$ , scalarii combinației liniare fiind derivatele  $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}$ ,  $k \in \overline{1,m}$ , adică

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial u_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j}, \quad j \in \overline{1,n}. \quad (7.68)$$

În continuare considerăm unele cazuri particulare ale regulii lanțului.

**1<sup>0</sup>.** Cel mai simplu caz particular este acela în care  $m = n = p = 1$ . Dacă notăm  $x_1 = t$ ,  $u_1 = x$ , atunci

$$F(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)). \quad (7.69)$$

După (7.41), (7.38), (7.61), (7.62), avem

$$dF(t_0) = df(x_0) \circ d\varphi(t_0) = f'(t_0) d\varphi(t_0) = f'(x_0) \varphi'(t_0) dt, \quad x_0 = \varphi(t_0), \quad (7.70)$$

de unde deducem

$$F'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0), \quad (7.71)$$

rezultat care se poate obține dacă se utilizează direct relația (7.67).

Egalitatea (7.71) se scrie uneori în forma

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \frac{d\varphi}{dt}(t_0), \quad (7.72)$$

în care funcția  $F$  este dată de (7.69). În aplicațiile practice se pune

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt}, \quad (7.73)$$

formulă ambiguă dacă nu se face precizarea că  $w$  din membrul întâi este rezultatul compunerii lui  $w$  din membrul doi cu funcția  $x = \varphi(t)$ . **q.e.d.**

**2<sup>0</sup>.** Dacă  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  este o funcție de la  $\mathbb{R}$  la  $\mathbb{R}^2$ , deci cazul  $n = 1$  și  $m = 2$ , iar  $f$  este o funcție de la  $\mathbb{R}^2$  la  $\mathbb{R}$ , deci  $p = 1$ , atunci  $f \circ \varphi$  este funcția reală de variabilă reală  $t$

$$F(t) = (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)). \quad (7.74)$$

Pentru funcția din (7.74), matricea jacobiană în  $t_0$  are o singură linie și o singură coloană, singurul ei element fiind  $F'(t_0)$ , deci

$$J_F(t_0) = F'(t_0). \quad (7.75)$$

În baza lui (7.61) numărul real din (7.75) este rezultatul înmulțirii matricei

$$J_f(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix}$$

cu matricea

$$J_\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(t_0) \\ \varphi'_2(t_0) \end{pmatrix}$$

și prin urmare

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0)\varphi'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\varphi'_2(t_0), \quad (7.76)$$

sau

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_0)\frac{d\varphi_1}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_0)\frac{d\varphi_2}{dt}(t_0). \quad (7.77)$$

Într-o notație ambiguă, (7.77) se folosește în forma

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}. \quad (7.78)$$

Ambiguitatea se înlătură dacă precizăm că funcția  $w$  din membrul doi depinde de  $x_1$  și  $x_2$  care la rândul lor depind de variabila independentă  $t$  pe când funcția  $w$  din primul membru este rezultatul unei compuneri de funcții.

**3<sup>0</sup>.** Cazul  $n = m = 1$  și  $p \geq 2$  a fost considerat în Capitolul 5, rezultatul corespunzător fiind prezentat în (5.4.2). ■

**4<sup>0</sup>.** Dacă  $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^2$  și  $f$  este o funcție reală de trei variabile reale (cazul  $n = 2, m = 3, p = 1$ ), atunci funcția compusă  $F = f \circ \varphi$  are valorile date de  $F(x_1, x_2) = f(\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2), \varphi_3(x_1, x_2))$ . Aplicând regula lanțului (7.68), obținem

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.79)$$

După efectuarea produsului matricelor din membrul doi al identității (7.79) și egalarea elementelor corespunzătoare din cei doi membri, se obține

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \\ \quad + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \\ \quad + \frac{\partial f}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial u_3}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0). \end{cases} \quad (7.80)$$

Folosind alte notații pentru derivate constatăm că (7.80) se scrie în forma

$$\begin{cases} F_{,1}(\mathbf{x}_0) &= f_{,1}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{1,1}(\mathbf{x}_0) + f_{,2}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{2,1}(\mathbf{x}_0) + f_{,3}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{3,1}(\mathbf{x}_0) \\ F_{,2}(\mathbf{x}_0) &= f_{,1}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{1,2}(\mathbf{x}_0) + f_{,2}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{2,2}(\mathbf{x}_0) + f_{,3}(\mathbf{u}_0) \cdot \varphi_{3,2}(\mathbf{x}_0). \end{cases}$$

La fel ca mai sus, formula (7.133) poate fi întâlnită într-o altă aranjare și anume:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x_i}, \quad i \in \overline{1, 2}. \quad (7.81)$$

În formula (7.134), trebuie precizat că funcția  $F$  din membrul întâi este rezultatul compunerii funcției  $F$  din membrul al doilea cu funcția  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ .

**Exercițiul 7.4.1.** Fie funcțiile:

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = (x_1^2 x_2^4, \quad x_1^3 x_2^2 + 4x_1 x_2^2); \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{u}) = (u_1 \sin u_2, \quad -u_1 \cos u_2),$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  și  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ . Să se calculeze matricea jacobiană  $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0)$ , unde  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi$  și  $\mathbf{x}_0 = (2, -1)$ .

**Soluție.** Matricea jacobiană a funcției  $\varphi$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este

$$\begin{aligned} J_{\varphi}(\mathbf{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 x_2^4 & 4x_1^2 x_2^3 \\ 3x_1^2 x_2^3 + 4x_2^2 & 6x_1^3 x_2^2 + 8x_1 x_2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{x_1=2 \\ x_2=-1}}. \end{aligned}$$

Matricea jacobiană  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0)$ , unde  $\mathbf{u}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0) = (4, 0)$ , este

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin u_2 & u_1 \cos u_2 \\ -\cos u_2 & u_1 \sin u_2 \end{pmatrix} \Big|_{\substack{u_1=4 \\ u_2=0}}.$$

După efectuarea înlocuirilor care se impun, găsim:

$$J_{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}; \quad J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folosind acum rezultatele de mai sus, avem:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 32 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}.$$

În cazul particular  $m = n = p$  se poate vorbi de jacobienii aplicațiilor  $\varphi$  și  $\mathbf{f}$ . Legătura dintre jacobianul funcției compuse  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi$  și jacobienii funcțiilor  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$  este precizată în următorul rezultat, care este o consecință imediată a Teoremei 7.4.1.

**Corolarul 7.4.4.** Dacă aplicația  $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ , iar aplicația  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\varphi(D), \mathbb{R}^n)$  este diferențiabilă în punctul  $\mathbf{u}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0)$ , atunci

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0). \quad (7.82)$$

*Demonstrație.* Din ipotezele acestui corolar rezultă că are loc (7.61). În cazul particular menționat în privința lui  $m$ ,  $n$  și  $p$  avem că cele două matrice care intră în membrul al doilea din (7.61) sunt matrice pătratice de ordinul  $n$ . Ținând cont de faptul că determinantul produsului a două matrice pătratice de același tip este egal cu produsul determinantilor matricelor factori, rezultă (7.61). **q.e.d.**

**Exercițiul 7.4.2.** Să se calculeze jacobianul funcției  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  în punctul  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , unde

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(u_1, u_2) = (u_1^2 + u_1 u_2)\mathbf{e}_1 + (u_1 u_2 + u_2^2)\mathbf{e}_2, \quad \text{și}$$

$$\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 \mathbf{e}_1 + (x_1^2 - x_2^2)\mathbf{e}_2.$$

**Soluție.** Mai întâi avem

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_1, x_2)}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{vmatrix} = -2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Apoi,

$$\begin{aligned} \frac{D(f_1, f_2)}{D(u_1, u_2)}(\mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}(\mathbf{u}_0) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2u_1 + u_2 & u_1 \\ u_2 & u_1 + 2u_2 \end{vmatrix} = 2(u_1 + u_2)^2. \end{aligned}$$

Folosind acum (7.82), deducem

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x_1, x_2)}(\mathbf{x}) = -4(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))^2 \|\mathbf{x}\|^2 = -4(x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2)^2 \|\mathbf{x}\|^2.$$

■

Utilizând rezultatele de mai sus putem demonstra următoarea teoremă de medie pentru o funcție reală de variabilă vectorială.

**Teorema 7.4.2.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă și convexă și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D)$  o funcție reală de variabilă vectorială. Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă pe  $D$  și  $\mathbf{a} \in D$ ,  $\mathbf{b} \in D$ , atunci există un punct  $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset D$  astfel încât

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = df(\xi; \mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\nabla f)(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (7.83)$$

*Demonstrație.* Introducem funcția  $\mathbf{G} : [0, 1] \rightarrow D$ ,  $\mathbf{G}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ,  $t \in [0, 1]$ . Evident,  $\mathbf{G}$  este continuă pe  $[0, 1]$ ,  $\mathbf{G}([0, 1]) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  și  $\mathbf{G}$  este diferențiabilă pe  $(0, 1)$ . Atunci, funcția compusă  $F = f \circ \mathbf{G} \in \mathcal{F}([0, 1])$  este diferențiabilă pe  $(0, 1)$  și

$$dF(t) = df(\mathbf{G}(t)) \circ d\mathbf{G}(t), \quad t \in (0, 1). \quad (7.84)$$



Dacă  $h$  este arbitrar din  $\mathbb{R}$ , atunci

$$dF(t, h) = df(\mathbf{G}(t)) \circ d\mathbf{G}(t; h). \quad (7.85)$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{cases} dF(t; h) &= F'(t)h; \\ d\mathbf{G}(t; h) &= (dG_1(t; h), dG_2(t; h), \dots, dG_n(t; h)), \end{cases} \quad (7.86)$$

unde  $G_1, G_2, \dots, G_n$  sunt funcțiile coordonate ale funcției  $\mathbf{G}$ . Valoarea în  $h$  a diferențialei funcției  $\mathbf{G}$  în punctul  $t$  este

$$d\mathbf{G}(t, h) = \mathbf{G}'(t)h = (G'_1(t), G'_2(t), \dots, G'_n(t))h. \quad (7.87)$$

Din (7.85) – (7.87) și faptul că  $\mathbf{G}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ , obținem

$$F'(t) = df(\mathbf{G}(t); \mathbf{G}'(t)) = df(\mathbf{G}(t); \mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (7.88)$$

Pe de altă parte, funcția  $F$  satisface ipotezele teoremei lui Lagrange, deci există  $\tau \in (0, 1)$  astfel încât

$$F(1) - F(0) = F'(\tau). \quad (7.89)$$

Luând în considerație că  $F(1) = f(\mathbf{b})$  și  $F(0) = f(\mathbf{a})$ , din (7.88) și (7.89), deducem

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = df(\mathbf{G}(\tau); \mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (7.90)$$

Pe de altă parte, avem

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \quad (7.91)$$

Relația (7.83) rezultă acum din (7.90), (7.91) și Corolarul 6.4.1.

**q.e.d.**

## 7.5 Prelungirea unei funcții uniform continue

Studiul derivabilității și diferențiabilității într-un punct  $\mathbf{x}_0$  a unei funcții  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , presupune ca  $\mathbf{x}_0$  să fie punct interior al mulțimii  $D$  și din acest motiv domeniul de definiție al funcției a fost considerat o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ .

Se pune însă în mod natural problema extinderii noțiunilor de derivabilitate și diferențiabilitate în puncte frontieră aparținând domeniului de definiție.

Întrucât o funcție diferențiabilă într-un punct este în mod necesar continuă în acel punct, este indicat întâi să prelungim funcția prin continuitate, dacă acest lucru este posibil. În acest sens dăm rezultatul următor.

**Teorema 7.5.1.** *Dacă funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$  este uniform continuă pe mulțimea neînchisă  $A \subset \mathbb{R}^n$ , atunci ea poate fi prelungită pe mulțimea  $\overline{A} \setminus A$  într-un mod unic astfel încât prelungirea să fie continuă pe mulțimea  $\overline{A}$ .*

*Demonstrație.* Fie  $\mathbf{x}_0 \in \overline{A} \setminus A$ . Atunci,  $\mathbf{x}_0$  este punct aderent al mulțimii  $A$ . Din uniforma continuitate a funcției  $\mathbf{f}$  pe mulțimea  $A$  rezultă că dat un  $\varepsilon > 0$ , arbitrar, există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{f}(\mathbf{x}'')\| < \varepsilon, \quad (7.92)$$

oricare ar fi  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$  care satisfac condiția

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta(\varepsilon). \quad (7.93)$$

Dacă  $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in A$  sunt astfel încât  $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \frac{\delta}{2}$ ;  $\|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}_0\| < \frac{\delta}{2}$ , atunci are loc și inegalitatea (7.93). În consecință, în baza Teoremei 4.1.5, există limita  $\ell_{\mathbf{x}_0}$  a lui  $\mathbf{f}$  în  $\mathbf{x}_0$  și aceasta aparține lui  $\mathbb{R}^m$ . Convenim ca  $\ell_{\mathbf{x}_0}$  să fie valoarea lui  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ .

Funcția

$$\tilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(A \cup \{\mathbf{x}_0\}, \mathbb{R}^m), \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \text{dacă } \mathbf{x} \in A \\ \ell_{\mathbf{x}_0}, & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \end{cases},$$

este o prelungire a funcției  $\mathbf{f}$  la mulțimea  $A \cup \{\mathbf{x}_0\}$ , care în plus este continuă deoarece  $\tilde{\mathbf{f}}$  este continuă pe  $A$  și limita lui  $\tilde{\mathbf{f}}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este egală cu valoarea funcției în acest punct. Cum  $\mathbf{x}_0$  este arbitrar din  $\overline{A}$  urmează că funcția

$$\tilde{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(\overline{A}, \mathbb{R}^m), \quad \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}), & \text{dacă } \mathbf{x} \in A \\ \ell_{\mathbf{x}}, & \text{dacă } \mathbf{x} \in \overline{A} \setminus A, \end{cases} \quad (7.94)$$

unde  $\ell_{\mathbf{x}} = \lim_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \in A}} \mathbf{f}(\mathbf{y})$ , este funcție continuă pe mulțimea  $A$ . Mai mult, arătăm că funcția  $\tilde{\mathbf{f}}$  din (7.94) este uniform continuă. Pentru aceasta, fie două puncte arbitrare  $\mathbf{x}'_0$  și  $\mathbf{x}''_0$  ale lui  $\overline{A}$  astfel încât

$$\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}''_0\| < \delta(\varepsilon). \quad (7.95)$$

Deoarece mulțimea  $\overline{A}$  este închisă, există șirurile de puncte  $(\mathbf{x}'_k)_{k \geq 1}$  și  $(\mathbf{x}''_k)_{k \geq 1}$  din mulțimea  $A$ , convergente la  $\mathbf{x}'_0$ , respectiv  $\mathbf{x}''_0$ . Putem presupune în plus că  $\|\mathbf{x}'_k - \mathbf{x}''_k\| < \delta(\varepsilon)$ , presupunere care, cumulată cu uniforma continuitate a lui  $\mathbf{f}$ , conduce la

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}''_k)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Trecând la limită pentru  $k \rightarrow \infty$  în această ultimă inegalitate, obținem

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}'_0) - \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}''_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (7.96)$$

Prin urmare, am demonstrat că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât oricare ar fi punctele  $\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0 \in \overline{A}$ , care satisfac (7.95), are loc (7.96), ceea ce, în baza Definiției 4.3.1, arată că prelungirea funcției  $\mathbf{f}$  la mulțimea  $\overline{A}$  definită în (7.94) este continuă și cum  $\overline{A}$  este mulțime închisă, rezultă că  $\tilde{\mathbf{f}}$  este funcție uniform continuă. **q.e.d.**

## 7.6 Derivatele parțiale ale unei funcții vectoriale pe frontiera domeniului de definiție

Fie  $n \geq 2$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime deschisă,  $\overline{G}$  închiderea lui  $G$  și funcția continuă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}^m)$ .

Este posibil ca, în anumite puncte ale frontierei  $\Gamma = \overline{G} \setminus G$ , să nu se poată vorbi de derivatele parțiale ale lui  $\mathbf{f}$  în raport cu unele din variabilele sale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

De exemplu, dacă  $G = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , atunci derivata parțială a funcției  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(B(\mathbf{0}, 1), \mathbb{R}^m)$  în raport cu variabila  $x_1$  în punctul

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}_2 \in \partial G = \Gamma = \overline{G} \setminus G,$$

nu poate avea sens deoarece punctele de forma

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} = \mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_1,$$

unde  $t > 0$ , nu aparțin lui  $\overline{G} = \overline{B(\mathbf{0}, 1)}$ , deci nu putem vorbi de

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{e}_2)}{t}$$

care definește derivabilitatea și implicit derivata funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{e}_2$  în raport cu variabila  $x_1$ .

În astfel de cazuri este posibil să definim o *derivată parțială generalizată* a funcției  $\mathbf{f}$  într-un punct  $\mathbf{x}_0 \in \partial G$  în raport cu o anumită variabilă  $x_i$ .

Pentru aceasta, funcția  $\mathbf{f}$  trebuie să fie nu numai continuă ci și derivabilă parțial pe  $G$ , iar derivatele parțiale de ordinul întâi  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}^m)$  trebuie să fie uniform continue pe  $G$ .

Dacă sunt îndeplinite aceste condiții, atunci în baza Teoremei 7.5.1 putem prelungi prin continuitate, la mulțimea  $\partial G$ , acele derivate parțiale  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$  care există și sunt uniform continue pe  $G$ . Astfel de prelungiri sunt numite derivatele parțiale corespunzătoare ale lui  $\mathbf{f}$  pe  $\partial G$ , deși în acest caz noțiunea de derivată parțială este înțeleasă într-un sens generalizat.

Mai mult, dacă într-un punct  $\mathbf{x}_0 \in \partial G$  se poate calcula  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$  folosind Definițiile 7.1.1 și 7.1.2, atunci aceasta coincide cu derivata în sens generalizat în acel punct.

Pentru a arăta aceasta, considerăm cazul unei funcții vectoriale de două variabile reale definită pe bila deschisă de rază 1 cu centrul în origine  $G = B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^2$  și să luăm punctul  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$  situat pe semicercul din semiplanul  $x > 0$  a cercului de rază unitate cu centrul în origine mai puțin punctul de intersecție al acestuia cu axa  $Ox$ ; aceasta înseamnă că  $x_0 > 0$  și  $|y_0| < 1$ . În acest caz există derivatele parțiale ale lui  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(B(0, 1), \mathbb{R}^m)$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  și acestea coincid cu derivatele parțiale generalizate deoarece, de exemplu,

$$\frac{\mathbf{f}(x_0 - h, y_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0)}{-h} = \mathbf{f}_{,x}(x_0 - \theta h, y_0) \rightarrow \mathbf{f}_{,x_0}$$

atunci când  $h \rightarrow 0$  și  $h > 0$ , unde  $\mathbf{f}_{,x_0}$  este derivata parțială generalizată corespunzătoare.

Rezultatele de mai sus se pot extinde și pentru derivate parțiale de ordin superior în sensul că dacă  $\Gamma$ , sau o submulțime  $\gamma \subset \Gamma$  a frontierei domeniului  $G \subset \mathbb{R}^n$ , este de  $r + 1$  ori continuu diferențiabilă, atunci o funcție uniform continuă pe  $G$  împreună cu derivatele parțiale până la ordinul  $r + 1$  inclusiv pot fi extinse la  $\Gamma$  (respectiv la  $\gamma$ ) cu păstrarea proprietăților de diferențiabilitate. În particular funcția prelungită  $\tilde{\mathbf{f}}$  are derivate parțiale continue până la ordinul  $r + 1$  inclusiv în toate punctele lui  $\Gamma$  (respectiv  $\gamma$ ).

## 7.7 Pânze parametrice. Suprafețe

În acest paragraf se arată cum se utilizează rezultatele precedente în studierea noțiunilor de *pânză parametrică* și *suprafață*, frecvent întâlnite în calculul integral și în geometria diferențială.

**Definiția 7.7.1.** Se numește **pânză parametrică netedă** în  $\mathbb{R}^3$  o funcție continuă  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3) \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$ , unde  $A \subset \mathbb{R}^2$ , care admite derivate parțiale continue pe mulțimea nevidă  $\overset{\circ}{A}$ .

Mulțimea  $\mathbf{S}(A) \subset \mathbb{R}^3$  se numește de asemenea pânză netedă în  $\mathbb{R}^3$ , iar ecuațiile

$$\begin{cases} x = S_1(u, v), \\ y = S_2(u, v), \\ z = S_3(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in A, \quad (7.97)$$

unde

$$S_1(u, v)\mathbf{i} + S_2(u, v)\mathbf{j} + S_3(u, v)\mathbf{k} = \mathbf{S}(u, v) = \mathbf{r}(u, v), \quad (7.98)$$

se numesc **ecuațiile parametrice ale pânzei**.

Ecuația

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u, v), \quad \text{sau} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (7.99)$$

unde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{OM}, \quad M(x, y, z), \quad (7.100)$$

se numește **ecuația vectorială a pânzei**.

**Observația 7.7.1.** Deoarece funcția  $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  are derivate parțiale continue pe  $\overset{\circ}{A}$ , din Teorema 7.2.4 rezultă că  $\mathbf{S}$  este diferențiabilă pe  $\overset{\circ}{A}$ .

Prin urmare, în fiecare punct  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$  se poate defini aplicația liniară  $d\mathbf{S}((u_0, v_0)) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ , diferențiala funcției  $\mathbf{S}$  în punctul  $(u_0, v_0)$ , a cărei matrice în perechea de baze canonice:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{B}' = \{\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

este

$$J_{\mathbf{S}}((u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}. \quad (7.101)$$

**Observația 7.7.2.** Prima coloană a matricei jacobiene  $J_{\mathbf{S}}((u_0, v_0))$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$  în baza canonică  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^3$ , iar cea de a doua coloană este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$  în aceeași bază.

În aplicațiile practice ale calculului integral, geometriei diferențiale, mecanicii, fizicii, etc. se include în definiția pânzei parametrice și condiția de regulatitate care spune că rangul matricei  $J_{\mathbf{S}}((u_0, v_0))$  să fie egal cu 2 în orice punct  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ , condiție care se poate scrie sub forma

$$\left( \frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right)^2 + \left( \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right)^2 + \left( \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right)^2 > 0. \quad (7.102)$$

Pentru a vedea semnificația geometrică a acestei condiții să considerăm funcția

$$u \mapsto \mathbf{S}(u, v_0), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0) \in A, \quad (7.103)$$

care este restricția funcției  $\mathbf{S}$  la segmentul de dreaptă paralel cu axa absciselor reperului cartezian din  $\mathbb{E}^2$  ce trece prin punctul  $M'_0(u_0, v_0)$  și este conținut în mulțimea  $A$ , deci care are ecuația carteziană  $v = v_0$ .

Deoarece (7.103) este o aplicație continuă diferențiabilă de la o submulțime a lui  $\mathbb{R}$  în  $\mathbb{R}^3$ , ea reprezintă un drum parametrizat neted în  $\mathbb{R}^3$  și are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u, v_0), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0) \in A. \quad (7.104)$$

Avem  $\text{Im } \mathbf{S}(\cdot, v_0) \subset \text{Im } \mathbf{S}$ , deci hodograful drumului (7.104) este o submulțime a pânzei netede de ecuație vectorială (7.99). Atunci, vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$$

are direcția tangentei la drumul de ecuație vectorială (7.104) în punctul  $M_0 \in \mathbb{E}^3$  a cărui vector de poziție este  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(u_0, v_0) = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ .

În mod similar aplicația

$$v \mapsto \mathbf{S}(u_0, v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v) \in A, \quad (7.105)$$

este drum parametrizat neted în  $\mathbb{R}^3$  care are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u_0, v), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v) \in A, \quad (7.106)$$

a cărui imagine este o submulțime a lui  $\text{Im } \mathbf{S}$ . Vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

este vectorul director al tangentei la drumul parametrizat neted (7.106) în punctul  $M_0$ .

Să observăm că

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}, \quad (7.107)$$

unde

$$A = \frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)}(u_0, v_0); \quad B = \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)}(u_0, v_0); \quad C = \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0),$$

este ortogonal atât pe vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$  cât și pe vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ .

Din cele prezentate rezultă că condiția de regularitate (7.102) se scrie echivalent în forma

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0$$

și exprimă faptul că vectorii  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$  și  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$  sunt necoliniari (liniar independenți) fapt care, geometric, se traduce prin aceea că imaginile drumurilor parametrizate (7.104) și (7.106) au în punctul comun  $M_0$  tangente distincte. Dacă presupunem în plus că (7.97), sau (7.98) este corespondența biunivocă, atunci drumurile (7.97) și (7.98) au în comun doar punctul  $M_0$ . Imaginile acestor drumuri se numesc *liniile parametrice* ale pânzei netede de ecuație vectorială (7.99), care trec prin punctul  $M_0$ .

Să vedem acum ce interpretare geometrică are funcția afină

$$(u, v) \mapsto \mathbf{S}(u_0, v_0) + d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Evident că ea definește o nouă pânză parametrică netedă de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}(u_0, v_0) + d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (7.108)$$

sau de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = S_1(u_0, v_0) + \frac{\partial S_1}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial S_1}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ x = S_2(u_0, v_0) + \frac{\partial S_2}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial S_2}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ x = S_3(u_0, v_0) + \frac{\partial S_3}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial S_3}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0). \end{cases} \quad (7.109)$$

Eliminarea lui  $u - u_0$  și  $v - v_0$  din (7.109) conduce la ecuația

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + (z - z_0) \cdot C = 0, \quad (7.110)$$

unde  $x_0 = S_1(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = S_2(u_0, v_0)$ ,  $z_0 = S_3(u_0, v_0)$  sunt coordonatele punctului  $M_0$ .

Ecuația (7.110) arată că vectorul cu originea în  $M_0$  și extremitatea într-un punct curent  $M$  al pânzei (7.108) este ortogonal pe vectorul (7.107). Toate punctele  $M$  din spațiu cu proprietatea că vectorul  $\overrightarrow{M_0M}$  este ortogonal pe vectorul  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  formează un plan.

Prin urmare, pânza parametrică de ecuație vectorială (7.108), sau de ecuații parametrice (7.109) are ca imagine un plan care se numește *planul tangent* în punctul  $M_0$  la pânza parametrică netedă de ecuație vectorială (7.99), plan care are în comun cu  $\text{Im } \mathbf{S}$ , într-o vecinătate a punctului  $M_0$ , doar punctul  $M_0$ . Diferența

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) - d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right) = \mathbf{S}(u, v) - \mathbf{S}(u_0, v_0) - d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right),$$

caracterizează *abaterea* dintre coordonatele punctelor de pe imaginea pânzei netede de ecuație vectorială (7.99) și coordonatele punctelor corespunzătoare de pe planul (7.109) în vecinătatea punctului  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ , care are drept corespondent punctul  $M_0$  de pe pânză.

Deoarece diferențiabilitatea lui  $\mathbf{S}$  în punctul  $(u_0, v_0)$  implică faptul că abaterea de mai sus tinde la zero mai repede decât tinde la zero distanța dintre punctele  $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$  și  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$  când  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$  rezultă că planul (7.108) aproximează satisfăcător  $\text{Im } \mathbf{S}$  într-o vecinătate a punctului  $M_0$ .

**Exemplul 7.7.1.** Aplicația  $\mathbf{S} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definită prin

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k},$$

în care  $a$  este o constantă pozitivă este o pânză parametrică netedă. Să se studieze această pânză.

Într-adevăr, aplicația de mai sus este diferențiabilă pe  $\overset{\circ}{A} = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  deoarece funcțiile coordonate  $S_1, S_2, S_3$  sunt diferențiabile pe  $\overset{\circ}{A}$  și deci definește o pânză parametrică netedă în  $\mathbb{R}^3$  de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x &= a \cos u \sin v \\ y &= a \sin u \sin v \\ z &= a \cos v, \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Dacă calculăm distanța Euclidiană de la punctul  $M(x, y, z)$  al pânzei la originea  $O(0, 0, 0)$  a reperului  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  găsim

$$d^2(M, O) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + a^2 \cos^2 v = a^2,$$

de unde rezultă  $d(M, O) = a$ , ceea ce arată că  $\text{Im } \mathbf{S}$  este frontiera bilei cu centrul în origine și raza egală cu  $a$ , adică sfera de rază  $a$  cu centrul în origine.

Matricea jacobiană  $J_{\mathbf{S}}(u, v)$  care definește diferențiala funcției  $\mathbf{S}$  în punctul  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  este

$$J_{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin u \sin v & a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v & a \sin u \cos v \\ 0 & -a \sin v \end{pmatrix}.$$

Conform Observației 7.7.2, elementele coloanelor întâi și a doua ale matricei  $J_{\mathbf{S}}$  sunt coordonatele vectorilor  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  și respectiv  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ . Prin urmare,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \mathbf{k} = \\ &= -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \mathbf{k} = \\ &= a \cos v (\cos u \mathbf{i} + \sin u \mathbf{j}) - a \sin v \mathbf{k}. \end{cases}$$

Mai întâi constatăm că produsul scalar  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$  este egal cu zero ceea ce înseamnă că liniile parametrice ale sferei (cercul paralel  $v = \text{const.}$  și meridianul  $u = \text{const.}$ ) care trec prin punctul  $M(u, v)$  cu  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(u, v)$ , sunt ortogonale. Apoi, produsul vectorial al aceluiași vectori este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u \sin v & a \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \sin u \sin v & -a \sin v \end{vmatrix} = -a \sin v \mathbf{r}(u, v) \neq \mathbf{0},$$

oricare ar fi perechea  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ . Deoarece pentru  $v \in (0, \pi)$ , avem  $a \sin v > 0$ , rezultă că vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$  este coliniar și de sens contrar vectorului  $\mathbf{r}(u, v)$ , adică vectorului de poziție al punctului  $M$  de pe pânză corespunzător perechii  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ .

Tangentele la liniile parametrice care trec prin punctul  $M_0$  de vector de poziție  $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ , unde  $(u_0, v_0) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , determină planul tangent la sferă în  $M_0$  care are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); (t - u_0, s - v_0)\right), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Pentru punctele  $(t, s) = (u, v)$  situate într-o vecinătate a punctului  $(u_0, v_0)$  din mulțimea deschisă  $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , membrul doi din ultima ecuație aproximează satisfăcător punctele corespunzătoare de pe sferă. De exemplu, dacă luăm  $u_0 = v_0 = \frac{\pi}{4}$ , atunci  $M_0(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2})$ , matricea jacobiană  $J_{\mathbf{S}}(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  este

$$J_{\mathbf{S}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

iar ecuațiile parametrice ale planului tangent la sferă în punctul  $M_0$  sunt

$$\begin{cases} x &= \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t + \frac{a}{2}s \\ y &= \frac{a(2-\pi)}{4} + \frac{a}{2}t + \frac{a}{2}s \\ z &= \frac{a\sqrt{2}(\pi+4)}{8} - \frac{a\sqrt{2}}{2}s, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Eliminând  $t$  și  $s$  din aceste ecuații obținem ecuația planului tangent în forma  $x + y + z\sqrt{2} - 2a = 0$ .

Este posibil ca funcțiile  $S_1, S_2, S_3$  din (7.97) să fie astfel încât  $S_1(u, v) = u, S_2(u, v) = v, S_3(u, v) = f(u, v)$ , unde  $f \in \mathcal{F}(A)$  este o funcție diferențiabilă pe mulțimea  $\overset{\circ}{A} \in \mathbb{R}^2$ , iar  $A$  este situată în planul  $Oxy$ , aceasta însemnând că  $u = x, v = y$ , iar  $z$  este o funcție de  $x$  și  $y$ . În această situație, în locul ecuațiilor (7.97) putem considera doar ecuația

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A. \quad (7.111)$$

În acest caz se spune că funcția reală  $f$ , diferențiabilă pe mulțimea  $\overset{\circ}{A} \in Oxy$ , definește *explicit* pânza netedă  $\text{Im } \mathbf{S}$ , sau că (7.111) este *ecuația explicită* a pânzei netede. Ecuația vectorială a pânzei este acum

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in A. \quad (7.112)$$

Vectorul tangent în  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  la drumul

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + f(x, y_0)\mathbf{k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (x, y_0) \in \overset{\circ}{A}, \quad (7.113)$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{k}, \quad (7.114)$$

iar vectorul tangent în  $M_0$  la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + f(x_0, y)\mathbf{k}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (x_0, y) \in \overset{\circ}{A}, \quad (7.115)$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{k}. \quad (7.116)$$

În această situație:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0); \quad B = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0); \quad C = 1, \quad (7.117)$$

astfel că, din (7.117) și (7.110), se deduce că ecuația planului tangent la pânza netedă de ecuație (7.111) este

$$-(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0) = 0. \quad (7.118)$$

Să considerăm acum pânza netedă (7.99) și un drum parametrizat neted  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ , unde  $I$  este interval din  $\mathbb{R}$ , cu proprietatea că există  $t_0 \in I$  astfel încât  $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ , iar  $\text{Im} \mathbf{f} \subset \text{Im} \mathbf{S}$ . Aceste proprietăți arată că imaginea drumului parametrizat considerat este situat pe pânza parametrică netedă (7.3) și că această imagine trece prin punctul  $M_0$  de pe pânză, unde  $M_0$  este astfel încât  $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ . Ca să se realizeze proprietățile de mai sus ar trebui să existe un drum neted  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \rightarrow A$  astfel încât  $\mathbf{f} = \mathbf{S} \circ \varphi$ . Tangenta în punctul  $M_0$  la drumul parametrizat neted de mai sus este de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0) \mathbf{S}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pe de altă parte, se știe că (vezi regula lanțului)

$$\mathbf{f}'(t_0) = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial u}(u_0, v_0) \varphi'_1(t_0) + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial v}(u_0, v_0) \varphi'_2(t_0). \quad (7.119)$$

Din (7.119) și valoarea în  $\mathbf{h} = \varphi'(t_0)$  a diferențialei funcției  $\mathbf{S}$  în punctul  $(u_0, v_0)$  rezultă

$$\mathbf{f}'(t_0) = d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); \varphi'(t_0)\right). \quad (7.120)$$

Deoarece  $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{S}(u_0, v_0)$ , iar din (7.120) și liniaritatea diferențialei avem  $\mathbf{f}'(t_0) s = d\mathbf{S}\left((u_0, v_0); s \varphi'(t_0)\right)$  rezultă că tangenta (7.23) se află inclusă în planul tangent de ecuație (7.12). Acest rezultat stabilit duce la următoarea definiție echivalentă a planului tangent într-un punct al unei pânze parametrice netede.

**Definiția 7.7.2.** Se numește **plan tangent** într-un punct al unei pânze netede, locul geometric al tangentelor la respectiv toate drumurile netede ale căror imagini se află pe imaginea pânzei și care trec prin acel punct.

**Definiția 7.7.3.** Două pânze netede  $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  și  $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathcal{F}(\tilde{A}, \mathbb{R}^3)$ , unde  $A \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$ , se numesc **echivalente** dacă există un homeomorfism diferențiabil  $\varphi : A \rightarrow \tilde{A}$  cu matricea jacobiană nesingulară pe  $\overset{\circ}{A}$  și jacobianul pozitiv în orice punct  $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$  astfel încât  $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} \circ \varphi$ .

**Definiția 7.7.4.** Se numește **suprafață netedă** o clasă de echivalență în mulțimea pânzelor parametrice netede.

O suprafață netedă poate fi reprezentată prin oricare pânză parametrică netedă care aparține clasei de echivalență respective. Spre exemplu, într-o vecinătate a unui punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  o suprafață netedă care conține acest punct poate fi reprezentată parametric prin ecuațiile (7.97), sau prin ecuația carteziană explicită (7.111).

Să considerăm acum aplicația reală diferențiabilă  $F \in \mathcal{F}(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^3$ , cu proprietatea că gradientul ei

$$(\nabla F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k}, \quad (7.121)$$

este vector nenul pe mulțimea deschisă  $\overset{\circ}{A}$ , adică are loc inegalitatea

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\right)^2 > 0, \quad (7.122)$$

oricare ar fi punctul  $(x, y, z) \in \overset{\circ}{A}$ .



**Definiția 7.7.5.** Fie aplicația reală  $F \in \mathcal{F}(A)$  care satisface condiția (7.122). Mulțimea  $(S)$  a punctelor  $M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ , ale căror coordonate verifică ecuația,

$$F(x, y, z) = 0 \quad (7.123)$$

se numește **varietate bidimensională** scufundată în  $\mathbb{R}^3$ , sau **suprafață reprezentată implicit**, iar ecuația (7.123) se numește **ecuația carteziană implicită** a suprafeței  $(S)$ .

scufundată în  $\mathbb{R}^3$

Fie  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(I, A)$ , unde  $I$  este interval din  $\mathbb{R}$ , iar domeniul de definiție al funcției  $F$ , un drum parametrizat neted a cărui imagine se află pe varietatea bidimensională (7.29), fapt care matematic se exprimă prin

$$F(\varphi(t)) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (7.124)$$

Datorită faptului că atât  $F$  cât și  $\varphi$  sunt funcții diferențiabile, rezultă că funcția compusă  $F \circ \varphi$  este diferențiabilă, deci derivabilă pe  $I$  și ca atare vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_2(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_3(t) = 0, \quad \forall t \in I. \quad (7.125)$$

Identitatea (7.125) arată că vectorul  $(\nabla F)(\varphi(t))$  este ortogonal pe vectorul  $\varphi'(t)$  care, după cum știm este tangent la drumul parametrizat  $\varphi$  în punctul  $M \in \mathbb{E}^3$  corespunzătoare valorii  $t$  a parametrului ceea ce înseamnă că  $\overrightarrow{OM} = \varphi(t)$ . Pe de altă parte, știm că toate tangentele în punctul  $M$  astfel încât  $\overrightarrow{OM} = \varphi(t)$  la respectiv toate drumurile parametrizate ce trec prin  $M$  și sunt situate pe varietatea diferențiabilă  $(S)$  formează planul tangent în  $M$  la suprafață. Toate aceste rezultate conduc la următoarea definiție.

**Definiția 7.7.6.** Vectorul  $\mathbf{N} = (\nabla F)(x, y, z)$  dat de (7.121), care este ortogonal pe vectorul tangent la orice drum neted situat pe varietatea diferențiabilă  $(S)$  ce conține punctul  $M(x, y, z) \in S$ , se numește **vectorul normalei** la suprafață în punctul  $M$ .

**Definiția 7.7.7.** Dacă funcția reală diferențiabilă  $F \in \mathcal{F}(A)$  satisface (7.28) și punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  este arbitrar din  $A$ , atunci varietatea bidimensională de ecuație carteziană explicită

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \quad (7.126)$$

se numește **varietate de nivel**, sau **suprafață de nivel** a funcției  $F$  corespunzătoare nivelului  $F(x_0, y_0, z_0)$ .

**Observația 7.7.3.** Vectorul normal la varietatea de nivel (7.126) în punctul  $M(x, y, z)$  este (7.121).

**Definiția 7.7.8.** Pentru fiecare punct  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  al varietății de nivel (7.126), planul de ecuație

$$(7.33) \quad (x - x_1) \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1) \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1, z_1) + (z - z_1) \frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

se numește **plan tangent** în punctul  $M_1$  la varietatea de nivel (7.126).

**Definiția 7.7.9.** Dacă suprafața  $\mathcal{S}$  nu este netedă însă poate fi scrisă ca reuniune a unui număr finit de suprafețe netede, atunci spunem că este suprafață netedă pe porțiuni.

Să considerăm o suprafață netedă ( $\mathcal{S}$ ) reprezentată printr-o pânză de forma (7.97), sau (7.99). Prin punctul  $M$  de vector de poziție  $\mathbf{r}(u, v)$  de pe  $\text{Im } \mathbf{S}$  trece o curbă parametrică  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $v = \text{const.}$ , al cărei vector tangent în  $M$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  și o curbă parametrică  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $u = \text{const.}$ , al cărei vector tangent în  $M$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ . Un vector de mărime infinitesimală și colinar cu vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot du$  pe când un vector colinar cu  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ , de mărime infinitesimală, are forma  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \cdot dv$ . Acești doi vectori de mărime infinitesimală determină un paralelogram de arie infinitesimală  $d\sigma$  situat în planul tangent în  $M$  la suprafața ( $\mathcal{S}$ ). Ne propunem să calculăm expresia lui  $d\sigma$  când suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este reprezentată parametric prin ecuațiile (7.97), sau prin ecuația vectorială (7.99) și când este dată cartezian explicit prin ecuația (7.111). Pentru aceasta, ne folosim de interpretarea mărimii produsului vectorial a doi vectori necoliniari  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  și  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  [7, p. 194]. Mărimea vectorului  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  este aria paralelogramului din  $\mathbb{E}^3$  care are două din laturile alăturate reprezentanții celor doi vectori într-un punct oarecare al spațiului. Din acest rezultat deducem  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \tau$ , unde  $\tau$  este unghiul cuprins între 0 și  $\pi$  dintre cei doi vectori. Aplicând această formulă de calcul pentru  $d\sigma$ , găsim

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 \cdot \sin^2 \tau (du)^2 (dv)^2 = \\ &= \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 - \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| \cdot \cos \tau \right)^2 \right) (du)^2 (dv)^2, \end{aligned}$$

în care am folosit identitatea  $\sin^2 \tau + \cos^2 \tau = 1$ . Dacă ținem cont că produsul scalar a doi vectori din  $\mathbb{R}^3$  este egal cu produsul dintre mărimile vectorilor și cosinusul unghiului dintre ei [7, p. 193] și că pătratul normei (lungimii) unui vector este produsul scalar al acelui vector cu el însuși, vedem că egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv, \quad (7.127)$$

în care s-au făcut notațiile

$$\left\{ \begin{array}{l} E(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)^2 \\ F(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\| \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| \cos \tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \\ = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \\ G(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)^2. \end{array} \right. \quad (7.128)$$

**Observația 7.7.4.** Dată o suprafață netedă de ecuație vectorială (7.99) unde funcția  $\mathbf{S}$  ce o definește are matricea jacobiană  $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}(u, v)$ , constatăm că  $E(u, v)$  este suma pătratelor elementelor primei coloane din  $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}(u, v)$ ,  $F(u, v)$  este suma produselor elementelor corespunzătoare de pe cele două coloane ale lui  $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}(u, v)$ , iar  $G(u, v)$  este suma pătratelor elementelor celei de a doua coloane din  $\mathbf{J}_{\mathbf{S}}(u, v)$ .

**Observația 7.7.5.** Dacă suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este reprezentată printr-o pânză netedă dată cartezian explicit prin

$$(7.111), \text{ ținând cont de (7.113), deducem } J_{\mathbf{r}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}, \text{ unde am folosit notațiile lui Monge}$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

Din Observația 7.7.4 și Observația 7.7.5 rezultă

$$E(x, y) = 1 + p^2, \quad F(x, y) = pq, \quad G(x, y) = 1 + q^2. \quad (7.129)$$

Prin urmare putem spune că  $d\sigma$  pentru suprafața netedă dată cartezian explicit prin ecuația (7.111) este

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (7.130)$$

**Definiția 7.7.10.** Mărima  $d\sigma$  din (7.127), sau (7.130), se numește **element de arie** al suprafeței  $(S)$ .

**Definiția 7.7.11.** Funcțiile reale  $E, F, G$  (vezi (7.128) sau (7.129)) se numesc **coeficienții lui Gauss**, sau **coeficienții formei întâi fundamentale a suprafeței netede**  $(S)$ .

Pentru a vedea semnificația formei întâi fundamentale a unei suprafețe, considerăm un drum (o curbă) oarecare  $(\gamma)$  de pe suprafață care trece prin punctul  $M(x, y, z)$  ale cărui coordonate sunt date de (7.97) unde  $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$  și calculăm elementul de arc  $ds$  al acestei curbe în punctul  $M$ . În primul rând știm că  $ds = \|\mathbf{dr}(u, v)\| = \sqrt{\mathbf{dr}(u, v) \cdot \mathbf{dr}(u, v)}$ . Având în vedere că

$$\mathbf{dr}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) dv,$$

calculând pătratul scalar al acestei diferențiale, considerată vector pentru perechea fixată  $(du, dv)$ , și ținând cont de notațiile (7.128) ajungem la concluzia

$$ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \quad (7.131)$$

Membrul al doilea din (7.131) poate fi interpretat ca o formă pătratică în variabilele  $du$  și  $dv$ . Din cele prezentate mai sus rezultă

$$E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2.$$

Dacă avem în vedere acum expresia analitică a produsului vectorial a doi vectori și condiția (7.102), deducem că această formă pătratică este pozitiv definită.

O altă noțiune, cu aplicabilitate practică, a teoriei suprafețelor este noțiunea de *unghi* a două curbe de pe o suprafață netedă.

**Definiția 7.7.12.** Fie o suprafață netedă  $(S)$ ,  $M_0$  un punct al ei și  $(\gamma_1), (\gamma_2)$  două curbe situate pe suprafața  $(S)$  care trec prin punctul  $M_0$ . Dacă  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$  sunt vectorii tangenți în  $M_0$  la respectiv curbele  $(\gamma_1)$  și  $(\gamma_2)$ , atunci se numește **unghiul în  $M_0$  dintre curbele  $(\gamma_1)$  și  $(\gamma_2)$  trasate pe suprafață**, unghiul dintre vectorii  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$ .

**Exercițiul 7.7.1.** Fie suprafața

$$(S) : \quad \mathbf{r} = (u \cos v + \sin v)\mathbf{i} + (u \sin v - \cos v)\mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se arate că în toate punctele suprafeței există un plan tangent unic determinat, să se scrie ecuația vectorială, ecuațiile parametrice și ecuația carteziană implicită ale planului tangent la suprafață în punctul  $M_0 \in (S)$  corespunzător perechei  $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{3}, 0)$ . Să se determine apoi coeficienții lui Gauss și prima formă fundamentală a suprafeței  $(S)$  într-un punct curent al ei  $M(x, y, z)$ .

**Soluție.** Mai întâi să remarcăm că funcția  $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  care definește suprafața  $(\mathcal{S})$  este diferențiabilă, prin urmare  $(\mathcal{S})$  este o suprafață netedă în  $\mathbb{R}^3$ . Apoi, matricea jacobiană a aplicației  $\mathbf{S}$  este

$$J_{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v + \cos v \\ \sin v & u \cos v + \sin v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pentru funcțiile  $A, B, C$ , se găsește:  $A = -u \cos v - 2 \sin v$ ,  $B = -u \sin v - 2 \cos v$ ,  $C = u$ .

Observăm că  $A^2 + B^2 + C^2 = 2u^2 + 4 > 0$ ,  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , deci în orice punct al suprafeței există un plan tangent unic determinat.

Ecuția vectorială a planului tangent în  $M_0$  este  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\frac{\pi}{3}, 0) + (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \left( J_{\mathbf{r}}(\frac{\pi}{3}, 0) \begin{pmatrix} t - \frac{\pi}{3} \\ s \end{pmatrix} \right)$ .

Efectuând înlocuirile cerute, se găsește  $\mathbf{r} = \frac{\pi}{3} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{3} \mathbf{k} + (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \begin{pmatrix} t - \frac{\pi}{3} + s \\ \frac{\pi}{3} s \\ t - s - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ .

Egalând coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din cei doi membri ai ecuației vectoriale a planului tangent în punctul  $M_0$ , găsim că ecuațiile parametrice ale acestuia sunt

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = \frac{\pi}{3} - 1 \\ z = t - s, \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Ecuția carteziană implicită a planului tangent în  $M_0$  se obține eliminând parametrii  $t$  și  $s$  din ecuațiile parametrice de mai sus. Se găsește

$$\pi x - 6y - \pi z - 6 = 0.$$

Folosind Observația 7.7.4, determinăm coeficienții lui Gauss:

$$E(u, v) = 2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 2 + u^2, \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Atunci, forma întâia fundamentală a suprafeței este  $ds^2 = 2 du^2 + (2 + u^2) dv^2$ . ■

**Exercițiul 7.7.2.** Fie  $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală derivabilă, definită pe un interval deschis care nu conține originea, și suprafața  $(\mathcal{S}) : z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Să se arate că planul tangent în orice punct al suprafeței  $(\mathcal{S})$  trece prin originea reperului din  $\mathbb{E}^3$ .

**Soluție.** Dacă terna  $(X, Y, Z)$  reprezintă coordonatele unui punct oarecare al spațiului  $\mathbb{E}^3$ , atunci ecuația planului tangent în punctul  $M(x, y, x\varphi\left(\frac{y}{x}\right))$  al suprafeței  $(\mathcal{S})$  este

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - (Z - f(x, y)) = 0, \quad (7.132)$$

unde, de data aceasta,  $(X, Y, Z)$  sunt coordonatele unui punct curent al planului (7.132), iar

$$f(x, y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.133)$$

Derivatele parțiale ale funcției  $f$  din (7.133) sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.134)$$

Înlocuind derivatele parțiale din relația (7.134) în ecuația planului tangent (7.132), găsim

$$\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)X + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)Y - Z = 0. \quad (7.135)$$

Deoarece coordonatele originii reperului,  $(0, 0, 0)$ , verifică ecuația (7.135), deducem că planul tangent în orice punct  $M(x, y, z) \in (\mathcal{S})$  trece prin originea reperului . ■



## Capitolul 8

# Aplicații ale calculului diferențial

### 8.1 Forme biliniare pe $\mathbb{R}^n$

**Definiția 8.1.1.** Se numește **formă biliniară** pe  $\mathbb{R}^n$ , funcția reală  $g$  de două variabile vectoriale  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , liniară în fiecare din argumentele sale.

Din această definiție rezultă că unei perechi arbitrare  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  îi corespunde numărul real  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , care are proprietățile:

$$g(\mathbf{u}' + \mathbf{u}'', \mathbf{v}) = g(\mathbf{u}', \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad (8.1)$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}' + \mathbf{v}'') = g(\mathbf{u}, \mathbf{v}') + g(\mathbf{u}, \mathbf{v}''), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in \mathbb{R}^n; \quad (8.2)$$

$$g(\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n; \quad (8.3)$$

$$g(\mathbf{u}, \mu \mathbf{v}) = \mu g(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.4)$$

Egalitățile (8.1) și (8.2) exprimă faptul că  $g$  este funcție aditivă în argumentele sale, în timp ce (8.3) și (8.4) arată că funcția  $g$  este omogenă în ambele variabile.

Prin urmare, o funcție definită pe un spațiu vectorial este liniară în una din variabilele sale vectoriale dacă este aditivă și omogenă în acea variabilă.

**Teorema 8.1.1.** Aplicația  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este formă biliniară pe spațiul Euclidian  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă,  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  și  $\forall \mathbf{u}', \mathbf{u}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}'' \in \mathbb{R}^n$ , are loc egalitatea

$$g(\lambda_1 \mathbf{u}' + \lambda_2 \mathbf{u}'', \mu_1 \mathbf{v}' + \mu_2 \mathbf{v}'') = \lambda_1 \mu_1 g(\mathbf{u}', \mathbf{v}') + \lambda_2 \mu_1 g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}') + \lambda_1 \mu_2 g(\mathbf{u}', \mathbf{v}'') + \lambda_2 \mu_2 g(\mathbf{u}'', \mathbf{v}''). \quad (8.5)$$

*Demonstrație.* Se folosesc Definiția 8.1.1 și egalitățile (8.1) – (8.4).

**q.e.d.**

**Teorema 8.1.2.** Funcția  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este formă biliniară pe  $\mathbb{R}^n$  dacă și numai dacă oricare ar fi scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q \in \mathbb{R}$  și vectorii  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q \in \mathbb{R}^n$  are loc egalitatea

$$g\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^q \mu_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j). \quad (8.6)$$

*Demonstrație.* Se utilizează rezultatele precedente și metoda inducției matematice în raport cu indicii de sumare  $p \in \mathbb{N}^*$  și  $q \in \mathbb{N}^*$ . **q.e.d.**

**Observația 8.1.1.** Forma biliniară  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este cunoscută dacă se cunoaște valoarea acesteia în orice pereche de vectori  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , adică dacă se cunoaște numărul real  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ .

În baza acestei observații, să considerăm doi vectori oarecare  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  care, în baza oarecare  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ , au expresiile analitice

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}U, \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j = \mathbf{e}V, \quad (8.7)$$

unde

$$\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \in (\mathbb{R}^n)^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n,$$

iar  $U$  și  $V$  sunt matricele coloană ale coordonatelor vectorilor  $\mathbf{u}$ , respectiv  $\mathbf{v}$ , în baza  $\mathcal{B}$ .

Folosind (8.7) și (8.6), deducem

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g\left(\sum_{i=1}^n u_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} u_i v_j, \quad (8.8)$$

unde s-au făcut notațiile

$$g_{ij} = g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (8.9)$$

**Observația 8.1.2.** Valoarea formei biliniare  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  în perechea de vectori  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  se poate scrie în una din formele:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = U^T G V, \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = V^T G^T U, \quad (8.10)$$

unde  $G$  este o matrice pătratică de ordinul  $n$  cu elemente numerele reale din (8.9), iar  $U^T$ ,  $V^T$ ,  $G^T$  sunt transpusele matricelor  $U$ ,  $V$ ,  $G$ , respectiv.

**Definiția 8.1.2.** Matricea pătratică  $G$  din (8.10), ale cărei elemente sunt date de (8.9), se numește **matricea formei biliniare  $g$  în baza  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$** .

**Observația 8.1.3.** Deoarece spațiul liniar  $\mathbb{R}^n$  are o infinitate de baze, rezultă că o formă biliniară pe  $\mathbb{R}^n$  are o infinitate de matrice.

**Teorema 8.1.3.** (Legea de schimbare a matricei unei forme biliniare la o schimbare a bazei) Dacă  $G = \|g_{ij}\|_{n \times n}$  și  $G' = \|g'_{ij}\|_{n \times n}$  sunt matricele formei biliniare  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  în respectiv bazele  $\mathcal{B}$  și  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  ale spațiului vectorial  $\mathbb{R}^n$ , iar  $C$  este matricea pătratică de ordinul  $n$ , de trecere de la baza  $\mathcal{B}$  la baza  $\mathcal{B}'$ , atunci

$$G' = C^T G C. \quad (8.11)$$



*Demonstrație.* Legătura între bazele  $\mathcal{B}$  și  $\mathcal{B}'$  este dată de relația

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e}C, \quad \mathbf{e}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\} \in (\mathbb{R}^n)^n. \quad (8.12)$$

Expresia analitică a formei biliniare  $g$  în baza  $\mathcal{B}'$  este

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g'_{ij} u'_i v'_j = U'^T G' V', \quad (8.13)$$

unde

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}' U', \quad \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v'_j \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}' V' \quad (8.14)$$

sunt expresiile analitice ale vectorilor  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  în baza  $\mathcal{B}'$ .

Din (8.7), (8.12) și (8.14) rezultă că legătura dintre  $U', V'$ , pe de o parte, și  $U, V$  este

$$U' = C^{-1}U, \quad V' = C^{-1}V, \quad (8.15)$$

unde  $C^{-1}$  este inversa matricei de trecere  $C$ .

Introducerea în (8.13) a expresiilor (8.15) ale lui  $U'$  și  $V'$  conduce la

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = U^T \left( (C^{-1})^T G' C^{-1} \right) V. \quad (8.16)$$

Din (8.10), (8.16) și unicitatea matricei unei forme biliniare într-o bază, rezultă

$$G = (C^{-1})^T G' C^{-1}, \quad (8.17)$$

din care deducem că legea de schimbare a matricei unei forme biliniare  $g$  la o schimbare a bazei de matrice  $C$  este dată de relația (8.11).

**q.e.d.**

**Observația 8.1.4.** Matricele unei forme biliniare  $g$  pe  $\mathbb{R}^n$  în baze diferite sunt **echivalente**, în sensul că au același rang.

**Definiția 8.1.3.** Se numește **rangul formei biliniare**  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  rangul matricei sale într-o bază a lui  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 8.1.4.** Forma biliniară  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **degenerată** dacă rangul ei este  $n$  și **nede-generată** dacă  $r = \text{rang } g = \text{rang } G < n$ .

Rangul unei forme biliniare  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fiind invariant la schimbarea bazei în  $\mathbb{R}^n$ , rezultă că există o bază  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\} \subset \mathbb{R}^n$  în care matricea sa  $G'$  are forma diagonală

$$G' = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0), \quad (8.18)$$

unde  $\lambda_i \neq 0$ . În această bază

$$g(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \begin{cases} \lambda_j, & \text{pentru } i = j \leq r, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (8.19)$$

Din (8.13), (8.18) și (8.19) rezultă că expresia analitică a formei biliniare  $g$  în baza  $\mathcal{B}'$  este

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda_1 u'_1 v'_1 + \lambda_2 u'_2 v'_2 + \dots + \lambda_r u'_r v'_r, \quad (8.20)$$

unde vectorii arbitrari  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  au expresiile analitice (8.14) în baza  $\mathcal{B}'$ .

**Definiția 8.1.5.** *Expresia (8.20) a formei biliniare  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **expresie canonică** a lui  $g$ , iar baza  $\mathcal{B}'$  în care are loc această expresie canonică se numește **bază canonică**.*

**Definiția 8.1.6.** *Forma biliniară  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **simetrică** dacă*

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.21)$$

**Observația 8.1.5.** *Din (8.9) și (8.21) rezultă că matricea unei forme biliniare simetrice pe  $\mathbb{R}^n$  în orice bază din  $\mathbb{R}^n$  este o matrice simetrică.*

## 8.2 Forme pătratice pe $\mathbb{R}^n$

**Definiția 8.2.1.** *Aplicația  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care există o forma biliniară simetrică  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea*

$$\varphi(\mathbf{h}) = g(\mathbf{h}, \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} = \mathbf{e}H \in \mathbb{R}^n, \quad (8.22)$$

*se numește **formă pătratică** pe  $\mathbb{R}^n$ .*

Așadar, fiecărei forme biliniare simetrice pe  $\mathbb{R}^n$  îi corespunde o formă pătratică  $\varphi$  pe  $\mathbb{R}^n$ , numită *forma pătratică asociată* lui  $g$ .

Reciproc, forma biliniară simetrică  $g$  este unic determinată de forma pătratică  $\varphi$  pe  $\mathbb{R}^n$  prin

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2} \left( \varphi(\mathbf{h} + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{s}) \right), \quad \forall \mathbf{h}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.23)$$

Forma biliniară simetrică  $g$  definită de (8.23) se numește *forma polară* a formei pătratice  $\varphi$  pe  $\mathbb{R}^n$ .

Expresia analitică a formei pătratice  $h$  pe  $\mathbb{R}^n$  asociată formei biliniare simetrice  $g$  în baza

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

se obține din (8.10) punând  $U = V = H$ , deci

$$\varphi(\mathbf{h}) = H^T G H. \quad (8.24)$$

Matricea  $G$  din (8.24) este simetrică și se numește *matricea formei pătratice*  $\varphi$  în baza  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ .

Reciproc, orice funcție  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care există o bază  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  în care valorile  $\varphi(\mathbf{h})$ , cu  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ , se exprimă prin relația (8.24), unde  $H$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{h}$  în baza  $\mathcal{B}$ , este o formă pătratică pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Observația 8.2.1.** Forma polară a formei pătratice  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dată în baza  $\mathcal{B}$  prin relația (8.23), este

$$g(\mathbf{h}, \mathbf{s}) = H^T G S = S^T G H,$$

unde

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}H, \quad \mathbf{s} = \mathbf{e}S$$

sunt expresiile analitice ale vectorilor  $\mathbf{h}$  și  $\mathbf{s}$  în baza  $\mathcal{B}$ .

**Definiția 8.2.2.** Se numește **rangul formei pătratice**  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , rangul formei biliniare simetrice polare corespunzătoare.

**Definiția 8.2.3.** Rangul formei pătratice  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este rangul matricei sale în orice bază a spațiului vectorial  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 8.2.4.** Forma pătratică  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **nedegenerată** dacă  $r = \text{rang } \varphi = n$  și **degenerată**, dacă  $r < n$ .

**Definiția 8.2.5.** Dacă  $G$  este matricea formei pătratice  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  în baza  $\mathcal{B}$ , atunci numărul real  $D(G)$ , unde  $D(G)$  este determinantul matricei  $G$ , se numește **discriminantul** formei pătratice  $\varphi$ .

**Teorema 8.2.1.** Dacă  $C$  este matricea de trecere de la baza  $\mathcal{B}$  la baza  $\mathcal{B}'$ , iar  $G$  și  $G'$  sunt matricele formei pătratice  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  în bazele  $\mathcal{B}$  și respectiv  $\mathcal{B}'$ , atunci discriminantul lui  $\varphi$  se schimbă după legea

$$D(G') = (D(C))^2 D(G). \quad (8.25)$$

*Demonstrație.* Dacă două matrice sunt egale, determinanții acestora sunt egali, prin urmare, din (8.11) și din faptul că determinantul produsului a două și mai multe matrice este egal cu produsul determinanților acelor matrice, se obține

$$D(G') = D(C^T) D(G) D(C). \quad (8.26)$$

Dar,

$$D(C^T) = D(C). \quad (8.27)$$

Din (8.26) și (8.27) rezultă (8.25).

**q.e.d.**

**Observația 8.2.2.** Forma pătratică  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  este nedegenerată dacă discriminantul ei este nenul.

**Definiția 8.2.6.** Se numește **expresie canonică** a formei pătratice

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (8.28)$$

expresia analitică a sa în baza din  $\mathbb{R}^n$  în care forma biliniară polară corespunzătoare are expresie canonică.

**Definiția 8.2.7.** Baza din  $\mathbb{R}^n$  în care (8.28) are expresie canonică se numește **bază canonică** a lui  $\varphi$ .

Din (8.20) și (8.22), rezultă că expresia canonică a formei pătratice (8.28) este

$$\varphi(\mathbf{h}) = \lambda_1(h'_1)^2 + \lambda_2(h'_2)^2 + \dots + \lambda_r(h'_r)^2, \quad (8.29)$$

unde  $h'_1, h'_2, \dots, h'_n$  sunt coordonatele vectorului  $\mathbf{h}$  în baza canonică

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

**Definiția 8.2.8.** Forma pătratică  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **pozitiv (negativ) definită** dacă  $\varphi(\mathbf{h}) > 0$  (respectiv  $\varphi(\mathbf{h}) < 0$ ), oricare ar fi vectorul  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

**Definiția 8.2.9.** Forma pătratică  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **pozitiv (negativ) semidefinită** dacă  $\varphi(\mathbf{h}) \geq 0$  (respectiv  $\varphi(\mathbf{h}) \leq 0$ ), oricare ar fi vectorul  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  dar, în ambele cazuri, există  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  cu proprietatea  $\varphi(\mathbf{h}) = 0$ .

**Observația 8.2.3.** Formele pătratice pozitiv (negativ) definite sunt nedegenerate.

**Definiția 8.2.10.** Forma pătratică  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **nedefinită** dacă există  $\mathbf{h}', \mathbf{h}'' \in \mathbb{R}^n$  astfel încât  $\varphi(\mathbf{h}') < 0$  și  $\varphi(\mathbf{h}'') > 0$ .

**Teorema 8.2.2.** Fie  $\|g_{ij}\|_{n \times n}$  o matrice pătratică simetrică cu elemente numere reale și forma pătratică pozitiv definită  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} h_i h_j,$$

unde  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ . Atunci, există constanta pozitivă  $m$  astfel încât

$$\varphi(\mathbf{h}) \geq m \|\mathbf{h}\|^2, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.30)$$

*Demonstrație.* Fie  $S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| = 1\}$ , sfera de rază 1 cu centrul în originea  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ .

Deoarece  $S$  este mulțime închisă și mărginită în  $\mathbb{R}^n$ , este o mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$ .

Funcția  $\varphi(\mathbf{y})$  fiind un polinom omogen de gradul doi în  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , coordonatele lui  $\mathbf{y}$  în baza canonică, este mărginită pe  $S$ .

Dacă

$$m = \inf\{\varphi(\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in S\}$$

este cea mai mică valoare a funcției  $\varphi$  pe sfera  $S$ , atunci există  $\xi \in S$  astfel încât  $\varphi(\xi) = m$ .

Deoarece  $\xi \in S$ , rezultă  $\xi \neq \mathbf{0}$  și, întrucât funcția  $\varphi$  este pozitiv definită, avem  $\varphi(\xi) > 0$ .

Prin urmare,  $m > 0$ .

Cum  $m$  este cea mai mică valoare pe care o poate lua  $\varphi$  pe  $S$ , rezultă

$$\varphi(\mathbf{y}) \geq m, \quad \forall \mathbf{y} \in S. \quad (8.31)$$

Fie acum un vector  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ , arbitrar.

Dacă  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ , inegalitatea (8.30) este satisfăcută ca egalitate.

Dacă  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ , atunci  $\frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h} \in S$  și, după (8.31), rezultă

$$\varphi\left(\frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h}\right) \geq m, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (8.32)$$

Deoarece  $\varphi$  este formă pătratică, avem

$$\varphi\left(\frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \mathbf{h}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|^2} \varphi(\mathbf{h}). \quad (8.33)$$

Din (8.32) și (8.33), rezultă (8.30).

**q.e.d.**

### 8.3 Extreme locale ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

Fie  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in \mathcal{F}(A)$ , o funcție reală de variabila  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$  un punct fixat din mulțimea  $A$ .

- Definiția 8.3.1.** (i)  $\mathbf{x}_0 \in A$  se numește **punct de minim (respectiv maxim) local** pentru funcția  $f$ , dacă există vecinătatea  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  astfel încât  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$  (respectiv  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ ),  $\forall \mathbf{x} \in V \cap A$ ;
- (ii)  $\mathbf{x}_0 \in A$  se numește **punct de minim (respectiv maxim) global** al funcției  $f$ , dacă  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$  (respectiv  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ ),  $\forall \mathbf{x} \in A$ ;
- (iii)  $\mathbf{x}_0 \in A$  se numește **punct de minim (respectiv maxim) local strict** pentru funcția  $f$ , dacă există  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  astfel încât  $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$  (respectiv  $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ ),  $\forall \mathbf{x} \in V \cap A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- (iv)  $\mathbf{x}_0 \in A$  se numește **punct de maxim (respectiv minim) global strict** al funcției  $f$ , dacă  $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$  (respectiv  $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ ),  $\forall \mathbf{x} \in A \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ ;
- (v) punctele de minim și de maxim ale funcției  $f$  se numesc **puncte de extrem** ale funcției  $f$ .

**Observația 8.3.1.** Un punct  $\mathbf{x}_0 \in A$  este punct de extrem local pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(A)$  dacă există o vecinătate

$V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  pentru care creșterea funcției  $f$  corespunzătoare creșterii  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  a argumentului

$$\Delta f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

păstrează semn constant pe  $V \cap A$ .

În cele ce urmează vom considera că  $A = D$ , unde  $D$  este o submulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ .

**Definiția 8.3.2.** Un punct  $\mathbf{x}_0 \in D$  se numește **punct critic**, sau **punct staționar** pentru funcția  $f$  dacă  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$  și  $df(\mathbf{x}_0) = 0$ .

**Teorema 8.3.1. (Teorema lui Fermat<sup>1</sup>)** Dacă  $\mathbf{x}_0 \in D$  este punct de extrem local al funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$ , atunci

$$df(\mathbf{x}_0) = 0. \quad (8.34)$$

*Demonstrație.* Fixăm arbitrar un versor  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  și alegem  $r > 0$  astfel încât  $\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  să aibă semn constant pe bila  $B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$ . Atunci, funcția reală de variabilă reală  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{s})$  este derivabilă și are un extrem local în  $t = 0$ ; conform teoremei lui Fermat pentru o funcție reală de variabilă reală [19, p. 278] rezultă că  $g'(0) = 0$ , adică  $\frac{df}{ds}(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Luând  $\mathbf{s} = \mathbf{e}_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , deducem  $\frac{df}{de_i}(\mathbf{x}_0) = 0$ , ceea ce înseamnă

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i \in \overline{1, n},$$

din care rezultă  $df(\mathbf{x}_0) = 0$ .

q.e.d.

**Corolarul 8.3.1.** Dacă  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $D \in \mathbb{R}^n$ , atunci punctele de extrem local ale lui  $f$  sunt printre soluțiile sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (8.35)$$

situate în  $D$ .

**Observația 8.3.2.** Este posibil ca  $\mathbf{x}_0 \in D$  să fie punct de extrem pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(D)$  fără ca  $f$  să fie diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0$ .

<sup>1</sup>Fermat, Pierre (1601–1665), renumit matematician francez.

**Exemplul 8.3.1.** Funcția reală de variabilă vectorială

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \quad f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

are  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  punct de minim și  $f$  nu este diferențiabilă în origine.

Într-adevăr, din axiomele normei observăm că  $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{0})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , fapt care arată că  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  este punct de minim global strict pentru funcția dată. Apoi, dacă  $f$  ar fi diferențiabilă în origine ar însemna să existe funcția reală  $\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  cu proprietatea  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(\mathbf{x}) = 0$ , astfel încât să avem

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + df(\mathbf{0}; \mathbf{x} - \mathbf{0}) + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Aceasta ar atrage după sine că funcția  $f$  este derivabilă parțial în origine în raport cu toate variabilele sale ceea ce nu este adevărat pentru că, după cum constatăm cu ușurință, nu există limita în  $t = 0$  a raportului incrementar  $\frac{f(\mathbf{0} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{0})}{t}$ , deoarece nu există  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t}$ . ■

**Exercițiul 8.3.1.** Fie Să se determine punctele critice ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4yz + 20x.$$

**Soluție.** Din faptul că funcția  $f$  este un polinom rezultă că este diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^3$ . Punctele critice ale funcției  $f$  au coordonatele  $(x, y, z)$ , soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2y + 20 = 0, \\ -2x + 2y - 4z = 0, \\ -4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are o singură soluție  $(x_0, y_0, z_0)$ , unde  $x_0 = -\frac{15}{2}$ ,  $y_0 = \frac{5}{2}$ ,  $z_0 = 5$ . Deci singurul punct critic este  $M_0\left(-\frac{15}{2}, \frac{5}{2}, 5\right)$  care este posibil să fie punct de extrem. ■

**Exemplul 8.3.2.** Pentru funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , de clasă  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

are o singură soluție  $(x_0, y_0)$ , unde  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , iar punctul  $M_0(0, 0)$ , deci originea reperului, nu este punct de extrem.

Într-adevăr, valoarea funcției  $f$  în origine este zero și în orice vecinătate a originii există puncte de forma  $(h, 0)$ ,  $h \neq 0$  și puncte de forma  $(0, k)$ ,  $k \neq 0$ , în care funcția  $f$  are valori de semne contrarii căci  $f(h, 0) = h^2 > 0$ , iar  $f(0, k) = -k^2 < 0$ , ceea ce arată că în originea reperului creșterea lui  $f$  nu poate păstra semn constant pentru nici o creștere a variabilelor independente. Deci, punctul staționar  $M_0$  nu este punct de extrem. ■

**Observația 8.3.3.** Exemplul 8.3.1 arată că nu orice punct  $\mathbf{x}_0 \in D$ , soluție a sistemului (8.35), este punct de extrem al funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$ , adică nu orice punct staționar este punct de extrem pentru funcția reală  $f$ .

**Definiția 8.3.3.** Un punct staționar al funcției reale  $f \in \mathcal{F}(D)$  care nu este punct de extrem se numește **punct șa**.

Corolarul 8.3.1 arată că anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi reprezintă o condiție necesară de extrem. În cele ce urmează vom da condiții suficiente de extrem.

**Teorema 8.3.2. (Condiție suficientă de extrem)** Fie  $f$  o funcție de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $D$  din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{x}_0$  un punct staționar al funcției  $f$ .

Dacă forma pătratică

$$\varphi(\mathbf{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j, \quad (8.36)$$

unde  $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}H \in \mathbb{R}^n$ , este:

- 1° pozitiv (negativ) definită, atunci  $\mathbf{x}_0$  este punct de minim (maxim) local strict;
- 3° nedefinită, atunci  $\mathbf{x}_0$  nu este punct de extrem local;
- 4° pozitiv semidefinită, atunci  $\mathbf{x}_0$  este punct de minim local;
- 5° negativ semidefinită, atunci  $\mathbf{x}_0$  este punct de maxim local.

*Demonstrație.* Presupunem că forma pătratică (8.36) este pozitiv definită. Atunci luând  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  și aplicând Teorema 8.3.1, avem:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2. \quad (8.37)$$

Pe de altă parte, deoarece  $f \in C^2(D)$ , putem să aplicăm formula lui Taylor cu rest de ordin unu. Prin urmare, pentru orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r)$  există un punct  $\xi_1 \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$  așa fel încât

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{1!} df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\xi_1; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (8.38)$$

Deoarece  $\mathbf{x}_0$  este un punct critic al funcției  $f$ , avem  $df(\mathbf{x}_0) = 0$ , ceea ce implică  $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ . Apoi,  $f$  fiind de clasă  $C^2$  pe  $D$ , derivatele parțiale de ordinul al doilea ale lui  $f$  sunt continue în  $\mathbf{x}_0$  și deci

$$d^2 f(\xi_1; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \theta(\mathbf{x}) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2, \quad (8.39)$$

unde

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \theta(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.40)$$

Folosind (8.39) în (8.38) și având în vedere (8.37) și Teorema 8.3.1, obținem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{2} (m + \theta(\mathbf{x})) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2. \quad (8.41)$$

Din  $m > 0$  și (8.40), rezultă că se poate găsi  $r > 0$  astfel încât

$$m + \theta(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \setminus \{\mathbf{x}_0\}. \quad (8.42)$$



Atunci, din (8.41) și (8.42), obținem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \setminus \{\mathbf{x}_0\},$$

ceea ce arată că  $\mathbf{x}_0$  este un punct de minim local strict pentru funcția  $f$ .

Cazul punctului de maxim se tratează similar.

Dacă forma pătratică (8.36) este nedefinită, atunci există vectorii nenuli  $\mathbf{h}', \mathbf{h}'' \in \mathbb{R}^n$  astfel încât

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}') = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}') - f(\mathbf{x}_0) > 0,$$

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}'') = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}'') - f(\mathbf{x}_0) < 0,$$

deci creșterea lui  $f$  în  $\mathbf{x}_0$  nu păstrează același semn, ceea ce arată că  $\mathbf{x}_0$  nu este punct de extrem.

Dacă forma pătratică (8.36) este pozitiv (respectiv negativ) semidefinită, aceasta însemnând că pot exista  $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$  încât  $d^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{h}) = 0$ , punctul  $\mathbf{x}_0$  este tot punct de extrem dar nu mai este strict. **q.e.d.**

**Definiția 8.3.4.** Fie  $A = \|a_{ij}\|_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , o matrice pătratică de ordinul  $n$  cu elemente numere reale și  $I_n = \|\delta_{ij}\|_{n \times n} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$  matricea unitate.

(i) Se numește **polinom caracteristic** al matricei  $A$ , polinomul

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det \|a_{ij} - \lambda \delta_{ij}\|; \quad (8.43)$$

(ii) Ecuația  $P(\lambda) = 0$  se numește **ecuația caracteristică** a matricei  $A$ ;

(iii) Rădăcinile ecuației caracteristice a matricei  $A$  se numesc **valori proprii** ale matricei  $A$ .

Dăm fără demonstrație următoarele rezultate.

**Teorema 8.3.3.** Toate valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrice sunt numere reale.

**Teorema 8.3.4.** Dacă  $H_f(\mathbf{x}_0) = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right\|_{n \times n}$  are toate valorile proprii pozitive (respectiv negative,) forma pătratică (8.36) este pozitiv definită (respectiv negativ definită).

**Exercițiul 8.3.2.** Să se determine extremele funcției

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 y + yz + 32x - z^2.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  au expresiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + 32, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y - 2z.$$

Coordonatele punctelor staționare sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} xy + 16 = 0, \\ x^2 + z = 0, \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -8, \\ z_0 = -4. \end{cases}$$

Deci, singurul punct staționar este  $M_0(2, -8, -4)$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$ , în punctul curent  $M(x, y, z)$ , sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= 2x; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= 1; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= -2. \end{aligned}$$

Hessiana asociată funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0 = (2, -8, -4)$  este

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Polinomul caracteristic al matricei  $H_f(\mathbf{x}_0)$  este

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(H_f(\mathbf{x}_0) - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -16 - \lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\lambda^3 - 18\lambda^2 - 15\lambda + 48. \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică  $P(\lambda) = 0$  nu poate avea toate rădăcinile nenegative deoarece

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -18 < 0.$$

Prin urmare,  $\mathbf{x}_0$  nu este punct de extrem; este punct de tip șa. ■

Pentru forme pătratice pe  $\mathbb{R}^n$  se cunosc și alte condiții necesare și suficiente pentru ca acestea să fie pozitiv (negativ) definite. Aceste condiții devin condiții necesare și suficiente pentru extremele locale stricte.

**Teorema 8.3.5. (Criteriul lui Sylvester)** Forma pătratică (8.36) este:

- pozitiv definită dacă și numai dacă minorii principali ai matricei hessiene  $H_f(\mathbf{x}_0)$  sunt pozitivi, adică:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= f_{,11}(\mathbf{x}_0) > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) & f_{,13}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) & f_{,23}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,31}(\mathbf{x}_0) & f_{,32}(\mathbf{x}_0) & f_{,33}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \det H_f(\mathbf{x}_0) > 0; \end{aligned} \tag{8.44}$$

- negativ definită dacă și numai dacă minorii principali (8.44) sunt de forma:

$$\begin{vmatrix} f_{,11}(\mathbf{x}_0) & f_{,12}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{,1k}(\mathbf{x}_0) \\ f_{,21}(\mathbf{x}_0) & f_{,22}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{,2k}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,k1}(\mathbf{x}_0) & f_{,k2}(\mathbf{x}_0) & \dots & f_{,kk}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = (-1)^k \lambda_k^2, \quad k \in \overline{1, n}; \quad (8.45)$$

- nedefinită dacă și numai dacă nu are loc (8.44) dar  $\exists k \in \overline{1, n-1}$  astfel încât  $\Delta_k \cdot \Delta_{k+1} > 0$ .

**Exercițiul 8.3.3.** Să se studieze natura punctelor staționare ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y + 1.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției date sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + y - 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y + x + 1; \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z.$$

Sistemul care dă punctele staționare ale funcției  $f$  este :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x + y - 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0, \\ 2z = 0, \end{cases}$$

și are soluția  $(1, -1, 0)$ .

Hessiana funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0 = (1, -1, 0)$  este

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Minorii principali sunt:  $\Delta_1 = 4$ ,  $\Delta_2 = 3$ ,  $\Delta_3 = 6$ , deci toți pozitivi și, în baza criteriului lui Sylvester,  $d^2 f(\mathbf{x}_0)$  este pozitiv definită, ceea ce arată că  $M_0 = (1, -1, 0)$  este un punct de minim strict. Se constată că  $M_0$  este punct de minim global strict deoarece  $f(x, y, z) > f(1, -1, 0) = 0$ ,  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(1, -1, 0)\}$ . ■

**Exercițiul 8.3.4.** Să se găsească localizarea și natura punctelor staționare ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 6xy.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale ale lui  $f$  sunt

$$\begin{cases} f_{,1}(x, y, z) = 3x^2 - 3yz + 6y, \\ f_{,2}(x, y, z) = 3y^2 - 3xz + 6x, \\ f_{,3}(x, y, z) = 3z^2 - 3xy. \end{cases}$$

Punctele staționare se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 - yz + 2y = 0, \\ y^2 - xz + 2x = 0, \\ z^2 - xy = 0. \end{cases}$$

Soluțiile acestui sistem sunt  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$  și  $\mathbf{x}_1 = (-1, -1, 1)$ . Calculând  $H_f(\mathbf{0})$  găsim

$$H_f(\mathbf{0}) = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

adică  $d^2f(\mathbf{0}) = 12dxdy$ , care se vede imediat că este nedefinită (pentru variații ale lui  $x$  și  $y$  încât  $dx \cdot dy > 0$  rezultă  $d^2f(\mathbf{0}) > 0$  pe când dacă  $dx \cdot dy < 0$  avem  $d^2f(\mathbf{0}) < 0$ ), și drept urmare punctul  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$  nu este punct de extrem; este punct șa.

Hessiana funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_1$  este

$$H_f(\mathbf{x}_1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei hessiene sunt:

$$\Delta_1 = -6 < 0; \Delta_2 = 27 > 0; \Delta_3 = 324 > 0.$$

Se vede că nu ne încadrăm în (8.44) și  $\Delta_2 \cdot \Delta_3 > 0$ . Ca atare forma pătratică  $d^2f(\mathbf{x}_1)$  este nedefinită și deci  $\mathbf{x}_1$  este tot punct șa. ■

Prezentăm acum cazul  $n = 2$ , deci al unei funcții reale  $f$ , de două variabile reale  $x$  și  $y$ , de clasă  $C^2$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Se determină mai întâi punctele staționare ale funcției  $f \in \mathcal{F}(D)$  rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8.46)$$

Fie  $(x_0, y_0)$  o soluție a sistemului (8.46).

Condițiile lui Sylvester (8.44) sunt atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 > 0, \quad (8.47)$$

în cazul minimului strict, iar cele din cazul maximului (8.45) sunt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 > 0. \quad (8.48)$$

Din (8.47) și (8.48) rezultă că punctul staționar  $(x_0, y_0)$  este punct de extrem strict dacă și numai dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 > 0. \quad (8.49)$$

Dacă în plus avem  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ , sau  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0$ , punctul staționar  $(x_0, y_0)$  este punct de minim strict, iar dacă are loc (8.49) și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0,$$

punctul  $(x_0, y_0)$  este punct de maxim strict.

Dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 < 0$$

rezultă că  $(x_0, y_0)$  nu este punct de extrem.

Dacă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 = 0,$$

atunci natura punctului staționar  $(x_0, y_0)$  se decide după investigații suplimentare care constau fie din evaluarea prin metode elementare a semnelor diferenței  $f(x, y) - f(x_0, y_0)$  într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$ , fie prin folosirea formulei lui Taylor cu rest de cel puțin ordin doi într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$ .

**Exercițiul 8.3.5.** Să se determine punctele staționare și natura acestora pentru funcția reală de două variabile reale

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + 2xy - y^2 - 3y.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinele întâi și doi ale funcției  $f$  sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2x - 2y - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x + 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2. \end{cases}$$

Sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0; \end{cases} \quad \text{este} \quad \begin{cases} xy + y = 0, \\ x^2 + 2x - 2y - 3 = 0, \end{cases}$$

și are soluțiile:  $(1, 0)$ ,  $(-3, 0)$ ,  $(-1, -2)$ . Apoi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) \right)^2 = 0(-2) - 16 < 0,$$

ceea ce arată că  $(1, 0)$  este punct ș.a;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3, 0) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-3, 0) \right)^2 = -16 < 0$$

și deci și punctul  $(-3, 0)$  este punct ș.a pentru funcția  $f$ ;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -2) \right)^2 = (-4)(-2) - 0 > 0$$

și pentru că  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -2) < 0$  (ca și  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -2) < 0$ ) tragem concluzia că  $(-1, -2)$  este punct de maxim local. ■

**Observația 8.3.4.** Fie  $K \subset \mathbb{R}^n$  o mulțime compactă și  $f \in C^1(\overset{\circ}{K})$ . Extremele globale ale funcției  $f$  pe mulțimea  $K$  sunt atinse în puncte din  $K$ .

Punctele de extrem situate în  $\overset{\circ}{K}$  se determină folosind teoria de mai sus.

Dacă punctele de extrem nu aparțin lui  $\overset{\circ}{K}$ , atunci ele se găsesc pe  $K \setminus \overset{\circ}{K}$  și pentru a le determina sunt necesare alte metode. Punctele de extrem ale funcției  $f$  care se află în mulțimea  $K \setminus \overset{\circ}{K}$  se numesc **puncte de extrem condiționat** și determinarea lor se face utilizând **metoda multiplicatorilor** a lui Lagrange care urmează să fie prezentată.

## 8.4 Funcții definite implicit

Fie  $F_1, F_2, \dots, F_m$  funcții reale continue date, definite pe o submulțime deschisă  $D_0$  a spațiului Euclidian  $\mathbb{R}^{n+m}$ ,

$$j = (j_1, j_1, \dots, j_m) \quad (8.50)$$

un șir finit, dat, de numere întregi pozitive, cu proprietățile

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n + m$$

și

$$i = (i_1, i_1, \dots, i_n) \quad (8.51)$$

un șir finit de numere întregi pozitive care nu apar în (8.50) și pentru care

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n + m.$$

Ne interesează în ce condiții putem rezolva sistemul de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) = 0, \end{cases} \quad (8.52)$$

în raport cu  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$ , deci când există funcțiile continue  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , definite pe o mulțime deschisă din  $D \subset \mathbb{R}^n$ , astfel încât dacă în (8.52) efectuăm înlocuirea

$$\begin{cases} x_{j_1} = f_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \\ x_{j_2} = f_2(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \\ \vdots \\ x_{j_m} = f_m(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \end{cases} \quad (8.53)$$

membrii întâi ai ecuațiilor sistemului rezultat să devină nuli în orice punct  $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \in D$ .

Pentru a simplifica notația vom interpreta spațiul  $\mathbb{R}^{n+m}$  ca produsul  $(i, j)$  a spațiilor  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$ , ceea ce înseamnă că orice punct

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} \quad (8.54)$$

îl vom nota prin

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8.55)$$

unde

$$\mathbf{x} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \quad \mathbf{y} = (y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_m}). \quad (8.56)$$

În consecință, valoarea unei funcții vectoriale  $\mathbf{F}$  într-un punct de forma (8.55) se notează prin  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Simbolul  $\mathbf{x}$  semnifică fie un punct din  $\mathbb{E}^n$ , fie un vector din  $\mathbb{R}^n$ , iar  $\mathbf{y}$  desemnează un punct din  $\mathbb{E}^m$ , sau un vector din  $\mathbb{R}^m$ , coordonatele acestora fiind date de (8.56).

Notând

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m), \quad (8.57)$$

constatăm că sistemul (8.52) poate fi scris în forma ecuației vectoriale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (8.58)$$

iar problema principală a acestui paragraf poate fi formulată după cum urmează.

Fie  $\mathbf{F}$  din (8.57) o funcție vectorială, continuă, definită pe mulțimea deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$  cu valori vectori din  $\mathbb{R}^m$ , sau puncte din  $\mathbb{E}^m$ . Ne punem problema în ce condiții există transformarea continuă

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m) \quad (8.59)$$

astfel încât

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad (8.60)$$

unde  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ .

Există funcții  $\mathbf{F}$  pentru care ecuația (8.58) nu are loc pentru nici un punct  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_0$ . Este suficient să considerăm funcția  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D_0, \mathbb{R}^m)$  a căror funcții coordonate  $F_1, F_2, \dots, F_m$  din (8.57) să fie diferite de zero oriunde în  $D_0$  și atunci nu există nici o soluție  $\mathbf{f}$  a ecuației (8.58). De aici deducem necesitatea existenței a cel puțin unui punct  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_0$  astfel încât  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ .

Această condiție, împreună cu alte condiții simple de diferențiabilitate impuse funcției  $\mathbf{F}$ , pot fi suficiente pentru existența unei transformări continue  $\mathbf{f}$ , de forma (8.59), definită pe o vecinătate  $D$  a lui  $\mathbf{x}_0$ , astfel încât să aibă loc (8.60), iar  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$ .

În acest sens, vezi Teorema 8.4.3 care urmează.

**Definiția 8.4.1.** Dacă  $\mathbf{f}$  din (8.59) este unica funcție ce satisface (8.58), atunci se spune că ecuația  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$  definește implicit pe  $\mathbf{y}$  ca funcție de  $\mathbf{x}$ .

Vom examina mai întâi cazul particular în care  $\mathbf{F}$  din (8.57) este de forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8.61)$$

unde  $\mathbf{G}$  este o funcție continuă definită pe mulțimea deschisă  $D_0$ , cu valori în  $\mathbb{R}^m$ .

**Definiția 8.4.2.** Spunem că funcția  $\mathbf{G} \in \mathcal{F}(D_0, \mathbb{R}^m)$  satisface **condiția Lipschitz**, cu constanta  $M \geq 0$ , în raport cu coordonatele  $j$ , adică în raport cu variabila  $\mathbf{y}$ , dacă oricare ar fi perechile  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \in D_0$ ,  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in D_0$ , avem

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq M \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|. \quad (8.62)$$

În ambii membri ai lui (8.62) norma din  $\mathbb{R}^m$  se consideră a fi cea euclidiană, adică cea indusă de produsul scalar standard (canonic) pe  $\mathbb{R}^m$ .

În teorema care urmează vom considera că  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este un punct fixat din  $D_0$ .

**Teorema 8.4.1.** Fie transformarea continuă  $\mathbf{G} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^m)$ , unde

$$A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Dacă  $\mathbf{G} : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisface condiția Lipschitz cu constanta  $M < 1$  în raport cu coordonatele  $j$ , iar numărul real  $K = \sup\{\|G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\| : \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\}$  satisface inegalitatea

$$\frac{K}{1-M} < \varepsilon, \quad (8.63)$$

atunci există o transformare continuă  $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  astfel încât

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta).$$

Mai mult, pentru orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ , punctul  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  este singurul punct din  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  astfel încât

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8.64)$$

și deci  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  este funcția definită implicit de ecuația

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

*Demonstrație.* Mulțimea  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$  este bila deschisă de rază  $\delta > 0$  și centrul în  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , iar  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^m$  este bila deschisă cu centrul în  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$  și rază  $\varepsilon > 0$ . Ambele bile sunt mulțimi deschise în respectiv spațiile normate (deci și metrice)  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  și respectiv  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ . Normele în aceste spații, notate cu același simbol, pot fi diferite.

Condiția (8.64) exprimă faptul că  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  este punct fix pentru aplicația  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Având în vedere că  $\mathbb{R}^m$  este spațiu Banach, deci spațiu metric complet în raport cu metrica indusă de norma Euclidiană  $\|\cdot\|$ , vom demonstra că aplicația  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$  este o contracție pe  $\mathbb{R}^m$ , după care vom aplica teorema de punct fix a lui Banach.

Într-adevăr, condiția (8.62) împreună cu ipoteza  $M < 1$  din enunțul teoremei exprimă faptul că  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$  este o contracție pe  $\mathbb{R}^m$  deoarece, pentru orice  $\mathbf{y}_1 \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$  și  $\mathbf{y}_2 \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$ , avem

$$\begin{aligned} d(\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1), \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_2)) &= \|\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}_2)\| = \\ &= \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq M\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = Md(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \end{aligned} \quad (8.65)$$

unde  $d(\cdot, \cdot)$  este metrica indusă de norma Euclidiană  $\|\cdot\|$  din  $\mathbb{R}^m$ .

Deoarece  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$  este spațiu metric complet, conform teoremei de punct fix a lui Banach, contracția  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot)$  are un punct fix unic determinat.

Vom arăta mai mult că punctul fix  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  al contracției  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\cdot)$  aparține bilei deschise  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ .

În acest sens, construim șirul aproximațiilor succesive  $(\mathbf{g}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ale punctului fix  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ , unde

$$\mathbf{g}_k : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon), \quad k \in \mathbb{N}$$

și

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{y}_0, \\ \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\mathbf{g}_k(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Din (8.65) rezultă că pentru  $k \geq 1$  avem

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x})\|,$$

din care deducem

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq M^k\|\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_0(\mathbf{x})\| = M^k\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\|.$$

În consecință,

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq M^k \cdot K, \quad (8.66)$$

unde  $K$  este definit de (8.63).

Să arătăm acum că valorile funcțiilor  $\mathbf{g}_k$  sunt în bila  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ .

Pentru aceasta, calculăm  $d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{g}_0(\mathbf{x})) = d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) = \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$ . Din proprietățile normei, avem:  $d(\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) \leq \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k-1}(\mathbf{x})\| + \dots + \|\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$ . Dacă folosim (8.66), obținem

$$\|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| \leq K(M^k + M^{k-1} + \dots + M + 1) = K \frac{1 - M^{k+1}}{1 - M} < \frac{K}{1 - M} < \varepsilon. \quad (8.67)$$



Inegalitatea (8.67) arată că valorile funcțiilor  $\mathbf{g}_k$  aparțin bilei  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ , cu alte cuvinte termenii șirului  $(\mathbf{g}_k)_{k \geq 0}$  sunt funcții mărginite.

Din definiția lui  $\mathbf{g}_k$  rezultă că aceste funcții sunt continue pe  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ . Apoi, șirul de aplicații  $(\mathbf{g}_k)_{k \geq 0}$  este șir fundamental în spațiul normat complet al funcțiilor mărginite  $\mathcal{B}(B(\mathbf{x}_0, \delta), \mathbb{R}^m)$  deoarece, folosind (8.66), avem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| &\leq \|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_{k+p-1}(\mathbf{x})\| + \|\mathbf{g}_{k+p-1} - \mathbf{g}_{k+p-2}\| + \dots + \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| \leq \\ &\leq K(M^{k+p-1} + M^{k+p-2} + \dots + M^k) < \frac{K}{1-M} M^k, \end{aligned}$$

din care deducem

$$\|\mathbf{g}_{k+p}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}_k(\mathbf{x})\| < \frac{K}{1-M} M^k, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta). \quad (8.68)$$

Rezultatul (8.68) demonstrează că șirul de funcții continue  $(\mathbf{g}_k)_{k \geq 0}$  este șir fundamental în spațiul normat complet  $(\mathcal{M}(B(\mathbf{x}_0, \delta), \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_{sup})$ . (vezi Exemplul 3.5.3 și Observația 3.5.10).

Deoarece orice șir fundamental într-un spațiu metric complet este convergent, conform Teoremei 4.5.5, rezultă că șirul de funcții continue  $(\mathbf{g}_n)_{n \geq 0}$  este convergent la funcția continuă  $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Să calculăm acum  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\|$ . Din  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x})$  și intervertirea limitei cu metrica, deci cu norma, obținem

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0 \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \frac{K}{1-M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta),$$

relație care arată că  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ , adică  $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$ .

Funcția limită  $\mathbf{g}$  este funcția care satisface ecuația  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , unde  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . În adevăr,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}_{k+1}(\mathbf{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}_k(\mathbf{x})) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

Trebuie să mai arătăm că pentru orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ , punctul  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  este singurul punct  $\mathbf{y}$  din  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  astfel încât  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Demonstrația acestei afirmații o vom face prin reducere la absurd. În acest sens, presupunem că au loc simultan egalitățile:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1); \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)$$

Calculând norma diferenței  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ , găsim

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = \|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| \leq M \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|,$$

ceea ce conduce la relația

$$(1 - M) \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq 0.$$

Dar  $1 - M > 0$ , deci  $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \leq 0$ , de unde  $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| = 0$ , adică  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2$ .

Așadar, pentru orice  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$  există cel mult un punct  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  care satisface ecuația  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Întrucât am arătat că punctul  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  satisface ecuația  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  și apoi că  $\mathbf{y}$  este singurul punct care verifică această ecuație, deducem că punctul fix al contracției  $\mathbf{T}_{\mathbf{x}}$  este funcția  $\mathbf{g}$ . **q.e.d.**

**Teorema 8.4.2.** Fie  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, \dots, G_m)$  o transformare continuă definită pe o mulțime deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$

cu valori în  $\mathbb{R}^m$ , de clasă  $C^1$  în raport cu variabilele  $j$  și fie  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_0$ . Dacă

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq r \leq m, \quad (8.69)$$

atunci există numerele  $\delta > 0$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât

- (a)  $A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0$ ;  
 (b) există o transformare continuă  $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  cu proprietatea
- $$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta); \quad (8.70)$$

- (c) transformarea  $\mathbf{g}$  este singura funcție definită pe  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$  cu valori în  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  care satisface ecuația (8.70), adică  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  este funcția definită implicit de ecuația

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

*Demonstrație.* Din continuitatea derivatelor parțiale  $\frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}$  și anularea acestora în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in D_0$ , rezultă că există numerele  $\delta_0 > 0$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât

$$\left| \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| < \frac{1}{2m}; \quad \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta_0); \quad \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \varepsilon); \quad i, r = \overline{1, m}.$$

Mulțimea  $D_0$  fiind deschisă, putem presupune că

$$B(\mathbf{x}_0, \delta_0) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0, \quad (8.71)$$

iar dacă nu are loc această incluziune, înlocuim numerele  $\delta_0$  și  $\varepsilon$  prin altele mai mici astfel încât (8.71) să aibă loc.

Din continuitatea funcției  $\mathbf{G}$  și condiția  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$  rezultă că există numărul pozitiv  $\delta \leq \delta_0$  astfel încât numărul  $K = \sup\{\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}_0\| : \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\}$  satisface inegalitatea

$$2K < \varepsilon. \quad (8.72)$$

Din această definiție a lui  $\delta$ , rezultă că incluziunea (a) are loc.

Să arătăm acum că restricția funcției  $\mathbf{G}$  la mulțimea  $A = B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  satisface condiția Lipschitz cu constantă  $M = \frac{1}{2}$  în raport cu coordonatele  $j$ .

Considerând funcția  $G_i(\mathbf{x}, \cdot)$ , de variabila  $\mathbf{y}$ , punctul  $\mathbf{x}$  fiind fixat, și aplicându-i teorema valorii medii (Teorema 7.4.2), deducem că pentru orice două puncte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}, \mathbf{y}_2) \in A$ , există  $0 < \theta < 1$  astfel încât

$$\begin{aligned} |G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)| &= |dG_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2); \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)| = \\ &= |(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} G_i)(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2))| \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \cdot \|(\nabla_{\mathbf{y}} G_i)(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2))\| = \\ &= \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \sqrt{\sum_{r=1}^m \left( \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2 + \theta(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)) \right)^2} \leq \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| \sqrt{\sum_{r=1}^m \frac{1}{4m^2}} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

În consecință, obținem relațiile  $\|\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2)\| = \sqrt{\sum_{r=1}^m (G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) - G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2))^2} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|$  care arată că funcția  $\mathbf{G}_{/A}$  satisface condiția Lipschitz cu constanta  $M = \frac{1}{2}$ .

Având în vedere (8.72) și modul cum au fost alese numerele  $\delta$  și  $\varepsilon$  rezultă că mulțimea  $A$  și  $\mathbf{G}_A$  satisfac ipotezele Teoremei 8.4.1.

Prin urmare, concluziile (b) și (c) rezultă direct din Teorema 8.4.1.

**q.e.d.**

**Teorema 8.4.3. (Teorema funcțiilor implicite)** Fie  $\mathbf{F} : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție continuă pe mulțimea deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , de clasă  $C^1$  în raport cu coordonatele  $j$  și  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  un punct din  $D_0$ . Dacă:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0; \quad (8.73)$$

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \quad (8.74)$$

atunci:

(a) există numerele  $\delta > 0$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât

$$B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_0;$$

(b) există o aplicație continuă  $\mathbf{f} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  care are proprietățile

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta), \quad (8.75)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0; \quad (8.76)$$

(c) funcția  $\mathbf{f}$  este unica funcție definită pe  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$  cu valori în  $B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  care are proprietățile (b).

*Demonstrație.* Să notăm pentru simplitate

$$\mathcal{U} = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq m}}.$$

Din ipoteza (8.74), determinantul lui  $\mathcal{U}$  este diferit de zero și deci matricea  $\mathcal{U}$  este inversabilă.

Transformarea  $\mathbf{G} : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  definită prin

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathcal{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

satisface ipotezele Teoremei 8.4.2. În adevăr,  $\mathbf{G}$  este funcție continuă, derivabilă parțial în raport cu variabilele  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}$  și  $\left\| \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\| = I_m - \mathcal{U}^{-1} \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right\|$ , unde  $I_m$  este matricea unitate de ordin  $m$ . Ipotezele (8.69) ale Teoremei 8.4.2 sunt de asemenea satisfăcute fiindcă, în baza lui (8.73),  $\mathbf{G}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 - \mathcal{U}^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$  și  $\left\| \frac{\partial G_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \right\| = I_m - \mathcal{U}^{-1} \cdot \mathcal{U} = I_m - I_m = 0$ .

Ipotezele Teoremei 8.4.2 fiind îndeplinite, rezultă că există numerele  $\delta > 0$  și  $\varepsilon > 0$  și o transformare continuă  $\mathbf{g} : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon)$  care satisface concluziile (a), (b) și (c) ale Teoremei 8.4.2.

Pe de altă parte, condiția (a) din Teorema 8.4.2 este identică cu condiția (a) din Teorema 8.4.3. Mai mult, (8.75) și condiția (c) din Teorema 8.4.3 sunt respectiv echivalente cu condițiile (b) și (c) din Teorema 8.4.2. Această afirmație rezultă din faptul că ecuația  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  are loc dacă și numai dacă are loc ecuația  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ .

Într-adevăr, prima ecuație are loc dacă și numai dacă  $\mathcal{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ . Înmulțind această ecuație cu  $\mathcal{U}$  la stânga, deducem că ecuația  $\mathbf{y} = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  are loc dacă și numai dacă  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ .

Astfel, am demonstrat că numerele  $\delta, \eta$  și funcția  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ , unde  $\mathbf{g}$  este funcția din Teorema 8.4.2, satisfac condițiile (a) și (c) din Teorema 8.4.3, precum și identitatea (8.75).

Deoarece, pentru  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , punctele  $\mathbf{y}_0$  și  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0)$  sunt soluții ale ecuației  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , (vezi (8.73)<sub>1</sub> și (8.75) în care  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ), din condiția (c) a Teoremei 8.4.3 rezultă că  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ , adică (8.76) este adevărată. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

Teorema 8.4.3 poate fi reformulată în funcție de coordonatele funcțiilor vectoriale care intervin.

**Teorema 8.4.4. (Teorema funcțiilor implicite reformulată)** *Presupunem că:*

( $\alpha$ )  $F_1, F_2, \dots, F_m$  sunt funcții reale continue pe mulțimea deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ ;

( $\beta$ ) există un punct

$$(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n+m}) \in D_0 \quad (8.77)$$

ale cărui coordonate satisfac toate ecuațiile (8.52);

( $\gamma$ ) derivatele parțiale  $\frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}$ ,  $i \in \overline{1, m}, r = \overline{1, n}$  sunt continue pe  $D_0$ ;

$$(\delta) \text{ jacobianul } \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{j_m}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_{j_m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{j_1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_{j_2}} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{j_m}} \end{vmatrix}$$

nu se anulează în punctul (8.77).

În aceste ipoteze, într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  există funcțiile

$$\begin{cases} x_{j_1} = f_1(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \\ x_{j_2} = f_2(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \\ \vdots \\ x_{j_m} = f_m(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \end{cases}$$

care constituie o soluție a sistemului de ecuații (8.52) ce satisface următoarele condiții numite **condiții inițiale**

$$\begin{cases} f_1(x_{0i_1}, x_{0i_2}, \dots, x_{0i_n}) = x_{0j_1}, \\ f_2(x_{0i_1}, x_{0i_2}, \dots, x_{0i_n}) = x_{0j_2}, \\ \vdots \\ f_m(x_{0i_1}, x_{0i_2}, \dots, x_{0i_n}) = x_{0j_m}. \end{cases}$$

Prezentăm acum câteva cazuri particulare ale Teoremei 8.4.3 și Teoremei 8.4.4 care apar cel mai adesea în aplicațiile practice.

**A. Funcția reală de variabilă reală definită implicit de ecuația**

$$F(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D_0, \quad \text{unde} \quad D_0 \subset \mathbb{R}^2.$$

Această situație corespunde cazului  $n = m = 1$ .

Pentru orice funcție reală  $F$  de variabilele reale  $x$  și  $y$ , definită pe o mulțime deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ , de clasă  $C^1(D_0)$ , dacă

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

unde  $(x_0, y_0) \in D_0$ , atunci există o unică funcție reală  $f$  de variabilă reală  $x$ , definită și continuă pe o vecinătate a lui  $x_0 \in \mathbb{R}$  de forma  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , care satisface (8.75) și (8.76).

Funcția  $f$  se numește *funcție reală de variabilă reală definită implicit de ecuația*  $F(x, y) = 0, (x, y) \in D_0$ .

**B. Funcția reală de  $n$  variabile reale definită implicit de ecuația**

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = 0.$$

În acest caz avem:  $m = 1$ ;  $i_k = k$ ;  $k \in \overline{1, n}$ ;  $x_{j_1} = y$ .

Dacă funcția reală  $F$  de variabilele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și  $y$ , de clasă  $C^1(D_0)$ , unde  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , satisface condițiile

$$F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}; y_0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}; y_0) \neq 0,$$

atunci există o unică funcție reală  $f$  de variabilele reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , definită pe o bilă deschisă  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ , cu valori în intervalul  $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ , care are proprietățile  $f(\mathbf{x}_0) = y_0$  și

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B(\mathbf{x}_0, \delta).$$

**C. Cazul  $n = 1$  și  $m = 2$ .**

Dacă funcțiile reale arbitrare  $F_1, F_2$ , de variabilele reale  $x, y$  și  $z$  sunt de clasă  $C^1(D_0)$ , unde  $D_0 \subset \mathbb{R}^3$ , și

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) &= 0, \\ \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

atunci există în mod unic funcțiile  $f_1$  și  $f_2$  de variabila reală  $x$ , definite pe o vecinătate de forma  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , cu valori într-un disc centrat în punctul  $(y_0, z_0)$ , de rază  $\varepsilon > 0$ , astfel încât:

$$\begin{cases} F_1(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \\ F_2(x, f_1(x), f_2(x)) = 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta); \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_0) = y_0, \\ f_2(x_0) = z_0. \end{cases}$$

Sistemul de funcții

$$\begin{cases} y = f_1(x), \\ z = f_2(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \end{cases}$$

se numește **sistem de două funcții reale de o variabilă reală definite implicit de sistemul de ecuații**

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

**D. Cazul  $m = n = 2$ .** (Sistem de două funcții reale de două variabile reale definit implicit de sistemul de ecuații)

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \quad (8.78)$$

Dacă funcțiile reale de patru variabile reale  $x, y, u$  și  $v$ ,  $F_1, F_2$ , de clasă  $C^1(D_0)$ , unde  $D_0 \subset \mathbb{R}^4$ , satisfac condițiile:

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, \\ F_2(x_0, y_0, u_0, v_0); \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x_0, y_0, u_0, v_0) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x_0, y_0, u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}(x_0, y_0, u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x_0, y_0, u_0, v_0) \end{array} \right| \neq 0, \end{cases}$$

atunci există în mod unic funcțiile reale  $f_1, f_2$ , de variabilele reale  $x$  și  $y$ , definite pe discul  $B((x_0, y_0), \delta)$  cu centrul în punctul  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  și rază  $\delta$ , cu valori în discul cu centrul în  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  de rază  $\varepsilon > 0$ , astfel încât:

$$\begin{cases} F_1(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0, \\ F_2(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in B(x_0, y_0), \delta; \\ \begin{cases} f_1(x_0, y_0) = u_0, \\ f_2(x_0, y_0) = v_0. \end{cases} \end{cases}$$

În acest caz sistemul de funcții

$$\begin{cases} u = f_1(x, y), \\ v = f_2(x, y), \quad (x, y) \in B(x_0, y_0), \delta \end{cases}$$

se numește **sistem de funcții reale de două variabile reale definite implicit de sistemul de ecuații (8.78)**.

Recomandăm cititorului să considere și alte cazuri particulare. ■

**Teorema 8.4.5. (Derivabilitatea funcțiilor implicite)** Fie  $\mathbf{F} : D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m$  o funcție vectorială definită pe mulțimea deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$  cu proprietatea

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_0 \quad (8.79)$$

și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , funcția continuă definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  cu valori cu  $\mathbb{R}^n$  astfel încât  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in D$ .

Dacă  $\mathbf{F} \in C^1(D_0)$ , atunci  $\mathbf{f} \in C^1(D)$  și

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta), \quad (8.80)$$

unde

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_{j_r}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq m}}, \quad J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \left\| \frac{\partial F_k}{\partial x_{i_s}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right\|_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq s \leq n}},$$

sau, după egalarea elementelor corespunzătoare ale celor două matrice,

$$\frac{\partial f_r}{\partial x_{i_s}}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, \dots, x_{j_{r-1}}, \partial x_{i_s}, \partial x_{j_{r+1}}, \dots, \partial x_{j_m})}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))}, \quad (8.81)$$

$\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta), \quad r \in \overline{1, m}, \quad s \in \overline{1, n}$ .

Dacă  $\mathbf{F} \in C^p(D_0)$ , atunci  $\mathbf{f} \in C^p(B(\mathbf{x}_0, \delta))$ .

*Demonstrație.* Fie  $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$  un punct fixat în  $D_0$ . Să evaluăm creșterea  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Avem mai întâi

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (F_1(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F_2(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, F_m(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})).$$

Din Definiția 7.1.6 rezultă că funcțiile coordonate sunt de clasă  $C^1$  pe  $D_0$  și, conform Teoremei 7.4.2, pentru fiecare  $F_i$  putem scrie

$$F_i(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

unde  $0 < \theta_i < 1$ ,  $i \in \overline{1, m}$  și

$$dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+m})^*.$$

Din faptul că  $F_i \in C^1(D_0)$ , deducem

$$dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \theta_i(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T_i, \quad i \in \overline{1, m}$$

unde  $dF_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  este diferențiala lui  $F_i$  în punctul  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , iar  $T_i \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R})$  are proprietatea

$$\lim_{(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y})} T_i = O,$$

unde  $O$  este forma liniară nulă pe  $\mathbb{R}^{n+m}$ .

Având în vedere că

$$(dF_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), dF_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, dF_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

rezultă că

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{T})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}), \quad (8.82)$$

unde  $\mathbf{T} \in L(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^m)$ , iar  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ .

De asemenea, avem

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

$$T(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) = U(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + V(\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}),$$

unde  $U$  și  $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  aparțin spațiului liniar  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , al operatorilor liniari definiți pe  $\mathbb{R}^n$ , cu valori în  $\mathbb{R}^m$ , iar  $V$  și  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  sunt din  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ .

Matricea operatorului liniar  $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  în perechea de baze canonice din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  este  $J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , iar cea a operatorului  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^m$  este  $J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

În plus, matricele operatorilor  $U$  și  $V$  în aceleași baze au proprietatea că tind la zero, în sensul că toate elementele lor tind la zero, când  $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$  și  $\tilde{\mathbf{y}} \rightarrow \mathbf{y}$ .

În acest fel, diferența (8.82) se scrie în forma

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U \right) (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) + \left( d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V \right) (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y}). \quad (8.83)$$

Fie acum  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$  fixat și  $\mathbf{h}$  un vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ . Există intervalul  $I = \left( -\frac{\delta}{\|\mathbf{h}\|}, \frac{\delta}{\|\mathbf{h}\|} \right)$  din  $\mathbb{R}$  astfel încât  $\mathbf{x} + t\mathbf{h} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ ,  $\forall t \in I$ . Considerăm de asemenea că  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$ ,  $\tilde{x} = \mathbf{x} + t\mathbf{h}$  și  $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ . Atunci,  $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , iar (8.83) devine

$$(d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + U)(t\mathbf{h}) + (d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)(\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}. \quad (8.84)$$

Deoarece  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  este operator inversabil la fel va fi și  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V$ , deci există  $(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)^{-1}$ . Efectuând compunerea membrului stâng al lui (8.84) cu operatorul  $(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + V)^{-1}$ , obținem:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + V)^{-1} \circ (d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + U)(t\mathbf{h}). \quad (8.85)$$

Dacă în (8.85) luăm pe rând pe  $\mathbf{h} = \mathbf{e}_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , unde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ , împărțim ambii membri prin  $t$  și trecem apoi la limită pentru  $t \rightarrow 0$ , constatăm că raportul  $\frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}$  are limită în  $t = 0$  și aceasta este

$$-\left(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_i).$$

Prin urmare,  $\mathbf{f}$  este derivabilă parțial și

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\left(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))(\mathbf{e}_i), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (8.86)$$

Din (8.86) deducem că  $\mathbf{f} \in C^1(B(\mathbf{x}_0, \delta))$ , iar din (8.85) rezultă că  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}$  și

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\left(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \circ d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \quad (8.87)$$

Din (8.87) rezultă că matricele aplicațiilor liniare din cei doi membri în bazele canonice din  $\mathbb{R}^n$  și  $\mathbb{R}^m$  sunt egale.

Matricea operatorului liniar  $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$  în perechea de baze canonice  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m$  este  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ .

Matricea operatorului liniar  $\left(d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1}$  în baza canonică  $\mathcal{B}'$  din  $\mathbb{R}^m$  este inversa matricei operatorului liniar  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  în aceeași bază. Desigur, matricea operatorului liniar  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  este  $J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ .

În sfârșit, matricea operatorului  $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  în perechea de baze  $\mathcal{B}$  și  $\mathcal{B}'$  este  $J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  care este o matrice de tipul  $(m, n)$ .

Folosind acum Teorema 4.10.1, din (8.87), deducem

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -\left(J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\right)^{-1}_{m \times m} \cdot J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))_{m \times n},$$

care este tocmai (8.80).

Demonstrația ultimei afirmații a teoremei se face prin inducție.

Cazul  $p = 1$  a fost demonstrat mai sus.

Presupunem că afirmația este adevărată pentru  $p - 1$ . Dacă  $\mathbf{F} \in C^p(D_0)$ , atunci se poate demonstra că (vezi [24, p. 184])  $d_{\mathbf{x}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  și  $d_{\mathbf{y}}\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  sunt de clasă  $C^{p-1}$  ceea ce duce la concluzia că membrul drept al lui (8.80) este de clasă  $C^{p-1}$  pe bila  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ . Având acest rezultat și ținând cont de (8.87), putem afirma că  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  este de clasă  $C^{p-1}$  pe bila  $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ . Aceasta demonstrează că  $\mathbf{f} \in C^p(B(\mathbf{x}_0, \delta))$ .

Cu notațiile obișnuite ale analizei, formula (8.81) poate fi scrisă în forma

$$\frac{\partial x_{j_r}}{\partial x_{i_s}} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, \dots, \partial x_{j_{r-1}}, \partial x_{i_s}, \partial x_{j_{r+1}}, \dots, \partial x_{j_m})}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}}, \quad (8.88)$$

unde  $\frac{\partial x_{j_r}}{\partial x_{i_s}}$  este derivata parțială de ordinul întâi a funcției

$$x_{j_r} = f_r(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \quad r = \overline{1, m},$$

în raport cu variabila  $x_{i_s}$ ,  $s \in \overline{1, n}$ .

**q.e.d.**

Să scriem acum formula (8.82) în cazurile particulare  $\mathbf{A} = \mathbf{D}$ .



**A.** Dacă  $y = f(x)$  este funcția reală de variabila reală  $x$  definită implicit de ecuația  $\mathbf{F}(x, y) = 0$ , atunci (8.82) se scrie în forma

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))},$$

sau

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

**B.** Dacă  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  este funcția reală de mai multe variabile reale, definită implicit de ecuația  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ , atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))}, \quad i \in \overline{1, n},$$

sau

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad i \in \overline{1, n}.$$

**C.** Dacă funcțiile  $F_1, F_2$  satisfac ipotezele Teoremei 8.4.3 și Teoremei 8.4.5 pe mulțimea deschisă  $D \in \mathbb{R}^3$  și funcțiile reale  $f_1$  și  $f_2$ , de variabila reală  $x$ , sunt definite implicit de sistemul de ecuații  $\begin{cases} F_1(x; y, z) = 0, \\ F_2(x; y, z) = 0, \end{cases}$  atunci:

$$f_1'(x) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, z)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}}(x, f_1(x), f_2(x)) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}(x, f_1(x), f_2(x));$$

$$f_2'(x) = -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, x)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}}(x, f_1(x), f_2(x)) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}(x, f_1(x), f_2(x)),$$

sau:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}}.$$

**D.** Dacă funcțiile  $F_1, F_2 \in C^1(D)$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^4$ , satisfac în plus ipotezele (8.73) și funcțiile  $u = f_1(x, y)$ ,  $v = f_2(x, y)$  sunt definite implicit de sistemul de ecuații  $\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = 0, \end{cases}$  atunci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))} = \\
&= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}; \\
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y))} = \\
&= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}; \\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(x, y, f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{vmatrix}},$$

sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}; \\ \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}. \end{array} \right.$$

În partea finală a acestui paragraf vom considera că funcția  $\mathbf{F}$  ia valori în spațiul  $\mathbb{R}^s$ , unde  $s \geq m$ .

**Teorema 8.4.6.** Fie  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_s)$  o funcție vectorială definită pe mulțimea deschisă  $D_0 \subset \mathbb{R}^{n+m}$  astfel încât

$$\text{rang } J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = m, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_0, \quad s \geq m \quad (8.89)$$

și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  transformarea continuă definită pe o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  cu valori în  $\mathbb{R}^m$ , care are proprietățile:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in D_0; \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (8.90)$$

Dacă  $\mathbf{F} \in C^1(D_0)$ , atunci  $\mathbf{f} \in C^1(D)$  și

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = - \left( J_{\mathbf{yF}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot J_{\mathbf{yF}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{xF}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \quad (8.91)$$

Dacă  $\mathbf{F}$  este de clasă  $C^p(D_0)$ , atunci  $\mathbf{f}$  este de clasă  $C^p(D)$ .

*Demonstrație.* Să remarcăm mai întâi că diferența între ultimele două teoreme constă în aceea că în cazul celei din urmă numărul  $s$  al coordonatelor lui  $\mathbf{F}$  este mai mare decât numărul  $m$  al coordonatelor lui  $\mathbf{y}$ . Atunci, matricea  $J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  este dreptunghiulară de tipul  $(s, m)$ , deci nu are inversă, astfel că formula (8.80) nu are sens pentru  $s > m$ .

Dacă  $s = m$ , ipoteza (8.79) este identică cu (8.89) și formula (8.80) este identică cu (8.91) deoarece  $J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  este matrice pătratică de tipul  $(m, m)$ , iar  $\left( J_{\mathbf{yF}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{yF}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} = J_{\mathbf{yF}}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \left( J_{\mathbf{yF}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1}$ .

În consecință,

$$\begin{aligned} & \left( J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \\ & = J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \left( J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \right)^{-1} \cdot J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^\top(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

Pentru a demonstra Teorema 8.4.6, fie  $\mathbf{x}_0$  un punct fixat din  $D$ . Din (8.89) rezultă că există  $r_1, r_2, \dots, r_m$  cu  $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m \leq s$  astfel încât jacobianul

$$\frac{D(F_{r_1}, F_{r_2}, \dots, F_{r_m})}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \neq 0.$$

Dacă notăm

$$\tilde{\mathbf{F}} = (F_{r_1}, F_{r_2}, \dots, F_{r_m}),$$

ultima afirmație se scrie echivalent în forma

$$\det J_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = \det \left\| \frac{\partial F_{r_i}}{\partial x_{j_s}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq s \leq m}} \neq 0.$$

Din (8.90) și definiția lui  $\tilde{\mathbf{F}}$ , rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Înlocuind mulțimea  $D_0$  din Teorema 8.4.5 prin mulțimea deschisă  $D'_0 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_0 : \det J_{\mathbf{y}\tilde{\mathbf{F}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0\}$  și mulțimea deschisă  $D$ , din aceeași teoremă, prin mulțimea deschisă  $D' = \{\mathbf{x} \in D : (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \in D'_0\}$  care conține punctul  $\mathbf{x}_0$  și, de asemenea, înlocuind  $\mathbf{F}$  prin  $\tilde{\mathbf{F}}$ , iar  $\mathbf{f}$  prin  $\mathbf{f}/D'$ , din Teorema 8.4.5 deducem că dacă  $\mathbf{F}$  este de clasă  $C^p$ , restricția lui  $\mathbf{f}$  la  $D'$  este, de asemenea, de clasă  $C^p$ .

Cu alte cuvinte, am demonstrat că dacă  $\mathbf{F}$  este de clasă  $C^p$ , atunci  $\mathbf{f}$  este de clasă  $C^p$  pe o vecinătate  $D'$  a oricărui punct  $\mathbf{x}_0 \in D$ , ceea ce arată că  $\mathbf{f}$  este funcție de clasă  $C^p(D)$ .

Pentru a demonstra (8.91) să observăm că dacă  $\mathbf{F}$  este funcție de clasă  $C^1$ , atunci aplicația  $\mathbf{G} : D \rightarrow D_0$  definită prin  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$  este, de asemenea, de clasă  $C^1(D)$ .

În consecință, în baza Corolarului 7.4.1, avem

$$J_{\mathbf{F} \circ \mathbf{G}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{G}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{G}}(\mathbf{x}). \quad (8.92)$$

Constatăm că expresia din membrul drept al lui (8.92) este egală cu

$$J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) + J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}). \quad (8.93)$$

Pe de altă parte, în baza lui (8.90) avem  $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = \mathbf{0}$ . Folosind acest rezultat constatăm că matricea din (8.93) este egală cu matricea nulă de unde deducem

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = -J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

Să prezentăm acum următorul rezultat al calculului matriceal [24, p. 62]:

Dacă  $U$  este o matrice dreptunghiulară de tipul  $(s, m)$  astfel încât

$$\det U^\top U \neq 0,$$

$B$  este o matrice de tipul  $(m, n)$  și  $C = U \cdot B$ , atunci

$$B = (U^\top \cdot U)^{-1} \cdot U^\top \cdot C. \quad (8.94)$$

Dacă luăm acum  $U = J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ ,  $B = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  și  $C = -J_{\mathbf{x}\mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$ , din (8.94) rezultă (8.91) și teorema este complet demonstrată. **q.e.d.**

**Exemplul 8.4.1.** Funcția reală  $F \in \mathcal{F}(D)$ , de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^3$ , este astfel încât:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dacă funcțiile reale

$$x = f(y, z), \quad y = g(z, x), \quad z = h(x, y)$$

constituie soluții ale ecuației  $F(x, y, z) = 0$  care satisfac condițiile inițiale

$$x_0 = f(y_0, z_0), \quad y_0 = g(z_0, x_0), \quad z_0 = h(x_0, y_0),$$

atunci

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(z_0, x_0) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$

Într-adevăr, deoarece

$$F \in C^1(D), \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

rezultă că ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit funcția  $z = h(x, y)$  într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$  și

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

În mod similar deducem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0, y_0) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}; \\ \frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}. \end{aligned}$$

Înmulțind membru cu membru aceste trei egalități se obține relația dorită. ■

**Exemplul 8.4.2.** Dacă  $F \in C^2(D_0)$  și  $y = f(x)$  este funcția definită implicit de ecuația  $F(x, y) = 0$ , atunci

$$f''(x) = -\frac{F_{,xx}(F_{,y})^2 - 2F_{,xy}F_{,x}F_{,y} + F_{,yy}(F_{,x})^2}{(F_{,y})^3}(x, f(x)).$$

Într-adevăr, din Teorema 8.4.5 rezultă mai întâi

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}. \quad (8.95)$$

Atunci,  $f''(x) = (f')'(x) = -\left(\frac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}\right)'$ . Calculând această ultimă derivată folosind regula de derivare a cîtului și regula de derivare a funcțiilor compuse și înlocuind apoi în expresia găsită valoarea lui  $f'(x)$  dată de (8.95), se obține rezultatul dorit. ■

**Exercițiul 8.4.1.** Fie  $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ , unde

$$F_1(x, y, z, y_1, y_2) = x + yz - y_1y_2 - y_1^2, \quad F_2(x, y, z, y_1, y_2) = x - y + y_1^3 - y_2^3.$$

Să se arate că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \\ F_2(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \end{cases}$$

definește implicit pe  $y_1$  și  $y_2$  ca funcții de variabilele  $x, y, z$  într-o vecinătate a punctului  $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$  și să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestor funcții în punctul  $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

**Soluție.** Într-adevăr, avem evident  $\mathbf{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ . Apoi, există un punct de forma (8.77), și anume  $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ , cu proprietatea

$$\mathbf{F}(1, 1, 1, 1, 1) = 0, \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2).$$

Matricea  $J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(x, y, z, \mathbf{y})$ , unde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , este

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{F}}(x, y, z, \mathbf{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_2 - 2y_1 & -y_1 \\ 3y_1^2 & -y_2^2 \end{vmatrix} \implies \frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, y, z, \mathbf{y}) = 3y_1^3 + 3y_2^3 + 6y_1y_2^2.$$

Se vede că  $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1) \neq 0$ . Prin urmare, într-o vecinătate  $V_0$  a punctului  $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  există funcțiile  $f_1, f_2$  de clasă  $C^\infty$  cu proprietățile:

$$f_1(1, 1, 1) = 1, \quad f_2(1, 1, 1) = 1;$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0, \\ F_2(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0, \quad \forall (x, y, z) \in V_0. \end{cases} \quad (8.96)$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor  $f_1$  și  $f_2$  se obțin din sistemele algebrice:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ 1 + 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ z - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \\ -1 + 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \\ y - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{cases}, \quad (8.97)$$

care se deduc derivând succesiv în raport cu  $x, y, z$  egalitățile (8.96). Rezolvând sistemele (8.97) și făcând apoi în soluțiile găsite  $x = y = z = 1$ , obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{1}{6}, & \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{1}{2}; \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1, 1) = 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(1, 1, 1) = \frac{1}{4}, & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1, 1, 1) = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (8.98)$$

De menționat că relațiile (8.98) pot fi obținute direct din formulele (8.81). ■

## 8.5 Extreme locale ale funcțiilor definite implicit

Considerăm funcția reală  $F \in \mathcal{F}(D)$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  este o mulțime deschisă, și presupunem că ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = 0 \quad (8.99)$$

definește implicit pe  $y$  ca funcție de  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  într-o vecinătate a lui  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ . Pentru a se întâmpla aceasta este suficient ca funcția  $F$  să fie de clasă cel puțin  $C^1$  pe mulțimea  $D$  și să existe un punct  $(\mathbf{x}_0; y_0) \in D$  astfel încât:

$$F(\mathbf{x}_0; y_0) = 0; \quad (8.100)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_0; y_0) \neq 0. \quad (8.101)$$

Conform teoremei de existență și unicitate a funcțiilor reale de mai multe variabile reale, definite implicit de ecuația (8.99), există  $h > 0$ ,  $k > 0$  astfel încât

$$B(\mathbf{x}_0, h) \times (y_0 - k, y_0 + k) \subset D \quad (8.102)$$

și funcția reală

$$f : B(\mathbf{x}_0, h) \rightarrow (y_0 - k, y_0 + k)$$

care satisface proprietățile:

$$f(\mathbf{x}_0) = y_0; \quad (8.103)$$

$$F(\mathbf{x}; f(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, h); \quad (8.104)$$

$$\begin{cases} f \in C^1(B(\mathbf{x}_0, h)), \\ (\nabla f)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}(\nabla_{\mathbf{x}} F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})), \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, h), \end{cases} \quad (8.105)$$

unde vectorul  $(\nabla_{\mathbf{x}} F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n$ , numit *gradientul redus* al funcției  $F$ , are expresia analitică

$$(\nabla_{\mathbf{x}} F)(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mathbf{e}_i, \quad (8.106)$$

și  $f$  este unica funcție definită pe bila deschisă  $B(\mathbf{x}_0, h)$ , cu valori în intervalul real  $(y_0 - k, y_0 + k)$ , care satisface (8.103) – (8.106).

Ne punem acum problema determinării extremelor locale ale funcției  $f$ , definită implicit de ecuația (8.99), luând în calcul că, de cele mai multe ori,  $f$  nu se poate determina efectiv.

Mai întâi trebuie găsite punctele critice ale funcției  $f$ . Aceste puncte se obțin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0. \end{cases} \quad (8.107)$$

Folosind (8.105) și (8.99), din (8.107) deducem că punctele staționare ale funcției  $f$  sunt soluțiile sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}; y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}; y) = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}; y) = 0, \\ F(\mathbf{x}, y) = 0. \end{cases} \quad (8.108)$$

Dacă  $(\mathbf{x}_1; y_1)$ , unde  $y_1 = f(\mathbf{x}_1)$  este o soluție a sistemului (8.108), atunci  $\mathbf{x}_1$  este punct staționar pentru  $f$ .

Să cercetăm acum natura punctului staționar  $\mathbf{x}_1$ . Pentru aceasta trebuie să studiem forma pătratică  $d^2 f(\mathbf{x}_1)$ , a cărei expresie este

$$d^2 f(\mathbf{x}_1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_1) dx_i dx_j. \quad (8.109)$$

Având în vedere că (8.105) este echivalentă cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}, \quad j \in \overline{1, n}, \quad (8.110)$$

și ținând cont de faptul că

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{x}), \quad (8.111)$$

din (8.108), (8.110) și (8.111), obținem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_1) = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1; y_1)} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_1; y_1), \quad i \in \overline{1, n}, \quad j \in \overline{1, n}. \quad (8.112)$$

Înlocuirea lui (8.112) în (8.109) conduce la

$$d^2 f(\mathbf{x}_1) = - \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1; y_1)} d_{\mathbf{x}}^2 F(\mathbf{x}_1; y_1), \quad (8.113)$$

unde diferențiala din membrul doi a relației (8.113) se numește *diferențiala redusă* a funcției  $F$  în punctul  $(\mathbf{x}_1, y_1)$ , adică

$$d_{\mathbf{x}}^2 F(\mathbf{x}_1; y_1) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_1; y_1) dx_i dx_j. \quad (8.114)$$

Ținând cont că numerele pozitive  $h$  și  $k$  se aleg astfel încât pe lângă (8.102) să fie satisfăcută și condiția

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}; y) \neq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, y) \in B(\mathbf{x}_0, h) \times (y_0 - k, y_0 + k), \quad (8.115)$$

unde  $y = f(\mathbf{x})$ , din (8.113) și (8.115) deducem că natura punctului staționar  $\mathbf{x}_1$  al funcției  $f$  este decisă de natura formei pătratice (8.114) în care se ține cont și de semnul numărului  $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1; y_1)$ . De exemplu, dacă forma

pătratică (8.114) este pozitiv definită și  $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}_1; y_1) > 0$  rezultă că forma pătratică (8.109) este negativ definită și deci, folosind condiția suficientă de extrem, deducem că  $\mathbf{x}_1$  este punct de maxim local strict al funcției  $f$ .

Ilustrăm teoria prezentată mai sus prin următorul exercițiu.



**Exercițiul 8.5.1.** Să se determine extremele locale ale funcției  $z = f(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

**Soluție.** Domeniul de definiție al funcției reale  $F$  de mai sus poate fi considerat că este întreg spațiul  $\mathbb{R}^3$ , prin urmare  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ . Funcția  $F$  este infinit diferentiabilă, iar derivatele sale parțiale de ordinul întâi sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - z + 2, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - z + 2, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -x - y + 2z + 2. \end{cases}$$

Putem afirma că ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit pe  $z$  ca funcție reală  $f$  de variabilele reale  $x$  și  $y$  în vecinătatea oricărui punct  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$  pentru care avem îndeplinite condițiile

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Nu este dificil de constatat că astfel de puncte  $M_0$  există. Presupunând că  $M_0$  este un astfel de punct, atunci punctele critice ale lui  $f$  se determină rezolvând sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are următoarele două soluții

$$\begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ y_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ z_1 = -4 + 2\sqrt{6}, \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ y_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ z_2 = -4 - 2\sqrt{6}, \end{cases}$$

care definesc punctele  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  și  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . După cum se constată, derivata parțială a lui  $F$  în raport cu  $z$  în fiecare din aceste puncte este diferită de zero.

În acest mod s-au obținut două puncte staționare ale funcției  $f$  și anume:

$$M'_1(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6}); \quad M'_1(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}),$$

valorile corespunzătoare ale funcției  $f$  fiind

$$f(M'_1) = -4 + 2\sqrt{6}, \quad f(M'_2) = -4 - 2\sqrt{6}.$$

Utilizând regulile de diferențiere și considerând constantă variabila  $z$ , găsim

$$d^2_{(x,y)}F(x, y, z) = 2(dx^2 + dy^2),$$

din care rezultă

$$d^2_{(x,y)}F(M_1) = 2(dx^2 + dy^2), \quad d^2_{(x,y)}F(M_2) = 2(dx^2 + dy^2).$$

Dacă precizăm că

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 2\sqrt{6} \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_2, y_2, z_2) = -2\sqrt{6},$$

folosind (8.113), obținem

$$d^2 f(x_1, y_1) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)} d_{(x,y)}^2 F(x_1, y_1, z_1) = -\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2 + dy^2),$$

ceea ce înseamnă că diferențiala a doua a lui  $f$  în punctul  $M'_1$  este negativ definită și ca atare punctul  $M'_1$  este punct de maxim local pentru funcția  $f$ , iar valoarea maximă a locală a lui  $f$  este  $z_{\max} = f(x_1, y_1) = z_1 = -4 + \sqrt{6}$ .

În mod similar, găsim

$$d^2 f(x_2, y_2) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_2, y_2, z_2)} d_{(x,y)}^2 F(x_2, y_2, z_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2 + dy^2),$$

de unde deducem că diferențiala a doua a lui  $f$  în punctul  $M'_2$  este pozitiv definită fapt care duce la afirmația că punctul  $M'_2$  este punct de minim local, iar valoarea minimă a lui  $f$  este  $z_{\min} = f(x_2, y_2) = z_2 = -4 - \sqrt{6}$ . ■

## 8.6 Extreme condiționate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

În cel de al treilea paragraf al acestui capitol am analizat problema determinării punctelor de extrem local ale funcțiilor reale diferențiabile pe mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^n$ .

În aplicațiile practice ale calculului diferențial în geometrie și nu numai, apar deseori probleme de extrem care nu se pot încadra în teoria expusă în acel paragraf.

În acest sens, analizăm următorul exemplu.

**Exercițiul 8.6.1.** Dintre toate punctele  $M \in \mathbb{E}^3$ , situate pe dreapta  $\mathbb{E} \in \mathbb{E}^3$  care trece prin punctul  $M_0(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{E}^3$  și are direcția definită de vectorul nenul  $\mathbf{h} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ , să se determine acelea situate la distanță minimă de punctele suprafeței netede  $(S) \subset \mathbb{R}^3$  de ecuație

$$(S) \quad F(x, y, z) = 0, \quad (8.116)$$

unde  $F$  este o funcție reală diferențiabilă pe o submulțime deschisă din  $\mathbb{R}^3$ .

**Soluție.** Dacă  $P(x, y, z)$  și  $M(u, v, w)$  sunt două puncte din  $\mathbb{E}^3$ , atunci pătratul distanței Euclidiene dintre ele se determină cu ajutorul funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^6), \quad f(x, y, z, u, v, w) = (x - u)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2. \quad (8.117)$$

Cele șase variabile ale funcției  $f$  din (8.117) sunt legate însă între ele căci, pe de o parte, primele trei variabile trebuie să verifice ecuația (8.116), întrucât  $M \in (S)$ , și, pe de altă parte, variabilele  $u, v, w$  trebuie să verifice ecuațiile canonice ale dreptei care trece prin  $M_0$  și are direcția  $\mathbf{h}$ , adică

$$\frac{u - u_0}{l} = \frac{v - v_0}{m} = \frac{w - w_0}{n}, \quad (8.118)$$

ecuații care, în ipoteza  $l \neq 0$ , se scriu în forma echivalentă

$$v = \alpha u + p, \quad w = \beta u + q, \quad (8.119)$$

unde:

$$\alpha = \frac{m}{l}; \quad \beta = \frac{n}{l}; \quad p = v_0 + \frac{m}{l}u_0; \quad q = w_0 + \frac{n}{l}u_0.$$

Problema formulată mai sus se reduce la determinarea punctelor din  $\mathbb{E}^6$  care realizează minimul funcției (8.117) când coordonatele carteziene ale acestora satisfac condițiile (8.116) și (8.118). Înlocuind (8.119) în (8.117) și notând noua funcție cu  $f_1$ , constatăm că problema determinării extremelor funcției (8.117), supusă la condițiile (8.116) și (8.119), se reduce la aceea a aflării valorilor extreme ale funcției

$$f_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4), \quad f_1(x, y, z, u) = (x - u)^2 + (y - \alpha u - p)^2 + (z - \beta u - q)^2,$$

cu restricția (8.116).

Dacă ce s-a realizat cu ecuațiile (8.118) (este vorba de explicitarea acestora și scrierea lor sub forma echivalentă (8.119)) s-ar putea realiza și cu ecuația (8.116), adică explicitarea lui  $z$ , de exemplu, în funcție de variabilele  $x$  și  $y$ , atunci problema formulată s-ar reduce la una de genul celor studiate în primul paragraf al acestui capitol.

În adevăr, presupunând că ar exista posibilitatea ca din (8.116) să determinăm unic funcția reală  $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ , unde  $D \in \mathbb{R}^2$  este o mulțime deschisă, astfel încât

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in D, \quad (8.120)$$

atunci problema pusă s-ar reduce la cea a determinării extremelor libere locale ale funcției

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} \times D &\rightarrow \mathbb{R}, \\ f_2(x, y, u) &= (x - u)^2 + (y - \alpha u - p)^2 + (\varphi(x, y) - \beta u - q)^2. \end{aligned} \quad (8.121)$$

**Observația 8.6.1.** Funcția  $f_2$  din (8.121) este restricția funcției  $f$  la mulțimea  $\mathbb{E} \times (S)$ .

Chiar dacă, teoretic vorbind, problema existenței și unicității funcției  $\varphi$  astfel încât să aibă loc (8.120) este soluționabilă, practic însă, de cele mai multe ori, determinarea efectivă a lui  $\varphi$  și explicitarea efectivă a ecuațiilor care ar corespunde lui (8.118) sunt imposibile. ■

Comentariul făcut impune elaborarea unei metode care să ocolească dificultățile prezentate și care să conducă la determinarea extremelor funcției  $f$  din (8.117) fără a se ști efectiv cine este  $\varphi$  și fără a explicita ecuații ce ar corespunde lui (8.118).

O astfel de metodă există și se numește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*.

Să formulăm matematic problema desprinsă din exemplul de mai sus.

Să presupunem că sunt date următoarele obiecte:

$$\left\{ \begin{array}{l} m, n \in \mathbb{N}^*; \\ D_1 \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad D_1 = \overset{\circ}{D}_1; \\ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1; \\ \mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m) : D_1 \rightarrow \mathbb{R}^m, \end{array} \right.$$

unde variabilele independente ale funcțiilor date sunt scrise în forma  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , cu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ , ambii vectori fiind astfel încât  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1$ . Despre funcțiile  $f$  și  $\mathbf{F}$  presupunem în plus că sunt de clasă cel puțin  $C^1(D_1)$ .

Dorim să determinăm punctele de extrem ale funcției  $f$  supuse la condiția suplimentară

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (8.122)$$

echivalentă cu sistemul de condiții

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \vdots \\ F_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \end{array} \right. \quad (8.123)$$

Deoarece funcția  $\mathbf{F}$  este de clasă  $C^1$  pe  $D_1$ , rezultă că submulțimea

$$A \subset D_1, \quad A = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D_1 : \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\} \quad (8.124)$$

este mulțime închisă deoarece orice șir de puncte din  $A$ , de forma  $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)_{n \geq 1}$ , cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , deci convergent, are limita în  $A$ , adică  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ .

Prin urmare, în problema generală formulată mai sus se cere de fapt determinarea punctelor de extrem liber local ale restricției funcției  $f$  la mulțimea  $A$  definită în (8.124).

Observăm că metoda de determinare a extremelor libere locale ce se desprinde din teoria prezentată în primul paragraf al acestui capitol nu se poate aplica aici.

Dacă însă putem rezolva în mod unic ecuația (8.122) în raport cu  $\mathbf{y}$  și determinăm funcția  $\varphi$  de variabila  $\mathbf{x}$  astfel încât  $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$  să fie soluția ecuației (8.122), atunci introducerea acestei funcții în funcția  $f$  conduce la funcția reală

$$\mathbf{h} : D_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in D_2, \quad (8.125)$$

unde  $D_2$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ .

Pentru funcția  $\mathbf{h}$  din (8.125), putem studia punctele de extrem utilizând metoda prezentată în primul paragraf al acestui capitol. După cum am afirmat și mai sus, acest lucru este greu de aplicat în practică, întrucât, în general, ecuația (8.122), sau sistemul (8.123), nu se pot rezolva efectiv în raport cu variabila  $\mathbf{y}$  și chiar dacă teoretic s-ar putea, de cele mai multe ori este greu de pus în evidență forma explicită a funcției  $\varphi$ .

De aceea se impune prezentarea unei metode pentru rezolvarea problemei enunțate, metodă care să se aplice când nu se poate determina efectiv și explicit funcția  $\varphi$  dar care să conducă la aceleași rezultate la care am fi conduși dacă am cunoaște-o.

Această metodă se numește, după cum am spus, *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* și constă în a asocia funcției  $f$  funcția lui Lagrange căreia să i se poată determina punctele de extrem prin metoda obișnuită astfel încât punctele de extrem ale restricției funcției  $f$  la mulțimea  $A$  să poată fi găsite cu ajutorul punctelor de extrem local ale funcției lui Lagrange.

Pentru a formula această metodă dăm mai întâi următoarele definiții.

**Definiția 8.6.1.** Punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  se numește **punct de extrem local** al funcției  $f$  cu restricția (8.122), sau **punct de extrem local condiționat** al funcției  $f$ , dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  astfel încât diferența  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  să păstreze semn constant pentru orice  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$ . Punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  se numește **punct de minim condiționat** pentru funcția  $f$  dacă

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$$

și **punct de maxim condiționat** dacă

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \leq 0, \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A.$$

**Observația 8.6.2.** Punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct de extrem condiționat pentru funcția  $f$  dacă  $\mathbf{x}_0$  este punct de extrem pentru funcția  $\mathbf{h}$ , restricția funcției  $f$  la mulțimea  $A$ .

**Definiția 8.6.2.** Punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  se numește **punct staționar condiționat**, sau **punct critic condiționat** al funcției  $f$  dacă  $\mathbf{x}_0$  este un punct staționar pentru funcția  $\mathbf{h}$ .

**Definiția 8.6.3.** Funcția  $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  căreia i se cere a se determina extremele condiționate se numește **funcție scop, obiectiv, sau economică**, iar ecuațiile (8.122) se numesc **legături, sau restricții**.

**Definiția 8.6.4.** Problema determinării punctelor de extrem ale funcției scop  $f$  cu legăturile (8.122) se numește **problemă de extrem condiționat, sau problemă de extrem cu legături**.

**Observația 8.6.3.** Pentru ca o problemă de extrem cu legături să aibă soluție este necesar ca  $m < n$  și  $n > 1$ .

Într-adevăr, dacă  $m \geq n$ , atunci din sistemul de ecuații (8.123), dacă nu este incompatibil, se determină soluții de forma  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  care sunt puncte izolate ale lui  $D_1$ . În concluzie,  $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  are o valoare bine determinată. Prin urmare funcției  $f$  nu i se poate atașa o problemă de extrem liber local întrucât nu există posibilitatea comparării diverselor valori ale lui  $f$  într-o vecinătate  $V \cap A$  cu valoarea lui  $f$  în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ . Dacă  $n = 1$ , atunci din (8.122) se deduce  $m \geq n$ , ceea ce s-a constatat că nu este acceptabil. ■

**Definiția 8.6.5.** Funcția reală  $\mathcal{L} \in \mathcal{F}(D_1 \times \mathbb{R}^m)$ , cu valorile date de

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8.126)$$

se numește **funcția lui Lagrange** asociată funcției scop  $f \in \mathcal{F}(D_1)$  și funcției legătură  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D_1, \mathbb{R}^m)$ .

**Definiția 8.6.6.** Numerele reale  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  din relația (8.126) se numesc **multiplicatori Lagrange**, iar vectorul  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$  se numește **vectorul multiplicatorilor Lagrange**.

În continuare, prezentăm o teoremă analoagă teoremei lui Fermat care pune în evidență condiții necesare pentru ca un punct  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  să fie punct de extrem condiționat pentru funcția scop  $f$  cu legăturile (8.123).

**Teorema 8.6.1. (Existența multiplicatorilor lui Lagrange)** Fie

$$f \in C^1(D_1), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m) \in C^1(D_1, \mathbb{R}^m),$$

unde  $D_1 \subset \mathbb{R}^{n+m}$  mulțime deschisă,  $n > 1$ ,  $m < n$  și  $A$  mulțimea soluțiilor ecuației  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ .

Dacă  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  este un punct de extrem condiționat al funcției  $f$  și

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(y_1, y_2, \dots, y_m)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \quad (8.127)$$

atunci există numerele reale  $\lambda_{0j}$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , astfel încât punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) \in \mathbb{R}^{n+2m}$  să fie soluția sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0, & i \in \overline{1, n} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0, & j \in \overline{1, m} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (8.128)$$

*Demonstrație.* Din enunțul teoremei, constatăm că funcția  $\mathbf{F}$  satisface ipotezele teoremei de existență și unicitate a sistemelor de funcții reale de mai multe variabile reale definite implicit de ecuația (8.122), deci există  $\delta > 0$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $B(\mathbf{x}_0, \delta) \times B(\mathbf{y}_0, \varepsilon) \subset D_1$  și o unică funcție

$$\varphi : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{y}_0, \varepsilon),$$

de clasă  $C^1(B(\mathbf{x}_0, \delta))$ , care satisface în plus proprietățile:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{y}_0; \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta).\end{aligned}$$

Din Observația 8.6.1 și din faptul că  $(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in A$ , când  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)$ , deducem că  $\mathbf{x}_0$  este punct de extrem local pentru funcția reală

$$h : B(\mathbf{x}_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta). \quad (8.129)$$

Aplicând Teorema 8.3.1 funcției  $h$  din (8.129), rezultă  $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$ , adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (8.130)$$

Considerăm sistemul liniar neomogen de  $m$  ecuații cu  $n$  necunoscute  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \lambda_k = -\frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad j \in \overline{1, m}. \quad (8.131)$$

Din (8.127) rezultă că (8.131) are soluția unică  $\lambda_0 = (\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0m})$ .

Înlocuind scalarii  $\lambda_{0k}$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , în (8.127), obținem

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda_0) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^m \lambda_{0i} F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda_0 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (8.132)$$

Derivatele parțiale ale funcției  $\mathcal{L}$  din (8.132), în raport cu variabilele  $x_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , sunt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_{0k} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0), \quad i \in \overline{1, n}. \quad (8.133)$$

Utilizând teorema de diferențiabilitate a funcțiilor compuse, obținem

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad k \in \overline{1, m}, \quad i \in \overline{1, n}. \quad (8.134)$$

Din (8.133) și (8.134), deducem

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \sum_{k=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \lambda_{0k}. \quad (8.135)$$

Folosind apoi (8.131) în (8.135), găsim

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0), \quad (8.136)$$

iar din (8.130) și (8.136) rezultă că punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0)$  verifică primele ecuații din sistemul (8.128).

Pe de altă parte, derivând funcția  $\mathcal{L}$  în raport cu  $y_j$ ,  $j = 1, m$ , calculând apoi valoarea acestor derivate în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$  și ținând cont că  $(\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_{0m})$  este soluția sistemului (8.131), obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \sum_{k=1}^m \lambda_{0k} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \end{aligned}$$

ceea ce arată că ecuațiile  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \boldsymbol{\lambda}) = 0$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt verificate în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ .

În sfârșit, ultimele  $m$  ecuații ale sistemului (8.128) sunt verificate de coordonatele punctului  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$  deoarece  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ . q.e.d.

**Observația 8.6.4.** Punctele de extrem condiționat ale funcției  $f$  se găsesc printre punctele staționare condiționate, iar acestea din urmă se deduc din punctele critice ale funcției lui Lagrange.

**Observația 8.6.5.** Pentru determinarea punctelor critice (staționare) condiționate se procedează astfel:

- se asociază funcției scop  $f$  funcția lui Lagrange care este o funcție reală de  $n + 2m$  variabile reale definită pe mulțimea  $D_1 \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+2m}$ ;
- se anulează toate derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției lui Lagrange și se rezolvă sistemul astfel obținut în necunoscutele:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ;  $y_1, y_2, \dots, y_m$ ;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ;
- dacă  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ , unde 
$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \\ \mathbf{y}_0 = (y_{01}, \dots, y_{0m}) \\ \boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m}), \end{cases}$$
 este o soluție a sistemului (8.128), atunci  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct staționar condiționat al funcției scop  $f$ ;
- numerele reale  $\lambda_{01}, \dots, \lambda_{0m}$  se numesc **multiplicatorii Lagrange corespunzători punctului staționar condiționat**  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ .

**Teorema 8.6.2.** Dacă  $f \in C^1(D_1)$ ,  $\mathbf{F} \in C^1(D_1, \mathbb{R}^m)$  și  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct staționar condiționat al funcției scop  $f$ , corespunzător valorii  $\boldsymbol{\lambda}_0$ , atunci

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = 0. \quad (8.137)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, din faptul că  $f \in C^1(D_1)$  și  $\mathbf{F} \in C^1(D_1, \mathbb{R}^m)$  rezultă că funcția lui Lagrange  $\mathcal{L}$  este diferențiabilă în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$  și

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) dx_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) dy_j + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) d\lambda_k.$$

Afirmația (8.137) este acum evidentă.

q.e.d.

Teorema 8.6.1 dă condiții necesare pentru ca punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  să fie punct de extrem condiționat. La fel ca în cazul extremelor libere locale, punem problema determinării unor condiții suficiente pentru ca un punct staționar condiționat să fie punct de extrem condiționat al funcției scop  $f$ . În acest sens dăm mai întâi următorul rezultat ajutător.

**Lema 1.** Dacă  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct staționar condiționat al funcției scop  $f$ , funcțiile  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D_1, \mathbb{R}^m)$  și  $f \in \mathcal{F}(D_1)$  sunt de clasă  $C^2$  pe mulțimea de definiție  $D_1$  și are loc (8.127), atunci

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j. \quad (8.138)$$

*Demonstrație.* În punctul staționar condiționat  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  diferențiala a doua a funcției lui Lagrange este

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) dx_i dx_j + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) dx_i dy_j + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_j \partial y_k}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0) dy_j dy_k. \end{aligned} \quad (8.139)$$

De remarcat că grupul de termeni

$$\sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial \lambda_s} dx_i d\lambda_s + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^m \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y_j \partial \lambda_s} dy_j d\lambda_s + \sum_{s=1}^m \sum_{p=1}^m \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_s \partial \lambda_p} d\lambda_s d\lambda_p,$$

unde derivatele parțiale sunt calculate în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ , nu apare în (8.139) deoarece toate derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției lui Lagrange în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$ , care apar în acest grup, sunt egale cu zero fiindcă  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$ .

Diferențialele legăturilor  $F_k$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , în punctul  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ , sunt egale cu zero, deci

$$\begin{cases} dF_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \\ dF_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0, \\ \vdots \\ dF_m(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0. \end{cases} \quad (8.140)$$

Cum

$$dF_k(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dx_i + \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dy_j, \quad k \in \overline{1, m}, \quad (8.141)$$

după înlocuirea lui (8.141) în (8.140) și trecerea în membrul doi a termenilor care conțin pe  $dx_i$  ca factori, obținem:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_1}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dy_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dx_i, \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_2}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dy_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dx_i, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \frac{\partial F_m}{\partial y_j}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dy_j = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_m}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) dx_i \end{cases} \quad (8.142)$$



Sistemul (8.142), de  $m$  ecuații cu necunoscutele  $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ , este compatibil determinat în baza condiției (8.127). Aplicând regula lui Cramer de determinare a soluției unui sistem liniar și neomogen, din (8.142) găsim că diferențialele variabilelor  $y_j, j \in \overline{1, m}$ , sunt de forma

$$dy_j = \sum_{s=1}^n b_{js} dx_s, \quad j \in \overline{1, m}. \quad (8.143)$$

Înlocuind (8.143) în (8.139), suntem conduși la (8.138).

**q.e.d.**

**Teorema 8.6.3. (Condiții suficiente de extrem condiționat)** Dacă  $f \in C^2(D)$ ,  $\mathbf{F} \in C^2(D, \mathbb{R}^m)$  și  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  este un punct staționar condiționat al funcției scop  $f$  cu restricția (8.122), corespunzător valorii  $\lambda_0$  a vectorului parametrilor lui Lagrange, atunci:

- (i) dacă forma pătratică  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0)$  din (8.138) este pozitiv definită,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct de minim condiționat condiționat al funcției  $f$ ;
- (ii) dacă  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0)$  este formă pătratică negativ definită,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct de maxim condiționat al funcției  $f$ ;
- (iii) dacă  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0)$  este formă pătratică nedefinită,  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  nu este punct de extrem condiționat al funcției  $f$ .

*Demonstrație.* Pentru stabilirea naturii punctului staționar condiționat  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in A$  corespunzător valorii  $\lambda_0$  a vectorului parametrilor lui Lagrange trebuie să evaluăm diferența  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  pentru  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$ , unde  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  și să folosim apoi Definiția 8.6.1.

Însă, pentru puncte  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \cap A$ , avem

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0). \quad (8.144)$$

Aplicând formula lui Taylor funcției  $\mathcal{L}$  cu rest de ordin unu și ținând cont de Teorema 8.6.2, deducem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda) - \mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) &= \\ &= \frac{1}{2} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) \left( (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( d^2\mathcal{L}(\xi_0, \eta_0; \mu_0) \left( (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda) \right) - \right. \\ &\quad \left. - d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0) \left( (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda), (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{y}; \Delta\lambda) \right) \right), \end{aligned} \quad (8.145)$$

unde  $(\xi_0, \eta_0; \mu_0)$  este un punct situat pe segmentul deschis de extremități  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \lambda_0)$  și  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \lambda)$  din spațiul  $\mathbb{R}^{n+2m}$ , iar

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad \Delta\mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0; \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0.$$

Cum  $f$  și  $\mathbf{F}$  sunt funcții de clasă  $C^2$ , diferența din membrul doi a egalității (8.145) este suficient de mică într-o vecinătate a lui  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \lambda_0)$ . Din acest motiv semnul membrului întâi din (8.142) este determinat de semnul primului termen din membrul al doilea al egalității (8.145).

**q.e.d.**

**Observația 8.6.6.** Dacă  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este un punct staționar condiționat al funcției  $f$  și toți minorii principali

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k \in \overline{1, n}$$

ai matricei formei pătratice (8.70) sunt pozitivi, atunci în baza Teoremei lui Sylvester, forma pătratică  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$  este pozitiv definită și deci  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct de minim condiționat al funcției  $f$ . Dacă  $(-1)^k \Delta_k > 0$ ,  $k = 1, n$ , atunci  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\lambda}_0)$  este negativ definită și ca urmare  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$  este punct de maxim condiționat.

**Exercițiul 8.6.2.** Mulțimea punctelor din spațiul Euclidian  $\mathbb{E}^3$  raportat la reperul cartezian  $Oxyz$  ale căror coordonate  $x, y$  și  $z$  verifică ecuația

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (8.146)$$

unde  $a > b > c > 0$  sunt constante reale, se numește **elipsoid real** de semiaxe  $a, b, c$  cu axele de simetrie axele de coordonate.

Dintre toate punctele elipsoidului (8.146) să se găsească acele puncte situate la distanță extremă de originea  $O$  a reperului.

**Soluție.** Deoarece distanța de la un punct  $M(x, y, z)$  al elipsoidului la originea reperului  $O(0, 0, 0)$  este

$$d(O, M) = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

rezultă că punctele de extrem condiționat ale funcției  $d$ , cu legătura (8.146), coincid cu acelea ale funcției

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad (8.147)$$

supuse aceleiași restricții (8.146).

Problema enunțată poate fi formulată alternativ după cum urmează.

Dintre toate punctele  $M(x, y, z)$  aparținând elipsoidului (8.146), să se determine acelea care realizează valori extreme pentru funcția (8.147).

Avem deci o problemă de extrem condiționat cu o legătură în care funcția scop este (8.147), legătura fiind (8.146).

În aceste ipoteze, funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right). \quad (8.148)$$

Derivatele parțiale ale funcției (8.148) sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \frac{2\lambda x}{a^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \frac{2\lambda y}{b^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 2z + \frac{2\lambda z}{c^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1, \end{cases}$$

astfel că sistemul care dă punctele staționare condiționate este

$$\begin{cases} x + \frac{\lambda x}{a^2} = 0, \\ y + \frac{\lambda y}{a^2} = 0, \\ z + \frac{\lambda z}{a^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases} \quad (8.149)$$

Rezolvând sistemul (8.149) găsim că punctele staționare condiționate sunt

$$A(a, 0, 0), \quad A'(-a, 0, 0), \quad B(0, b, 0), \quad B'(0, -b, 0), \quad C(0, 0, c), \quad C'(0, 0, -c),$$

valorile corespunzătoare ale multiplicatorului Lagrange fiind

$$\lambda = -a^2, \quad \text{pentru punctele } A \text{ și } A',$$

$$\lambda = -b^2, \quad \text{pentru punctele } B \text{ și } B',$$

$$\lambda = -c^2, \quad \text{pentru punctele } C \text{ și } C'.$$

Diferențiala a doua a funcției lui Lagrange într-un punct arbitrar este

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)dz^2. \quad (8.150)$$

În punctul  $A$  și pentru valoarea  $\lambda = -a^2$  a multiplicatorului Lagrange, diferențiala (8.150) devine

$$d^2\mathcal{L}(A; \lambda = -a^2) = 2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)dy^2 + 2\left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right)dz^2. \quad (8.151)$$

Fără a mai diferenția legătura (8.146), se vede că forma pătratică (8.147) este negativ definită, deci  $A$  este punct de maxim condiționat. În aceeași situație se plasează și punctul  $A'$ .

Diferențiala a doua a funcției  $\mathcal{L}$  în punctul  $B$  și pentru valoarea  $\lambda = -b^2$  a multiplicatorului Lagrange este

$$d^2\mathcal{L}(B; \lambda = -b^2) = 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)dz^2. \quad (8.152)$$

Diferențiind legătura (8.146), obținem

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0. \quad (8.153)$$

În punctul  $B(0, b, 0)$ , egalitatea (8.153), devine  $dy = 0$ . Prin urmare, în (8.152),  $dx$  și  $dz$  sunt variabile independente.

Întrucât coeficientul lui  $dx^2$  este pozitiv, iar cel al lui  $dz^2$  este negativ, rezultă că forma pătratică (8.152) este nedefinită, deci  $B$  nu este punct de extrem condiționat. Aceeași proprietate o are și punctul  $B'$ .

Pentru punctul  $C$  și multiplicatorul Lagrange  $\lambda = -c^2$ , găsim

$$d^2\mathcal{L}(C; \lambda = -c^2) = 2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)dx^2 + 2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)dy^2. \quad (8.154)$$

Din nou, fără a mai diferenția legătura, se vede că forma pătratică (8.154) este pozitiv definită deoarece coeficienții lui  $dx^2$  și  $dy^2$  sunt pozitivi. Prin urmare,  $C$  este punct de minim condiționat.

Aceeași concluzie are loc și pentru punctul  $C'$ .

Rezultatele găsite erau de așteptat deoarece punctele staționare determinate mai sus sunt tocmai *vârfurile elipsoidului* care sunt prin definiție *punctele de intersecție a suprafeței cu axele de coordonate*. Punctele  $A$  și  $A'$  sunt vârfurile elipsoidului de pe axa absciselor  $Ox$ ,  $B$  și  $B'$  sunt vârfurile sale de pe axa ordonatelor  $Oy$ , iar  $C$  și  $C'$  sunt vârfurile elipsoidului de pe axa cotelor  $Oz$ .

Numerele  $a, b, c$ , numite *semiaxele elipsoidului*, fiind în relațiile  $a > b > c$ , rezultă că cele mai "îndepărtate" de origine sunt vârfurile  $A$  și  $A'$  ale elipsoidului care sunt deci puncte de maxim condiționat. Cele mai apropiate de origine sunt vârfurile  $C$  și  $C'$ , deci acestea sunt puncte de minim condiționat.

Evident, valoarea maximă a lui  $f$  pe mulțimea soluțiilor ecuației  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$  este  $f_{\max} = f(A) = f(A') = a^2$ , iar cea mai mică valoare este  $f_{\min} = f(C) = f(C') = c^2$ .

Prin urmare, pentru orice ternă  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , care verifică ecuația elipsoidului de semiaxe  $a, b, c$ , cu  $a > b > c$ , și care are drept axe de simetrie axele de coordonate, avem inegalitățile

$$c^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

Altfel spus, dintre punctele elipsoidului, cele mai apropiate de origine sunt vârfurile  $C$  și  $C'$ , de pe axa  $z'Oz$ , iar cele mai îndepărtate sunt vârfurile  $A$  și  $A'$  de pe axa absciselor. ■

**Exercițiul 8.6.3.** Să se găsească punctele de extrem condiționat ale funcției scop

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

cu restricțiile

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0, \\ F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

**Soluție.** Funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda_1 (x + y + z - 3) + \lambda_2 (x^2 + y^2 + z^2 - 5).$$

Sistemul care dă punctele staționare condiționate este

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0, \\ 2y + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0, \\ -2z + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Primele trei ecuații ale acestuia pot fi considerate că formează un sistem de trei ecuații cu necunoscutele  $1, \lambda_1$  și  $\lambda_2$ , sistem care fiind liniar și omogen, cu soluții nebanale, impune ca

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 2x \\ 2y & 1 & 2y \\ -2z & 1 & 2z \end{vmatrix} = 0 \implies z(x - y) = 0.$$

Rezolvăm acum sistemul

$$\begin{cases} z(x - y) = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemele

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0, \end{cases}, \begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + z - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Primul sistem are soluțiile  $(2, 1, 0)$  și  $(1, 2, 0)$ , iar cel de al doilea are soluțiile

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

valorile corespunzătoare ale parametrilor Lagrange fiind  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ , pentru primele două puncte staționare condiționate,

$$\lambda_1 = \frac{4(\sqrt{3} - 3)}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{3}$$

pentru cel de al treilea punct staționar condiționat și

$$\lambda_1 = -\frac{4(\sqrt{3} + 3)}{9}, \quad \lambda_2 = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$$

pentru ultimul.

Diferențiala a doua a funcției lui Lagrange într-un punct curent este

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = 2(1 + \lambda_2)dx^2 + 2(1 + \lambda_2)dy^2 + 2(\lambda_2 - 1)dz^2.$$

Pentru primele două puncte staționare condiționate avem:

$$d^2\mathcal{L}(2, 1, 0; 0, -1) = -4dz^2; \quad d^2\mathcal{L}(1, 2, 0; 0, -1) = -4dz^2. \quad (8.155)$$

Fără a mai diferenția legăturile în aceste puncte, constatăm că formele pătratice (8.155) sunt negativ definite. Prin urmare, ambele puncte sunt puncte de maxim condiționat.

Pentru cel de al treilea punct staționar condiționat, obținem

$$d^2\mathcal{L}(x_3, y_3, z_3; \lambda_1^3, \lambda_2^3) = \frac{4(2 - \sqrt{3})}{3}(dx^2 + dy^2 - dz^2).$$

Diferențiind legăturile în acest punct, găsim

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0 \\ (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})(dx + dy) + (1 - \frac{2\sqrt{3}}{3})dz = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$dy = -dx, \quad dz = 0.$$

Înlocuind rezultatul în expresia diferențialei a doua a lui  $\mathcal{L}$  în cel de al treilea punct, obținem

$$d^2\mathcal{L}(x_3, y_3, z_3; \lambda_1^3, \lambda_2^3) = \frac{8(2 - \sqrt{3})}{3} dx^2.$$

Forma pătratică rezultată este pozitiv definită, deci cel de al treilea punct staționar condiționat este punct de minim condiționat.

Procedând analog cu cel de al patrulea punct staționar condiționat se deduce că acesta este punct de minim condiționat. ■

## 8.7 Extremele funcțiilor reale definite pe mulțimi compacte din $\mathbb{R}^n$ .

Să presupunem că se dorește aflarea celei mai mari, sau celei mai mici valori ale unei funcții reale de mai multe variabile reale definită pe mulțimea compactă  $K$  din  $\mathbb{R}^n$ .

În ipoteza că funcția reală  $f \in \mathcal{F}(K)$  este diferențiabilă în  $\overset{\circ}{K}$ , interiorul mulțimii de definiție a funcției, metoda expusă în primul paragraf a acestui capitol permite găsirea tuturor valorilor extreme ale restricției funcției  $f$  la mulțimea  $\overset{\circ}{K}$ .

Pentru aflarea celei mai mari și celei mai mici valori ale funcției  $f$  trebuie să se țină cont de valorile funcției pe frontiera  $\partial K = K - \overset{\circ}{K}$  a mulțimii de definiție și apoi să se compare valorile extreme ale funcției în puncte din  $\overset{\circ}{K}$  cu cele din puncte aflate în  $\partial K$ .

Valoarea cea mai mare (respectiv cea mai mică) a tuturor acestor valori se numește *cea mai mare* (respectiv *cea mai mică*) valoare a funcției  $f \in \mathcal{F}(K)$ . Pentru a înțelege semnificația acestor noțiuni, considerăm următorul exemplu.

**Exercițiul 8.7.1.** În planul raportat la reperul cartezian  $Oxy$  se consideră mulțimea

$$K = \{M(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\},$$

care este mulțimea compactă din primul cadran al reperului limitată de segmentele  $OA, OB$  și  $AB$ , unde  $A(1, 0)$  și  $B(0, 1)$ , pe care le și conține

Se cere să se determine punctele mulțimii  $K$  pentru care suma pătratelor distanțelor Euclidiene la punctele  $O, A$  și  $B$  este cea mai mică.

**Soluție.** Suma pătratelor distanțelor Euclidiene de la un punct  $M(x, y) \in K$  la cele trei puncte este

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2. \quad (8.156)$$

Problema se reduce atunci la aflarea celei mai mici valori a funcției

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \quad \forall (x, y) \in K. \quad (8.157)$$

Valoarea funcției  $f$  în punctul  $M(x, y) \in K$  este numărul real pozitiv  $z$  introdus în (8.156).

Căutăm punctele de extrem ale restricției funcției (8.157) la interiorul domeniului de definiție.

Pentru aceasta rezolvăm sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$ .

Se găsește punctul  $M_0(x_0, y_0)$ , unde  $x_0 = \frac{1}{3}$ , și  $y_0 = \frac{1}{3}$ .

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este  $d^2 f(x_0, y_0) = 6 dx^2 + 6 dy^2$  și se vede că este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce arată că punctul  $M_0$  este punct de minim local al funcției  $f$  aflat în interiorul domeniului de definiție al funcției.

Valoarea funcției  $f$  în acest punct este  $f(x_0, y_0) = \frac{4}{3}$ .

Examinăm acum valorile lui  $f$  pe segmentul  $OA$  care face parte din frontiera lui  $K$ . Pentru aceasta este suficient să punem  $y = 0$  în expresia lui  $z$  și se obține valoarea restricției  $f_{/OA}$  a funcției  $f$  la acest segment. Prin urmare

$$f_{/OA} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{/OA}(x) = 2x^2 + (x - 1)^2 + 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (8.158)$$

Funcția reală de variabilă reală din (8.158) are un singur punct staționar căci derivata acesteia se anulează într-un singur punct din intervalul  $(0, 1)$  și anume  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

Diferențiala a doua a funcției (8.158) în punctul  $x_0 = \frac{1}{3}$  este  $d^2 f_{/OA}(x_0) = 6 dx^2$ , care este formă pătratică pozitiv definită.

Prin urmare, punctul  $M_1(x_0, 0)$  este punct de minim pentru funcția  $f$  care are în acest punct valoarea  $\frac{5}{3}$ .

Să remarcăm că în extremitățile intervalului  $[0, 1]$  funcția din (8.158) are valori extreme de asemenea însă ambele sunt puncte de maxim.

În același mod se constată că cea mai mică valoare a restricției funcției  $f$  la segmentul  $OB$  este  $\frac{5}{3}$  și reprezintă valoarea lui  $f$  în punctul de minim  $M_2(0, \frac{1}{3})$ .

Pentru a examina valorile lui  $f$  pe segmentul deschis  $BA$  vom considera restricția sa la acest segment care se obține din (8.156) prin înlocuirea lui  $y$  cu valoarea sa scoasă din ecuația segmentului  $BA$ , adică  $y = 1 - x$ ,  $x \in (0, 1)$ . Se obține

$$f_{/BA} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{/BA}(x) = 3x^2 + 3(x - 1)^2, \quad x \in (0, 1). \quad (8.159)$$

Aplicând funcției (8.159) algoritmul de determinare a extremelor libere care se desprinde din cel de al treilea paragraf al acestui capitol, găsim că pentru  $x_3 = \frac{1}{2}$  se realizează un minim al funcției de valoare  $\frac{3}{2}$ . Aceasta atrage că în punctul  $M_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , aflat pe segmentul  $BA$ , funcția  $f$  are un minim local și valoarea funcției în acest punct este  $\frac{3}{2}$ .

Din rezultatele găsite deducem că valoarea cea mai mică a funcției  $f$  din (8.157) este  $\frac{4}{3}$  și este atinsă în punctul  $M_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , care este centrul de greutate al unei plăci plane omogene ce ocupă domeniul  $K$ . ■

**Observația 8.7.1.** *Părți din frontiera mulțimii  $K$ , domeniul de definiție al funcției din Exercițiul 8.7.1, s-au reprezentat prin ecuații de forma  $F(x, y) = 0$  care s-au putut rezolva în privința uneia dintre variabile. După introducerea acestei variabile în expresia funcției  $f$ , cu alte cuvinte după aflarea restricției funcției  $f$  la porțiuni netede ale frontierei lui  $K$ , s-a aplicat algoritmul care se desprinde din cel de al treilea paragraf al acestui capitol pentru determinarea extremelor funcției  $f$  pe frontiera lui  $K$ . Dacă însă rezolvarea ecuației  $F(x, y) = 0$  este imposibilă practic, sau funcția reală definită implicit de această ecuație are expresie complicată, pentru aflarea valorilor extreme ale restricției funcției  $f$  la frontiera de ecuație  $F(x, y) = 0$  se poate aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange.*

**Exercițiul 8.7.2.** *Să se găsească cea mai mare valoare a funcției reale*

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in K,$$

*unde  $K$  este discul închis cu centrul în origine și rază egală cu 2.*

**Soluție.** Deoarece  $k \in \overline{B(0, 2)}$  rezultă că această mulțime se poate scrie în forma  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Singurul punct staționar al restricției funcției  $f$  la mulțimea  $\overset{\circ}{K}$  este originea reperului  $Oxy$ , care se vede imediat că nu este punct de extrem al funcției deoarece diferențiala a doua a funcției  $f$  în acest punct este  $d^2 f(0) = 2 dx^2 - 2 dy^2$  care este formă pătratică nedefinită deci originea reperului este punct șă pentru funcția  $f$ .

Determinăm valorile extreme ale restricției funcției  $f$  la conturul lui  $K$  deci la cercul de ecuație  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ . Pentru aceasta folosim metoda multiplicatorilor Lagrange. Funcția lui Lagrange are valorile date de

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Sistemul care dă punctele staționare condiționate este

$$\begin{cases} x + \lambda y = 0, \\ -y + \lambda x = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem găsim punctele staționare condiționate

$$M_1(2, 0), M_2(-2, 0),$$

corespunzătoare valorii  $\lambda = -1$  și

$$M_3(0, 2), M_4(0, -2),$$

corespunzătoare valorii  $\lambda = 1$ .

Diferențiala a doua a funcției lui Lagrange, într-un punct oarecare, este

$$d^2\mathcal{L}(x, y; \lambda) = 2(\lambda + 1)dx^2 + 2(\lambda - 1)dy^2.$$

Pentru primele două puncte, diferențiala a doua a funcției lui Lagrange este  $-4dy^2$ , deci formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că fiecare din aceste puncte este punct de maxim condiționat.

În celelalte două puncte diferențiala a doua a funcției lui Lagrange este egală cu  $4dx^2$ . Această diferențială este formă pătratică pozitiv definită și ca atare  $M_3$  și  $M_4$  sunt puncte de minim condiționat.

În punctele de maxim condiționat funcția  $f$  are aceeași valoare, egală cu 4.

Prin urmare, cea mai mare valoare a funcției  $f$  este 4 și aceasta este valoarea funcției fie în punctul  $M_1$ , fie în punctul  $M_2$ , ambele aflate pe frontiera domeniului de definiție al funcției  $f$ . ■

**Observația 8.7.2.** *Ultima problemă în care se determină valoarea maximă a unei funcții poate fi interpretată geometric.*

Într-adevăr,  $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ , unde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , reprezintă, în spațiul afin Euclidian tridimensional raportat la reperul cartezian rectangular  $Oxyz$ , ecuația carteziană explicită a unei suprafețe, numită *paraboloid hiperbolic*, sau *șa*, care are punctul de tip șa în origine, iar planele de coordonate  $Ozx$  și  $Oyz$ , plane de simetrie ale suprafeței.

Din punct de vedere geometric, inecuația care definește domeniul de definiție al funcției  $f$  reprezintă în spațiu un cilindru circular de rază 2, având  $Oz$  ca axă de rotație și secțiune perpendiculară pe axa de rotație discul de rază 2 cu centrul pe  $Oz$ .

Cilindrul decupează din paraboloidul hiperbolic o porțiune de suprafață mărginită de curba

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0. \end{cases} \quad (8.160)$$

Cu aceste pregătiri suntem în poziția de a da interpretarea geometrică.

Dintre toate punctele acestei porțiuni de suprafață, cele de cotă maximă sunt  $P_1(2, 0, 4)$  și  $P_2(-2, 0, 4)$  și se află pe curba (8.160).

Punctele  $P_1$  și  $P_2$  se află la intersecția curbei (8.160) cu planul  $Ozx$ . ■

## 8.8 Transformări regulate, sau difeomorfisme

Fie  $D$  o mulțime deschisă a spațiului Euclidian  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  și

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

o transformare de la mulțimea  $D$  în spațiul liniar  $\mathbb{R}^m$ .

Dacă  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă într-un punct  $\mathbf{a} \in D$ , atunci diferențiala sa în acest punct este

$$d\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{e}'(J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})dX), \quad (8.161)$$

unde  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$  este matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$ , sau matricea operatorului liniar  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  în perechea de baze canonice  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $dX$



este matricea coloană cu elementele egale cu diferențialele variabilelor independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , iar  $\mathbf{e}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m) \in (\mathbb{R}^m)^m$ . Amintim că

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a}) = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}). \quad (8.162)$$

Dacă  $m = n$ , simbolul  $\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$  este *jacobianul transformării*  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$ , adică determinatul matricei pătratice  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$ .

**Definiția 8.8.1.** Fie  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ ,  $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$  și  $m \geq n$ . Numărul real

$$\begin{aligned} |J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})| &= \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m} \begin{vmatrix} f_{i_1,1}(\mathbf{a}) & f_{i_1,2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{i_1,n}(\mathbf{a}) \\ f_{i_2,1}(\mathbf{a}) & f_{i_2,2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{i_2,n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_n,1}(\mathbf{a}) & f_{i_n,2}(\mathbf{a}) & \dots & f_{i_n,n}(\mathbf{a}) \end{vmatrix}^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m} \left( \frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \right)^2}, \end{aligned} \quad (8.163)$$

se numește **modulul matricei jacobiene**  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$  și este o înlocuire incompletă a noțiunii de determinant al unei matrice pătratice. Dacă  $m \leq n$ , atunci

$$|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})| = \sqrt{\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n} \left( \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{a}) \right)^2}. \quad (8.164)$$

**Definiția 8.8.2.** Aplicația  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^n$ , se numește **transformare regulată** dacă  $\mathbf{f} \in C^1(D)$  și

$$|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})| \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (8.165)$$

În cazul  $m \geq n$  condiția (8.165) afirmă că pentru fiecare punct  $\mathbf{x} \in D$  cel puțin unul din jacobienii

$$\frac{D(f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m, \quad (8.166)$$

este diferit de zero.

Afirmația (8.166) este echivalentă cu independența liniară a vectorilor

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad j \in \overline{1, n}, \quad (8.167)$$

deoarece combinația liniară

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^m, \quad (8.168)$$

are, în baza relației (8.166), doar soluția banală  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  pentru că  $\text{rang } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = n = \min\{m, n\}$ .

Relația (8.168) se scrie în forma

$$df(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}, \quad \text{unde } \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

și arată că avem

$$\text{Ker } \mathbf{T} = \text{Ker } df(\mathbf{x}) = \{\mathbf{0}\}. \quad (8.169)$$

Atunci în baza Teoremei 4.8.2 rezultă că aplicația

$$\mathbf{T} = df(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, \cdot) = df(\mathbf{x})(\cdot),$$

care depinde de variabila  $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ , este injectivă. În felul acesta am justificat următorul rezultat.

**Propoziția 8.8.1.** 88a Aplicația  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definită pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , cu  $m \geq n$ , este transformare regulată dacă pentru orice  $\mathbf{x} \in D$ , arbitrar dar fixat, aplicația liniară  $\mathbf{T} = df(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \text{Im } \mathbf{T})$  este bijectivă, adică  $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  există exact un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  astfel încât  $df(\mathbf{x}; \mathbf{a}) = \mathbf{y}$ .

**Observația 8.8.1.** Dacă aplicația  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ , cu  $D$  mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \geq n$ , este transformare regulată, atunci spațiile vectoriale  $\mathbb{R}^n$  și  $\text{Im } \mathbf{T}$  sunt izomorfe.

În cazul  $m \leq n$  condiția (8.165) afirmă că pentru fiecare  $\mathbf{x} \in D$  cel puțin unul din jacobienii

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n \quad (8.170)$$

este nenul. Deoarece vectorii

$$(\nabla f_1)(\mathbf{x}), (\nabla f_2)(\mathbf{x}), \dots, (\nabla f_m)(\mathbf{x}), \quad (8.171)$$

sunt liniile matrice jacobiene  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  rezultă că (8.165) exprimă faptul că vectorii (8.127) sunt liniar independenți, sau, altfel spus, combinația liniară

$$\sum_{i=1}^m \beta_i (\nabla f_i)(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n \quad (8.172)$$

are loc atunci și numai atunci când  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_m = 0$ . Relația (8.172) și afirmația ce-i urmează este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (\nabla f_i)(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \quad (8.173)$$

oricare ar fi vectorul nenul  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Din aceste rezultate deducem că și în cazul  $m \leq n$  avem

$$\text{rang } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = m = \min\{m, n\}, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (8.174)$$

În sfârșit, în cazul  $m = n$ , condiția (8.165) afirmă că

$$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad (8.175)$$

adică din nou are loc (8.174).

Analiza făcută mai sus demonstrează propoziția următoare.

**Propoziția 8.8.2.** 88b Aplicația  $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$ , este transformare regulată dacă și numai dacă  $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$  și

$$\text{rang } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \min\{m, n\}, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (8.176)$$

**Definiția 8.8.3.** Se numește **difeomorfism**, sau **transformare regulată** transformarea regulată  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ , unde  $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$ , care este și homeomorfism.

Se poate demonstra că [24, p. 223] dacă  $m < n$ , atunci nu există un difeomorfism de la  $D \subset \mathbb{R}^n$  în  $\mathbb{R}^m$ . De aceea, în toate teoremele asupra difeomorfismelor care urmează, presupunem  $m \geq n$ .

Examinăm mai întâi cazul  $m = n$ .

**Teorema 8.8.1. (Teorema de inversare locală a funcțiilor)** Dacă  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  este o transformare regulată de la mulțimea  $D$ , deschisă în  $\mathbb{R}^n$ , la mulțimea  $\mathbb{R}^n$ , atunci:

- (i) mulțimea  $\mathbf{f}(D)$  este deschisă în  $\mathbb{R}^n$ ;
- (ii) pentru orice punct  $\mathbf{x}_0 \in D$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ ,  $U \subset D$ , astfel încât restricția funcției  $\mathbf{f}$  la aceasta,  $\mathbf{f}|_U$ , este un difeomorfism al mulțimii  $U$  pe o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$ , unde  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ .

*Demonstrație.* Vom demonstra mai întâi punctul (ii). Fie în acest sens punctele  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Atunci punctul de coordonate  $(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$  este un element al mulțimii  $D \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$ . Pentru simplitatea scrierii convenim ca punctul din  $D \times \mathbb{R}^n$  să se scrie în forma  $(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ , deci

$$(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = (x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Să considerăm acum funcția

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}. \quad (8.177)$$

Rezultă imediat că

$$\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^n \times D, \mathbb{R}^n). \quad (8.178)$$

Apoi  $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \right\|_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ , ceea ce, în baza lui (8.165), conduce la

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall (\mathbf{y}; \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times D$$

și, în particular, la

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{y}_0; \mathbf{x}_0) \neq 0, \quad (8.179)$$

unde  $\mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{y}_0$  sunt punctele menționate în (ii). Având în vedere cine este  $\mathbf{y}_0$  și (8.177) deducem, de asemenea,

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}_0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (8.180)$$

În acest fel, constatăm că pentru funcția  $\mathbf{F}$  definită de (8.177), condițiile (8.178) – (8.180) sunt tocmai ipotezele teoremei de existență și unicitate a funcțiilor definite implicit.

Conform acestei teoreme există numerele  $\delta > 0$  și  $\eta > 0$  astfel încât

$$B(\mathbf{y}_0, \delta) \times B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset D_0 = \mathbb{R}^n \times D, \quad B(\mathbf{x}_0, \eta) \subset D$$

și transformarea continuă  $\varphi : B(\mathbf{y}_0, \delta) \rightarrow B(\mathbf{x}_0, \eta)$  care satisfac proprietățile:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \delta); \quad (8.181)$$

$$\varphi(\mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0, \quad (8.182)$$

pentru orice  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, \delta)$ , iar punctul  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{y})$  este singurul punct  $\mathbf{x}$  din  $B(\mathbf{x}_0, \eta)$  care satisfac ecuația

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (8.183)$$

Mulțimea  $V = B(\mathbf{y}_0, \delta)$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$  (vezi Teorema 3.9.9),  $U = \mathbf{f}^{-1}(V) \cap B(\mathbf{x}_0, \eta)$  este mulțime deschisă în  $B(\mathbf{x}_0, \eta)$  (conform Teoremei 4.2.5), iar  $\mathbf{y}_0 \in V$  și  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Rezultă că  $V$  și  $U$  sunt vecinătăți ale lui  $\mathbf{y}_0$  și respectiv  $\mathbf{x}_0$ .

Din (8.181) și (8.177) deducem

$$\mathbf{f}(\varphi(\mathbf{y})) = \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in V \quad (8.184)$$

Deoarece  $U \subset \mathbf{f}^{-1}(V)$ , deducem:

$$\varphi(V) = U;$$

$$\varphi|_U \text{ este transformare bijectivă;}$$

$$\varphi = (\mathbf{f}|_U)^{-1}.$$

În consecință  $\mathbf{f}(U) = V$ .

Deoarece  $\varphi$  este continuă, rezultă că transformarea regulată  $\mathbf{f}|_U$  este homeomorfism și prin urmare  $\mathbf{f}|_U$  este un difeomorfism de la  $U$  la  $V$ .

Punctul (i) al teoremei rezultă din (ii). Într-adevăr, dacă  $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$  atunci există  $\mathbf{x}_0 \in D$  astfel încât  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . După (ii), aplicația  $\mathbf{f}$  duce o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  într-o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$ . Deoarece  $\mathbf{y}_0 \in V \subset \mathbf{f}(D)$  rezultă că  $\mathbf{y}_0$  este punct interior al lui  $\mathbf{f}(D)$ . Dat fiind că orice punct  $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$  este punct interior al mulțimii  $\mathbf{f}(D)$ , rezultă că  $\mathbf{f}(D)$  este mulțime deschisă. **q.e.d.**

**Teorema 8.8.2.** Dacă  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^n)$ , unde  $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$ , este o transformare regulată bijectivă, atunci transformările  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{f}^{-1}$  sunt difeomorfisme și:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}))^{-1}, \quad \forall \mathbf{x} \in D \implies J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}; \quad (8.185)$$

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})} \implies \det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}))}, \quad (8.186)$$

oricare ar fi punctul  $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(D)$ .

Dacă  $\mathbf{f} \in C^k(D)$ , atunci  $\mathbf{f}^{-1} \in C^k(\mathbf{f}(D))$ .

*Demonstrație.* Pentru a arăta că  $\mathbf{f}$  este difeomorfism este suficient să demonstrăm că  $\mathbf{f}^{-1}$  este continuă în orice punct  $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{f}(D)$ . Fie  $\mathbf{x}_0 \in D$  astfel încât  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Din Teorema 8.8.1 există vecinătățile  $U$  și  $V$  ale punctelor  $\mathbf{x}_0$  și respectiv  $\mathbf{y}_0$ , astfel încât  $\mathbf{f}|_U$  este homeomorfism de la  $U$  pe  $V$ . Deoarece  $\mathbf{f}|_V^{-1} = (\mathbf{f}|_U)^{-1}$  rezultă că transformarea  $\mathbf{f}|_V^{-1}$  este continuă. Aceasta demonstrează că  $\mathbf{f}^{-1}$  este continuă în punctul  $\mathbf{y}_0$ , arbitrar din  $\mathbf{f}(D)$ , deci

$\mathbf{f}^{-1}$  este continuă pe  $\mathbf{f}(D)$ .

Păstrând aceleași notații ca în Teorema 8.8.1 vedem că funcția  $\mathbf{F}$  din (8.177) este de clasă  $C^1(\mathbb{R}^n \times D)$ . Mai mult,

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = \|\delta_{ij}\| = I_n, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \quad (8.187)$$

unde  $I_n$  este matricea unitate de ordin  $n$ , iar  $\delta_{ij}$  sunt simbolii lui Kronecker și

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$$

care, în baza faptului că  $\mathbf{f}$  este transformare regulată, conduce la

$$\det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = \det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n \times D.$$

Din teorema precedentă rezultă atunci că  $\mathbf{f}^{-1}$  satisface (8.181) pentru orice  $\mathbf{y} \in \mathbf{f}(D)$ , iar din teorema funcțiilor definite implicit deducem că  $\mathbf{f}^{-1} \in C^1(\mathbf{f}(D))$  și

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})) \right\| = (J_{\mathbf{F}}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y})))^{-1}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D),$$

ceea ce arată că (8.185) este demonstrată. Identitatea (8.186) este o consecință directă a lui (8.185).

Din (8.185) și (8.165) rezultă

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) \neq 0. \quad (8.188)$$

Relația (8.188) arată că  $\mathbf{f}^{-1}$  este transformare regulată.

Deoarece  $\mathbf{f}^{-1}$  este și homeomorfism, rezultă că  $\mathbf{f}^{-1}$  este un difeomorfism.

Dacă  $\mathbf{f}$  este de clasă  $C^k$ , atunci și  $\mathbf{F}$  din (8.177) este, de asemenea, de clasă  $C^k$  pe  $\mathbb{R}^n \times D$ . Atunci din teorema funcțiilor definite implicit rezultă că  $\mathbf{f}^{-1}$  este de clasă  $C^k$ . **q.e.d.**

Formulele (8.185) și (8.186) pot fi scrise, de asemenea, în următoarea formă care este mai puțin precisă dar mai ușor de memorat:

$$J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}))^{-1} \quad (8.189)$$

și respectiv

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})}. \quad (8.190)$$

În formulele (8.189) și (8.190) trebuie să se menționeze că variabilele  $\mathbf{y}$  și  $\mathbf{x}$  sunt legate prin

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D), \quad (8.191)$$

sau prin

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbf{f}(D), \quad \mathbf{x} \in D. \quad (8.192)$$

Folosind notația clasică pentru jacobienii  $\det J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$  și  $\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{y})$ , putem scrie identitățile (8.190) în forma

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}(\mathbf{y}) = \frac{1}{\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \quad (8.193)$$

cu aceeași precizare în ceea ce privește legătura dintre variabilele  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$ .

În cazul  $n = 1$ , (8.193) devine

$$\varphi'_1(y) = \frac{d\varphi_1}{dy}(y) = \frac{1}{f'_1(x)} = \left( \frac{1}{f'_1} \right) \frac{df_1}{dx}(x),$$

în care  $y = f_1(x)$ , formulă bine cunoscută din analiza clasică.

**Teorema 8.8.3.** Pentru ca o transformare bijectivă  $\mathbf{f} : D \rightarrow D_1$ , unde  $D$  și  $D_1$  sunt mulțimi deschise din  $\mathbb{R}^n$ , să fie un difeomorfism este necesar și suficient ca ambele transformări  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{f}^{-1}$  să fie de clasă  $C^1$ .

*Demonstrație.* Necesitatea rezultă din Teorema 8.8.2.

Pentru a demonstra suficiența, este destul să arătăm că

$$\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D.$$

Transformarea compusă  $\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f}$  este transformarea identică pe  $D$ . Matricea jacobiană a transformării identice este matricea unitate. Dacă  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{f}^{-1}$  sunt de clasă  $C^1$ , atunci avem

$$\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \cdot \det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = 1. \quad (8.194)$$

De aici rezultă că  $\det J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$ . Prin urmare, (8.165) este satisfăcută, ceea ce arată că  $\mathbf{f}$  este difeomorfism.

Din (8.194) deducem de asemenea că  $\det J_{\mathbf{f}^{-1}}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \neq 0$ , rezultat care, împreună cu ipotezele suficienței, Definiția 4.6.1 și Definiția 8.8.3 conduce la concluzia că  $\mathbf{f}$  este difeomorfism. **q.e.d.**

**Teorema 8.8.4.** Fie  $\mathbf{f}$  un difeomorfism de la o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$ , în mulțimea  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ ,  $\mathbf{g}$  o transformare de la mulțimea deschisă  $D_1 \subset \mathbb{R}^p$ , în mulțimea  $\mathbf{f}(D)$  și  $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}$ .

(a) Dacă  $\mathbf{f}$  este de clasă  $C^1(D)$ , atunci  $\mathbf{h}$  este de clasă  $C^1(D_1)$  și, pentru orice  $\mathbf{y} \in D_1$ ,

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = \left( J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \right)^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}). \quad (8.195)$$

Dacă  $\mathbf{f} \in C^k(D)$  și  $\mathbf{g} \in C^k(D_1)$ , atunci  $\mathbf{h} \in C^k(D_1)$ .

(b) Dacă  $\mathbf{g}$  este transformare regulată și  $p \leq n$ , atunci  $\mathbf{h}$  este transformare regulată.

(c) Dacă  $\mathbf{g}$  este un difeomorfism și  $p \leq n$ , atunci  $\mathbf{h}$  este un difeomorfism.

*Demonstrație.* Să observăm că identitatea (8.195) poate fi scrisă după cum urmează

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y}) = (J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top}(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})), \quad (8.196)$$

unde  $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ , sau

$$J_{\mathbf{h}} = (J_{\mathbf{f}}^{\top} \cdot J_{\mathbf{f}})^{-1} \cdot J_{\mathbf{f}}^{\top} \cdot J_{\mathbf{g}}. \quad (8.197)$$

Partea (a) a teoremei rezultă din Teorema 8.4.6 unde

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad \mathbf{y} \in D_1.$$

Rezultă imediat că funcția  $\mathbf{h}$  este continuă și

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{y})) = 0, \quad \text{pentru } \mathbf{y} \in D_1.$$

Astfel,  $\mathbf{h}$  este de clasă  $C^k$  dacă  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{g}$  sunt de clasă  $C^k$ . Deoarece

$$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = -J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) \quad \text{și} \quad \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \right\| = -J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}),$$

deducem că relația (8.195) este o consecință directă a Teoremei 8.4.6.

Din faptul că  $\mathbf{h} = \mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}$  rezultă evident  $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{h}$  și, în consecință,  $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ . Această ultimă relație împreună cu Teorema 8.8.2 implică relația (8.195) care la rândul-i conduce la

$$|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})| \neq 0, \text{ dacă } |J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \neq 0,$$

afirmație care se dovedește a fi adevărată și din Teorema 8.4.1. Prin urmare, concluzia (b) a Teoremei 8.4.5 este adevărată.

Deoarece compunerea a două homeomorfisme este un homeomorfism, rezultă că  $(b) \implies (c)$ . **q.e.d.**

**Teorema 8.8.5. (Compunerea difeomorfismelor)** Dacă  $p \leq n \leq m$ ,  $\mathbf{h}$  este o transformare regulată a unei mulțimi deschise  $D_1 \subset \mathbb{R}^p$  într-o mulțime deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  și  $\mathbf{f}$  este o transformare regulată de la  $D$  în  $\mathbb{R}^m$ , atunci transformarea compusă

$$\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{h}$$

este regulată. Dacă  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{h}$  sunt difeomorfisme, atunci  $\mathbf{g}$  este difeomorfism.

*Demonstrație.* În baza Corolarului 7.4.1 rezultă că  $\mathbf{g} \in C^1(D_1)$  și că matricea jacobiană  $J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$  este produsul matricelor jacobiene  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{h}(\mathbf{y}))$  și  $J_{\mathbf{h}}(\mathbf{y})$ . Deoarece  $\mathbf{f}$  și  $\mathbf{h}$  sunt transformări regulate, în baza lui (8.165), rezultă că

$$|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y})| \neq 0, \forall \mathbf{y} \in D_1,$$

ceea ce arată că  $\mathbf{g}$  este transformare regulată pe  $D_1$ .

Partea a doua a teoremei rezultă din prima deoarece compunerea a două homeomorfisme este un homeomorfism. **q.e.d.**

Rezultatul următor este o generalizare a punctului (ii) din Teorema 8.8.1.

**Teorema 8.8.6.** Dacă  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : D_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n \leq m$ , este o transformare regulată, atunci pentru orice punct  $\mathbf{y}_0 \in D_0$  există o vecinătate  $U \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$  astfel încât funcția  $\mathbf{f}|_U$  să fie un difeomorfism.

*Demonstrație.* Deoarece  $|J_{\mathbf{f}}(\mathbf{y}_0)| \neq 0$ , conform relației (8.165) din Definiția 8.8.2, există numerele întregi pozitive  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , diferite între ele și mai mici, cel mult egale cu  $m$ , (vezi (8.163)), astfel încât jacobianul transformării  $\varphi = (f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_n})$  în punctul  $\mathbf{y}_0$  este nenul.

Mulțimea  $D = \{\mathbf{y} \in D_0 : \det J_{\varphi}(\mathbf{y}) \neq 0\}$  este deschisă și conține punctul  $\mathbf{y}_0$ , iar transformarea  $\varphi|_D$  este regulată.

După Teorema 8.8.1, punctul (ii), există o vecinătate  $U \subset D$ ,  $U \in \mathcal{V}(\mathbf{y}_0)$ , astfel încât  $\varphi|_U$  să fie un difeomorfism.

Deoarece  $\varphi|_U = \mathbf{h} \circ \mathbf{f}|_U$ , unde

$$\mathbf{h} : \mathbf{f}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}),$$

rezultă că transformarea  $\mathbf{f}|_U$  este bijectivă și  $(\mathbf{f}|_U)^{-1} = (\varphi|_U)^{-1} \circ \mathbf{h}$ .

Prin urmare,  $(\mathbf{f}|_U)^{-1}$  este continuă, adică  $\mathbf{f}|_U$  este homeomorfism și în consecință este și difeomorfism. **q.e.d.**

## 8.9 Dependență și independență funcțională

Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ , o funcție vectorială de argumentul vectorial  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^n$  este o mulțime deschisă în spațiul vectorial topologic  $\mathbb{R}^n$ . Considerăm, de asemenea, funcția reală

$g \in \mathcal{F}(D)$ .

**Definiția 8.9.1.** Spunem că funcția  $g$  depinde funcțional de funcțiile

$$f_1, f_2, \dots, f_m$$

pe submulțimea  $D_1 \subset D$ , dacă există funcția reală  $G \in \mathcal{F}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{f}(D_1) \subset U$ , astfel încât

$$g(\mathbf{x}) = G(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = G(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in D_1. \quad (8.198)$$

**Definiția 8.9.2.** Funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , se numesc **dependente funcțional** pe submulțimea  $D_1 \subset D$ , dacă cel puțin una dintre ele depinde de celelalte pe  $D_1$ .

**Definiția 8.9.3.** Funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , se numesc **independente funcțional** în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$ , dacă nici una dintre funcții nu depinde de celelalte în nici o vecinătate a lui  $\mathbf{x}_0$ .

**Definiția 8.9.4.** Funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , se numesc **independente funcțional** pe mulțimea  $D$  dacă sunt independente în fiecare punct din  $D$ .

**Lema 2.** Fie  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D = \overset{\circ}{D}$  și  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ .

Dacă funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt dependente funcțional pe submulțimea  $D_1 \subset D$ , atunci mulțimea  $\mathbf{f}(D_1) \subset \mathbb{R}^m$  nu conține puncte interioare.

*Demonstrație.* Fie  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m-1}, y_{0m}) \in \mathbf{f}(D_1)$ . Atunci, există  $\mathbf{x}_0 \in D_1$  astfel încât  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ .

Funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , fiind dependente funcțional pe mulțimea  $D_1$ , după Definiția 8.9.2, cel puțin una depinde de celelalte pe  $D_1$ .

Să presupunem că funcția  $f_m$  depinde funcțional de  $f_1, f_2, \dots, f_{m-1}$  pe mulțimea  $D_1$ . Atunci, există o funcție reală  $G \in \mathcal{F}(U)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ , unde  $\tilde{\mathbf{f}}(D_1) \subset U$ ,  $\tilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, \dots, f_{m-1})$ , astfel încât

$$f_m(\mathbf{x}) = G(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x})) = G(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in D_1, \quad (8.199)$$

de unde deducem

$$f_m(\mathbf{x}_0) = G(f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), \dots, f_{m-1}(\mathbf{x}_0)) = G(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m-1}). \quad (8.200)$$

Să considerăm acum vectorul  $\mathbf{y}_0^\varepsilon = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m-1}, y_{0m} + \varepsilon)$ , unde  $\varepsilon > 0$  este arbitrar, și să arătăm că  $\mathbf{y}_0^\varepsilon \notin \mathbf{f}(D_1)$ .

Presupunem contrariul. Atunci, există  $\mathbf{x}_\varepsilon \in D_1$ , astfel încât

$$\mathbf{y}_0^\varepsilon = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\varepsilon) = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m-1}, y_{0m} + \varepsilon) \quad (8.201)$$

Ținând cont de (8.199), (8.201) și (8.200), găsim relația

$$y_{0m} + \varepsilon = f_m(\mathbf{x}_\varepsilon) = G(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_\varepsilon)) = G(y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m-1}) = y_{0m},$$

care contrazice definiția unei funcții.

**q.e.d.**



În continuare vom presupune că  $m \leq n$ .

**Teorema 8.9.1.** Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ , unde  $D = \overset{\circ}{D}$  și  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Dacă în orice punct  $\mathbf{x} \in D$  rangul matricei jacobiene  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  este  $m$ , atunci funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt independente funcțional pe  $D$ .

*Demonstrație.* Rangul matricei jacobiene fiind  $m$ , există  $m$ -upla de numere întregi

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_m), \quad \text{cu } 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n,$$

astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in D. \quad (8.202)$$

Un vector arbitrar  $\mathbf{x} \in D$  se poate scrie sub forma  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{y})$ , unde  $\mathbf{y} = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m})$ , iar  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-m}$  este vectorul ale cărui coordonate în baza canonică din  $\mathbb{R}^{n-m}$  sunt, în ordine, coordonatele vectorului  $\mathbf{x}$  neutilizate în vectorul  $\mathbf{y}$ . Atunci (8.202) se poate scrie în forma

$$\det J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \neq 0, \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{y}) \in D. \quad (8.203)$$

Condiția (8.203) arată că matricea pătratică de ordinul  $m$

$$J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_m}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{j_1}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{j_m}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (8.204)$$

este matrice nesingulară.

Cu ajutorul matricei (8.204) se poate scrie expresia analitică a diferențialei reduse, în raport cu variabila  $\mathbf{y}$ , a funcției  $\mathbf{f}$ , în punctul  $(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ ,

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \mathbf{e}' \left( J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) dU \right),$$

unde  $dU$  este matricea coloană cu  $m$  linii care are drept elemente diferențialele  $dx_{j_1}, dx_{j_2}, \dots, dx_{j_m}$ .

Fie acum  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in D$ , fixat dar arbitrar,

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) \quad \text{și} \quad \det J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0.$$

Deoarece  $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ , rezultă că există o vecinătate deschisă  $V_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ , astfel încât  $\det J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \neq 0$ , pentru orice  $\mathbf{x} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in V_0 \cap D$ , de unde rezultă că aplicația liniară

$$d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \quad d_{\mathbf{y}}\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y})(\mathbf{h}) = \mathbf{e}' \left( J_{\mathbf{y}\mathbf{f}}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) H \right),$$

unde  $\mathbf{h} = \sum_{j=1}^m h_j \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}' H$  este un vector arbitrar din  $\mathbb{R}^m$ , este un izomorfism liniar de la  $\mathbb{R}^m$  în  $\mathbb{R}^m$ .

Să notăm  $V'_0 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}) \in D \cap V_0\}$ . Din faptul că  $D$  și  $V_0$  sunt mulțimi deschise rezultă că  $V'_0$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^m$ .

Fie acum funcția

$$\mathbf{f}^1 \in \mathcal{F}(V'_0, \mathbb{R}^m), \quad \mathbf{f}^1(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in V'_0.$$

Deoarece  $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$  rezultă că  $\mathbf{f}^1 \in C^1(V'_0, \mathbb{R}^m)$  și prin urmare  $\mathbf{f}^1(V_0)$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^m$  care conține punctul

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{f}^1(\mathbf{y}_0).$$

Să presupunem că funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , nu sunt independente în punctul  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0)$ . Atunci există o vecinătate  $U_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$ ,  $U_0 \subset D$ , pe care funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt dependente funcțional. Fără să restrângem generalitatea putem presupune că  $V_0 \subset U_0$ . Atunci din Lema 2 rezultă că  $\mathbf{f}(U_0)$  nu conține puncte interioare.

Însă, pe de altă parte, avem

$$\mathbf{f}^1(V'_0) \subset \mathbf{f}(V_0 \cap D) \subset \mathbf{f}(U_0 \cap D) \subset \mathbf{f}(U_0). \quad (8.205)$$

Dacă ținem cont că mulțimea  $\mathbf{f}^1(V'_0)$  este deschisă în  $\mathbb{R}^m$ , atunci rezultatul din (8.205) intră în contradicție cu concluzia Lemei 2 și teorema este demonstrată. **q.e.d.**

**Teorema 8.9.2.** Fie mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^n$  și funcția  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ . Dacă  $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$  și  $\text{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = s < m \leq n$ ,  $\forall \mathbf{x} \in D$ , atunci  $s$  dintre funcțiile  $f_j \in \mathcal{F}(D)$ ,  $j \in \overline{1, m}$ , sunt independente funcțional, iar celelalte  $m - s$  funcții sunt dependente funcțional de acestea.

*Demonstrație.* Fie  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}) \in D$ . Deoarece  $\text{rang} J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = s$ , există o vecinătate deschisă  $V_0 \subset D$  astfel încât

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_s)}{D(x_1, x_2, \dots, x_s)}(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V_0. \quad (8.206)$$

Dacă în (8.206) nu intră primele  $s$  funcții coordonate ale lui  $\mathbf{f}$  și primele  $s$  variabile independente ale funcției, o renumerotare a funcțiilor și a variabilelor conduce la (8.206).

În baza Teoremei 8.8.1, funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_s$  sunt independente funcțional pe  $V_0$ .

Să arătăm că celelalte funcții depind de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_s$  pe  $V_0$ .

Pentru aceasta, introducem vectorul  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ , unde

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_s) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_s(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in D$$

și funcția

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (F_1, F_2, \dots, F_s) \in \mathcal{F}(D \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s), \\ F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f_i(\mathbf{x}) - y_i, \quad i \in \overline{1, s}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D \times \mathbb{R}^s. \end{aligned} \quad (8.207)$$

Funcția (8.207) satisface următoarele condiții:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F} \in C^1(D \times \mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s); \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^s}; \\ \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_s)}{D(x_1, x_2, \dots, x_s)}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \neq 0, \end{array} \right. \quad (8.208)$$

unde

$$\mathbf{y}_0 = (f_1(\mathbf{x}_0), f_2(\mathbf{x}_0), \dots, f_s(\mathbf{x}_0)) = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0s}).$$

Condițiile (8.208) sunt tocmai ipotezele Teoremei 8.4.3

Conform Teoremei 8.4.3, există  $\delta > 0$  și  $\varepsilon > 0$ , astfel încât

$$B\left((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\right) \times B(\mathbf{x}_0', \varepsilon) \subset D \times \mathbb{R}^s,$$

unde  $\mathbf{x}_0' = (x_{01}, \dots, x_{0s})$ ,  $\mathbf{x}_0'' = (x_{0s+1}, \dots, x_{0n})$ . De asemenea, există funcția vectorială de argument vectorial  $\varphi : B\left((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\right) \rightarrow B(\mathbf{x}_0', \varepsilon)$  cu proprietățile:

$$\varphi(\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0) = \mathbf{x}_0';$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\varphi(\mathbf{x}''), \mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^s; \quad (8.209)$$

$\varphi$  este funcție diferențiabilă pe bila  $B\left((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\right)$ ,

unde  $\mathbf{x}'' = (x_{s+1}, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s)$ .

Să considerăm indicele  $k$  astfel încât  $s < k \leq m$ . Definim funcția  $G_k$  de variabilele  $x_{s+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_s$  prin

$$\begin{aligned} G_k(x_{s+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_s) &= \\ &= f_k\left(\varphi(x_{s+1}, \dots, x_n; y_1, \dots, y_s), x_{s+1}, \dots, x_n\right). \end{aligned} \quad (8.210)$$

Vom arăta că funcția  $G_k$  nu depinde de variabilele  $x_{s+1}, \dots, x_n$ . Pentru a arăta aceasta să derivăm folosind regula lanțului atât coordonatele funcției  $\tilde{\mathbf{F}}$  din (8.209) cât și funcția  $G_k$  din (8.210) în raport cu variabila  $x_j$ , unde  $s < j \leq n$ . Dacă mai ținem cont și de (8.207), obținem

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_j} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial f_2}{\partial x_j} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \frac{\partial \tilde{F}_s}{\partial x_j} = \frac{\partial f_s}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial f_s}{\partial x_j} = 0, \\ \frac{\partial G_k}{\partial x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial f_k}{\partial x_j}, \end{array} \right. \quad (8.211)$$

unde derivatele din membrul întâi sunt calculate în punctul

$$(\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}) \in B\left((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta\right).$$

Ecuatiile (8.211) constituie un sistem liniar și neomogen de  $s+1$  ecuații cu necunoscutele  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_j}$ , despre care știm apriori că are soluții, întrucât funcția  $\varphi$  există conform Teoremei 8.4.3. Rangul sistemului (8.211) este  $s$  în baza lui (8.206). Sistemul este compatibil dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli. În cazul sistemului (8.211), există un singur determinant caracteristic. Prin urmare, obținem

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_s} & \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial G_k}{\partial x_j} \end{array} \right| = 0. \quad (8.212)$$

Aplicând proprietățile determinantilor, din (8.212) deducem

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_s} & \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_s} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_s}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & 0 \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_s} & -\frac{\partial G_k}{\partial x_j} \end{vmatrix} = 0. \quad (8.213)$$

Întrucât  $\text{rang } J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = s$ , orice minor de ordin mai mare cel puțin egal cu  $s+1$  extras din matricea funcțională  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$  este egal cu zero. Prin urmare, primul determinant din membrul întâi al lui (8.213) este nul.

Dezvoltând cel de al doilea determinant din (8.213) după elementele ultimei coloane, obținem

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_s)}{D(x_1, x_2, \dots, x_s)}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = 0. \quad (8.214)$$

Folosind acum (8.206), din (8.214) găsim

$$\frac{\partial G_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = 0, \quad s < j \leq n, \quad \forall (\mathbf{x}'', \mathbf{y}) \in B((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta). \quad (8.215)$$

Egalitatea (8.215) arată că funcția  $G_k$  din (8.210) nu depinde de variabilele  $x_j$ , cu  $s < j \leq n$ , deoarece diferențiala sa redusă în raport cu variabilele  $x_j$ ,  $s < j \leq n$ , este nulă pe mulțimea deschisă  $B((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta)$ .

Prin urmare, funcția  $G_k$  depinde doar de variabilele  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , fapt ce se poate scrie în forma

$$G_k(x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \Phi_k(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (8.216)$$

sau

$$G_k(\mathbf{x}'', \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}). \quad (8.217)$$

Din (8.210) și (8.216), sau (8.217), deducem

$$f_k(\mathbf{x}) = \Phi(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_s(\mathbf{x})), \quad (8.218)$$

oricare ar fi punctul  $\mathbf{x} \in B((\mathbf{x}_0'', \mathbf{y}_0), \delta) \times B(\mathbf{x}_0', \varepsilon) \subset D$ .

În baza Definiției 8.9.1, relația (8.218) demonstrează că oricare din funcțiile  $f_{s+1}, f_{s+1}, \dots, f_n$  depinde de funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_s$ . **q.e.d.**

## 8.10 Coordonate curbilinii în plan

Fie  $D$  o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^2$  cu proprietatea că interiorul ei  $\overset{\circ}{D}$  este o mulțime nevidă, a cărei frontieră este  $(L)$ , deci  $D = \overset{\circ}{D} \cup (L)$ , și fie  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  o altă mulțime închisă în  $\mathbb{R}^2$ , cu aceeași proprietate și care are frontiera  $(\Lambda)$ . Dacă în spațiul afin Euclidian  $\mathbb{E}^2$  se alege reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ , unde  $O$  este originea reperului, iar  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i} = (1, 0), \mathbf{j} = (0, 1)\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^2$ , atunci orice punct  $M \in \mathbb{E}^2$  este unic determinat prin două coordonate carteziene  $x$  și  $y$  care reprezintă mărimile algebrice ale proiecției ortogonale a vectorului

de poziție  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  al punctului  $M$  pe respectiv versorii  $\mathbf{i}$  și  $\mathbf{j}$  ai axelor de coordonate  $Ox$  și  $Oy$  ale reperului cartezian  $\mathcal{R}$ .

**Definiția 8.10.1.** Transformarea  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ , de ecuații

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u, v), \\ y &= \varphi_2(u, v), \end{cases} \quad (8.219)$$

se numește **sistem de coordonate curbilinii** pe mulțimea  $D \subset \mathbb{R}^2$ , dacă restricția funcției  $\varphi$  la mulțimea  $\overset{\circ}{\Delta}$  este un difeomorfism.

Dacă figurăm mulțimea  $D$  în reperul  $Oxy$ , iar mulțimea  $\Delta$  în reperul  $O'uv$ , atunci putem spune că dacă punctul  $M'(u, v)$  parcurge mulțimea  $\Delta$ , punctul corespunzător  $M(x, y)$ , unde valorile lui  $x$  și  $y$  sunt date de (8.219), descrie mulțimea  $D$ .

Deoarece transformarea  $\varphi$  este bijectivă, la două puncte distincte  $M'_1 \in \Delta$  și  $M'_2 \in \Delta$  corespund două puncte distincte  $M_1 \in D$  și  $M_2 \in D$ . Din Teorema 8.8.1 de inversare locală a funcțiilor, rezultă că sistemul de ecuații (8.219), în care  $(u, v) \in \overset{\circ}{\Delta}$ , iar  $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ , definește transformarea inversă  $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\overset{\circ}{D}, \overset{\circ}{\Delta})$ , ale cărei ecuații sunt

$$\begin{cases} u &= f_1(x, y), \\ v &= f_2(x, y). \end{cases} \quad (8.220)$$

Transformarea regulată (8.220) este, de asemenea, un difeomorfism. Matricele jacobiene

$$J_{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

și

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

ale respectiv transformărilor (8.219) și (8.220), sunt matrice pătratice de ordinul doi nesarabile și

$$\det J_{\varphi}(u, v) = \frac{1}{\det J_{\mathbf{f}}(x, y)}, \quad (8.221)$$

oricare ar fi perechea  $(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ , perechea  $(u, v) \in \overset{\circ}{\Delta}$  fiind cea corespunzătoare perechii  $(x, y)$  prin transformarea de ecuații (8.219).

Egalitatea (8.221) poate fi scrisă echivalent în forma

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u, v) \cdot \frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(x, y) = 1. \quad (8.222)$$

Dacă în mulțimea  $\Delta$  se consideră o curbă netedă, sau netedă pe porțiuni  $(\gamma)$ , reprezentată parametric prin

$$(\gamma) : \begin{cases} u &= u(t), \\ v &= v(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}, \quad (8.223)$$

atunci imaginea continuă a curbei  $(\gamma)$  prin transformarea (8.219) este submulțimea  $(\Gamma) = \{M \in \mathbb{E}^2 : M = (x, y)\} \subset D$ , unde

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= \varphi_1(u(t), v(t), \\ y &= \varphi_2(u(t), v(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (8.224)$$

care reprezintă, de asemenea, o curbă netedă, sau netedă pe porțiuni ( $\Gamma$ ), situată în mulțimea  $D$ , deoarece existența și continuitatea derivatelor  $\frac{du}{dt}$ ,  $\frac{dv}{dt}$ , eventual pe porțiuni, induc aceleași proprietăți derivatelor  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$ .

Legătura dintre aceste derivate se deduce prin regula de derivare a funcțiilor reale compuse. Se obține

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t) \\ \frac{dy}{dt}(t) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t). \end{cases} \quad (8.225)$$

Din ecuațiile (8.225) rezultă că unui punct regulat de pe curba ( $\gamma$ ), adică un punct  $(u(t), v(t))$ , în care funcțiile  $u$  și  $v$  sunt continue, derivabile și suma pătratelor derivatelor pozitivă, îi corespunde un punct regulat pe curba ( $\Gamma$ ), iar punctele singulare ale celor două curbe se corespund.

**Teorema 8.10.1.** *Dacă  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  este un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D$ , atunci frontiera ( $\Lambda$ ) a mulțimii  $\Delta$  este transformată în frontiera ( $L$ ) a mulțimii închise  $D$ .*

*Demonstrație.* Procedăm prin reducere la absurd.

În acest sens, presupunem că punctul  $(x_0, y_0) \in (L)$  corespunde unui punct  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$ .

Aplicând teorema funcțiilor implicite sistemului

$$\begin{cases} F_1(x, y; u, v) &= \varphi_1(u, v) - x &= 0, \\ F_2(x, y; u, v) &= \varphi_2(u, v) - y &= 0, \end{cases}$$

se poate defini  $u$  și  $v$  ca funcții de variabilele  $x$  și  $y$  într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$ .

Însă, orice vecinătate a unui punct frontieră conține puncte care nu aparțin lui  $D$  și deci punctul  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$  poate avea o vecinătate inclusă în  $\Delta$  care să nu fie transportată în  $D$ , ceea ce ar contrazice faptul că  $\varphi$  este transformare regulată. **q.e.d.**

Fie  $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$  și  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$  astfel încât

$$x_0 = \varphi_1(u_0, v_0) \text{ și } y_0 = \varphi_2(u_0, v_0).$$

Segmentul de dreaptă  $u = u_0$ , situat în mulțimea  $\Delta$ , este transformat în curba netedă de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u_0, v), \\ y &= \varphi_2(u_0, v), \quad v \in \mathbb{R}, \text{ astfel încât } (u_0, v) \in \Delta, \end{cases} \quad (8.226)$$

situată în mulțimea  $D$ .

Vectorul tangent la curba (8.226), în punctul  $M_0(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{D}$  al ei, este

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = d\varphi((u_0, v_0); \mathbf{j}). \quad (8.227)$$

În mod similar, segmentul de dreaptă  $v = v_0$  din mulțimea  $\Delta$  este transformat în curba netedă

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u, v_0), \\ y &= \varphi_2(u, v_0), \quad u \in \mathbb{R}, \text{ astfel încât } (u, v_0) \in \Delta, \end{cases} \quad (8.228)$$

la care vectorul director al tangentei în  $M_0$  este

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = d\varphi((u_0, v_0); \mathbf{i}). \quad (8.229)$$

Dacă efectuăm produsul vectorial al vectorilor  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$ , găsim

$$\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \mathbf{k}, \quad \text{unde } \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}. \quad (8.230)$$

Deoarece  $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$  rezultă că vectorii  $\mathbf{c}_1$ , și  $\mathbf{c}_2$  sunt necoliniari, sau liniar independenți.

**Definiția 8.10.2.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

Curbele de ecuații parametrice (8.226) și (8.228), situate în domeniul închis  $D$  și în care  $(u_0, v_0)$  este orice punct din  $\overset{\circ}{\Delta}$ , se numesc **curbe de coordonate** pe mulțimea închisă  $D$ .

**Observația 8.10.1.** Deoarece transformarea (8.219) este un difeomorfism pe  $\overset{\circ}{\Delta}$ , există o unică curbă (8.226) care trece printr-un punct  $M(x, y) \in \overset{\circ}{D}$ , obținută dând lui  $u$  o valoare constantă, și o unică curbă de forma (8.228), corespunzătoare unei valori constante a lui  $v$ . În consecință, mărimile  $u$  și  $v$  pot fi privite drept coordonate ale punctelor aparținând mulțimii închise  $D$ , coordonate care sunt diferite de cele carteziane.

**Definiția 8.10.3.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D \subset \mathbb{R}^2$  și perechea  $(u, v) \in \Delta$  căreia îi corespunde punctul  $M(x, y) \in D$ .

Mărimile  $u$  și  $v$  se numesc **coordoneate curbilinii** ale punctului  $M \in D$ .

**Observația 8.10.2.** Din punct de vedere geometric, variabilele  $u$  și  $v$  ale funcției  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$ , care definește un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D$ , pot fi interpretate în două moduri: pe de o parte ele sunt coordonatele punctelor mulțimii închise  $\Delta$  și, pe de altă parte, ele sunt coordonatele curbilinii ale punctelor aparținând mulțimii închise  $D$ .

**Observația 8.10.3.** Orice ecuație de forma  $F(u, v) = 0$ , unde funcția reală  $F$  satisface ipotezele teoremei funcțiilor implicite poate fi interpretată fie ca ecuația în coordonate carteziane a unei curbe  $(\gamma)$ , situată în mulțimea închisă  $\Delta$ , fie ca ecuația în coordonate curbilinii a unei curbe  $(\Gamma)$  care este imaginea în  $D$  a curbei  $(\gamma)$  prin transformarea (8.219).

**Definiția 8.10.4.** Sistemul de coordonate curbilinii pe  $D \subset \mathbb{R}^2$  definit de ecuațiile (8.219) se numește **ortogonal** dacă

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0, \quad \forall (u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta},$$

unde  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$  sunt vectorii introduși în (8.227) și respectiv (8.229).

Pe lângă vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ , punctului  $M_0$  de coordonate curbilinii  $(u_0, v_0)$  îi asociem și numerele reale

$$\begin{cases} g_{11} = \mathbf{c}_1^2 = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_1 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \right)^2, \\ g_{12} = \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0), \\ g_{22} = \mathbf{c}_2^2 = \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_2 = \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \right)^2. \end{cases} \quad (8.231)$$

**Observația 8.10.4.** Dacă sistemul de coordonate curbilinii pe  $D$  este ortogonal, atunci  $g_{12} = 0$ ,  $\forall (u_0, v_0) \in \overset{\circ}{\Delta}$ .

**Definiția 8.10.5.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D \subset \mathbb{R}^2$  care are proprietatea că interiorul ei  $\overset{\circ}{D}$  este mulțime conexă. Numerele pozitive  $h_1, h_2$ , unde

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\|, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\|$$

se numesc **parametrii lui Lamé**<sup>2</sup>, sau, în cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii, **factorii de scală** asociați coordonatelor curbilinii  $(u_0, v_0)$  ale punctului  $M_0$ .

**Observația 8.10.5.** Dacă sistemul de coordonate curbilinii  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  este ortogonal atunci

$$h_1 h_2 = \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \right|. \quad (8.232)$$

Într-adevăr, aceasta rezultă din  $h_1 h_2 = \|\mathbf{c}_1\| \cdot \|\mathbf{c}_2\|$  și faptul că vectorii  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$  sunt ortogonali. În această situație,  $h_1 h_2 = \|\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2\|$ , iar în baza relației (8.230), rezultă (8.232). ■

**Observația 8.10.6.** Noțiunile și rezultatele de mai sus s-au prezentat pentru cazul când mulțimile  $D$  și  $\Delta$  sunt închise, iar  $\overset{\circ}{D}$  și  $\overset{\circ}{\Delta}$  sunt mulțimi nevide. Aceste noțiuni și rezultate se păstrează dacă  $D$  și  $\Delta$  sunt mulțimi oarecare din plan cu precizarea că, din nou,  $\overset{\circ}{D}$  și  $\overset{\circ}{\Delta}$  sunt mulțimi nevide.

### 8.10.1 Coordonate polare în plan

Orice punct  $M$  din spațiul punctual afin Euclidian bidimensional  $\mathbb{E}^2$ , raportat la reperul cartezian  $Oxy$ , este unic determinat de coordonatele carteziene  $x$  și  $y$ . În același timp, orice punct  $M$  din  $\mathbb{E}^2$ , diferit de originea reperului, este unic determinat de distanța sa până la origine, notată cu  $r$ , și unghiul  $\theta \in (-\pi, \pi]$ , sau  $\theta \in [0, 2\pi]$  pe care vectorul de poziție al punctului  $M$  îl face cu o semidreaptă fixată. Cel mai adesea, originea semidreptei, care se numește *pol*, coincide cu cea a reperului cartezian  $Oxy$ , iar semidreapta, numită *axă polară*, are aceeași direcție cu axa absciselor. Deci, versorul axei polare este  $\mathbf{i}$ .

**Definiția 8.10.6.** Ansamblul format dintr-un punct  $O$ , numit **pol**, și o semiaxă  $Ox$ , de versor director  $\mathbf{i}$ , numită **axă polară**, se numește **reper polar în plan**.

<sup>2</sup>Lamé, Gabriel (1795–1870), om de știință francez.



Fiecărui punct  $M \in \mathbb{E}^2$ , cu excepția originii, i se poate atașa fie perechea  $(x, y)$ , formată cu coordonatele carteziane ale punctului, fie perechea  $(r, \theta)$ .

Dacă polul reperului polar este originea  $O$  a reperului cartezian  $Oxy$ , iar axa polară este semi-axa pozitivă a axei absciselor, adică semidreapta  $Ox$ , atunci

$$(x, y) = \overrightarrow{OM} = \varphi(r, \theta), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}), \quad (8.233)$$

unde  $\Delta = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ .

Se constată că

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(r, \theta) &= r \cos \theta, \\ y &= \varphi_2(r, \theta) &= r \sin \theta, \end{cases} \quad (8.234)$$

unde  $(r, \theta) \in \Delta$ , iar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = D$ .

Restricția funcției  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  la domeniul  $\overset{\circ}{\Delta} = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  este difeomorfism, deoarece din (8.234) rezultă că:

- funcția  $\varphi$  este continuă pe  $\Delta$ ;
- funcția  $\varphi$  are derivate parțiale continue pe  $\overset{\circ}{\Delta}$ ;
- matricea jacobiană

$$J\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (8.235)$$

este nesingulară;

- jacobianul transformării  $\varphi$ , într-un punct din interiorul mulțimii  $\Delta$ , este pozitiv

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(r, \theta)}(r, \theta) = r > 0; \quad (8.236)$$

- funcția  $\varphi$  transformă domeniul  $\overset{\circ}{\Delta} = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  în domeniul  $\overset{\circ}{D} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ .

Prin urmare,  $(r, \theta)$  sunt coordonate curbilinii care se numesc *coordonațe polare în plan*.

Curbele de coordonate ale acestui sistem de coordonate curbilinii sunt, pe de o parte, *cercuri concentrice* cu centrul în origine (curbele  $r = r_0 = \text{const.}$ ) și, pe de altă parte, *semidrepte* limitate de origine (curbele  $\theta = \theta_0 = \text{const.}$ ).

Prima coloană a matricei jacobiene din (8.235), în care  $r = r_0 > 0$  și  $\theta = \theta_0 \in (0, 2\pi)$ , reprezintă matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{c}_1$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$ , vector care este tangent la curba de coordonate de ecuație  $\theta = \theta_0$  în punctul  $M_0$  de coordonate curbilinii  $(r_0, \theta_0)$ .

Coloana a doua a aceleiași matrice este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{c}_2$  tangent în  $M_0(r_0, \theta_0)$  la curba de coordonate  $r = r_0$ .

Dacă sensurile de parcurs ale curbelor de coordonate prin  $M_0$  se stabilesc a fi sensurile pozitive de parcurs, adică sensurile imprimate de creșterile parametrilor  $r \in (0, \infty)$  și respectiv  $\theta \in (0, 2\pi)$ , atunci aceste sensuri imprimă sensurile vectorilor  $\mathbf{c}_1$  și  $\mathbf{c}_2$ . Așadar,

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \cos \theta_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \mathbf{j}, \\ \mathbf{c}_2 &= -r_0 \cos \theta_0 \mathbf{i} + r_0 \sin \theta_0 \mathbf{j}. \end{cases} \quad (8.237)$$

Din (8.237) deducem că  $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = 0$ , ceea ce arată că sistemul coordonatelor polare în plan este un sistem ortogonal de coordonate curbilinii. Apoi,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r_0^2. \quad (8.238)$$

Parametrii lui Lamé corespunzătorii sistemului de coordonate polare în plan sunt  $h_1 = 1$  și  $h_2 = r_0$ . Observăm că

$$h_1 h_2 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(r, \theta)}(r_0, \theta_0), \quad \forall r_0 > 0, \quad \forall \theta_0 \in (0, 2\pi). \quad (8.239)$$

Transformarea inversă a transformării (8.234) este funcția vectorială

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}, (0, +\infty) \times (0, 2\pi), \quad (8.240)$$

unde

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \forall \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\} \quad (8.241)$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{dacă } x > 0, \quad y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, \quad y > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{dacă } x < 0, \quad y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0, \quad y < 0, \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{dacă } x > 0, \quad y < 0. \end{cases} \quad (8.242)$$

Geometric,  $f_1(x, y)$  reprezintă distanța  $r$  de la originea reperului cartezian care coincide cu polul *reperului polar* (ansamblu dintre un punct numit pol și o semidreaptă numită axă polară), iar  $f_2(x, y)$  este unghiul, măsurat în sens direct trigonometric, dintre versorul  $\mathbf{i}$  și vectorul de poziție  $\vec{OM}$  a punctului  $M(x, y)$ .

### 8.10.2 Coordonate polare generalizate în plan

Fie  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^*$  și transformarea

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{F}(0, \infty) \times [0, 2\pi), \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}), \\ \begin{cases} x = \varphi_1(\rho, \varphi) = a\rho \cos \varphi, \\ y = \varphi_2(\rho, \varphi) = b\rho \sin \varphi. \end{cases} \end{aligned} \quad (8.243)$$

Funcția  $\varphi$  din relațiile (8.243) este bijectivă, iar restricția sa la mulțimea deschisă  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$  este funcție diferențiabilă și are matricea jacobiană

$$J\varphi(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (8.244)$$

Jacobianul acestei restricții,

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\rho, \varphi)}(\rho, \varphi) = ab\rho,$$

este pozitiv pe mulțimea  $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ .

Prin urmare, (8.243) definește un sistem de coordonate curbilinii în plan.

Curbele, sau liniile de coordonate sunt, pe de o parte, elipse omofocale cu axele de coordonate axe de simetrie și raportul semiaxelor egal cu  $\frac{a}{b}$ , obținute pentru  $\rho = \text{const.}$  și, pe de altă parte, semidrepte limitate de origine care se obțin când  $\varphi = \text{const.}$

Vectorii tangenți la curbele de coordonate care trec prin punctul  $M$  de coordonate curbilinii  $\rho$  și  $\varphi$  sunt

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho, \varphi) = a \cos \varphi \mathbf{i} + b \sin \varphi \mathbf{j}, \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}(\rho, \varphi) = -a\rho \sin \varphi \mathbf{i} + b\rho \cos \varphi \mathbf{j}. \end{cases} \quad (8.245)$$

Mărimile care se determină cu ajutorul vectorilor (8.245) sunt:

$$\begin{cases} g_{11} &= a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi, \\ g_{12} &= (b^2 - a^2) \rho \sin \varphi \cos \varphi \\ g_{22} &= \rho^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_1 &= \|\mathbf{c}_1\| &= \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}, \\ h_2 &= \|\mathbf{c}_2\| &= \rho \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}. \end{cases}$$

Sistemul de coordonate curbilinii în plan definit de (8.243) nu este ortogonal fiindcă  $g_{12} \neq 0$ , iar dacă  $a = b = 1$  se reduce la sistemul coordonatelor polare în plan.

Sistemul de coordonate curbilinii definit de (8.243) se numește *sistemul coordonatelor polare generalizate în plan*.

**Exemplul 8.10.1.** *Funcția vectorială de argument vectorial*

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(D, \Delta),$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) &= \frac{y}{x}, \\ f_2(x, y) &= \frac{x^2}{y}, \end{cases} \quad (8.246)$$

unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}, \quad \Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\},$$

stabilește un sistem de coordonate curbilinii pe  $D$ .

Într-adevăr, funcția  $\mathbf{f}$  din relațiile (8.246) este un difeomorfism de la  $D$  în  $\Delta$ .

Matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{f}$  este

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix},$$

din care rezultă că jacobianul este  $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(x, y) = -\frac{1}{y} < 0$ .

Punând  $u = \frac{y}{x}$ , respectiv  $v = \frac{x^2}{y}$ , și considerând pe rând că  $u$  și  $v$  sunt constante pozitive, constatăm că liniile de coordonate în  $D$  sunt semidrepte deschise cu vârful în origine situate în primul cadran al reperului, respectiv segmente de parabolă cu vârful în origine, având axa de simetrie axa  $Oy$ , situate în primul cadran

Transformarea inversă a transformării regulate (8.246) este dată de

$$\begin{cases} x &= uv, \\ y &= u^2 v, \quad u > 0, \quad v > 0. \end{cases} \quad (8.247)$$

Folosind (8.247), putem determina vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ , tangenți curbilor de coordonate, după care se pot determina elementele  $g_{ij}$ , precum și factorii de scală  $h_1, h_2$ .

Deoarece  $g_{12} \neq 0$ , sistemul de coordonate curbilinii pe mulțimea  $D$ , definit de ecuațiile (8.247), nu este un sistem ortogonal. ■

## 8.11 Coordonate curbilinii în $\mathbb{R}^3$ .

Considerăm două configurații ale spațiului punctual afin Euclidian tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , care au ca spațiu vectorial asociat spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^3$ , raportat la baza canonică  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ . În una din aceste configurații considerăm reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\} = Oxyz$  și mulțimea  $V$ ,  $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$ , cu frontiera  $S$  o suprafață netedă, sau netedă pe porțiuni, iar în celălaltă configurație considerăm reperul cartezian  $\mathcal{R}' = \{O'; \mathcal{B}\} = O'uvw$  și mulțimea  $\Omega$ ,  $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$ , a cărei frontieră  $\Sigma$  este de asemenea o suprafață netedă, sau netedă pe porțiuni.

**Definiția 8.11.1.** Transformarea bijectivă  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(\Omega, V)$  cu proprietatea că restricția sa la mulțimea  $\overset{\circ}{\Omega}$  este un difeomorfism se numește **sistem de coordonate curbilinii** pe mulțimea  $V$ .

Corespondența biunivocă între punctele  $M(x, y, z) \in V$  și  $M'(u, v, w) \in \Omega$  poate fi exprimată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x &= \varphi_1(u, v, w), \\ y &= \varphi_2(u, v, w), \\ z &= \varphi_3(u, v, w), \end{cases} \quad (8.248)$$

sau, cu ajutorul funcției inverse  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{F}(\overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{\Omega})$ , prin ecuațiile

$$\begin{cases} u &= f_1(x, y, z), \\ v &= f_2(x, y, z), \\ w &= f_3(x, y, z), \end{cases} \quad (8.249)$$

care este, de asemenea, difeomorfism de la mulțimea  $\overset{\circ}{V}$  la mulțimea  $\overset{\circ}{\Omega}$ .

Funcțiile  $\mathbf{f}$  și  $\varphi$  satisfac relația

$$\mathbf{f} \circ \varphi = \mathbf{1}_{\overset{\circ}{\Omega}}, \quad \varphi \circ \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{1}_{\overset{\circ}{V}}, \quad (8.250)$$

în care prin  $\mathbf{1}_{\overset{\circ}{\Omega}}$  și  $\mathbf{1}_{\overset{\circ}{V}}$  s-au notat funcțiile identice pe  $\overset{\circ}{\Omega}$  și respectiv  $\overset{\circ}{V}$ .

Faptul că  $\varphi$  este difeomorfism conduce la afirmațiile:

- dacă  $M'(u, v, w) \in \overset{\circ}{\Omega}$ , atunci  $\varphi(u, v, w) \in \overset{\circ}{V}$ ;
- o suprafață netedă, sau netedă pe porțiuni din  $\Omega$ , de ecuație carteziană implicită

$$F(u, v, w) = 0, \quad \text{unde } F \in C^1(\overset{\circ}{\Omega}), \quad (\nabla F)(u, v, w) \neq \mathbf{0}, \quad (8.251)$$

este transportată prin aplicația  $\varphi$  într-o suprafață netedă, sau netedă pe porțiuni din  $V$ ;

- orice curbă netedă, sau netedă pe porțiuni  $(\gamma)$  din  $\Omega$  de ecuații implicite

$$(\gamma) : \begin{cases} F_1(u, v, w) = 0, \\ F_2(u, v, w) = 0, \end{cases} \quad (8.252)$$

unde  $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ,  $\mathbf{F} \in C^1(\overset{\circ}{\Omega})$ , cu  $\text{rang } J_{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = 2$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \overset{\circ}{\Omega}$ , este dusă prin transformarea  $\varphi$  într-o curbă  $(\Gamma)$  inclusă în  $V$  și care este de asemenea netedă, sau netedă pe porțiuni;

- punctele de pe frontieră  $\Sigma$  a lui  $\Omega$  care aparțin lui  $\overset{\circ}{\Omega}$  sunt transportate prin (9.1) în puncte ale frontierei  $S$  a lui  $V$  care aparțin lui  $\overset{\circ}{V}$ .

Fie acum  $M'_0(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$  un punct oarecare dar fixat din interiorul lui  $\Omega$  și  $J_{\varphi}(\mathbf{u}_0)$ , unde  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ , matricea jacobiană a funcției  $\varphi$  în acest punct. Avem

$$J_{\varphi}(\mathbf{u}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\mathbf{u}_0) & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \end{pmatrix}. \quad (8.253)$$

Matricea jacobiană prezentată în (8.253) este nesingulară și determinantul ei este jacobianul

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0) \neq 0. \quad (8.254)$$

Să considerăm cazul particular în care ecuația (8.251) este de forma

$$w - w_0 = 0, \quad (8.255)$$

care reprezintă în  $\Omega$  porțiunea de plan care trece prin punctul  $M'_0(u_0, v_0, w_0)$  și este paralel cu planul  $O'uv$ .

În mulțimea  $V$ , ecuația (8.255) reprezintă o suprafață netedă de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \varphi(u, v, w_0), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v, w_0) \in \Omega.$$

Această suprafață trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  care corespunde prin funcția  $\varphi$  punctului  $M'_0(u_0, v_0, w_0)$ .

În mod similar, suprafeței

$$u - u_0 = 0, \quad (8.256)$$

îi corespunde o suprafață care trece prin  $M_0$  și are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \varphi(u_0, v, w), \quad (v, w) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v, w) \in \Omega,$$

iar suprafeței

$$v - v_0 = 0, \quad (8.257)$$

îi corespunde în  $V$  o a treia suprafață care trece prin  $M_0$  și care are ecuația

$$\mathbf{r} = \varphi(u, v_0, w), \quad (u, w) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w) \in \Omega.$$

**Definiția 8.11.2.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega, V)$  un sistem de coordonate curbilini pe mulțimea  $V \subset \mathbb{R}^3$ . Suprafețele de ecuații (8.255), (8.256) și (8.257) se numesc **suprafețe de coordonate** care trec prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\circ}{V}$  corespunzător punctului  $M'_0(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$  prin transformarea  $\varphi$ .

Să luăm acum în (8.252) drept funcții  $F_1$  și  $F_2$  oricare două din funcțiile care intră în (8.255) – (8.257). În acest fel se obțin curbele:

$$\begin{cases} v - v_0 = 0, \\ w - w_0 = 0; \end{cases} \quad (8.258)$$

$$\begin{cases} w - w_0 = 0, \\ u - u_0 = 0; \end{cases} \quad (8.259)$$

$$\begin{cases} u - u_0 = 0, \\ v - v_0 = 0. \end{cases} \quad (8.260)$$

Ecuțiile fiecăreia din curbele (8.258) – (8.260) pot fi scrise în forme vectoriale corespunzătoare, echivalente, după cum urmează:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u, v_0, w_0), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u, v_0, w_0) \in \Omega; \quad (8.261)$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v, w_0), \quad v \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v, w_0) \in \Omega; \quad (8.262)$$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}(u_0, v_0, w), \quad w \in \mathbb{R}, \quad \text{astfel încât} \quad (u_0, v_0, w) \in \Omega. \quad (8.263)$$

**Definiția 8.11.3.** Fie  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{F}(\Omega, V)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea  $V \subset \mathbb{R}^3$ .

Curbele de ecuații (8.258), (8.259), (8.260), situate în mulțimea  $V$ , în care  $(u_0, v_0, w_0)$  este orice punct din  $\overset{\circ}{\Omega}$ , se numesc **curbe de coordonate** pe mulțimea  $V$ .

**Observația 8.11.1.** Fiecare dintre curbele de coordonate poate fi reprezentată prin ecuația vectorială corespunzătoare extrasă din ecuațiile (8.261), (8.262), (8.263).

**Observația 8.11.2.** Oricare dintre curbele de coordonate care trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \overset{\circ}{V}$ , corespunzător punctului  $M'_0(u_0, v_0, w_0) \in \overset{\circ}{\Omega}$ , este intersecția a două dintre suprafețele de coordonate care trec prin punctul  $M_0$ .

Tangenta în  $M_0$  la curba de (8.258) are vectorul director

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial u}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(\mathbf{u}_0) \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(\mathbf{u}_0) \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u}(\mathbf{u}_0) \mathbf{k}. \quad (8.264)$$

În mod similar vectorii:

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial v}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(\mathbf{u}_0) \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(\mathbf{u}_0) \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}(\mathbf{u}_0) \mathbf{k}; \quad (8.265)$$

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial w}(\mathbf{u}_0) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial w}(\mathbf{u}_0) \mathbf{k}, \quad (8.266)$$

reprezintă vectorii directori ai tangențelor în  $M_0$  la respectiv curbele de coordonate (8.259) și (8.260).

**Observația 8.11.3.** Matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\mathbf{c}_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ , este coloana de indice  $j$  din matricea jacobiană (8.253).

**Observația 8.11.4.** Deoarece matricea jacobiană (8.253) are rangul 3, prin fiecare punct  $M_0 \in \overset{\circ}{V}$  trec trei curbe de coordonate, de formele (8.261), (8.262), (8.263) și trei suprafețe de coordonate de ecuații date în (8.255), (8.256) și (8.257).

**Observația 8.11.5.** Vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  din respectiv relațiile (8.264), (8.265), (8.266) sunt liniar independenți și, deoarece sunt în număr egal cu dimensiunea spațiului  $\mathbb{R}^3$ , formează o bază în  $\mathbb{R}^3$ , numită **bază locală** în punctul  $M_0$ .

Într-adevăr, combinația liniară  $\lambda_1 \mathbf{c}_1 + \lambda_2 \mathbf{c}_2 + \lambda_3 \mathbf{c}_3 = \mathbf{0}$  are loc numai pentru  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \mathbf{0}$  deoarece rangul matricei jacobiene (9.6) este trei, rezultat care demonstrează că vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  sunt liniar independenți. ■

**Observația 8.11.6.** Produsul mixt  $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$  al vectorilor  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$  și  $\mathbf{c}_3$  este dat de

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3) = \mathbf{c}_1 \cdot (\mathbf{c}_2 \times \mathbf{c}_3) = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0).$$

Într-adevăr, această afirmație rezultă din definiția produsului mixt a trei vectori (vezi Definiția 5.1.2 și relația (1.1.12)) și din cea a jacobianului unei transformări. ■

**Observația 8.11.7.** Având în vedere semnificația geometrică a produsului mixt a trei vectori, valoarea absolută a jacobianului (8.254) reprezintă volumul paralelipipedului construit pe reprezentanții vectorilor  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  în punctul  $M_0$  al spațiului raportat la reperul cartezian rectangular  $Oxyz$ .

Paralelipipedul din spațiul tridimensional Euclidian construit pe reprezentanții în punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  ai vectorilor  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ , raportat la reperul  $Oxyz$ , reprezintă transformatul cubului din spațiul raportat la reperul  $O'uvw$ , cu un vârf în punctul  $M'_0(u_0, v_0, w_0)$ , muchiile care pornesc din acest vârf fiind paralele cu axele reperului  $O'uvw$ .

Observăm că prin difeomorfismul  $\varphi$ , de fapt prin transformarea liniară diferențială de ordinul întâi a funcției  $\varphi$ , în punctul  $M'_0(u_0, v_0, w_0)$ , se obțin vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$

$$d\varphi(\mathbf{u}_0; \mathbf{i}) = \mathbf{c}_1, \quad d\varphi(\mathbf{u}_0; \mathbf{j}) = \mathbf{c}_2, \quad d\varphi(\mathbf{u}_0; \mathbf{k}) = \mathbf{c}_3. \quad (8.267)$$

Când paralelipipedul din reperul  $O'uvw$  este unul *elementar*, sau *infinitesimal*, adică un cub cu unul din vârfuri în punctul  $M'_0$  și muchiile din  $M'_0$  reprezentanții în acest punct ai respectiv vectorilor  $\mathbf{i}du, \mathbf{j}dv, \mathbf{k}dw$ , de volum  $du dv dw$ , atunci paralelipipedul corespunzător din reperul  $Oxyz$  are muchiile din vârful  $M_0$  reprezentanții în  $M_0$  ai respectiv vectorilor  $du\mathbf{c}_1, dv\mathbf{c}_2$  și  $dw\mathbf{c}_3$  și volumul egal cu

$$\left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}_0) \right| du dv dw.$$

**Definiția 8.11.4.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega, V)$ , un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea  $V \subset \mathbb{R}^3$ .

Terna  $(u, v, w) \in \Omega$  corespunzătoare punctului  $M(x, y, z) \in V$  prin aplicația  $\varphi$  se numește terna **coordonatelor curbilinii ale punctului**  $M \in V$ .

**Observația 8.11.8.** Orice ecuație de forma  $F(u, v, w) = 0$ , unde funcția reală  $F$  satisface ipotezele teoremei funcțiilor implicite, este fie ecuația în coordonate carteziene a unei suprafețe  $(\Sigma)$ , situată în mulțimea  $\Omega$ , fie ecuația în coordonate curbilinii a unei suprafețe  $(S)$  care este imaginea în  $V$  a suprafeței  $(\Sigma)$  prin transformarea (8.248).

**Definiția 8.11.5.** Sistemul de coordonate curbilinii pe  $V \subset \mathbb{R}^3$  definit de ecuațiile (8.248) se numește **ortogonal** dacă

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0, \quad \forall (u, v, w) \in \overset{\circ}{\Omega}, \quad i \in \overline{1, 3}, \quad j \in \overline{1, 3}, \quad i \neq j, \quad (8.268)$$

unde

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{c}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{c}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial w}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} = (u, v, w) \in \overset{\circ}{\Omega}. \quad (8.269)$$

Pe lângă vectorii  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ , punctului  $M$  de coordonate curbilinii  $(u, v, w)$  îi asociem și numerele reale

$$g_{ij} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j, \quad (8.270)$$

unde indicii  $i$  și  $j$  iau toate valorile de la 1 la 3.

**Definiția 8.11.6.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega, V)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea  $V \subset \mathbb{R}^3$  și  $M$  un punct arbitrar din  $\overset{\circ}{V}$  de coordonate curbilinii  $u, v, w$ . Matricea pătratică simetrică de ordinul al treilea  $G = \|g_{ij}\|_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$ , unde elementele  $g_{ij}$  sunt date de (8.270), se numește **tensor metric local** în punctul  $M$ .

**Observația 8.11.9.** Elementul de pe linia  $i$  și coloana  $j$  al matricei  $G$  din Definiția 8.11.6 este suma produselor elementelor corespunzătoare de pe coloanele  $i$  și  $j$  ale matricei jacobiene  $J_\varphi(\mathbf{u})$ .

**Observația 8.11.10.** Un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea  $V \subset \mathbb{R}^3$  este ortogonal dacă și numai dacă tensorul metric local are formă diagonală în orice punct din interiorul acelei mulțimi.

**Observația 8.11.11.** Sistemul de coordonate carteziene în spațiu este un sistem ortogonal de coordonate curbilinii cu tensorul metric egal cu matricea unitate de ordinul trei.

O observație similară se poate face în legătură cu coordonatele carteziene din plan. Tensorul metric al unui sistem cartezian de coordonate este matricea unitate de ordinul doi.

**Definiția 8.11.7.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\Delta, D)$  un sistem de coordonate curbilinii pe mulțimea închisă  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Numerele pozitive  $h_1 = \|\mathbf{c}_1\|$ ,  $h_2 = \|\mathbf{c}_2\|$ ,  $h_3 = \|\mathbf{c}_3\|$ , unde vectorii  $\mathbf{c}_1$ ,  $\mathbf{c}_2$  și  $\mathbf{c}_3$  sunt definiți de (9.19) se numesc **parametrii lui Lamé**, sau, în cazul când sistemul de coordonate curbilinii este ortogonal, **factorii de scală** asociați coordonatelor curbilinii  $(u, v, w)$  în punctul  $M$ .

Denumirea de factori de scală pentru parametrii lui Lamé în cazul coordonatelor curbilinii ortogonale poate fi motivată. În acest scop, considerăm paralelipipedul curbiliniu infinitezimal cu două din vârfurile opuse în punctele  $M(u, v, w) \in \overset{\circ}{V}$  și  $N(u + du, v + dv, w + dw) \in \overset{\circ}{V}$ , care este transformatul prin aplicația  $\varphi \in \mathcal{F}(\Omega, V)$  a paralelipipedului infinitezimal dreptunghic cu muchiile paralele cu axele reperului  $O'uvw$  și cu două din vârfurile opuse în  $M'(u, v, w) \in \overset{\circ}{\Omega}$  și  $N'(u + du, v + dv, w + dw)$ .

Considerăm muchia  $\widehat{MM}_1$  a paralelipipedului curbiliniu, unde  $M_1(u + du, v, w)$ . Notând cu  $x, y, z$  coordonatele carteziene ale punctului  $M$  și cu  $x + dx, y + dy, z + dz$  pe acelea ale lui  $M_1$ , atunci

$$d\ell_1 = \|\overrightarrow{MM}_1\| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



și, fiindcă această lungime este infinitezimală, poate fi considerată în același timp lungimea muchiei  $\widehat{MM}_1$  a paralelipipedului infinitezimal.

Deoarece  $v$  și  $w$  sunt constante pe  $\widehat{MM}_1$ , coordonatele  $x, y, z$  ale unui punct de pe această muchie sunt funcții numai de parametrul  $u$  și, în consecință,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

din care deducem că

$$d\ell_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} du. \quad (8.271)$$

Să observăm că radicalul din (8.271) este parametrul lui Lamé  $h_1$ .

În mod similar, pentru lungimile  $d\ell_2$  și  $d\ell_3$  ale muchiilor  $\widehat{MM}_2$  și  $\widehat{MM}_3$ , obținem expresiile:

$$\begin{aligned} d\ell_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2} dv; \\ d\ell_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2} dw. \end{aligned}$$

Așadar, putem scrie

$$d\ell_1 = h_1 du, \quad d\ell_2 = h_2 dv, \quad d\ell_3 = h_3 dw. \quad (8.272)$$

Expresiile (8.272) motivează denumirea de factori de scală pentru parametrii lui Lamé în cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii deoarece înmulțirea creșterilor coordonatelor curbilinii  $u, v, w$  cu respectiv factorii  $h_1, h_2, h_3$  conduce la creșterile parametrilor  $\ell_1, \ell_2, \ell_3$  care sunt lungimi de arc ale curbelor de coordonate.

Datorită faptului că sistemul de coordonate curbilinii folosit aici este ortogonal, aria  $d\sigma_1$  a feței  $\widehat{MM}_2N_1M_3$  a paralelipipedului curbiliniu infinitezimal este egală cu produsul dintre  $d\ell_2$  și  $d\ell_3$ , adică

$$d\sigma_1 = h_2 h_3 dv dw. \quad (8.273)$$

În mod similar, ariile celorlalte două fețe ale paralelipipedului care pornesc din punctul  $M$  sunt exprimate prin:

$$d\sigma_2 = h_3 h_1 dw du; \quad d\sigma_3 = h_1 h_2 du dv. \quad (8.274)$$

În sfârșit, volumul  $d\tau$  a paralelipipedului infinitezimal din spațiul  $Oxyz$  este

$$d\tau = d\ell_1 d\ell_2 d\ell_3 = h_1 h_2 h_3 du dv dw = \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(u, v, w)}(\mathbf{u}) \right| du dv dw. \quad (8.275)$$

În cazul unui sistem ortogonal de coordonate curbilinii baza locală în fiecare punct este ortogonală. Vectorii

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \frac{1}{h_1} \cdot \mathbf{c}_1, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \frac{1}{h_2} \cdot \mathbf{c}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \frac{1}{h_3} \cdot \mathbf{c}_3, \quad (8.276)$$

constituie o bază locală ortonormată în punctul  $M \in \overset{\circ}{V}$  și deci orice vector definit în punctul  $M$  de coordonate curbilinii  $u, v, w$  poate fi exprimat ca o combinație liniară de vectorii sistemului (8.276).

### 8.11.1 Coordonate polare în spațiu, sau coordonate sferice

Considerăm un punct  $M(x, y, z) \in E^3$ . Fie  $r$  distanța de la acest punct la originea  $O$  a reperului cartezian  $Oxyz$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  unghiul dintre raza vectorie  $\vec{r} = \vec{OM}$  a punctului  $M$  și versorul  $\mathbf{k}$  al axei  $Oz$  și  $\varphi \in [0, 2\pi]$  unghiul orientat pe care versorul  $\mathbf{i}$  al axei  $Ox$  îl face cu proiecția ortogonală a vectorului  $\mathbf{r}$  pe planul  $Oxy$ . Dacă

punctul  $M$  nu se află pe axa  $z'Oz$ , atunci poziția sa este unic determinată de numerele  $r, \theta$  și  $\varphi$ . Aceste trei numere definesc un sistem ortogonal de coordonate curbilinii în  $\mathbb{R}^3$  mai puțin punctele de pe axa cotelor. Într-adevăr, dacă notăm cu  $M'$  proiecția ortogonală a punctului  $M$  pe planul  $Oxy$  și cu  $M_1, M_2, M_3$  proiecțiile aceluiași punct pe axele de coordonate ale reperului  $Oxyz$ , atunci

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM_3} = \\ &= \|\overrightarrow{OM'}\| \cos \varphi \mathbf{i} + \|\overrightarrow{OM'}\| \sin \varphi \mathbf{j} + \|\overrightarrow{OM}\| \cos \theta \mathbf{k} = \\ &= \|\overrightarrow{OM}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cos \varphi \mathbf{i} + \|\overrightarrow{OM}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sin \varphi \mathbf{j} + \|\overrightarrow{OM}\| \cos \theta \mathbf{k} = \\ &= r \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k},\end{aligned}$$

de unde, ținând cont de unicitatea exprimării unui vector într-o bază, rezultă

$$\begin{cases} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{cases} \quad (8.277)$$

unde

$$(r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi) = \Omega. \quad (8.278)$$

Astfel, am definit o transformare de la mulțimea  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , definită în (8.278), în mulțimea  $V = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ .

Axa cotelor este exclusă din această transformare pentru motivul că pentru orice  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , avem

$$\varphi(r, 0, 0) = \varphi(r, 0, \varphi), \quad \varphi(r, \pi, 0) = \varphi(r, \pi, \varphi),$$

ceea ce ar însemna că transformarea  $\varphi$  nu ar mai fi injectivă, deci nici bijectivă.

În afirmațiile de mai sus am subînțeles că

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  și

$$\begin{cases} \varphi_1(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ \varphi_2(r, \theta, \varphi) &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ \varphi_3(r, \theta, \varphi) &= r \cos \theta. \end{cases}$$

Aceste funcții sunt de clasă  $C^\infty$  pe  $\overset{\circ}{\Omega}$  și matricea jacobiană a funcției  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  este

$$J_\varphi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.279)$$

Jacobianul transformării  $\varphi$  este pozitiv în orice punct din interiorul mulțimii  $\Omega$  și are valoarea

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(r, \theta, \varphi)}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta. \quad (8.280)$$

Prin urmare, restricția funcției  $\varphi$  la interiorul mulțimii  $\Omega$  este un difeomorfism și deci (8.277) definește un sistem de coordonate curbilinii în spațiul Euclidian tridimensional raportat la un reper cartezian din care s-a scos axa cotelor, care se numește *sistemul coordonatelor polare în spațiu*, sau *sistemul coordonatelor sferice*.

Interiorul mulțimii  $\Omega$  din acest exemplu este un produs cartezian de intervale deschise în  $\mathbb{R}$ , și anume  $\overset{\circ}{\Omega} = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , iar imaginea prin difeomorfismul  $\varphi$  din (8.277) a acestei mulțimi este mulțimea  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  care este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^3$ . Într-un punct  $M_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{M(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  care are coordonatele sferice  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ , coloanele matricei  $J_\varphi(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  definesc vectorii

$$\begin{cases} \mathbf{c}_1 &= \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \mathbf{j} + \cos \theta_0 \mathbf{k} = \frac{1}{r_0} \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{c}_2 &= r_0 \cos \theta_0 \sin \varphi_0 \mathbf{j} - r_0 \sin \theta_0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{c}_3 &= -r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \mathbf{i} + r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \mathbf{j}, \end{cases} \quad (8.281)$$

care sunt tangenți la respectiv liniile de coordonate (vezi și (8.285)):  $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0; r = r_0, \varphi = \varphi_0; r = r_0, \theta = \theta_0$ .

Sistemul de vectori  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  este ortogonal deoarece  $g_{ij} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$  pentru  $i \neq j$ .

Factorii de scală în punctul  $M_0$  sunt

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\| = 1, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\| = r_0; \quad h_3 = \|\mathbf{c}_3\| = r_0 \sin \theta_0. \quad (8.282)$$

Din (8.280) și (8.282) deducem că

$$h_1 h_2 h_3 = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(r, \theta, \varphi)}(r_0, \theta_0, \varphi_0) = r_0^2 \sin \theta_0. \quad (8.283)$$

Folosind acum relațiile (8.283) și (8.275) putem afirma că paralelipipedul elementar din  $\overset{\circ}{\Omega}$ , de volum egal cu  $drd\theta d\varphi$ , este transformat în paralelipipedul infinitezimal din  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$  al cărui volum este

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (8.284)$$

Suprafețele de coordonate care trec prin punctul  $M_0$  nesituat pe axa cotelor sunt:

- sfera de rază  $r_0$  cu centrul în origine, de ecuație curbilinie  $r = r_0$ ;
- semiplanul limitat de axa  $z'Oz$  care face unghiul  $\varphi_0$  cu planul  $Ozx$ , de ecuație curbilinie  $\varphi = \varphi_0$ ;
- semipânza conică cu vârful în origine, cu axa  $Oz$  ca axă de simetrie și unghiul de la vârful conului egal cu  $2\theta_0$ , de ecuație curbilinie  $\theta = \theta_0$ .

Curbele de coordonate care trec prin punctul  $M_0$  de coordonate curbilinii  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  sunt:

- semidreaptă limitată de origine care face unghiul  $\theta_0$  cu axa  $Oz$  și a cărei proiecție ortogonală pe planul  $Oxy$  face cu axa  $Ox$  unghiul  $\varphi_0$ ;
- semicerc (*meridian*) cu diametrul, de lungime  $2r_0$ , situat pe axa  $z'Oz$  și centrul în origine, al cărui plan face unghiul  $\varphi_0$  cu planul  $Oxz$ ;
- cerc cu centrul pe  $Oz$  al cărui plan este perpendicular pe aceasta și având raza egală cu  $r_0 \sin \theta_0$ .

Ecuatiile în coordonate curbilinii ale acestor curbe de coordonate sunt, în ordinea prezentată mai sus, date de:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \varphi = \varphi_0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} r = r_0 \\ \theta = \theta_0 \end{cases}. \quad (8.285)$$

Oricare dintre curbele de coordonate (8.285), care trece prin  $M_0$ , este intersecția a două suprafețe de coordonate care trec prin acel punct.

Inversa transformării (8.277) este

$$r = f_1(x, y, z), \quad \theta = f_2(x, y, z), \quad \varphi = f_3(x, y, z), \quad (8.286)$$

unde

$$f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (8.287)$$

$$f_2(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (8.288)$$

$$f_3(x, y, z) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } y \geq 0 \text{ și } x^2 + y^2 > 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } y < 0 \text{ și } x^2 + y^2 > 0. \end{cases} \quad (8.289)$$

Relațiile (8.286), în care valorile funcțiilor care intervin sunt date în (8.287) – (8.289), reprezintă legătura dintre coordonatele polare și cele carteziane.

Remarcăm că pentru punctele de pe axa  $z'Oz$ ,  $\theta$  este 0, sau  $\pi$ , după cum punctul se află pe semiaxa pozitivă, sau pe cea negativă a axei cotelor, iar unghiul  $\varphi$  este nedeterminat.

Punctele din semiplanul  $y = 0$ ,  $x \geq 0$  au coordonata  $\varphi$  comună și anume  $\varphi = 0$ .

Datorită aplicațiilor coordonatelor sferice în astronomie, geodezie, etc, coordonata  $\theta$  se numește *colatitudine*, iar coordonata  $\varphi$  se numește *longitudine*.

Din considerentele de mai sus putem afirma:

- $\mathbf{c}_1$  este vector normal la suprafața de coordonate  $r = r_0$  în punctul  $M_0$  al suprafeței;
- vectorul  $\mathbf{c}_2$  este normal la conul  $\theta = \theta_0$ , cea de a doua suprafață de coordonate care trece prin punctul  $M_0$ ;
- $\mathbf{c}_3$  este vector normal în  $M_0$  la suprafața de coordonate de ecuație  $\varphi = \varphi_0$ .

Prin vector normal la o suprafață într-un punct al ei se înțelege vectorul director al dreptei perpendiculare pe planul tangent al suprafeței în acel punct.

### 8.11.2 Coordonate semipolare în spațiu, sau coordonate cilindrice

Considerăm spațiul afin punctual Euclidian tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , raportat la reperul cartezian  $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\} = Oxyz$ , unde  $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  este baza canonică din spațiul vectorial asociat  $\mathbb{R}^3$ .

Introducem mărimile:

- $\rho \in (0, \infty)$ , distanța de la punctul  $M(x, y, z)$ , nesituat pe axa  $z'Oz$ , la axa cotelor;
- $\theta \in [0, 2\pi)$ , unghiul, măsurat în sens direct trigonometric în planul  $Oxy$ , pe care proiecția razei vectoriale  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  îl face cu versorul  $\mathbf{i}$  al axei  $x'Ox$ .

Coordonatele carteziane ale punctului  $M$  se exprimă în mod unic ca funcții de variabilele  $\rho, \theta$  și  $z$  prin

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z. \quad (8.290)$$

**Observația 8.11.12.** Ecuațiile (8.290) stabilesc un sistem ortogonal de coordonate curbilinii pe mulțimea  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ .

Într-adevăr, dacă notăm

$$\Omega = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}, \quad (8.291)$$

atunci transformarea

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}), \quad (8.292)$$

unde

$$\begin{cases} \varphi_1(\rho, \theta, z) &= \rho \cos \theta, \\ \varphi_2(\rho, \theta, z) &= \rho \sin \theta, \\ \varphi_3(\rho, \theta, z) &= z, \end{cases}$$

este de clasă  $C^\infty$  pe  $\overset{\circ}{\Omega} = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ .

Deoarece matricea jacobiană a transformării (8.292) de ecuații (8.290)

$$J\varphi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.293)$$

este o matrice nesingulară pe  $\overset{\circ}{\Omega}$ , ecuațiile (8.290) definesc un sistem de coordonate curbilinii pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$ , numit *sistem de coordonate semipolare în spațiu*, sau *sistemul coordonatelor cilindrice*.

Numerele  $\rho$ ,  $\theta$  și  $z$ , introduse mai sus, se numesc *coordonațele cilindrice* ale punctului  $M(x, y, z)$ .

Ecuațiile (8.290) stabilesc legătura dintre coordonatele carteziene și cele cilindrice ale unui punct din spațiu nesituat pe axa cotelor.

Punctele de pe axa cotelor au  $\rho = 0$ ,  $z \in \mathbb{R}$  însă  $\theta$  este nedeterminat.

Jacobianul transformării (8.292) este

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\rho, \theta, z)}(\rho, \theta, z) = \rho > 0, \quad \forall (\rho, \theta, z) \in \overset{\circ}{\Omega}.$$

În acest sistem, suprafețele de coordonate corespunzătoare sistemului de coordonate cilindrice sunt:

( $\alpha$ ) *cilindrii circulari coaxiali*, cu axa de rotație axa  $z'Oz$ , de ecuații  $\rho = \text{const.}$ , unde  $0 < \rho < \infty$ ;

( $\beta$ ) *semiplane mărginite* de axa  $z'Oz$ , de ecuații  $\theta = \text{const.}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ;

( $\gamma$ ) *plane* paralele cu planul  $Oxy$ , de ecuații  $z = \text{const.}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Curbele de coordonate care trec prin punctul  $M_0$  de coordonate semipolare  $(\rho_0, \theta_0, z_0)$  precum și vectorii lor directori sunt:

(a) *semidreapta* perpendiculară pe  $z'Oz$ , de ecuații

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ z = z_0, \end{cases}$$

limitată de un punct de pe această axă, de vector director

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, z_0) = \cos \theta_0 \mathbf{i} + \sin \theta_0 \mathbf{j};$$

(b) *cercul* de rază  $\rho_0$  cu centrul în punctul  $(0, 0, z_0)$ , situat în planul  $z = z_0$ , paralel cu planul  $Oxy$  și al cărui vector tangent în  $M_0$  este

$$\mathbf{c}_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0, z_0) = -\rho_0 \sin \theta_0 \mathbf{i} + \rho_0 \cos \theta_0 \mathbf{j};$$

(c) *dreapta* paralelă cu  $z'Oz$  având sensul vectorului

$$\mathbf{c}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\rho_0, \theta_0, z_0) = \mathbf{k}.$$

Coloanele coordonatelor vectorilor  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ , pentru acest sistem de coordonate curbilinii, sunt respectiv prima, a doua și a treia coloană a matricei jacobiene a funcției  $\varphi$  din (8.292), calculată în punctul  $M_0$ .

Sistemul  $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$  ce conține vectorii tangenți respectiv la curbele, sau liniile de coordonate descrise mai sus, este un sistem ortogonal de vectori, deoarece  $\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = 0$ , pentru  $i \neq j$ .

Factorii de scală, calculați într-un punct arbitrar  $M$ , nesituat în semiplanul  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ , deci care are coordonatele cilindrice  $(\rho, \theta, z)$ , unde

$$\rho \in (0, +\infty), \quad \theta \in (0, 2\pi), \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

sunt

$$h_1 = \|\mathbf{c}_1\| = 1, \quad h_2 = \|\mathbf{c}_2\| = \rho, \quad h_3 = \|\mathbf{c}_3\| = 1.$$

Factorul de scală pentru volumul elementar din  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  este

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)}{D(\rho, \theta, z)}(\rho, \theta, z) = \rho = h_1 h_2 h_3.$$

Prin urmare,

$$d\tau = \rho d\rho d\theta dz.$$

Transformarea inversă a funcției  $\varphi_{/\Omega}$ , unde  $\varphi$  este dat în (8.293), este funcția vectorială  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  de argumentul vectorial

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

ale cărei componente sunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = f_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 > 0, \\ \theta = f_2(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} \arctg \frac{y}{x}, \quad \text{dacă } x > 0, y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, \quad \text{dacă } x = 0, y > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, \quad \text{dacă } x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3\pi}{2}, \quad \text{dacă } x = 0, y < 0, \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x}, \quad \text{dacă } x > 0, y < 0, \end{array} \right. \\ z = f_3(x, y, z) = z. \end{array} \right. \quad (8.294)$$

Mulțimea valorilor funcției  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ , unde funcțiile componente  $f_1, f_2, f_3$  sunt date în (8.294), este mulțimea  $\Omega$  din (8.291).

Relațiile (8.293) reprezintă legătura dintre coordonatele cilindrice și cele carteziane în spațiu.

# Bibliografie

- [1] Adams, Robert, A. – *Calculus. A complete Course*, Forth ed., Addison–Wesley, [1999](#)
- [2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis. A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow [1986](#).
- [3] Calistru, N., Ciobanu, Gh. – *Curs de analiză matematică, Vol. I*, Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, [1988](#).
- [4] Chiriță, Stan – *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, București [1989](#).
- [5] Colojoară, Ion – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1983](#).
- [6] Craiu, M., Tănase, V. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1980](#).
- [7] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, A., Fetecău, C. – *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială și programare liniară*, Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, [1984](#).
- [8] Crăciunaș, Petru Teodor – *Mathematical Analysis*, Polytechnic Institute of Iassy, Faculty of civil engineering, Iassy [1992](#).
- [9] Cruceanu, Vasile – *Algebră liniară și geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1973](#).
- [10] Dieudonné, J. – *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier–Villars, Paris [1963](#).
- [11] Dixon, C. – *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester·New York·Brisbane·Toronto [1981](#).
- [12] Drăgușin, L., Drăgușin, C., Cășlan, C. – *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura TEORA, București [1993](#).
- [13] Flondor, P., Stănășilă, O. – *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Ediția a II–a, Editura ALL, București [1996](#).
- [14] Fulks, Watson – *Advanced calculus: an introduction to analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York [1978](#).
- [15] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. II*, Editura Tehnică, București [1966](#)
- [16] Gheorghiu, N., Precupanu, T. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1979](#).
- [17] Hewitt, E., Stromberg, K. – *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York [1965](#).
- [18] Marinescu, Gheorghe – *Analiză matematică, vol. I, Ediția a V–a*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1980](#).
- [19] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. – *Analiză matematică, vol. I, ediția a patra*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1971](#).
- [20] Olariu, Valter – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București [1981](#).

- [21] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1983.
- [22] Precupanu, Anca – *Bazele analizei matematice*, Editura Universității Al. I. Cuza, Iași 1993.
- [23] Sburlan, Silviu – *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, București 1991.
- [24] Sirețchi, Gheorghe – *Calcul diferențial și integral, Vol. I, II*, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985.
- [25] Smirnov, Vladimir – *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxième Éditions*, Mir, Moscou 1972.
- [26] Stănășilă, Octavian – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981.
- [27] Sykorski, Roman – *Advanced Calculus. Functions of several variables*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1969.
- [28] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.



## Index de noțiuni

- $\varepsilon$ -rețea, 172
- $\varepsilon$ -rețea finită, 172
- închiderea în  $X$ , 161
- înmulțire, 19, 21–23
- înmulțire cu scalari, 19
- înmulțirea numerelor întregi, 23
- șir Cauchy, 26, 44
- șir Cauchy de puncte, 131
- șir convergent, 33
- șir crescător de mulțimi, 8
- șir de funcții reale de variabilă reală, 142
- șir de funcții, 206
- șir de funcții convergent, 206
- șir de funcții, 132
- șir de numere reale, 33
- șir de puncte, 286
- $x$  într-un spațiu metric, 129
- șir de puncte divergent, 130
- șir de puncte fundamental, 131
- șir descrescător de mulțimi, 8
- șir divergent cu limita egală cu  $+\infty$ , 33
- șir divergent cu limita egală cu  $-\infty$ , 33
- șir fără limită, 34
- șir fundamental, 26
- șir fundamental, 44
- șir mărginit, 36
- șir monoton, 39
- șir monoton crescător, 39
- șir monoton descrescător, 39
- șir monoton strict crescător, 39
- șir monoton strict descrescător, 39
- șir numeric, 33
- șir oscilant, 34
- șirul sumelor parțiale, 52
- șirul sumelor parțiale al unei serii de vectori, 145
- șirul termenilor seriei, 52
- șirul termenilor unei serii de vectori, 145
- margină superioară, 25
- abaterea curbei de la linia dreaptă, 277
- acelerația unei particule, 274
- acoperire, 171
- aderența în  $X$ , 161
- admite limita, 189
- adunare, 19, 23
- adunarea în mulțimea numerelor întregi, 23
- aparține mulțimii, 7
- aplicația reciprocă, 17
- aplicație, 15
- aplicație aditivă, 151
- aplicație bijectivă, 25
- aplicație biliniară simetrică, 263
- aplicație liniară, 224
- aplicație liniară mărginită, 227
- aplicație omogenă, 151
- aproximarea liniară, 285
- aproximarea pătratică, 285
- arc, 216
- arc neted, 274
- asociativitate, 10, 21
- axă polară, 427
- axioma ( $C_1$ ), 115
- axioma Cantor, 25
- axioma de completitudine, 25
- axioma de existență a marginii superioare, 25, 27
- axioma I a numărabilității, 115
- axioma lui Arhimede, 27
- axiome necontradictorii, 26
- axiomele topologiei, 170
- bază în spațiul liniar  $n$ -dimensional  $V/\mathbb{K}$ , 124
- bază canonică, 366
- bază infinită, 126
- bază ortonormată, 155
- bază locală ortonormată, 435
- bijecție, 17
- bilă, 110
- bilă închisă, 111
- bilă deschisă, 110
- bucla elicei cilindrice, 270
- câmp de vectori, 245
- câmp vectorial, 245
- câtul în sens Cauchy a două serii numerice, 106
- câtul numerelor întregi  $x$  și  $y$ , 23
- câmp, 22
- capetele unui drum, 270
- cel mai mic majorant, 25
- centru de curbura, 285
- centrul unui interval, 167
- cerc osculator, 285
- cercuri concentrice, 427
- clasă de echivalență, 273

- clasă de echivalență modulo  $\mathbb{R}$ , 14  
 clasă de echivalență, 355  
 clasa de funcții  $C^1(D)$ , unde  $D$  este mulțime deschisă în  $\mathbb{R}^n$ , 296  
 clasa funcțiilor indefinit derivabile parțial, 310  
 coeficienții formeii întâi fundamentale a unei suprafețe, 357  
 coeficienții lui Gauss, 357  
 coliniar, 243  
 combinație liniară, 123  
 compatibil, 23  
 compatibilitatea relației de ordine cu adunarea din  $X$ , 23  
 compatibilitatea relației binare de ordine  $\leq$  față de înmulțirea elementelor lui  $X$ , 23  
 compunerea funcției  $f$  cu funcția  $g$ , 17  
 compusa funcțiilor  $f$  și  $\varphi$ , 253  
 compusul elementelor  $x$  și  $y$ , 19  
 comutativitate, 10  
 con deschis, 324  
 condiția Lipschitz, 377  
 condiție de regularitate, 274  
 concatenatul a două drumuri, 271  
 conexiune, 179  
 contact a două curbe, 284  
 contact de ordin  $n$  a două curbe, 284  
 contracție, 157  
 converge uniform, 207  
 convergența punctuală a unui șir de funcții, 208  
 convergența uniformă a unui șir de funcții, 208  
 convoluție, 104  
 coordonate curbilinii, 425  
 coordonate curbilinii ale unui punct din spațiu, 433  
 coordonate polare în plan, 427  
 coordonate sferice, 436  
 $x$  într-o bază, 125  
 corespondență, 13  
 corespondență biunivocă, 29  
 corp, 22  
 corp comutativ, 22, 23  
 corp comutativ total ordonat, 23–25  
 cosini directori, 290  
 creșterea funcției  $f$  corespunzătoare creșterii  $t - t_0$  a variabilei independente, 258  
 criteriul general al lui Cauchy de convergență a unei serii de vectori, 146  
 curbă în plan, 274  
 curbă în spațiu, 274  
 curbă netedă în  $\mathbb{R}^m$ , 273  
 curbă netedă pe porțiuni, 274  
 curbe de coordonate, 425, 432  
 curbura unei curbe, 277, 285  
 dependență funcțională, 418  
 derivabilă, 245  
 derivabilă la dreapta, 248  
 derivabilă la stânga, 248  
 derivarea ordinară sau obișnuită, 296  
 derivata de ordinul  $k$  a unei funcții vectoriale de variabilă reală, 252  
 derivata de ordinul întâi, 246  
 derivata de ordinul al doilea, 251  
 derivata după o direcție a unei funcții reale, 291  
 derivata la dreapta, 249  
 derivata la stânga, 249  
 derivata parțială de ordin doi a unei funcții vectoriale, 338  
 derivata parțială de ordinul întâi, 294  
 derivata parțială de ordinul întâi în raport cu variabila  $x_j$  a unei funcții vectoriale, 330  
 derivata parțială de ordinul întâi a unei funcții vectoriale în raport cu variabila  $x_j$ , 329  
 derivata parțială de ordinul al doilea a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , 308  
 derivata secundă, 251  
 derivata unei funcții vectoriale, 245  
 derivata unei funcții reale, 298  
 derivate parțiale de ordinul  $m$ , 309  
 derivate parțiale de ordinul întâi ale unei funcții vectoriale, 330  
 derivate parțiale de ordinul al doilea ale unei funcții reale, 309  
 derivate parțiale mixte, 309  
 derivatele parțiale de ordinul întâi ale unei funcții, 296  
 descriere cinematică, 270  
 determinant funcțional, 331  
 diferențiala de ordinul întâi a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , 300  
 diferențiala unei funcții vectoriale de variabilă vectorială, 334  
 diametrul unei mulțimi, 109  
 difeomorfism, 413  
 diferența a două mulțimi, 9  
 diferențială de ordin  $N$  a unei funcții reale, 319  
 diferențiala a doua a unei funcții vectoriale de variabilă reală, 263  
 diferențiala de ordinul  $k$  a câmpului vectorial  $f$ , 265  
 diferențiala de ordinul  $k$  a funcției  $f$  în punctul  $t_0$ , 264  
 diferențiala de ordinul întâi a unei funcții reale, 304  
 diferențiala de ordinul întâi a unei funcții vectoriale de variabilă reală, 260  
 diferențiala de ordinul al doilea a unei funcții reale, 316  
 diferențiala unei funcții reale de o variabilă reală, 256  
 dimensiunea unui spațiu liniar, 124  
 direcție în  $\mathbb{R}^n$ , 290  
 discriminantul unei forme pătratice, 365

- distanță, 30, 107  
 distanța dintre două submulțimi, 109  
 distanța dintre punctele  $x$  și  $y$ ., 108  
 distributivă la dreapta, 22  
 distributivă la stânga, 22  
 distributivitate, 10  
 distributivitate la dreapta, 21  
 distributivitate la stânga, 21  
 divizor comun, 24  
 domeniu, 219  
 domeniu închis, 219  
 domeniu de operatori, 19  
 domeniul de definiție, 15  
 dreapta determinată de două puncte, 289  
 drum, 216  
 drum închis, 270  
 drum parametrizat, 268  
 drum parametrizat în plan, 269  
 drum parametrizat neted, 272  
 drum parametrizat regulat, 272  
 drumuri echivalente cu aceeași orientare, 273  
  
 element unitate, 20  
 elemente incomparabile, 15  
 elementneutru, 20  
 elementul, 20  
 elementsimetrizabil, 20  
 ecuația vectorială a unei curbe netede, 274  
 ecuația vectorială a unui drum, 268  
 ecuația vectorială a graficului funcției  $f$ , 244  
 ecuația vectorială a unei pânzei, 350  
 ecuații parametrice ale graficului unei funcții vectoriale  $f$ , 244  
 ecuații parametrice ale unui drum, 268  
 ecuațiile canonice ale tangentei, 272  
 ecuațiile parametrice ale unei curbe, 274  
 ecuațiile parametrice ale unei pânzei, 350  
 element de arc, 275  
 element de arie al unei suprafețe, 357  
 elicea circulară de pas constant, 270  
 existență, 15  
 expresie canonică a unei forme biliniare, 364  
 expresie canonică a unei forme pătratice, 366  
 extragere a rădăcinii de un ordin oarecare  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ , 24  
 extremitățile unui drum, 216, 270  
  
 față  $(p-1)$ -dimensională a unui interval, 167  
 factor de contracție, 157  
 factori de scală, 434  
 familie de mulțimi, 8  
 funcție vectorială de clasă  $C^1(D, \mathbb{R}^m)$ , 331  
 formă biliniară degenerată, 363  
 formă biliniară pe  $\mathbb{R}^n$ , 361  
 formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , 300  
 formă pătratică nedegenerată, 365  
 formă pătratică pe  $\mathbb{R}^n$ , 364  
 formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , 237  
 formă  $m$ -liniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , simetrică, 239  
 formă biliniară, 152  
 formă biliniară simetrică, 152  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , nedefinită, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , negativ definită, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , negativ semidefinită, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , nenegativă, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , nepozitivă, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , pozitiv definită, 240  
 formă de grad  $m$  pe  $\mathbb{R}^n$ , pozitiv semidefinită, 240  
 formă de gradul  $m$  pe spațiul liniar  $\mathbb{R}^n$ , 239  
 formă liniară pe  $\mathbb{R}^n$ , 235  
 formă multiliniară pe  $(\mathbb{R}^n)^m$ , 237  
 formă pătratică, 152  
 formă pătratică nedegenerată, 366  
 formă pătratică negativ definită, 366  
 formă pătratică negativ semidefinită, 366  
 formă pătratică pozitiv definită, 152, 366  
 formă pătratică pozitiv semidefinită, 366  
 forma biliniară simetrică, 364  
 formulă aproximativă de calcul, 266  
 formula lui Mac Laurin, 280  
 formula lui Taylor cu rest de ordin 1, 287  
 formula lui Taylor pentru o funcție reală de variabilă reală, 279  
 formula lui Taylor pentru o funcție vectorială de variabilă reală, 266  
 formulele lui Frenet pentru o curbă în spațiu, 277  
 formulele lui Frenet pentru o curbă plană, 277  
 fracție ireductibilă, 23  
 frontiera în  $X$  a unei mulțimi, 166  
 frontiera unui interval, 167  
 funcție continuă, 196  
 funcție continuă pe mulțimea  $A$ , 196  
 funcție economică, 399  
 funcție obiectiv, 399  
 funcție scop, 399  
 funcție surjectivă, 16  
 funcții egale, 16  
 funcția  $f$  își atinge marginile, 205  
 funcția  $f$  nu este uniform continuă, 201  
 funcția compusă, 17  
 funcția identică, 16  
 funcția inversă a funcției  $f$ , 17  
 funcția lui Lagrange, 399  
 funcția modul, 28  
 funcție, 15  
 funcție aditivă, 235  
 funcție bijectivă, 17  
 funcție biunivocă, 16  
 funcție continuă într-un punct, 195  
 funcție concavă, 284  
 funcție constantă, 16

- funcție convexă, 284  
 funcție de clasă  $C^k(I, \mathbb{R}^m)$ , 252  
 funcție definită pe o mulțime, cu valori în altă mulțime, 15  
 funcție definită implicit, 377  
 funcție derivabilă, 246  
 funcție derivabilă parțial pe o submulțime, 295  
 funcție derivabilă pe o submulțime, 246  
 funcție derivabilă parțial de două ori, 309  
 funcție discontinuă într-un punct, 195  
 funcție hölderiană, 202  
 funcție Hölder, 202  
 funcție indefinit derivabilă, 252  
 funcție injectivă, 16  
 funcție lipschitziană, 202  
 funcție mărginită, 204  
 funcție mărginită definită pe un spațiu metric, 117  
 funcție omogenă de grad  $m$ , 235  
 funcție omogenă de grad  $k$ , 324  
 funcție pară, 28  
 funcție reală de două ori derivabilă în raport cu variabilele  $x_j$  și  $x_i$ , 308  
 funcție reală derivabilă după o direcție, 291  
 funcție reală de clasă  $C^m(D)$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^n$  este mulțime deschisă, 309  
 funcție reală derivabilă parțial în raport cu o variabilă, 294  
 funcție uniform continuă, 201  
 funcție vectorială constantă, 247  
 funcție vectorială de  $k$  ori diferențiabilă în  $t_0 \in I$ , 264  
 funcție vectorială de variabilă reală de  $k$  ori derivabilă, 251  
 funcție vectorială de variabilă reală de două ori derivabilă, 251  
 funcție vectorială de variabilă reală diferențiabilă de  $k$  ori pe o submulțime deschisă, 264  
 funcție vectorială de variabilă reală diferențiabilă, 256  
 funcție vectorială de variabilă reală diferențiabilă de două ori, 262  
 funcție vectorială derivabilă de două ori, 250  
 funcție vectorială de argument vectorial diferențiabilă, 333  
 funcție vectorială de variabilă vectorială de două ori diferențiabilă, 337  
 funcție vectorială derivabilă parțial, 329  
 funcție vectorială derivabilă parțial în raport cu variabila  $x_j$  pe o mulțime deschisă, 330  
 funcție vectorială derivabilă parțial într-un punct, 330  
 funcții dependente funcțional, 418  
 funcții independente funcțional, 418  
 funcțiile coordonate, 247  
 gradientul unei funcții reale, 298  
 graficul funcției vectoriale  $f$ , 244  
 graficul relației binare, 13  
 grup, 20, 22  
 grup abelian, 22  
 grup aditiv abelian, 20  
 grup aditiv abelian total ordonat, 23  
 grup aditiv comutativ, 21  
 grup comutativ, 20, 22  
 grup multiplicativ, 20  
 hessiana unei funcții reale, 317  
 hodograful drumului, 268  
 hodograful funcției vectoriale  $f$ , 244  
 homeomorfism, 215, 413  
 homomorfism, 20, 224  
 identitatea lui Euler, 325  
 imaginea drumului, 268  
 imaginea lui  $x$  prin  $f$ , 15  
 imaginea prin funcția  $f$  a mulțimii  $A_0$ , 16  
 imaginea unui drum, 216  
 incluziune, 8, 23, 24  
 inegalitatea patrulaterului, 109  
 inegalitatea triunghiulară, 28, 30  
 inel, 21, 22  
 inel cu element unitate, 22  
 inelul numerelor întregi, 23  
 injecție de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$ , 16  
 interiorul în  $X$  al mulțimii  $A$ , 164  
 intersecția a două mulțimi, 9  
 intersecția relațiilor binare, 14  
 interval  $p$ -dimensional închis, 167  
 interval  $p$ -dimensional deschis, 167  
 interval închis, 27  
 interval degenerat, 167  
 interval deschis, 27  
 interval semideschis la dreapta, 27  
 interval semideschis la stânga, 27  
 intervale nemărginite, 30  
 inversul elementului  $x$ , 20  
 inversul unui element, 23  
 izometrie, 216  
 izomorfism, 20  
 izomorfism de corpuri, 25  
 jacobian, 331  
 juxtapunerea a două drumuri, 271  
 lege de compoziție binară internă, 19, 21, 121  
 lege de compoziție externă, 19  
 limita inferioară, 46  
 limita unui șir numeric, 33  
 limita superioară, 46  
 limita uniformă a unui șir de funcții, 207  
 limita unui șir de funcții, 206  
 limita unui șir de puncte, 130  
 lungimea segmentului  $PQ$ , 30  
 lungimea unui arc de curbă, 275  
 lungimea unui drum, 275

- lungimea unui vector, 135
- majorant, 24
- marginea inferioară, 27
- marginea inferioară a valorilor unei funcții reale, 205
- marginea superioară a valorilor unei funcții reale, 205
- matrice  $m$ -indexată, 238
- matricea formei biliniare simetrice, 157
- matricea jacobiană a unei funcții vectoriale de variabilă vectorială, 331
- matricea jacobiană a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , 302
- matricea unei forme biliniare, 362
- maximul mulțimii  $A$ , 25
- metodă practică de calculare a derivatelor parțiale, 295
- metrică, 30, 107
- metrica Euclidiană, 291
- metrice echivalente, 111
- minor principal de ordin  $k$  al unei matrice, 157
- minorant, 26
- modulul unei matrice jacobiene, 411
- monotonie, 36
- morfism, 20
- mulțime, 7
- mulțime mărginită, 28
- mulțime închisă, 23, 162
- mulțime a numerelor reale, 25
- mulțime cel mult numărabilă, 31
- mulțime conexă, 179
- mulțime convexă, 182
- mulțime de indici, 8
- mulțime densă, 24
- mulțime deschisă, 165
- mulțime discretă în  $X$ , 168
- mulțime finită, 8
- mulțime infinită, 8
- mulțime mărginită într-un spațiu metric, 109
- mulțime mărginită, 24
- mulțime majorată, 24
- mulțime minorată, 26
- mulțime neconexă, 179
- mulțime nemărginită inferior, 28
- mulțime nemărginită într-un spațiu metric, 109
- mulțime numărabilă, 30, 32
- mulțime ordonată, 15
- mulțime total ordonată, 23
- mulțimea de convergență a șirului  $(f_n)$ , 206
- mulțimea de definiție, 15
- mulțimea numerelor întregi, 23
- mulțimea numerelor întregi  $\mathbb{Z}$ , 23
- mulțimea numerelor naturale  $\mathbb{N}$ , 23
- mulțimea numerelor raționale, 23
- mulțimea numerelor raționale  $\mathbb{Q}$ , 23
- mulțimea scalarilor, 19
- mulțimea valorilor funcției  $f$ , 16
- mulțimea valorilor unui șir de puncte, 129
- mulțimea vidă, 8, 34
- mulțimi disjuncte, 9
- mulțimi echipotente, 30
- mulțimi egale, 7
- mulțimi homeomorfe, 215
- mulțimi identice, 7
- multi-indice, 314
- multiplicatori Lagrange, 399
- natura unei serii, 53
- nemărginit, 36
- noncontradicția axiomelor, 25
- normă Euclidiană, 154
- normă pe un spațiu vectorial, 134
- norma unui vector, 135
- norme echivalente, 136
- nu aparține mulțimii, 7
- număr algebric, 30
- număr par, 24
- număr rațional, 23
- numărul  $e$ , 41
- numere întregi pozitive, 23
- numere întregi negative, 23
- numere iraționale, 30
- numere naturale, 23
- numere transcendente, 31
- operația de împărțire, 24
- operația de ridicare la putere, 24
- operația de scădere, 24
- operația de adunare, 22
- operator, 15
- operator diferențial de multi-indice  $\alpha$ , 315
- operator liniar, 224
- operatorul de diferențiere de ordinul întâi, 303
- operatorul lui Hamilton, 298
- operatorul nabla, 298
- opusul, 23
- opusul elementului  $x$ , 22
- opusul unui drum, 270
- origine de arc, 275
- pânză netedă, 350
- pânză parametrică, 350
- pânze netede echivalente, 354
- parametru natural, 275
- parametrii lui Lamé, 426
- parametrii lui Lamé, 434
- parametrizarea naturală, 275
- parametrul unui drum, 268
- permutare, 67
- plan tangent, 354, 356
- pol, 427
- polinom caracteristic, 371
- polinomul lui Taylor, 265
- pornire, 13
- prelungire a funcției  $f$  prin continuitate, 199

- prelungire la mulțimea  $A$  a funcției, 16
- prima formă fundamentală a unei suprafețe, 358
- proprietăți cu caracter local, 19
- proprietăți metrice, 216
- proprietăți topologice, 216
- proprietate algebrică, 20
- proprietatea lui Darboux, 218
- problemă de extrem condiționat, 399
- problemă de extrem cu legături, 399
- procedura lui Newton, 287
- produs cartezian, 12
- produs mixt, 245
- produs scalar, 151
- produs vectorial, 242
- produsul, 23
- produsul după Cauchy al două serii numerice, 104
- produsul elementelor  $x$  și  $y$ , 19
- produsul mixt a trei vectori, 243
- produsul scalar al vectorilor  $x$  și  $y$ , 151
- proprietate globală, 19
- proprietate invariantă la un homeomorfism, 216
- punct șa, 370
- punct aderent, 159
- punct al mulțimii, 7
- punct critic, 368
- punct critic condiționat, 398
- punct de acumulare, 168
- punct de acumulare bilateral, 248
- punct de acumulare la dreapta, 248
- punct de acumulare la stânga, 248
- punct de extrem, 286, 367
- punct de extrem local, 286
- punct de extrem local condiționat, 398
- punct de extrem local cu o restricție, 398
- punct de inflexiune, 286
- punct de maxim global, 367
- punct de maxim global strict, 367
- punct de maxim local, 286, 367
- punct de maxim local strict, 367
- punct de minim global, 367
- punct de minim global strict, 367
- punct de minim local, 286, 367
- punct de minim local strict, 367
- punct fix, 157
- punct interior în  $X$ , 163
- punct izolat în  $X$  al unei mulțimi, 168
- punct limită, 48
- punct multiplu, 270
- punct ordinar, 274
- punct regulat, 274
- punct staționar condiționat, 398
- rangul formei biliniare, 363
- rangul unei forme pătratice, 365
- raport incrementar, 245, 290
- rază de curbură, 285
- relație binară, 13
- relație de echivalență, 14
- relație de ordine, 14
- regula semnelor, 22
- relația de ordine, 24
- relație binară în mulțimea  $A$ , 13
- relație binară antisimetrică, 14
- relație binară de ordine totală, 23
- relație binară reflexivă, 14
- relație binară simetrică, 14, 273
- relație binară tranzitivă, 14
- relațiile lui De Morgan, 10
- reper Frenet, 276
- reper polar în plan, 427
- reprezentant al unei clase de echivalență, 14
- rest de ordin  $k$ , 266
- rest de ordin  $N$ , 280
- rest de ordin  $N$  sub forma lui Lagrange, 280
- rest de ordin  $N$  sub forma lui Schlömilch–Roche, 279
- rest de ordin  $N$  sub forma unei integrale, 280
- rest de ordin  $p$  al unei serii, 58
- restricția funcției  $f$  la submulțimea  $A_0$ , 16
- reuniunea a două mulțimi, 9
- reuniunea relațiilor binare, 14
- schimbare de parametru, 273
- semidreaptă închisă nemărginită la dreapta, 30
- semidreaptă închisă nemărginită la stânga, 30
- semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta, 30
- semidreaptă deschisă nemărginită la stânga, 30
- segment, 27
- segment închis, 182
- segment închis de extremități  $A$  și  $B$ , 289
- segmente semi-deschise, 289
- semidreapta cu originea în  $A$ , care trece prin  $B$ , 289
- semidrepte limitate de origine, 427
- sens pozitiv de parcurs a unui drum, 269
- seria condensată a unei serii, 78
- seria geometrică, 53
- seria produs a două serii, 104
- seria telescopică, 54, 145
- serie absolut convergentă, 65
- serie alternată, 63
- serie convergentă, 52
- serie cu termeni oarecare, 58
- serie de funcții vectoriale, 150
- serie de numere reale, 52
- serie de vectori, 145
- serie de vectori convergentă, 145, 147
- serie de vectori divergentă, 146
- serie de vectori semi-convergentă, 148
- serie divergentă, 53
- serie majorantă a seriei, 74
- serie majorată de seria, 74
- serie necondiționat convergentă, 68
- serie numerică, 52



- serie oscilantă, 53
- serie semi-convergentă, 66
- simbolurile de alternanță, 242
- simetricul, 22
- simetricul elementului  $x$ , 20
- sistem de coordonate curbilinii, 423
- sistem de vectori liniar dependent, 124
- sistem de vectori liniar independent, 124
- sistem fundamental de vecinătăți, 114
- sistem infinit de vectori liniar independent, 124
- sistem ortogonal de coordonate curbilinii, 426, 428
- sistem ortogonal de coordonate curbilinii în spațiu, 434
- sistem ortogonal de vectori, 155
- soluție rațională, 24
- sosire, 13
- spații metrice izometrice, 216
- spații vectoriale izomorfe, 226
- spațiu Banach, 138
- spațiu conex, 179
- spațiu Hilbert, 156
- spațiu liniar finit dimensional, 124
- spațiu liniar peste un câmp de scalari, 119
- spațiu metric complet, 132
- spațiu metric conex prin arce, 216
- spațiu neconex, 179
- spațiu normat, 135
- spațiu prehilbertian, 151
- spațiu topologic, 115, 170
- spațiu vectorial infinit dimensional, 126
- spațiu vectorial peste un câmp de scalari, 119
- spațiul aritmetic  $p$ -dimensional, 12
- spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^n$ , 289
- structură algebrică, 19
- structură Euclidiană, 151
- structura algebrică, 24
- structuri algebrice homomorfe, 20
- structuri algebrice izomorfe, 20
- subșir, 42
- subșir al unui șir de puncte, 130
- submulțime, 8
- submulțime mărginită, 109
- submulțime nemărginită, 109
- subspațiu liniar, 122
- subspațiu metric, 108
- sumă infinită, 52
- suma, 19, 23
- suma parțială de rang  $n$ , 52
- suma parțială de rang  $n$  a unei serii de vectori, 145
- suma seriei, 52
- suprafață, 291, 350
- suprafață de nivel, 355
- suprafață netedă, 355
- suprafață netedă pe porțiuni, 356
- suprafață reprezentată implicit, 355
- suprafețe de coordonate, 431
- surjectie, 16
- surse, 15
- tăieturi în mulțimea numerelor raționale, 26
- tabelarea funcțiilor, 283
- tangenta într-un punct al unui drum, 271
- tensor metric, 151
- tensor metric local, 434
- teorema lui Cauchy pentru funcții derivabile, 279
- teorema lui Fermat, 286
- teoria mulțimilor, 7
- termenii unui șir de puncte, 129
- termenul de rang  $n$  al seriei, 52
- termenul de rang  $n$  al unei serii de vectori, 145
- termenul de rang  $n$  al unui șir, 33
- termenul de rang  $n$  al unui șir de puncte, 129
- termenul general al seriei, 52
- termenul general al unei serii de vectori, 145
- termenul general al unui șir, 33
- termenul general al unui șir de puncte, 129
- terna, 24
- topologie, 170
- topologie indusă de o metrică, 170
- torsiunea unei curbe, 277
- traectoria drumului, 268
- traectoria unei particule materiale, 274
- transformare regulată, 411
- transformare liniară, 224
- transformare, 15
- triedrul lui Frenet, 276
- unghi între două curbe, 358
- unghi orientat, 153
- unghiul dintre doi vectori, 290
- unicitate, 15
- unicitatea diferențialei, 256
- valoarea funcției, 15
- varietate bidimensională, 355
- varietate de nivel, 355
- vecinătate, 32
- vecinătate a unui punct dintr-un spațiu metric, 113
- vecinătate simetrică, 32
- vecinătatea lui  $+\infty$ , 32
- vecinătatea lui  $-\infty$ , 32
- vectori coliniari, 290
- vectori ortogonali, 153
- vectorul accelerație, 274
- vectorul multiplicatorilor Lagrange, 399
- vectorul normalei la o suprafață, 355
- vectorul viteză, 274
- versorul binormalei, 276
- versorul normalei principale, 276
- versorul tangentei, 276
- versorul unei direcții, 290
- viteza unei particule, 274

Ion CRĂCIUN

ANALIZĂ MATEMATICĂ  
CALCUL INTEGRAL

EDITURA PIM  
IAȘI 2007





# Cuprins

<b>1</b>	<b>Integrale improprii</b>	<b>9</b>
1.1	Introducere . . . . .	9
1.2	Definiția integralei improprii . . . . .	10
1.3	Formula Leibniz–Newton . . . . .	18
1.4	Proprietăți ale integralelor improprii . . . . .	19
1.5	Reducerea integralelor improprii la șiruri și serii numerice . . .	21
1.6	Criteriul integral al lui Cauchy . . . . .	25
1.7	Metode de calcul ale integralelor improprii . . . . .	26
1.7.1	Schimbarea de variabilă în integrala improprie . . . . .	26
1.7.2	Integrarea prin părți în integrala improprie . . . . .	30
1.8	Testul lui Cauchy de convergență a integralelor improprii . . .	33
1.9	Integrale improprii absolut convergente . . . . .	35
1.10	Criterii de comparație ale integralelor improprii . . . . .	38
1.11	Criterii de convergență ale integralelor improprii cu integran- tul de semn variabil . . . . .	49
1.12	Convergența în sensul valorii principale a unei integrale improprii	55
<b>2</b>	<b>Integrale depinzând de un parametru</b>	<b>61</b>
2.1	Integrale proprii depinzând de un parametru . . . . .	61
2.2	Integrale improprii simple depinzând de un parametru . . . . .	73
2.3	Integrale improprii depinzând de un parametru, uniform con- vergente . . . . .	78
2.3.1	Definiția integralelor improprii depinzând de un para- metru, uniform convergente . . . . .	78
2.3.2	Reducerea integralelor improprii depinzând de un pa- rametru la șiruri de funcții . . . . .	81
2.3.3	Proprietățile integralelor improprii uniform convergen- te în raport cu parametrul $y$ . . . . .	86

2.4	Criterii de convergență uniformă . . . . .	94
2.5	Integrale Cauchy–Frullani . . . . .	99
2.6	Integralele lui Euler . . . . .	107
2.6.1	Definițiile funcțiilor Beta și Gama . . . . .	107
2.6.2	Proprietăți ale funcției Gama . . . . .	107
2.6.3	Proprietăți ale funcției Beta . . . . .	112
2.6.4	Relație între funcțiile Beta și Gama . . . . .	115
<b>3</b>	<b>Integrale curbilinii</b>	<b>121</b>
3.1	Drum, drum rectificabil, curbă . . . . .	121
3.2	Definiția integralei curbilinii de primul tip . . . . .	131
3.3	Proprietățile integralelor curbilinii . . . . .	137
3.4	Aplicații ale integralelor curbilinii de primul tip . . . . .	138
3.4.1	Masa și centrul de greutate ale unui fir material . . . . .	139
3.4.2	Momente de inerție ale unui fir material . . . . .	144
3.5	Definiția integralei curbilinii de al doilea tip . . . . .	147
3.5.1	Lucrul mecanic al unui câmp de forțe . . . . .	147
3.5.2	Definiția integralei curbilinii de al doilea tip . . . . .	150
3.6	Legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii . . . . .	152
3.7	Formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip . . . . .	154
3.8	Proprietăți ale integralelor curbilinii de al doilea tip . . . . .	158
3.9	Integrale curbilinii de tipul al doilea pe curbe închise . . . . .	158
3.10	Independența de drum a integralei curbilinii de al doilea tip . . . . .	159
3.10.1	Formularea problemei . . . . .	159
3.10.2	Cazul unui domeniu plan simplu conex . . . . .	160
3.10.3	Cazul unui domeniu în spațiu simplu conex . . . . .	164
3.10.4	Operatorul rotor . . . . .	165
3.11	Primitiva unei expresii diferențiale . . . . .	166
<b>4</b>	<b>Integrala dublă</b>	<b>171</b>
4.1	Elemente de topologie în $\mathbb{R}^2$ . . . . .	171
4.2	Aria figurilor plane . . . . .	174
4.3	Definiția integralei duble . . . . .	179
4.4	Condiții de integrabilitate . . . . .	183
4.5	Clase de funcții integrabile . . . . .	187
4.6	Proprietățile integralei duble . . . . .	189
4.7	Evaluarea integralei duble . . . . .	193
4.7.1	Integrala dublă pe intervale bidimensionale închise . . . . .	193

4.7.2	Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa $Oy$	197
4.7.3	Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa $Ox$	200
4.8	Formula integrală Riemann–Green . . . . .	203
4.9	Schimbarea de variabile în integrala dublă . . . . .	212
4.10	Aplicații ale integralei duble în mecanică și geometrie . . . . .	220
4.10.1	Masa și centrul de greutate ale unei plăci . . . . .	220
4.10.2	Momente de inerție ale unei plăci . . . . .	224
4.10.3	Momente statice ale unei plăci . . . . .	226
4.10.4	Flux luminos incident pe o placă . . . . .	227
4.10.5	Debitul unui fluid prin secțiunea transversală a unui canal . . . . .	228
4.10.6	Volumul unui cilindroid . . . . .	229
4.11	Integrale duble improprii . . . . .	233
4.11.1	Domeniul de integrare nu este mărginit . . . . .	233
4.11.2	Integrale duble din funcții nemărginite . . . . .	244
<b>5</b>	<b>Integrale de suprafață</b>	<b>247</b>
5.1	Elemente de geometria diferențială a suprafețelor . . . . .	247
5.1.1	Pânze parametrice netede . . . . .	247
5.1.2	Semnificația geometrică a condiției de regularitate. Linii parametrice . . . . .	249
5.1.3	Interpretarea geometrică a diferențialei funcției vectoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ în punctul $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ . Plan tangent . . . . .	251
5.1.4	O altă definiție a planului tangent . . . . .	256
5.1.5	Definiția suprafeței . . . . .	257
5.1.6	Ecuatia carteziană implicită a unei suprafețe . . . . .	257
5.1.7	Vector normal unei suprafețe într-un punct regulat . . . . .	258
5.1.8	Element de arie al unei suprafețe netede . . . . .	261
5.2	Aria unei suprafețe netede . . . . .	267
5.3	Integrala de suprafață de primul tip . . . . .	274
5.4	Aplicații în inginerie ale integralelor de suprafață de primul tip . . . . .	283
5.5	Integrale de suprafață de al doilea tip . . . . .	288
5.6	Formula integrală a lui Stokes . . . . .	298
<b>6</b>	<b>Integrala triplă</b>	<b>305</b>
6.1	Elemente de topologie în $\mathbb{R}^3$ . . . . .	305
6.2	Definiția integralei triple . . . . .	308
6.3	Condiții de existență a unei integrale triple . . . . .	309

6.4	Proprietățile integralei triple . . . . .	312
6.5	Evaluarea integralei triple . . . . .	314
6.5.1	Integrala triplă pe intervale tridimensionale închise . .	314
6.5.2	Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Oz$ . . . . .	320
6.5.3	Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Ox$ . . . . .	324
6.5.4	Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Oy$ . . . . .	325
6.5.5	Integrala triplă pe un domeniu oarecare . . . . .	327
6.6	Formula integrală Gauss–Ostrogradski . . . . .	330
6.7	Schimbarea de variabile în integrala triplă . . . . .	336
6.7.1	Coordonatele cilindrice sau semi–polare în spațiu . . .	338
6.7.2	Coordonatele sferice sau polare în spațiu . . . . .	339
6.7.3	Coordonate polare (sferice) generalizate . . . . .	341
6.7.4	Elementul de volum în coordonate curbilinii . . . . .	342
6.7.5	Schimbarea de variabile în integrala triplă . . . . .	343
6.8	Aplicații ale integralei triple . . . . .	348
6.8.1	Calculul volumelor . . . . .	348
6.8.2	Masa și centrul de greutate ale unui solid . . . . .	349
6.8.3	Momente de inerție ale unui solid . . . . .	350
6.8.4	Potențialul newtonian al unui solid . . . . .	352
6.8.5	Atracția exercitată de către un solid . . . . .	352
<b>7</b>	<b>Ecuatii diferențiale ordinare</b>	<b>357</b>
7.1	Câteva generalități despre ecuații diferențiale ordinare . . . . .	357
7.2	Ecuatii diferențiale ordinare, de ordinul întâi, integrabile prin cuadraturi . . . . .	365
7.2.1	Ecuatii diferențiale cu variabile separate . . . . .	365
7.2.2	Ecuatia diferențială exactă . . . . .	368
7.2.3	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi care admit factor integrant . . . . .	370
7.2.4	Ecuatii diferențiale cu variabile separabile . . . . .	374
7.2.5	Ecuatia diferențială omogenă . . . . .	376
7.2.6	Ecuatii diferențiale reductibile la ecuații diferențiale omogene . . . . .	381
7.2.7	Ecuatia diferențială liniară de ordinul întâi . . . . .	387

7.2.8	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi reductibile la ecuații liniare . . . . .	395
7.3	Ecuatii diferențiale algebrice în $y'$ . . . . .	402
7.4	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi, nerezolvate în raport cu $y'$ , integrabile prin metode elementare . . . . .	403
7.4.1	Ecuatia diferențială de forma $y = f(y')$ . . . . .	403
7.4.2	Ecuatia diferențială de tipul $F(y, y') = 0$ . . . . .	405
7.4.3	Ecuatia diferențială de forma $x = f(y')$ . . . . .	406
7.4.4	Ecuatia diferențială de tipul $F(x, y') = 0$ . . . . .	407
7.4.5	Ecuatia diferențială de tip Lagrange . . . . .	409
7.4.6	Ecuatia diferențială de tip Clairaut . . . . .	413
7.4.7	Ecuatia diferențială de forma $y = f(x, y')$ . . . . .	415
7.4.8	Ecuatia diferențială de tipul $x = f(y, y')$ . . . . .	417
<b>8</b>	<b>Ecuatii diferențiale ordinare de ordin <math>n</math> integrabile prin cuadraturi</b>	<b>419</b>
8.1	Ecuatii diferențiale de tipul $y^{(n)} = f(x)$ . . . . .	419
8.2	Ecuatia diferențială $F(x, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	420
8.3	Ecuatia diferențială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	422
8.4	Ecuatia diferențială $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	423
<b>9</b>	<b>Ecuatii diferențiale ordinare care admit micșorarea ordinului</b>	<b>425</b>
9.1	Ecuatia $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	425
9.2	Ecuatia $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ . . . . .	427
9.3	Ecuatia $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , omogenă în $y, y', \dots, y^{(n)}$	429
9.4	Ecuatia $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ , omogenă în $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$ . . . . .	430
9.5	Ecuatia $F(y, xy', x^2y'', \dots, x^ny^{(n)}) = 0$ . . . . .	433
	<b>Bibliografie</b>	<b>437</b>



# Capitolul 1

## Integrale improprii

### 1.1 Introducere

Definiția *integrabilității Riemann* a unei funcții reale de o variabilă reală, mărginită,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ca limita finită a *sumelor integrale Riemann*

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

pentru lungimea celui mai mare interval  $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$  tinzând la zero, nu înglobează cazul când integrantul  $f$  este o *funcție nemărginită* sau *intervalul de integrare*  $[a, b]$  *este infinit*.

Lungimea celui mai mare interval  $[x_{k-1}, x_k]$  se notează cu  $\|\Delta\|$  și se numește *norma diviziunii*

$$\Delta = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}, \quad x_{k-1} < x_k, \quad k = \overline{1, n}$$

iar  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$  se numesc *puncte intermediare*.

Pentru ca funcția reală mărginită  $f$  să fie integrabilă Riemann pe *compactul*  $[a, b]$  trebuie ca limita sumelor integrale Riemann pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  să fie finită și să nu depindă de alegerea punctelor intermediare. Această limită se numește *integrala definită* și se notează cu simbolul

$$\int_a^b f(x)dx,$$



deci putem scrie egalitatea

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

În fizica matematică se întâlnesc atât integrale din funcții nemărginite cât și integrale pe domenii de integrare nemărginite.

Astfel de integrale se numesc *integrale improprii*.

Pentru a defini aceste tipuri de integrale nu este suficient să aplicăm o trecere la limită într-o sumă integrală Riemann ci este necesar să folosim o trecere la limită suplimentară care să implice domeniul de integrare.

Pentru aceasta, domeniul inițial de integrare, unde definiția integrabilității Riemann nu se poate aplica, se înlocuiește cu un subdomeniu pe care funcția să fie integrabilă Riemann. Apoi, acest subdomeniu se extinde până coincide cu domeniul inițial de integrare. Limita integralei luată pe subdomeniu, când acest subdomeniu tinde să devină mulțimea inițială de definiție a funcției, se numește *integrală improprie*.

Aceasta este ideea generală pe care se bazează definiția integralelor improprii.

## 1.2 Definiția integralei improprii

Fie elementele  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  cu proprietățile  $-\infty < a < b \leq +\infty$  și

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

o funcție integrabilă Riemann pe orice interval compact  $[a, t] \subset [a, b)$  și nemărginită într-o vecinătate a lui  $b$  dacă  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 1.2.1** *Limita în punctul  $t = b$  a funcției*

$$F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad (1.2)$$

*se numește integrală improprie cu limita superioară de integrare punct singular și se notează cu simbolul*

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (1.3)$$

Din această definiție rezultă

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b} F(t) = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx. \quad (1.4)$$

**Definiția 1.2.2** Funcția  $f$  se numește **integrabilă în sens generalizat** dacă există și este finită limita funcției  $F$  pentru  $t \rightarrow b$ .

**Definiția 1.2.3** Dacă funcția (1.1) este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie (1.3) este **convergentă**; dacă limita pentru  $t \rightarrow b$  a funcției (1.2) este infinită sau nu există, integrala improprie (1.3) se numește **divergentă**.

**Definiția 1.2.4** Prin **natura unei integrale improprii** se înțelege proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.

**Observația 1.2.1** Fie  $a_1 \in \mathbb{R}$  astfel încât  $a < a_1 < b$ . Egalitatea

$$\int_a^t f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^t f(x)dx$$

implică faptul că integralele improprii  $\int_a^b f(x)dx$  și  $\int_{a_1}^b f(x)dx$  sunt simultan convergente sau divergente. Astfel, când testăm convergența integralei improprii (1.3), o putem înlocui prin integrala improprie

$$\int_{a_1}^b f(x)dx \quad (1.5)$$

În plus, dacă integrala improprie (1.3) este convergentă, legătura sa cu integrala improprie (1.5) este

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^b f(x)dx, \quad (1.6)$$

iar din (1.4) și (1.6) deducem

$$\lim_{a_1 \rightarrow b} \int_{a_1}^b f(x)dx = 0. \quad (1.7)$$

Dacă  $f$  este o funcție continuă și nenegativă pe segmentul  $[a, b]$ , atunci integralei improprie (1.3) i se poate da o interpretare geometrică. Considerăm regiunea  $\Omega$  a planului  $Oxy$  limitată inferior de segmentul  $[a, b]$ , superior de graficul funcției  $f$  și la stânga de segmentul închis paralel la axa  $Oy$  având extremitățile în punctele  $A(a, 0)$  și  $A'(a, f(a))$ . Definiția măsurii sau a carabilității și noțiunea de arie a unei figuri plane este inaplicabilă mulțimii  $\Omega$  deoarece aceasta este nemărginită. Un segment paralel cu extremitatea stângă a domeniului  $\Omega$  cu extremitățile în punctele  $M(t, 0)$  și  $M'(t, f(t))$  taie din  $\Omega$  trapezul curbiliniu  $AMM'A'$  situat în stânga liniei considerate a cărui arie este integrala definită (1.2). Este natural să extindem noțiunea de carabilitate la domenii nemărginite dacă aria trapezului  $AMM'A'$  tinde la o limită finită când  $t \rightarrow b$ . În acest caz spunem că  $\Omega$  este *carabil*, iar limita de mai sus se numește *aria domeniului  $\Omega$* . Această arie se exprimă prin integrala improprie (1.3).

În mod analog se introduce *integrala improprie cu limita inferioară punct singular*.

**Definiția 1.2.5** *Simbolul*

$$\int_a^b g(x)dx \quad (1.8)$$

reprezintă notația pentru **integrala improprie cu limita inferioară punct singular** dacă funcția

$$g : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b < +\infty \quad (1.9)$$

este integrabilă Riemann pe orice compact  $[t, b] \subset (a, b]$  și nemărginită când  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 1.2.6** *Funcția (1.9) se numește integrabilă în sens generalizat sau, altfel spus, integrala improprie (1.8) este convergentă dacă există și este finită limita funcției*

$$G : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(t) = \int_t^b g(x)dx \quad (1.10)$$

pentru  $t \rightarrow a$ . În acest caz, simbolul (1.8) reprezintă numărul real

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{t \rightarrow a} G(t) = \lim_{t \rightarrow a} \int_t^b g(x)dx. \quad (1.11)$$

Dacă funcția (1.10) nu are limită în  $t = a$ , sau limita (1.11) este infinită sau nu există, integrala improprie (1.8) se numește **divergentă**.

Pentru integrala improprie cu limita inferioară punct singular au loc rezultate analoage celor din (1.6) și (1.7), adică dacă (1.8) este convergentă, atunci integrala improprie  $\int_a^{a_1} g(x)dx$  este convergentă oricare ar fi  $a_1 \in (a, b]$  și:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^{a_1} g(x)dx + \int_{a_1}^b g(x)dx;$$

$$\lim_{a_1 \rightarrow a} \int_a^{a_1} g(x)dx = 0.$$

**Definiția 1.2.7** *Simbolul matematic*

$$\int_a^b h(x)dx \quad (1.12)$$

se numește integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare dacă funcția

$$h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty \quad (1.13)$$

este integrabilă Riemann pe orice compact  $[u, v] \subset (a, b)$  și nemărginită când cel puțin una din limitele de integrare este finită.

**Definiția 1.2.8** *Funcția  $h$  din (1.13) este integrabilă în sens generalizat sau, integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare (1.12) este convergentă, dacă pentru o alegere oarecare a punctului  $c \in (a, b)$  integralele improprii:*

$$\int_a^c h(x)dx; \quad \int_c^b h(x)dx, \quad (1.14)$$

sunt convergente și

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^c h(x)dx + \int_c^b h(x)dx.$$

Dacă cel puțin una din integralele improprii (1.14) este divergentă, atunci integrala improprie (1.12) este **divergentă**.

**Teorema 1.2.1** *Integrala improprie (1.12) este convergentă dacă și numai dacă limitele*

$$\lim_{u \rightarrow a} \int_u^c h(x)dx, \quad \lim_{t \rightarrow b} \int_c^t h(x)dx \quad (1.15)$$

există și sunt finite. În acest caz, valoarea integralei improprii (1.12) este

$$\int_a^b h(x)dx = \lim_{\substack{u \rightarrow a \\ t \rightarrow b}} \int_u^t h(x)dx. \quad (1.16)$$

**Demonstrație.** Integralele improprii (1.14) sunt convergente dacă și numai dacă limitele (1.15) există și sunt finite. Pe de altă parte

$$\int_u^t h(x)dx = \int_u^c h(x)dx + \int_c^t h(x)dx. \quad (1.17)$$

Trecând la limită în (1.17) pentru  $u \rightarrow a$  și  $t \rightarrow b$ , din notația

$$\lim_{u \rightarrow a} \int_u^c h(x)dx + \lim_{t \rightarrow b} \int_c^t h(x)dx = \lim_{\substack{u \rightarrow a \\ t \rightarrow b}} \int_u^t h(x)dx$$

și Definiția 1.2.8 rezultă concluziile teoremei. ■

**Observația 1.2.2** *Studiul integralelor improprii cu limita inferioară punct singular se reduce la studiul celor cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, funcția

$$\tilde{f} : [-b, -a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < -b < -a \leq +\infty, \quad \tilde{f}(x) = g(-x)$$

este integrabilă Riemann pe compactul  $[-b, -t] \subset [-b, -a)$  și avem

$$\int_t^b g(x)dx = \int_{-b}^{-t} g(-u) du = \int_{-b}^{-t} \tilde{f}(u) du. \quad (1.18)$$

Trecând la limită pentru  $t \rightarrow a$  în (1.18), găsim relația

$$\int_a^b g(x)dx = \int_{-b}^{-a} \tilde{f}(x)dx,$$

care arată că integrala improprie cu limita inferioară punct singular din (1.8) este egală cu o integrală improprie având limita superioară punct singular. ■

**Observația 1.2.3** *Este posibil ca într-o integrală improprie să existe și alte puncte singulare nesituate în una sau ambele limite de integrare. Astfel, simbolul*

$$\int_a^b \varphi(x)dx \quad (1.19)$$

*reprezintă o integrală improprie cu singularitățile în punctele  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n$  unde*

$$-\infty \leq a = c_0 < c_1 < \dots < c_{n-1} < c_n = b \leq +\infty,$$

dacă funcția reală de variabilă reală

$$\varphi : (a, b) \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

este integrabilă pe orice compact inclus în oricare din intervalele  $(c_{k-1}, c_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Dacă toate integralele improprii

$$\int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x) dx, \quad k = \overline{1, n}$$

sunt convergente, atunci integrala improprie (1.19) este convergentă și

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} \varphi(x) dx.$$

**Definiția 1.2.9** Următoarele integrale improprii din funcții mărginite definite pe intervale nemărginite:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (1.20)$$

se numesc integrale improprii **de prima speță sau de tipul întâi**.

Conform Observației 1.2.2, oricare din ultimele două integrale improprii (1.20) se reduce la una în care limita superioară de integrare este  $+\infty$ .

**Definiția 1.2.10** Integralele improprii ale funcțiilor nemărginite definite pe intervale mărginite se numesc integrale improprii **de a doua speță sau de tipul al doilea**.

Aceste integrale au singularități finite situate în una sau ambele limite de integrare. Singularitățile, în număr finit, pot fi situate de asemeni în intervalul finit de integrare  $(a, b)$ .

**Definiția 1.2.11** Integralele improprii de forma (1.12) în care  $-\infty < a < b = +\infty$  sau  $-\infty = a < b < +\infty$  se numesc integrale improprii **de speța a treia**.

**Observația 1.2.4** O integrală improprie de speța a treia este egală cu suma dintre o integrală improprie de prima speță și o alta de speța a doua.

**Exemplul 1.2.1** *Integrala improprie de prima speță  $\int_0^{+\infty} \sin x dx$  este divergentă.*

Într-adevăr,

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \sin x dx = 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos t$$

Deoarece funcția cosinus nu are limită în punctul de la infinit, rezultă că această integrală improprie de primul tip este divergentă. ■

**Exemplul 1.2.2** *Integrala improprie de primul tip cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

*este convergentă și valoarea sa este egală cu  $\pi$ .*

Într-adevăr, limita din (1.16) există și este finită deoarece

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ u \rightarrow -\infty}} \int_u^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} (\arctg t - \arctg u) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Prin urmare, această integrală improprie este convergentă și valoarea sa este  $\pi$ . ■

**Exemplul 1.2.3** *Integrala improprie de speța a doua cu ambele limite puncte singulare*

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

*este convergentă, iar valoarea sa este  $\pi$ .*

Într-adevăr,

$$\lim_{\substack{u \rightarrow -1 \\ t \rightarrow 1}} (\arcsin t - \arcsin u) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Acest rezultat, împreună cu Teorema 1.2.1, demonstrează că integrala improprie considerată este convergentă și are valoarea  $\pi$ . ■

În exemplele următoare sunt prezentate integrale improprii utilizate în criteriile de comparație pentru testarea naturii unor integrale improprii.

**Exemplul 1.2.4** *Integrala improprie de prima speță*

$$I(\alpha) = \int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx, \quad (1.21)$$

unde  $C \in \mathbb{R}$  și  $a > 0$  sunt constante date, este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \leq 1$ .

Într-adevăr, avem

$$\int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \ln \frac{t}{a}, & \text{pentru } \alpha = 1 \\ C \frac{t^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{pentru } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

și prin urmare,

$$I(\alpha) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{pentru } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{pentru } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Rezultatele găsite arată că integrala improprie considerată este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \leq 1$ , iar când este convergentă, valoarea integralei este  $\frac{C}{(\alpha-1)a^{1-\alpha}}$ . ■

**Exemplul 1.2.5** *Integralele improprii de speța a doua:*

$$I_1(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx; \quad I_2(\alpha) = \int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx, \quad (1.22)$$

prima cu limita superioară punct singular, iar a doua cu singularitatea în limita inferioară, sunt convergente pentru  $\alpha < 1$  și divergente dacă  $\alpha \geq 1$ .

Într-adevăr, din

$$\int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-t)^{\alpha-1}} \right) & \text{dacă } \alpha \neq 1 \\ -\ln(b-t) + \ln(b-a) & \text{dacă } \alpha = 1, \end{cases}$$



prin trecere la limită pentru  $t \rightarrow b$ , obținem

$$\lim_{t \rightarrow b} \int_a^t \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{dacă } \alpha < 1 \\ +\infty, & \text{dacă } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

rezultat care demonstrează afirmațiile referitoare la prima integrală.

În mod similar se deduce

$$\lim_{u \rightarrow a} \int_u^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}, & \text{dacă } \alpha < 1 \end{cases}$$

Din cele deduse mai sus rezultă că în cazul  $\alpha < 1$ , ambele integrale (1.22) sunt convergente, iar valorile lor sunt

$$I_1(\alpha) = I_2(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}.$$

Pentru  $\alpha \geq 1$ , ambele integrale sunt divergente. ■

### 1.3 Formula Leibniz–Newton

**Teorema 1.3.1** *Dacă funcția  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă Riemann pe orice compact  $[a, t] \subset [a, b)$ , admite o primitivă continuă  $\Phi : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  pentru care există limita în  $t = b$ , atunci integrala improprie (1.3) este convergentă și valoarea sa este*

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} \Phi(t) - \Phi(a) = \Phi(b) - \Phi(a). \quad (1.23)$$

**Demonstrație.** Din ipotezele teoremei rezultă că pe orice compact  $[a, t] \subset [a, b)$  are loc formula Leibniz–Newton de calcul a unei integrale definite

$$\int_a^t f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^t = \Phi(t) - \Phi(a), \quad t \in [a, b). \quad (1.24)$$

Din (1.24) și (1.4) rezultă că integrala improprie (1.3) este convergentă dacă și numai dacă există și este finită limita în  $t = b$  a funcției  $\Phi$ . Dacă se introduce notația

$$\lim_{t \rightarrow b} \Phi(t) = \Phi(b) = \begin{cases} \Phi(b-0), & \text{dacă } b \in \mathbb{R}, \\ \Phi(+\infty), & \text{dacă } b = +\infty, \end{cases}$$

rezultă că pentru calculul unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate utiliza formula (1.23) care se numește *formula Leibniz–Newton pentru calculul integralelor improprii*. ■

Formule analoge se pot scrie și pentru integralele improprii cu limita inferioară punct singular sau cu ambele limite de integrare puncte singulare.

**Exercițiul 1.3.1** Să se studieze integrala improprie  $\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$ .

**Soluție.** O primitivă a funcției

$$f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

este funcția

$$\Phi : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \arctg(x - 1).$$

Această funcție are limită în  $+\infty$  și limita  $\Phi(\infty) = \frac{\pi}{2}$ . Conform Teoremei 1.3.1, rezultă că valoarea integralei improprii este

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \Phi(\infty) - \Phi(2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

■

## 1.4 Proprietăți ale integralelor improprii

Având în vedere (1.4), deducem că proprietățile integralelor improprii decurg din cele ale integralelor definite.

**Teorema 1.4.1** Mulțimea funcțiilor integrabile în sens generalizat pe  $[a, b)$  este un spațiu liniar real.

**Demonstrație.** Fie  $f_1 : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  și  $f_2 : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funcții integrabile în sens generalizat și  $\lambda_1, \lambda_2$  numere reale arbitrare. Pe compactul  $[a, t] \subset [a, b)$  are loc egalitatea

$$\int_a^t (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^t f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^t f_2(x) dx.$$

Trecând la limită în această egalitate, constatăm că funcția  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă în sens generalizat și valoarea integralei improprii a acestei funcții pe intervalul  $[a, b)$  este

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx.$$

Acest rezultat demonstrează teorema. ■

**Teorema 1.4.2** *Dacă integralele improprii cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b f_1(x) dx, \quad \int_a^b f_2(x) dx \tag{1.25}$$

*sunt convergente și*

$$f_1(x) \leq f_2(x), \quad x \in [a, b), \tag{1.26}$$

*atunci are loc inegalitatea*

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx. \tag{1.27}$$

**Demonstrație.** Inegalitatea (1.26) și o proprietate a integralei definite implică

$$\int_a^t f_1(x) dx \leq \int_a^t f_2(x) dx,$$

de unde, după trecerea la limită pentru  $t \rightarrow b$  și folosirea faptului că integralele improprii (1.25) sunt convergente, rezultă (1.27). ■

**Teorema 1.4.3** *Dacă una din integralele improprii (1.25) este convergentă și cealaltă este divergentă, suma lor este divergentă.*

**Demonstrație.** Presupunând prin absurd că suma integralelor improprii (1.25) este integrală improprie convergentă, conform Teoremei 1.4.1, diferența dintre această sumă și integrala improprie convergentă este o integrală improprie convergentă, fapt ce contrazice ipoteza. ■

**Observația 1.4.1** Dacă integralele improprii (1.25) sunt divergente, suma lor poate fi o integrală improprie divergentă sau convergentă.

Într-adevăr, integralele improprii de speța întâi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2} dx$$

sunt divergente dar suma lor

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx + \int_0^{+\infty} \frac{-1}{x+2} dx$$

este convergentă căci

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_0^t \frac{1}{x+1} dx + \int_0^t \frac{-1}{x+2} dx \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{x+1}{x+2} \right) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{t+1}{t+2} + \ln 2 = \ln 2, \end{aligned}$$

valoarea sa fiind  $\ln 2$ .

Considerând integralele improprii  $\int_0^\infty \sin^2 x dx$  și  $\int_0^\infty \cos^2 x dx$ , ambele divergente după cum se constată simplu folosind Definiția 1.2.2, suma lor,  $\int_0^\infty dx$ , este o integrală improprie divergentă.

Prin urmare, suma a două integrale improprii divergente poate fi sau o integrală improprie convergentă sau una divergentă. ■

## 1.5 Reducerea integralelor improprii la șiruri și serii numerice

Convergența unei integrale improprii cu limita superioară punct singular se poate reduce la convergența unui șir numeric sau a unei serii de numere reale. Pentru aceasta este suficient să aplicăm definiția cu șiruri a limitei în punctul  $t = b$  a funcției

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (1.28)$$

de a cărei valoare depinde natura integralei improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1.29)$$

**Observația 1.5.1** *Reamintim că funcția  $F(t)$  are limită finită în punctul  $t = b$  dacă și numai dacă oricare ar fi șirul de numere reale  $(t_n)_{n \geq 0}$ , cu proprietățile*

$$t_0 = a, \quad a < t_n < b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = b, \quad (1.30)$$

*șirul numeric  $(F(t_n))$  are limită finită și această limită nu depinde de alegerea șirului  $(t_n)$ .*

**Teorema 1.5.1** *Integrala improprie (1.29) este convergentă dacă și numai dacă pentru orice șir de puncte  $(t_n)_{n \geq 0}$ , cu proprietățile (1.30), șirul numeric*

$$\left( \int_a^{t_n} f(x) dx \right)_{n \geq 1} \quad (1.31)$$

*este convergent la aceeași limită finită. Dacă integrala improprie (1.29) este convergentă, limita șirului de numere reale (1.31) este egală cu valoarea integralei improprii.*

**Demonstrație.** Termenul general al șirului (1.31) este valoarea în  $t_n$  a funcției  $F$  din (1.28).

Concluziile teoremei rezultă din Observația 1.5.1. ■

**Observația 1.5.2** *Termenii șirului (1.30) sunt sumele parțiale ale seriei numerice*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x) dx. \quad (1.32)$$

**Teorema 1.5.2** *Condiția necesară și suficientă ca integrala improprie cu limita superioară punct singular (1.29) să fie convergentă este ca pentru orice alegere a șirului de puncte (1.30), seria numerică (1.32) să fie convergentă, iar suma sa să fie independentă de alegerea particulară a șirului. Dacă integrala (1.29) este convergentă, atunci valoarea sa este suma seriei (1.32).*

**Observația 1.5.3** *Dacă funcția  $f$  schimbă de semn de o infinitate de ori pe intervalul  $[a, b)$ , convergența seriei numerice (1.32) pentru o anumită alegere a șirului de puncte (1.30) nu implică, în caz general, convergența integralei improprii (1.29) cu limita superioară punct singular.*

Într-adevăr, integrala improprie de speța întâi din Exemplul 1.2.1 este divergentă deși seria

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sin x dx$$

este convergentă deoarece toți termenii sunt egali cu zero. ■

**Teorema 1.5.3** *Integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcții  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  care păstrează semn constant pe  $[a, b)$  este convergentă dacă și numai dacă seria numerică (1.32) converge pentru cel puțin o alegere a unui șir monoton crescător de tipul (1.30).*

**Demonstrație.** Prima parte a teoremei rezultă din teorema precedentă.

Să demonstrăm că are loc și reciproca teoremei.

În acest sens să presupunem că  $f(x) \geq 0$  pentru toate valorile lui  $x \in [a, b)$  și că seria numerică (1.32) este convergentă pentru un șir de puncte monoton crescător de tipul (1.30). Atunci șirul sumelor parțiale al seriei este monoton crescător și tinde la o limită finită  $J$  care este suma seriei.

Vom demonstra că pentru orice altă alegere a șirului de puncte

$$(t'_m)_{m \geq 0}, \quad t'_0 = a, \quad a < t'_m < b, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} t'_m = b,$$

seria numerică corespunzătoare

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \int_{t'_{m-1}}^{t'_m} f(x) dx \tag{1.33}$$

este convergentă și suma sa este egală cu  $J$ .

Pentru a demonstra aceasta vom folosi sumele parțiale ale seriilor (1.32) și (1.33). Deoarece  $J$  este totodată limita superioară a șirului sumelor parțiale ale seriei (1.32), rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $t_{n_0}$  astfel încât să aibă loc inegalitatea

$$J - \varepsilon < \int_a^{t_{n_0}} f(x) dx < J.$$

Să alegem numărul natural  $m_0$  astfel încât pentru toți  $m \geq m_0$  să fie satisfăcută inegalitatea  $t'_m \geq t_{n_0}$ . Apoi, pentru orice  $t'_m$  există  $t_{n_m} > t'_m$  și prin urmare, inegalitatea

$$J - \varepsilon < \int_a^{t_{n_0}} f(x) dx \leq \int_a^{t'_m} f(x) dx \leq \int_a^{t_{n_m}} f(x) dx \leq J$$

are loc pentru toți  $m \geq m_0$ , deoarece  $f$  este funcție nenegativă. În consecință

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^{t'_m} f(x) dx = J,$$

care, în baza Teoremei 1.5.1, arată că integrala improprie cu limita superioară punct singular a unei funcții pozitive pe intervalul de integrare este convergentă. ■

**Exemplul 1.5.1** Integrala improprie  $\int_1^\infty f(x) dx$ , unde

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{pentru } n \leq x \leq n + \frac{1}{2^{2n}}, \\ 0 & \text{pentru } n + \frac{1}{2^{2n}} < x < n + 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1.34)$$

este convergentă și are valoarea 1.

**Soluție.** Aplicând Teorema 1.5.3 pentru alegerea lui  $t_n = n$ , găsim

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie de speța întâi

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx,$$

unde  $f$  este funcția (1.34), este convergentă și are valoarea 1. ■

**Observația 1.5.4** Exemplul de mai sus arată că chiar dacă funcția  $f$  este nenegativă faptul că integrala improprie de prima speță

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

este convergentă nu atrage că  $f(x) \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow +\infty$ .

Întradevăr, folosind criteriul de non existență a limitei unei funcții într-un punct, rezultă că funcția definită prin (1.34) nu are limită în punctul de la infinit. ■

## 1.6 Criteriul integral al lui Cauchy

**Teorema 1.6.1** *Dacă funcția  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , integrabilă Riemann pe orice compact  $[1, t] \subset [1, \infty)$ , este pozitivă și descrescătoare, atunci seria  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  și integrala improprie de speța întâi  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  au aceeași natură.*

**Demonstrație.** Deoarece  $f$  este funcție descrescătoare pe intervalul  $[1, +\infty)$  avem

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \quad x \in [k, k+1], \quad k \in \mathbb{N}^*$$

și deci, după integrarea pe compactul  $[k, k+1]$ ,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k), \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.35)$$

Sumând inegalitățile (1.35) după  $k = \overline{1, n}$ , obținem

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^n f(k),$$

adică,

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq s_n, \quad (1.36)$$

unde  $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  este suma parțială de ordin  $n$  a seriei numerice

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n). \quad (1.37)$$

Din (1.36) rezultă că șirul sumelor parțiale  $(s_n)$  a seriei (1.37) este mărginit dacă și numai dacă șirul de puncte

$$\left( \int_1^n f(x)dx \right) \quad (1.38)$$

este mărginit. Fiind și monoton crescător, rezultă că șirul  $(s_n)$  este convergent, adică seria numerică  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  este convergentă dacă și numai dacă șirul (1.38) este convergent, adică dacă și numai dacă integrala improprie de primul tip  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  este convergentă. ■



**Exemplul 1.6.1** *Seria numerică cu termeni pozitivi*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}, \quad \alpha > 0,$$

este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \in (0, 1]$ .

**Soluție.** Se aplică criteriul integral al lui Cauchy, unde funcția  $f$  este

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^\alpha x}, \quad \alpha > 0, \quad x \in [2, +\infty).$$

Integrala improprie de care avem nevoie pentru a aplica criteriul este

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^\alpha}.$$

Ultima integrală este de tipul (1.21) în care  $a = \ln 2$  și  $C = 1$ . Prin urmare, integrala este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă când  $\alpha \leq 1$ . Conform criteriului integral al lui Cauchy, seria este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și divergentă pentru  $\alpha \in (0, 1]$ . ■

## 1.7 Metode de calcul ale integralelor improprii

Plecând de la observația că o integrală improprie se definește ca limită a unei integrale definite și că pentru calculul acesteia din urmă se pot utiliza metode ca schimbarea de variabilă și integrarea prin părți, este natural să punem problema dacă aceste tehnici de calcul nu sunt aplicabile și integralelor improprii.

### 1.7.1 Schimbarea de variabilă în integrala improprie

**Teorema 1.7.1** *Dacă  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , este o funcție integrabilă Riemann pe orice compact  $[a, t] \subset [a, b)$  și*

$$\tau \mapsto x = \varphi(\tau) \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [\alpha, \beta), \quad -\infty < \alpha < \beta \leq +\infty,$$

este o funcție strict crescătoare cu derivată continuă pe  $[\alpha, \beta)$  care satisface condițiile:

$$a = \varphi(\alpha); \quad \lim_{\tau \rightarrow \beta} \varphi(\tau) = b, \quad (1.39)$$

atunci integralele improprii:

$$\int_a^b f(x) dx; \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) d\tau$$

au aceeași natură. Dacă una din ele este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) d\tau$$

care se numește **formula schimbării de variabilă în integrala improprie**.

**Demonstrație.** Fie  $t \in [a, b)$  și  $u = \varphi^{-1}(t)$ . Ținând cont că intervalul compact  $[\alpha, u] \subset [\alpha, \beta)$  este corespondentul prin aplicația  $\varphi^{-1}$  a compactului  $[a, t] \subset [a, b)$ , prin aplicarea formulei schimbării de variabilă în integrala definită, obținem

$$\int_a^t f(x) dx = \int_{\alpha}^u f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) d\tau. \quad (1.40)$$

Din proprietățile funcției  $\varphi$  rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow b} \varphi^{-1}(t) = \beta. \quad (1.41)$$

Definiția integralei improprii și egalitățile (1.40), (1.41) demonstrează teorema. ■

**Observația 1.7.1** Teorema se extinde ușor la celelalte tipuri de integrale improprii prezentate în primul paragraf.

**Observația 1.7.2** Funcția  $\varphi$  care realizează schimbarea de variabilă într-o integrală improprie poate fi strict descrescătoare, derivabilă și cu derivată continuă pe  $(\alpha, \beta]$ . În acest caz, condițiile (1.39) devin

$$a = \varphi(\beta); \quad \lim_{\tau \rightarrow \alpha} \varphi(\tau) = b,$$

iar formula schimbării de variabilă este

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau) d\tau.$$

**Observația 1.7.3** *Este posibil ca în urma unei schimbări de variabilă o integrală improprie să treacă într-o integrală proprie și reciproc.*

**Exemplul 1.7.1** *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

unde  $y$  este un număr real pozitiv.

**Soluție.** Pentru fiecare  $y > 0$ , funcția

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

este continuă, ca atare este integrabilă Riemann pe orice compact  $[u, t] \subset (-1, 1)$  și putem spune că  $I$  este o integrală improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare. Funcția

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow (-1, 1), \quad x = \varphi(\tau) = \sin \tau$$

satisface condițiile cerute de formula schimbării de variabilă în integrala improprie, iar

$$\lim_{\tau \rightarrow -\pi/2} \varphi(\tau) = -1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \varphi(\tau) = 1.$$

Aplicarea formulei schimbării de variabilă conduce la

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\cos(y \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y\tau \, d\tau = \frac{1}{y} \sin y\tau \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{y} \sin \frac{\pi y}{2}.$$

Schimbarea de variabilă folosită a transformat integrala improprie cu ambele limite de integrare puncte singulare în integrală definită (proprie). ■

**Exemplul 1.7.2** *Să se calculeze integrala definită*

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

**Soluție.** Deoarece integrantul este funcție periodică de perioadă  $\frac{\pi}{2}$ , avem

$$J = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx. \quad (1.42)$$

Efectuăm schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = \tau$ . Prin urmare, funcțiile  $\varphi$  și  $\varphi'$  sunt

$$\varphi, \varphi' : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\tau) = \operatorname{arctg} \tau, \quad \varphi'(\tau) = \frac{1}{1 + \tau^2}.$$

Prin această schimbare de variabilă, intervalul finit de integrare  $[0, \frac{\pi}{2}]$  se transformă în intervalul infinit  $[0, +\infty)$  și

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tau^2}; \quad \sin^2 x = \frac{\tau^2}{1 + \tau^2}; \quad f(\varphi(\tau)) \varphi'(\tau) = 4 \frac{1 + \tau^2}{1 + \tau^4}.$$

Folosind schimbarea de variabilă menționată, integrala proprie (1.42) devine integrala improprie de speța întâi dintr-o funcție rațională

$$J = 4 \int_0^{+\infty} \frac{1 + \tau^2}{1 + \tau^4} d\tau. \quad (1.43)$$

Funcția de integrat din (1.43) se descompune în fracțiile simple

$$\frac{4(1 + \tau^2)}{1 + \tau^4} = \frac{2}{\tau^2 + \tau\sqrt{2} + 1} + \frac{2}{\tau^2 - \tau\sqrt{2} + 1},$$

iar aceste fracții simple admit ca primitive funcțiile

$$2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2} + 1), \quad 2\sqrt{2} \operatorname{arctg}(\tau\sqrt{2} - 1)$$

care au limite finite în  $\tau = +\infty$  și fiecare din aceste limite este egală cu  $\frac{\pi}{2}$ .

Prin urmare, aplicând formula Leibniz–Newton (1.23), se găsește că valoarea integralei proprii  $J$  este  $J = \pi\sqrt{8}$ . ■

**Observația 1.7.4** *Studiul naturii unei integrale improprii pe un interval mărginit dintr-o funcție nemărginită (integrală improprie de speța a doua) se reduce la studiul naturii unei integrale improprii pe un interval nemărginit.*

Într-adevăr, schimbarea de variabilă

$$x = \varphi(\tau) = \frac{b\tau + a}{\tau + 1} \implies \tau = \varphi^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - x},$$

efectuată în integrala improprie de speța a doua cu limita superioară punct singular din funcția  $f$  conduce la integrala improprie de speța întâi

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^{+\infty} f\left(\frac{b\tau+a}{\tau+1}\right) \frac{d\tau}{(\tau+1)^2}$$

fapt care este evident.

Conform acestei observații, mai departe se pot studia doar integralele improprii de speța întâi. ■

### 1.7.2 Integrarea prin părți în integrala improprie

**Teorema 1.7.2** *Dacă funcțiile*

$$u, v : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b \leq +\infty,$$

*admit derivate continue pe  $[a, b)$ , iar limita  $\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x)$ , notată cu*

$$\lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) = u(b)v(b),$$

*există și este finită, atunci integralele improprii*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx, \quad \int_a^b u'(x)v(x)dx \quad (1.44)$$

*au aceeași natură. Dacă una din integralele (1.44) este convergentă, atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \quad (1.45)$$

*care se numește formula integrării prin părți în integrala improprie.*

**Demonstrație.** În ipotezele teoremei, are loc formula integrării prin părți pe compactul  $[a, t] \subset [a, b)$

$$\int_a^t u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^t - \int_a^t u'(x)v(x)dx. \quad (1.46)$$

Trecând la limită pentru  $t \rightarrow b$  în (1.46), rezultă că integralele improprii (1.44) au aceeași natură și, în plus, are loc (1.45). ■

**Exercițiul 1.7.1** Să se calculeze următoarele integrale improprii de speța a doua

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx. \quad (1.47)$$

**Soluție.** Prima integrală are limita inferioară punct singular iar cea de a doua are singularitatea în limita superioară, ambele singularități fiind înțelese în sensul că funcția de integrat este nemărginită în vecinătăți ale acestor limite de integrare.

Integrarea prin părți a primei integrale conduce la

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx. \quad (1.48)$$

De remarcat că integrala din membrul doi al relației (1.48) este proprie căci funcția de integrat  $\frac{x}{\operatorname{tg} x}$  este continuă pe intervalul  $(0, \pi/2)$  și are limite finite în extremități, deci este prelungibilă prin continuitate la compactul  $[0, \pi/2]$ . Acest rezultat arată că integrala improprie  $I$  este convergentă. La fel se demonstrează că și  $J$  este integrală improprie convergentă.

Integralele  $I$  și  $J$  sunt egale deoarece după efectuarea substituției  $x = \pi/2 - t$  în prima integrală se obține cea de a doua integrală. Apoi,

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} = -\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x dx. \quad (1.49)$$

Efectuând schimbarea de variabilă  $2x = u$  în ultima integrală din (1.49), obținem

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u du. \quad (1.50)$$

Pe de altă parte, proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei definite conduce la

$$\int_0^{\pi} \ln \sin u du = \int_0^{\pi/2} \ln \sin u du + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u du. \quad (1.51)$$

Dacă în ultima integrală din (1.51) efectuăm schimbarea de variabilă  $u = \pi - x$ , găsim

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u du = - \int_{\pi/2}^0 \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = I. \quad (1.52)$$

Din (1.49), (1.50) și (1.52) deducem

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \ln 2$$

din care, ținând cont și de faptul că  $I = J$ , avem în final

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2. \quad (1.53)$$

Așadar, valoarea comună a celor două integrale considerate este  $\frac{\pi}{2} \ln 2$ . ■

**Exercițiul 1.7.2** Pornind de la integrala  $I$  din (1.47) și folosind cele două metode de calcul ale integralelor improprii, să se determine valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

**Soluție.** Schimbarea de variabilă  $\sin x = t$  în integrala  $I$  din (1.47) arată că

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 (\ln t)(\arcsin t)' dt,$$

iar integrarea prin părți în ultima integrală conduce la

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\ln t)(\arcsin t) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arcsin t}{t} dt. \quad (1.54)$$

Folosind (1.53) și (1.54) se găsește

$$\int_0^1 \frac{\arcsin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

cu mențiunea că integrala a cărei valoare am determinat-o este proprie, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcția continuă  $t \mapsto \frac{\arcsin t}{t}$ ,  $t \in (0, 1]$  poate fi prelungită prin continuitate la compactul  $[0, 1]$ . ■

## 1.8 Testul lui Cauchy de convergență a integralelor improprii

Convergența unei integrale improprii cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b} F(t) = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x)dx \quad (1.55)$$

este echivalentă cu existența limitei în punctul  $t = b$  a funcției  $F$ . Conform teoremei Bolzano–Cauchy, care asigură existența limitei finite într-un punct de acumulare a domeniului de definiție a unei funcții reale de variabilă reală, funcția  $F$  are limită finită în punctul  $t = b$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $b(\varepsilon) \in [a, b)$  astfel încât

$$|F(t') - F(t'')| < \varepsilon \quad (\forall) \ t' \in (b(\varepsilon), b) \quad \text{și} \quad (\forall) \ t'' \in (b(\varepsilon), b). \quad (1.56)$$

**Teorema 1.8.1** (Testul lui Cauchy de convergență al unei integrale improprii cu limita superioară punct singular) *Integrala improprie (1.55) este convergentă dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $b(\varepsilon) \in [a, b)$  astfel încât inegalitatea*

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon \quad (1.57)$$

are loc pentru orice  $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$ .

**Demonstrație.** Convergența integralei improprii (1.55) este stabilită de comportarea valorilor funcției

$$F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^t f(x)dx \quad (1.58)$$

în vecinătatea punctului  $t = b$ . Aplicând teorema lui Bolzano–Cauchy în care funcția  $F$  este (1.58), din (1.55) și (1.56) rezultă concluzia teoremei. ■

**Observația 1.8.1** *Inegalitatea (1.57) este echivalentă cu condiția*

$$\lim_{\substack{t' \rightarrow b \\ t'' \rightarrow b}} \int_{t'}^{t''} f(x)dx = 0. \quad (1.59)$$



**Exercițiul 1.8.1** Folosind testul de convergență al lui Cauchy să se demonstreze că integrala improprie de speța întâi cu limita superioară punct singular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1.60)$$

este convergentă. Această integrală se numește **integrala lui Dirichlet**.

**Soluție.** Să remarcăm întâi că singularitatea în limita inferioară a acestei integrale este aparentă căci funcția

$$f_1 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0, \quad (1.61)$$

poate fi prelungită prin continuitate luând pe 1 ca valoare în  $x = 0$  a funcției  $f$ , prelungirea prin continuitate a funcției  $f_1$ . Valoarea în  $x = 0$  a funcției  $f$  este limita în origine a funcției  $f_1$  din (1.61).

Atunci funcția

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{pentru } x > 0, \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$$

este continuă pe întreg domeniu de definiție deci se poate vorbi de integrala improprie (1.60).

Evaluarea integralei de tipul (1.59) folosind metoda integrării prin părți conduce la

$$\int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos t'}{t'} - \frac{\cos t''}{t''} - \int_{t'}^{t''} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^{t''} \frac{\sin x}{x} dx \right| &\leq \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \left| \int_{t'}^{t''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{t'} + \frac{1}{t''} + \left| \int_{t'}^{t''} \frac{dx}{x^2} \right| \leq \frac{2}{t'} + \frac{2}{t''} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pentru  $t' \rightarrow +\infty$  și  $t'' \rightarrow +\infty$ . Deci, în baza părții a doua a testului lui Cauchy de convergență a unei integrale improprii, integrala improprie de speța întâi (1.60) este convergentă. Mai târziu vom vedea că valoarea integralei lui Dirichlet este  $\frac{\pi}{2}$ . ■

De remarcat că aplicarea testului lui Cauchy la o integrală improprie concretă este laborioasă, în schimb, în multe aplicații, acest test este folosit pentru stabilirea unor condiții suficiente (criterii) de convergență.

Criteriile de convergență pe care le vom demonstra se vor referi la integrale improprii cu limita superioară punct singular, și aceasta pentru că studiul oricărui alt tip de integrală improprie, printr-o schimbare de variabilă adecvată, se reduce la studiul uneia cu singularitatea în limita superioară.

Înainte de a trece la prezentarea acestor criterii vom introduce noțiunea de *integrală improprie absolut convergentă* care este asemănătoare noțiunii de serie numerică absolut convergentă.

## 1.9 Integrale improprii absolut convergente

**Definiția 1.9.1** Fie  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă în sens generalizat pe intervalul  $[a, b)$  și integrala improprie cu limita superioară punct singular

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (1.62)$$

Integrala improprie (1.62) se numește **absolut convergentă** dacă integrala improprie

$$\int_a^b |f(x)|dx \quad (1.63)$$

este convergentă.

**Teorema 1.9.1** Dacă integrala improprie (1.62) este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

**Demonstrație.** Într-adevăr, integrala (1.63) fiind convergentă, rezultă că pentru  $\varepsilon > 0$  există  $b(\varepsilon)$  astfel încât să avem

$$\left| \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon, \quad (\forall) \quad t', t'' > b(\varepsilon). \quad (1.64)$$

Însă, întotdeauna avem

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \right|. \quad (1.65)$$

Inegalitățile (1.64) și (1.65) implică

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \quad (\forall) \quad t', t'' > b(\varepsilon).$$

Fiind îndeplinite condițiile testului lui Cauchy pentru integrala improprie (1.62), aceasta este convergentă și teorema este demonstrată. ■

**Observația 1.9.1** *Convergența integralei improprie (1.62) nu implică convergența absolută a sa, cu alte cuvinte reciproca Teoremei 1.9.1 nu este adevărată.*

Pentru a justifica această afirmație este suficient să dăm un exemplu. Folosind testul de convergență al lui Cauchy s-a demonstrat că integrala improprie de speța întâi (1.60) este convergentă. Demonstrăm că integrala modulului

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

este divergentă. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria numerică

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \quad (1.66)$$

este divergentă fapt ce se poate constata prin aplicarea criteriului de comparație pentru seriile numerice cu termeni pozitivi. Întrădevăr, pentru  $n \geq 1$ , avem

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{\pi(n+1)} \left| \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx \right| = \frac{2}{\pi(n+1)}, \quad (1.67)$$

iar seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad (1.68)$$

este divergentă deoarece diferă de seria armonică prin factorul constant  $\frac{2}{\pi}$ .

Divergența seriei numerice (1.68) și inegalitatea (1.67), împreună cu criteriul de comparație pentru seriile numerice cu termeni pozitivi, atrage divergența seriei numerice (1.66). ■

**Definiția 1.9.2** *Integrala improprie (1.62) se numește **semiconvergentă** sau **simplu convergentă** dacă ea este convergentă dar nu este absolut convergentă.*

**Observația 1.9.2** *O integrală improprie se poate plasa în unul din cazurile: integrală improprie semiconvergentă; integrală improprie absolut convergentă; integrală improprie divergentă.*

**Observația 1.9.3** *Integrala improprie cu limita superioară punct singular (1.62) este absolut convergentă dacă și numai dacă integrala improprie*

$$\int_{a_1}^b f(x)dx, \quad (1.69)$$

*unde  $a < a_1 < b$ , este absolut convergentă.*

Într-adevăr, dacă una din integralele improprii (1.62) și (1.69) este absolut convergentă, în baza Definiției 1.9.1 și a testului de convergență al lui Cauchy, avem

$$\int_{t'}^{t''} |f(x)|dx \rightarrow 0 \text{ pentru } t', t'' \rightarrow b. \quad (1.70)$$

Dar relația (1.70) este condiție necesară și suficientă de convergență și pentru cealaltă integrală improprie din cele două menționate mai sus. ■

**Exemplul 1.9.1 (Un exemplu de integrală semiconvergentă)** *Pe segmentul  $[n-1, n] \subset \mathbb{R}$  ca bază, se construiește triunghiul isoscel  $T_n$ , de arie  $\frac{1}{n}$ , cu vârful în sus sau în jos, după cum  $n$  este număr întreg pozitiv impar sau par. Mulțimea laturilor egale ale triunghiurilor*

$$T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$$

*constituie graficul unei funcții  $f$  continue pentru  $x > 0$ . Să se arate că integrale improprie de prima speță*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

*este convergentă, în timp ce integrala*

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$$

*este divergentă.*

**Soluție.** Să considerăm un număr pozitiv  $x$  cu proprietatea că partea sa întreagă este  $n - 1$ . Dacă  $n$  este par, putem scrie

$$\int_0^n f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{n-1} f(t)dt.$$

Dacă  $n$  este impar, avem inegalitățile contrarii

$$\int_0^{n-1} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^n f(t)dt.$$

Dar, din interpretarea geometrică a integralei Riemann, avem

$$\int_0^{n-1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

dacă  $x \rightarrow +\infty$ , atunci  $n \rightarrow +\infty$ , iar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \ln 2,$$

deci integrala improprie  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  este convergentă și are valoarea  $\ln 2$ .

Pe de altă parte, este ușor de văzut că

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_0^x f(t)dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

deci integrala  $\int |f(x)|dx$  este divergentă deoarece seria numerică  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă.

Prin urmare, integrala improprie de speța întâi  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  este semi-convergentă. ■

## 1.10 Criterii de comparație ale integralelor improprii

Pentru studiul convergenței absolute și divergenței unor integrale improprii de regulă se folosesc unele criterii în care sunt implicate două integrale improprii ale căror natură este comparată, motiv pentru care aceste criterii sunt numite *criterii de comparație*.

**Teorema 1.10.1 (Criteriul general de comparație)** *Dacă funcțiile*

$$f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b \leq +\infty$$

*sunt integrabile Riemann pe orice segment  $[a, t] \subset [a, b)$ , atunci au loc următoarele afirmații:*

1. *dacă există  $a_1 \in [a, b)$  astfel încât are loc inegalitatea*

$$|f(x)| \leq g(x), \quad x \in [a_1, b),$$

*și integrala improprie cu limita superioară punct singular*

$$\int_a^b g(x) dx \tag{1.71}$$

*este convergentă, atunci integrala improprie (1.62) este absolut convergentă;*

2. *dacă există  $a_2 \in [a, b)$  astfel încât*

$$f(x) \geq g(x) \geq 0, \quad x \in [a_2, b)$$

*și integrala improprie (1.71) este divergentă, atunci integrala improprie (1.62) este divergentă.*

**Demonstrație.** Pentru a demonstra prima dintre afirmații să observăm că pe orice segment  $[t', t''] \subset [a_1, b)$  avem

$$\left| \int_{t'}^{t''} |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_{t'}^{t''} g(x) dx \right|. \tag{1.72}$$

În baza inegalității (1.72) și a testului lui Cauchy de convergență a unei integrale improprii, rezultă că integrala improprie (1.63) este convergentă, deci în baza Definiției 1.9.1 integrala improprie (1.62) este absolut convergentă.

Demonstrația celei de a doua afirmații se face prin reducere la absurd. Presupunând prin absurd că integrala improprie (1.62) este convergentă, în baza primei afirmații a acestei teoreme rezultă că integrala improprie (1.71) este convergentă, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Din această teoremă rezultă câteva consecințe care sunt foarte utile și ușor de manevrat în stabilirea naturii unor integrale improprii.

**Corolarul 1.10.1 (Criteriul de comparație cu limită)** *Dacă în integralele improprii (1.62) și (1.71), cu limita superioară punct singular, funcțiile  $f$  și  $g$  sunt nenegative pe segmentul  $[a, b)$  și există*

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k,$$

*atunci au loc următoarele afirmații:*

1. *dacă integrala improprie (1.71) este convergentă și  $0 \leq k < +\infty$ , atunci integrala improprie (1.62) este convergentă;*
2. *dacă integrala improprie (1.71) este divergentă și  $0 < k \leq +\infty$ , atunci integrala improprie (1.62) este divergentă.*

**Demonstrație.** Pentru a arăta că prima afirmație este adevărată să observăm că din definiția în limbajul " $\varepsilon - \delta$ " a limitei unei funcții reale de o variabilă reală, într-un punct de acumulare a domeniului ei de definiție, rezultă că există  $a_1 \in [a, b)$  astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1, \quad x \in [a_1, b) \implies f(x) < (k + 1)g(x), \quad x \in [a_1, b).$$

Convergența integralei (1.71) implică convergența integralei

$$\int_a^b (k + 1)g(x)dx$$

și în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 rezultă afirmația **1** din acest corolar.

Pentru a demonstra punctul **2** să considerăm  $k' \in (0, k)$ . Definiția limitei asigură existența lui  $a_2 \in [a, b)$  astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} > k', \quad x \in [a_2, b) \implies f(x) > k'g(x), \quad x \in [a_2, b). \quad (1.73)$$

Inegalitățile (1.73), divergența integralei improprii (1.71) și ipoteza de la punctul **2** al Teoremei 1.10.1 conduc la divergența integralei (1.62). ■

**Observația 1.10.1** *Dacă  $0 < k < +\infty$ , atunci integralele (1.62) și (1.71) au aceeași natură.*

**Corolarul 1.10.2 (Criteriu special de comparație)** Pentru integrala improprie de speța întâi cu limita superioară punct singular

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx, \quad a > 0 \quad (1.74)$$

sunt adevărate următoarele afirmații:

1. dacă există  $a_1 \in [a, +\infty)$ ,  $\alpha > 1$  și  $C \geq 0$  finit astfel încât

$$|f(x)| \leq \frac{C}{x^\alpha}, \quad x \in [a_1, +\infty),$$

atunci integrala improprie (1.74) este absolut convergentă;

2. dacă există  $a_2 \in [a, +\infty)$ ,  $\alpha \leq 1$  și  $C > 0$  astfel încât

$$|f(x)| \geq \frac{C}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty),$$

iar funcția  $f$  are semn constant pe  $[a_2, +\infty)$ , atunci integrala improprie (1.74) este divergentă.

**Demonstrație.** Punând  $g(x) = \frac{C}{x^\alpha}$  în criteriul general de comparație și ținând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$$

este convergentă pentru  $\alpha > 1$  și  $a > 0$ , deducem că integrala (1.74) este absolut convergentă. Să observăm că presupunerea  $a > 0$  nu este restrictivă căci dacă se întâmplă ca în (1.74) limita inferioară de integrare să nu fie pozitivă, atunci  $a$  poate fi înlocuit prin  $c > 0$ , iar integralele improprii  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  și  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$  sunt simultan convergente sau divergente.

Pentru a demonstra cea de a doua afirmație, presupunem că există  $a_2 > a$ ,  $C > 0$  și  $\alpha \leq 1$  astfel încât  $f(x) \geq \frac{C}{x^\alpha}$  pentru  $x \in [a_2, +\infty)$ . Dacă ținem cont că în acest caz integrala improprie  $\int_{a_2}^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx$  este divergentă și aplicăm partea a doua a criteriului general de comparație, deducem că  $\int_{a_2}^{+\infty} f(x)dx$  este divergentă rezultat care, împreună cu Observația 1.2.1, implică divergența integralei improprii (1.74).



În cazul în care valorile funcției  $f$  sunt negative pe  $[a_2, +\infty)$ , dacă  $f(x) \leq -\frac{C}{x^\alpha}$  pentru  $x \geq a_2 \geq a > 0$ ,  $C > 0$  și  $\alpha \leq 1$ , putem pune  $f^*(x) = -f(x)$ .

Funcția  $f^*$  are proprietatea  $f^*(x) \geq \frac{C}{x^\alpha}$  pentru orice  $x \geq a_2 \geq a > 0$ .

În consecință, integrala  $\int_a^{+\infty} f^*(x)dx$  este divergentă, ceea ce atrage faptul că integrala

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x)dx = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f^*(x)dx$$

este de asemenea divergentă, pentru că ultima limită nu există. ■

**Corolarul 1.10.3 (Criteriul de convergență în  $\alpha$  cu limită)** *Dacă există limita*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| x^\alpha = C,$$

*atunci au loc următoarele afirmații:*

1. *dacă  $0 \leq C < +\infty$  și  $\alpha > 1$ , integrala improprie (1.74) este absolut convergentă;*
2. *dacă  $0 < C \leq +\infty$ ,  $\alpha \leq 1$  și funcția  $f$  păstrează același semn pentru  $x \geq a_2$ , unde  $a_2 \geq a$ , integrala improprie (1.74) este divergentă.*

**Demonstrație.** Din definiția limitei cu vecinătăți rezultă că dacă  $0 \leq C < +\infty$ , există  $a_1 \geq a$  astfel încât au loc inegalitățile:

$$|f(x)| x^\alpha \leq 2C, \quad \text{pentru } C > 0 \quad \text{și} \quad x \in [a_2, +\infty) \implies$$

$$|f(x)| \leq \frac{2C}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty);$$

$$|f(x)| x^\alpha \leq 1, \quad \text{pentru } C = 0 \quad \text{și} \quad x \in [a_2, +\infty) \implies$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty).$$

Prin urmare, în baza punctului 1 al Corolarului 1.10.2 integrala improprie de speța întâi (1.74) este absolut convergentă.

Pentru a doua afirmație, dacă  $0 < C \leq +\infty$  și  $\alpha \leq 1$ , au loc următoarele inegalități

$$|f(x)| x^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru } C < +\infty \quad \text{și} \quad x \in [a_2, +\infty) \implies$$

$$\begin{aligned}
|f(x)| &> \frac{C}{2x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty); \\
|f(x)|x^\alpha &> 1, \quad \text{pentru } C = \infty \quad \text{și } x \in [a_2, +\infty) \implies \\
|f(x)| &> \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \in [a_2, +\infty),
\end{aligned}$$

de unde, conform celei de a doua afirmații din Corolarul 1.10.2, rezultă că integrala improprie (1.74) este divergentă. ■

**Exemplul 1.10.1** *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx, \quad (1.75)$$

unde  $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$  este un polinom de gradul  $m$  cu coeficienți reali, iar  $Q(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$  un polinom real de grad  $n$ , care nu are rădăcini reale în intervalul de integrare  $[a, +\infty)$ , este convergentă dacă  $n > m + 1$ .

**Soluție.** Într-adevăr, funcția de integrat se poate scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x^{n-m}} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_m}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_n}{x^n}}. \quad (1.76)$$

Efectuând produsul cu  $x^{n-m}$  în ambii membri ai relației (1.76) și trecând la limită pentru  $x \rightarrow +\infty$ , obținem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{b_0},$$

care arată că dacă  $n - m > 1$ , integrala improprie (1.75) este convergentă. ■

**Exercițiul 1.10.1** *Să se studieze natura integralelor improprii de prima speță:*

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2} \sqrt[3]{1+x^3}}, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

**Soluție.** Integrala  $I_1$  este convergentă deoarece

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt[3]{1+x^3}} < \frac{1}{x^2}, \quad \text{iar} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{este convergentă.}$$

A doua integrală improprie este divergentă pentru că

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{x^{2/3}}{x} = \frac{1}{x^{1/3}}, \quad \text{iar integrala} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \text{este convergentă.}$$

În studiul naturii ambelor integrale s-a folosit criteriul special de comparație din Corolarul 1.10.2. ■

**Exemplul 1.10.2** *Integralele improprii de prima speță:*

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x} \sin mx dx; \quad I_2 = \int_a^{+\infty} e^{-k^2x} \cos mx dx$$

sunt absolut convergente deoarece:

$$|e^{-k^2x} \sin mx| \leq e^{-k^2x}; \quad |e^{-k^2x} \cos mx| \leq e^{-k^2x},$$

iar integrala improprie de speța a doua

$$\int_a^{+\infty} e^{-k^2x} dx$$

este convergentă în baza definiției naturii unei integrale improprii. ■

Comparând integrala improprie de speța a doua

$$\int_a^b f(x) dx, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad (1.77)$$

cu punctul singular în limita superioară (respectiv în limita inferioară) cu integrala improprie deja studiată

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad (\text{respectiv} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}),$$

convergentă pentru  $\alpha < 1$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 1$ , obținem criterii de convergență în  $\alpha$  ale integralelor improprii de speța a doua.

**Corolarul 1.10.4 (Criteriu special de comparație pentru integrale improprii de speța doua)** Pentru integrala improprie (1.77), cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, au loc următoarele afirmații:

1. dacă există  $a_1 \in [a, b)$ , (respectiv  $a_1 \in (a, b]$ ),  $\alpha < 1$  și  $0 \leq C < +\infty$  astfel încât

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_1, b)$$

$$\left( \text{respectiv } |f(x)| \leq \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_1] \right),$$

atunci integrala improprie de speța doua  $\int_a^b f(x)dx$ , cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, este absolut convergentă;

2. dacă există  $a_2 \in [a, b)$  (respectiv  $a_2 \in (a, b]$ ),  $\alpha \geq 1$  și  $C > 0$  astfel încât

$$|f(x)| > \frac{C}{(b-x)^\alpha}, x \in [a_2, b)$$

$$\left( \text{respectiv } |f(x)| > \frac{C}{(x-a)^\alpha}, x \in (a, a_2] \right),$$

iar funcția  $f$  are semn constant pe  $[a_2, b)$  (respectiv pe  $(a, a_2]$ ), atunci integrala improprie de speța doua  $\int_a^b f(x)dx$ , cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, este divergentă.

**Demonstrație.** Punând  $g(x) = \frac{C}{(b-x)^\alpha}$  (respectiv  $g(x) = \frac{C}{(x-a)^\alpha}$ ) în criteriul general de comparație din Teorema 1.10.1 și ținând cont de faptul că integrala improprie

$$\int_a^b \frac{C}{(b-x)^\alpha} dx = \frac{C(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1},$$

$$\left( \text{respectiv } \int_a^b \frac{C}{(x-a)^\alpha} dx = \frac{C(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \right)$$

este convergentă pentru  $\alpha < 1$  având valoarea scrisă alăturat, deducem că integrala improprie de speța doua  $\int_a^b f(x)dx$ , cu limita superioară (respectiv limita inferioară) punct singular, este absolut convergentă și deci prima afirmație este demonstrată.

Să presupunem că funcția  $f$  este nenegativă. Atunci avem

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha} \text{ (respectiv } f(x) > \frac{C}{(x-a)^\alpha} \text{)}$$

și  $\alpha \geq 1$  pentru toți  $x \in [a_2, b) \subset [a, b)$  (respectiv  $x \in (a, a_2] \subset (a, b]$ ). În acest caz integrala improprie de speța doua

$$\int_{a_2}^b \frac{C}{(b-x)^\alpha} dx \text{ (respectiv } \int_a^{a_2} \frac{C}{(x-a)^\alpha} dx \text{)}$$

este divergentă. Aplicând partea a doua a criteriului general de comparație deducem că integrala improprie  $\int_{a_2}^b f(x)dx$  (respectiv  $\int_a^{a_2} f(x)dx$ ) este divergentă. Această ultimă integrală are aceeași natură cu integrala improprie de speța doua cu limita superioară (respectiv limita inferioară) finită punct singular din (1.77), rezultat care implică divergența acestora.

În cazul în care funcția  $f$  este negativă pe intervalul  $[a_2, b) \subset [a, b)$  (respectiv  $(a, a_2] \subset (a, b]$ ), dacă  $f(x) < -\frac{C}{(b-x)^\alpha}$  (respectiv  $f(x) < -\frac{C}{(x-a)^\alpha}$ ) pentru toți  $x \in [a_2, b)$  (respectiv  $x \in (a, a_2]$ ),  $C > 0$  și  $\alpha \geq 1$ , introducem funcția  $f^*$  ale cărei valori se determină după legea  $f^*(x) = -f(x)$ . Rezultă că  $f^*(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha}$  (respectiv  $f^*(x) > \frac{C}{(x-a)^\alpha}$ ) pentru orice  $x \in [a_2, b)$  (respectiv  $x \in (a, a_2]$ ) și în consecință integrala  $\int_a^b f^*(x)dx$  este divergentă. Prin urmare, integrala

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_a^b f^*(x)dx$$

este divergentă cea ce arată că și cea de a doua afirmație din enunțul teoremei este adevărată. ■

**Corolarul 1.10.5 (Criteriul de convergență în  $\alpha$  cu limită a integralelor improprii de speța doua)** *În ipoteza că există limita*

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| (b-x)^\alpha = C,$$

au loc următoarele afirmații:

1. dacă există  $a_1 \in [a, b)$ ,  $\alpha < 1$  și  $0 \leq C < +\infty$ , atunci integrala improprie de speța doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă;
2. dacă  $0 < C \leq +\infty$ ,  $\alpha \leq 1$  și funcția  $f$  păstrează același semn pentru  $x \in [a_2, b)$ , unde  $a \leq a_2 < b$ , atunci integrala improprie de speța doua cu limita superioară punct singular este divergentă.

**Demonstrație.** Din definiția limitei cu vecinătăți rezultă că dacă  $0 \leq C < +\infty$ , există  $a_1 \geq a$  astfel încât au loc inegalitățile:

$$|f(x)| (b-x)^\alpha \leq 2C, \quad \text{pentru } C > 0 \quad \text{și} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| \leq \frac{2C}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)| (b-x)^\alpha \leq 1, \quad \text{pentru } C = 0 \quad \text{și} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b).$$

Prin urmare, în baza punctului **1** al Teoremei 1.10.1 integrala improprie de speța doua cu limita superioară punct singular este absolut convergentă și deci prima afirmație este demonstrată.

Dacă  $0 < C \leq +\infty$  și  $\alpha \leq 1$ , avem

$$|f(x)| (b-x)^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{pentru } C < +\infty \quad \text{și} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| > \frac{C}{2(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b);$$

$$|f(x)| (b-x)^\alpha > 1, \quad \text{pentru } C = \infty \quad \text{și} \quad x \in [a_2, b) \implies$$

$$|f(x)| > \frac{1}{(b-x)^\alpha}, \quad x \in [a_2, b),$$

de unde, în baza punctului **2** al Teoremei 1.10.1, rezultă că integrala improprie de speța doua cu limita superioară punct singular este divergentă, ceea ce arată că și a doua afirmație este adevărată. ■

**Observația 1.10.2** Se poate enunța criteriul în  $\alpha$  cu limită de convergență a integralelor improprii de speța doua cu limita inferioară punct singular. Pentru aceasta, în Corolarul 1.10.5 și demonstrația lui, funcția  $(b-x)^\alpha$ , acolo unde apare, se trece în  $(x-a)^\alpha$ , iar segmentul  $[a_2, b)$  se înlocuiește cu segmentul  $(a, a_2] \subset (a, b]$ .

**Exercițiul 1.10.2** Să se calculeze integrala improprie

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}}.$$

**Soluție.** Se observă că integrantul este nemărginit într-o vecinătate a punctului  $x = 1$ . Scriem integrala ca suma dintre o integrală improprie de speța doua, cu limita superioară punct singular, și o alta, de speța treia, care are ambele limite de integrare puncte singulare. Avem:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{|x^2-1|}} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} + \\ &+ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Integrala  $I_1$  este convergentă, deoarece există  $\alpha = 1/2 < 1$  cu proprietatea

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Integrala de speța treia se descompune în două integrale, prima de speța doua cu limita inferioară, finită, punct singular, iar a doua, integrală improprie de speța întâi cu limita superioară punct singular. Ambele integrale sunt convergente în baza criteriului în  $\alpha$  cu limită căci:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (1-x)^\alpha \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \text{ pentru } \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = 1, \text{ pentru } \alpha = 2 > 1.$$

Fiind o sumă de integrale convergente rezultă că  $I_2$  este convergentă. Prin urmare, integrala inițială este convergentă. Integrala  $I_1$  se reduce la integrala

$I_2$  prin schimbarea de variabilă  $x = \frac{1}{y}$ . Putem spune că integrala dată este egală cu de două ori integrala  $I_2$ . Pentru calculul lui  $I_2$  facem schimbarea de variabilă  $x + 1 = \frac{1}{t}$ . Găsim:

$$I_2 = - \int_{1/2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} = \sqrt{1-2t} \Big|_{1/2}^0 = 1.$$

Rezultatele stabilite arată că valoarea integralei date este 2. ■

## 1.11 Criterii de convergență ale integralelor improprii cu integrantul de semn variabil

Considerăm că funcțiile  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  și  $h : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , sunt alese astfel încât  $f$  și  $f \cdot h$  sunt funcții integrabile Riemann pe orice compact  $[a, t] \subset [a, b)$ .

**Teorema 1.11.1 (Criteriul lui Abel)** *Dacă integrala improprie cu limita superioară punct singular  $\int_a^b f(x)dx$  este convergentă și funcția  $h$  este monotonă și mărginită pe  $[a, b)$ , atunci integrala improprie*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx, \quad (1.78)$$

*cu limita superioară punct singular, este convergentă.*

**Demonstrație.** Fie  $M = \sup\{|h(x)| : x \in [a, b)\} < +\infty$  și  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Primele două ipoteze ale teoremei referitoare la funcția  $f$  și testul general de convergență al lui Cauchy implică existența unui  $b(\varepsilon) \in [a, b)$  astfel încât

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad (1.79)$$

oricare ar fi  $t', t'' \in (b(\varepsilon), b)$ . Se poate demonstra că există  $\xi \in [t', t'']$  astfel încât

$$\int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx = h(t') \int_{t'}^{\xi} f(x)dx + h(t'') \int_{\xi}^{t''} f(x)dx. \quad (1.80)$$



Luând modulul ambilor membri din (1.80) și folosind proprietățile acestuia, obținem

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx \right| \leq |h(t')| \left| \int_{t'}^{\xi} f(x)dx \right| + |h(t'')| \left| \int_{\xi}^{t''} f(x)dx \right|. \quad (1.81)$$

Deoarece  $t', \xi, t'' \in (b(\varepsilon), b)$ , din (1.79), (1.80) și (1.81), deducem

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)h(x)dx \right| < M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

care, împreună cu testul de convergență al lui Cauchy, arată că integrala improprie (1.79) este convergentă. ■

**Teorema 1.11.2 (Criteriul lui Dirichlet)** *Dacă funcția*

$$t \mapsto F(t) = \int_a^t f(x)dx, \quad t \in [a, b),$$

*este mărginită, funcția  $h$  este monotonă și*

$$\lim_{x \rightarrow b} h(x) = 0,$$

*atunci integrala improprie (1.78), cu limita superioară punct singular, este convergentă.*

**Demonstrație.** Din prima ipoteză rezultă existența constantei  $K > 0$  astfel încât

$$\left| \int_a^t f(x)dx \right| \leq K, \quad t \in [a, b). \quad (1.82)$$

Din cea de a doua ipoteză rezultă că oricărui  $\varepsilon > 0$  îi corespunde  $b(\varepsilon) \in [a, b)$  astfel încât

$$|h(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}, \quad x \in (b(\varepsilon), b). \quad (1.83)$$

Din (1.82) obținem

$$\begin{aligned} \left| \int_{t'}^{\xi} f(x)dx \right| &= \left| \int_a^{\xi} f(x)dx - \int_a^{t'} f(x)dx \right| \leq \\ &= \left| \int_a^{\xi} f(x)dx \right| + \left| \int_a^{t'} f(x)dx \right| \leq 2K. \end{aligned}$$

În mod asemănător demonstrăm mărginirea celelaltei integrale care intervine în membrul al doilea al relației (1.80).

Așadar, avem:

$$\left| \int_{t'}^{\xi} f(x) dx \right| \leq 2K; \quad \left| \int_{\xi}^{t''} f(x) dx \right| \leq 2K. \quad (1.84)$$

Atunci, din (1.81), (1.83) și (1.84) rezultă

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x) h(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (\forall) \quad t', t'' \in (b(\varepsilon), b). \quad (1.85)$$

Testul de convergență al lui Cauchy și (1.85) demonstrează teorema. ■

**Exercițiul 1.11.1** Fie  $a > 0$  și  $b \in \mathbb{R}^*$ , numere reale arbitrare. Să se arate că integralele improprii

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$$

sunt convergente și să se determine valorile lor.

**Soluție.** Pentru studiul naturii integralelor, folosim criteriul lui Dirichlet. Pentru ambele integrale,  $h(x) = e^{-ax}$ . Deoarece  $a > 0$ , rezultă că funcția  $h$  este monoton descrescătoare și  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ .

Pentru prima integrală,  $f(x)$  din criteriul lui Dirichlet este  $\cos bx$ , iar pentru a doua  $f(x) = \sin bx$ . Rezultă că funcțiile  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  corespunzătoare sunt

$$F(x) = \int_0^x \cos btdt = \frac{1}{b} \sin bx, \quad F(x) = \int_0^x \sin btdt = \frac{1}{b} (1 - \cos bx).$$

Funcția  $|F|(x)$  este mărginită de  $\frac{1}{|b|}$  în primul caz, iar în cel de al doilea este mărginită de  $\frac{2}{|b|}$ .

Conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente.

Pentru calculul acestor integrale, aplicăm de două ori formula integrării prin părți și obținem  $I_1 = \frac{a}{a^2 + b^2}$ ,  $I_2 = \frac{b}{a^2 + b^2}$ . ■

**Exemplul 1.11.1** Integrala  $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$  este convergentă pentru  $\alpha > 0$  deoarece, dacă în criteriul lui Dirichlet luăm  $f(x) = \sin x$  și  $h(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ , avem

$$|F(t)| = \left| \int_{\pi}^t f(x) dx \right| = \left| \int_{\pi}^t \sin x dx \right| = |\cos \pi - \cos t| \leq 2$$

pentru  $\pi \leq t \leq +\infty$ , iar  $h(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$  este o funcție monoton descrescătoare care tinde la zero pentru  $t \rightarrow +\infty$  și  $\alpha > 0$ .

**Exercițiul 1.11.2** Să se cerceteze natura integralelor **Fresnel**<sup>1</sup>

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx, \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx,$$

care sunt utilizate în optică.

**Soluție.** Punând  $x^2 = t$ , obținem

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt, \\ \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt. \end{aligned} \tag{1.86}$$

În criteriul lui Dirichlet, aplicat integralei improprie  $\int_0^{+\infty} f(t)h(t)dt$ , luăm pe rând  $f(t) = \sin t$  și  $f(t) = \cos t$ , iar în ambele cazuri din (1.86), funcția  $h$  o luăm de forma  $h(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ . Funcția  $h$  satisface ipotezele criteriului lui Dirichlet, iar un calcul simplu arată că valoarea absolută a funcției

$$u \mapsto F(u) = \int_0^u f(t) dt, \quad u \in (0, +\infty),$$

în ambele cazuri ale alegerii funcției  $f$ , este mărginită de  $K = 2$ . Atunci, conform criteriului lui Dirichlet, ambele integrale sunt convergente. ■

---

<sup>1</sup>Fresnel, Augustin Jean (1788 – 1827), geometru și optician francez

**Exemplul 1.11.2** Considerând integrala improprie

$$\int_c^{+\infty} \frac{(\ln x) \sin x}{x},$$

unde  $c > 0$ , și luând

$$f(x) = \sin x, \quad h(x) = \frac{\ln x}{x},$$

în baza criteriului lui Dirichlet, constatăm convergența acesteia.

**Exercițiul 1.11.3** Să se cerceteze natura integralelor

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0. \quad (1.87)$$

**Soluție.** Din criteriul lui Dirichlet rezultă că integralele

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx \quad (1.88)$$

sunt convergente pentru  $\alpha > 0$ . Într-adevăr, considerând că  $f(x) = \sin x$  și  $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ , unde  $x \in [1, +\infty)$ , constatăm că aceste funcții satisfac ipotezele criteriului lui Dirichlet dacă  $\alpha > 0$ , astfel că integrala improprie  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$  este convergentă.

Analog se demonstrează că integrala improprie  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$  este convergentă pentru  $\alpha > 0$ .

Pe de altă parte, deoarece pentru  $x > 1$  avem

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}, \quad \left| \frac{\cos x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

iar integrala improprie  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  este convergentă pentru  $\alpha > 1$ , rezultă că integralele improprii (1.88) sunt absolut convergente pentru  $\alpha > 1$ .

Deoarece  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  este divergentă, iar  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$  este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet, rezultă că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \left( \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \right) \quad (1.89)$$

este divergentă. Dacă avem în vedere că  $|\sin x| \geq \sin^2 x$  din (1.89) tragem concluzia că integrala improprie

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \quad (1.90)$$

este divergentă. La rezultatele de până acum adăugăm faptul că pentru orice  $x \geq 1$  și  $\alpha \in (0, 1)$  are loc inegalitatea evidentă

$$\frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \frac{|\sin x|}{x}. \quad (1.91)$$

Din (1.90), (1.91) și partea a doua a criteriului de comparație rezultă că integrala improprie  $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^\alpha} dx$  este divergentă pentru  $\alpha \in (0, 1)$ .

Așadar, prima integrală din (1.88) este simplu convergentă pentru  $\alpha \in (0, 1)$ . Analog se arată că a doua integrală din (1.88) este simplu convergentă.

Să ne ocupăm acum de integralele

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \frac{\cos x}{x^\alpha} dx. \quad (1.92)$$

Prima integrală din (1.92) este convergentă pentru  $\alpha \in (0, 1]$  deoarece

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \alpha \in (0, 1) \\ 1 & \text{dacă } \alpha = 1. \end{cases}$$

Din  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1} \left( \frac{\sin x}{x^\alpha} \right) = 1$  și criteriul în  $\alpha$  cu limită rezultă că prima integrală din (1.92) este convergentă pentru  $1 < \alpha < 2$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 2$ .

Prin urmare, integrala improprie (1.87) este semiconvergentă pentru  $\alpha \in (0, 2)$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 2$ .

Deoarece pentru  $\alpha > 0$  avem  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x^\alpha} = +\infty$ , rezultă că a doua integrală din (1.92) este o integrală improprie cu limita inferioară punct singular pentru orice  $\alpha > 0$ . Apoi, din limita evidentă  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \left( \frac{\cos x}{x^\alpha} \right) = 1$  și Corolarul 1.10.3, rezultă că cea de a doua integrală din (1.92) este convergentă pentru orice  $\alpha \in (0, 1)$  și divergentă pentru orice  $\alpha \geq 1$ .

Ultimul rezultat arată că cea de a doua integrală improprie din (1.87) este semiconvergentă pentru  $\alpha \in (0, 1)$  și divergentă pentru  $\alpha \geq 1$ . ■

## 1.12 Convergența în sensul valorii principale a unei integrale improprii

**Definiția 1.12.1** Dacă integrala improprie de speța întâi cu ambele limite de integrare puncte singulare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (1.93)$$

este divergentă dar există și este finită

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx, \quad (1.94)$$

atunci spunem că funcția  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este **integrabilă în sensul valorii principale** sau că integrala (1.93) este **convergentă în sensul valorii principale**, iar

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f(x)dx$$

se numește **valoarea principală** (în sens Cauchy) a integralei (1.93).

Fie funcția  $f : [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilă Riemann pe orice compact  $[u, t] \subset [a, c)$  sau  $[u, t] \subset (c, b]$ . În acest caz se poate vorbi de integrala improprie

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1.95)$$

având punctul singular  $c \in (a, b)$ . Din cele prezentate în primul paragraf al acestui capitol rezultă că integrala improprie (1.95) este convergentă dacă fiecare din integralele improprii  $\int_a^c f(x)dx$  și  $\int_c^b f(x)dx$  este convergentă. Aceasta înseamnă că limita de mai jos există și este finită

$$\lim_{\substack{\eta \rightarrow c \\ \eta < c}} \int_a^\eta f(x)dx + \lim_{\substack{\xi \rightarrow c \\ \xi > c}} \int_\xi^b f(x)dx =$$

$$\lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ v \rightarrow 0^+}} \left( \int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^b f(x)dx \right)$$

pentru  $\xi$  și  $\eta$  (respectiv  $u$  și  $v$ ) tinzând independent la limitele lor. În acest caz

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ v \rightarrow 0^+}} \left( \int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+v}^b f(x)dx \right).$$

**Definiția 1.12.2** Dacă integrala improprie (1.95), având punctul singular în  $c \in (a, b)$  este divergentă, însă există și este finită

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx \right),$$

atunci spunem că  $f$  este **integrabilă pe  $[a, b]$  în sensul valorii principale a lui Cauchy** sau că integrala improprie (1.95) este **convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy** iar

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-u} f(x)dx + \int_{c+u}^b f(x)dx \right),$$

se numește **valoarea principală în sens Cauchy a integralei** (1.95).

**Exercițiul 1.12.1** Să se arate că dacă  $-\infty < a < c < b < +\infty$ , integrala improprie  $\int_a^b \frac{dx}{x-c}$  este divergentă, însă este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.

**Soluție.** Punctul singular al integralei improprie considerate este în interiorul intervalului de integrare și pentru a studia natura acesteia trebuie să determinăm limitele

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\lambda} \frac{dx}{x-c} \quad \text{și} \quad \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \int_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c}.$$

Aceste două limite au respectiv valorile

$$-\ln(c-a) + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \ln \lambda \quad \text{și} \quad \ln(b-c) - \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \ln \mu.$$

Prin urmare, avem

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0^+ \\ \mu \rightarrow 0^+}} \ln \frac{\lambda}{\mu}.$$

Însă limita de mai sus nu există ceea ce înseamnă că integrala improprie considerată este divergentă.

Considerând cazul particular  $\lambda = \mu$ , deducem că ultima limită este zero și deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy și v.p.  $\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}$ . ■

**Exemplul 1.12.1** Integrala improprie de speța a doua, cu ambele limite puncte singulare, a unei funcții impare  $f$  este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy și v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$ .

**Soluție.** Într-adevăr, funcția  $f$  fiind impară avem că  $\int_{-t}^t f(x)dx = 0$ , oricare ar fi  $t > 0$ . În consecință există limita din (1.94), deci integrala improprie considerată este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy și are valoarea principală egală cu 0. ■

**Exemplul 1.12.2** Integrala improprie divergentă  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  a unei funcții pare  $f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nu este convergentă în sensul valorii principale a lui Cauchy.

**Soluție.** Într-adevăr, funcția  $f$  fiind pară și integrabilă Riemann pe orice compact de forma  $[-t, t]$ ,  $t > 0$ , avem

$$\int_{-t}^t f(x)dx = 2 \int_0^t f(x)dx = 2 \int_{-t}^0 f(x)dx.$$

Cum integrala improprie  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  este divergentă, cel puțin una din integralele improprii  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  și  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  este divergentă. Din această afirmație și din egalitatea precedentă rezultă că nu există v.p.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ . ■

**Exemplul 1.12.3** Să se aplice noțiunea de valoare principală în sensul lui Cauchy a unei integrale improprii divergente pentru a se calcula valoarea integralei improprii

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx, \quad (1.96)$$

unde  $m$  și  $n$  sunt întregi pozitivi cu  $0 < m < n$ .



**Soluție.** Rădăcinile numitorului funcției de integrat,  $f(x) = \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ , sunt rădăcinile de ordinul  $2n$  ale numărului complex  $-1$ . Având în vedere că forma trigonometrică a acestui număr complex este  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , rezultă că rădăcinile numitorului funcției  $f$  au expresiile

$$x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}} = a_k + ib_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1.$$

Prin urmare, cele  $2n$  rădăcini ale ecuației  $1+x^{2n} = 0$  nu sunt reale și deci funcția de integrat este definită pe întreaga axă a numerelor reale.

Integrala improprie (1.96) este convergentă deoarece, în baza Exemplul 1.10.1, diferența gradelor polinoamelor de la numitorul și numărătorul funcției de integrat este mai mare decât 1, această diferență fiind cel puțin 2.

Cu mențiunea prealabilă că integrala Riemann a unei funcții complexe de variabilă reală  $u(x) + iv(x)$ , unde  $u$  și  $v$  sunt funcții reale, este definită prin

$$\int_a^b [u(x) + iv(x)]dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx,$$

să calculăm integrala definită de la  $-\ell$  la  $\ell$ , unde  $\ell > 0$ , din funcția  $f$ . În acest scop vom folosi descompunerea numitorului funcției  $f$  în factori primi complexi și a funcției de integrat în suma de fracții  $f(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{A_k}{x - x_k}$ , unde coeficienții  $A_k$  sunt dați de raportul dintre valoarea numărătorului funcției  $f$  în  $x = x_k$  și valoarea, în același punct  $x_k$ , a derivatei polinomului de la numitor, adică  $A_k = \frac{x_k^{2m}}{2nx_k^{2n-1}} = -\frac{1}{2n}x_k^{2m+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ .

Avem

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x - x_k} = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{(x - a_k) - ib_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \int_{-\ell}^{\ell} \frac{x - a_k}{(x - a_k)^2 + b_k^2} dx + i \int_{-\ell}^{\ell} \frac{b_k}{(x - a_k)^2 + b_k^2} dx \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \ln \frac{(\ell - a_k)^2 + b_k^2}{(\ell + a_k)^2 + b_k^2} + i \left[ \arctg \frac{\ell - a_k}{b_k} + \arctg \frac{\ell + a_k}{b_k} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru  $\ell \rightarrow +\infty$ , obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \sum_{k=0}^{2n-1} \pm \pi i A_k,$$

unde semnul plus corespunde lui  $b_k > 0$ , iar semnul minus se ia când  $b_k < 0$ .

Integralele improprii cu ambele limite de integrare puncte singulare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-x_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx,$$

unde  $k$  ia valori întregi de la zero până la  $2n-1$ , sunt divergente, iar numerele

$$\begin{aligned} & \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{dx}{x-x_k} = \\ & = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left\{ \ln \frac{(\ell-a_k)^2+b_k^2}{(\ell+a_k)^2+b_k^2} + i \left[ \arctg \frac{\ell-a_k}{b_k} + \arctg \frac{\ell+a_k}{b_k} \right] \right\}, \end{aligned}$$

egale cu  $+\pi i$  sau  $-\pi i$ , după cum  $b_k > 0$ , respectiv  $b_k < 0$ , reprezintă valorile principale ale integralelor.

Se constată simplu că  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$  sunt numere pozitive, iar următoarele, adică  $b_n, b_{n+1}, \dots, b_{2n-1}$ , sunt negative. Deci, putem scrie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \pi i \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \right\}. \quad (1.97)$$

Prima sumă din membrul doi al relației (1.97) are expresia

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2m+1)(2k+1)}{2n} \pi}, \quad (1.98)$$

de unde constatăm că este suma a  $n$  termeni ai unei progresii geometrice cu rația  $q = e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}$  și primul termen egal cu  $e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}$ . Efectuând calculul sumei din (1.98), găsim

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi} - e^{i \frac{(2m+1)(2n+1)}{2n} \pi}}{1 - e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi} - e^{i (2m+1) \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \pi}}{1 - e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}} = \\ &= -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi} - e^{i (2m+1) \pi} \cdot e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}}{1 - e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Însă factorul  $e^{i(2m+1)\pi}$  de la numărătorul expresiei (1.99) a sumei  $\sum_{k=0}^{n-1} A_k$  este  $-1$ . Ca urmare, suma devine

$$\sum_{k=0}^{n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot \frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi} + e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1 - e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1 - e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \quad (1.100)$$

Să determinăm acum valoarea celei de a doua sume. Avem

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=n}^{2n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=n}^{2n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2k+1)}{2n}\pi}.$$

Indicele de sumare de aici se poate scrie în forma  $k = n + s$ , unde  $s$  va lua valori de la zero până la  $n - 1$ . Expresia celei de a doua sume devine acum

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = -\frac{1}{2n} \cdot e^{i(2m+1)\pi} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi}.$$

Dacă se ține cont de faptul că  $e^{i(2m+1)\pi} = -1$  și de rezultatul stabilit în (1.98), (1.99) și (1.100), rezultă că expresia finală a celei de a doua sume este

$$\sum_{k=n}^{2n-1} A_k = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{s=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)(2s+1)}{2n}\pi} = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1 - e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}}. \quad (1.101)$$

Din (1.97), (1.100) și (1.101) rezultă

$$2J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{i\frac{2m+1}{2n}\pi}}{1 - e^{i2\frac{2m+1}{2n}\pi}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi}. \quad (1.102)$$

Integrandul din (1.102) fiind o funcție pară, rezultă valoarea unei alte integrale importante

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi}. \quad (1.103)$$

care se va utiliza în calculul unei integrale improprii depinzând de un parametru. ■

## Capitolul 2

# Integrale depinzând de un parametru

### 2.1 Integrale proprii depinzând de un parametru

Fie  $f$  o funcție reală de două variabile reale definită pe intervalul bidimensional închis

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

cu proprietatea că restricția sa la segmentul de dreaptă paralel cu axa  $Ox$  care trece prin punctul  $(0, y)$

$$f(\cdot, y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

este funcție integrabilă Riemann pentru orice valoare fixată a lui  $y$  din intervalul  $[c, d]$ .

**Definiția 2.1.1** *Funcția reală de variabilă reală*

$$J : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad J(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (2.1)$$

se numește **integrală proprie depinzând de un parametru**. Variabila  $y$  se numește **parametru**.

**Observația 2.1.1** *Pot fi introduse și integrale proprii care depind de doi sau mai mulți parametri.*

**Definiția 2.1.2** *O integrală proprie care depinde de mai mulți parametri are forma*

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx. \quad (2.2)$$

Parametrii  $y_1, y_2, \dots, y_n$  pot fi considerați coordonatele în baza canonică din  $\mathbb{R}^n$  ale vectorului **parametru**  $\mathbf{y}$  care aparține intervalului  $n$ -dimensional închis

$$I_n = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n] \subset \mathbb{R}^n.$$

**Observația 2.1.2** *Integrala proprie care depinde de mai mulți parametri (2.2) poate fi prezentată ca o integrală depinzând de un parametru,*

$$\Phi(\mathbf{y}) = \int_a^b f(x, \mathbf{y}) dx, \quad (2.3)$$

cu mențiunea că parametrul este vectorul  $\mathbf{y} \in I_n$ .

Ne propunem să studiem proprietățile integralelor proprii care depind de un parametru.

**Teorema 2.1.1 (Continuitatea integralelor proprii depinzând de parametru)** *Dacă funcția  $f$  este continuă pe intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , atunci funcția  $J : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , definită de integrala (2.1), este uniform continuă.*

**Demonstrație.** Deoarece funcția  $f(x, y)$  este continuă în intervalul bidimensional închis  $\Pi$  ea este uniform continuă. Deci, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât inegalitățile

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon)$$

implică inegalitatea

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (2.4)$$

Numărul  $\delta$  depinde numai de  $\varepsilon$  fiind independent de poziția ocupată de punctele  $(x', y')$  și  $(x'', y'')$  în intervalul bidimensional închis  $\Pi$ .

În particular, luând  $x' = x'' = x$  se constată că pentru orice  $y'$  și  $y'' = y$  din intervalului  $[c, d]$  cu proprietatea

$$|y' - y| < \delta(\varepsilon) \quad (2.5)$$

și pentru orice  $x \in [a, b]$ , are loc inegalitatea

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (2.6)$$

Prin urmare, pentru orice  $y$  și  $y'$  aparținând intervalului  $[c, d]$  care satisfac (2.5), avem

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y)| &= \left| \int_a^b (f(x, y') - f(x, y)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y)| dx. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Din (2.6) și (2.7) rezultă că pentru orice  $y, y' \in [c, d]$  cu proprietatea (2.5) are loc

$$|J(y') - J(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon.$$

Această inegalitate demonstrează că funcția  $J$  din (2.1) este *uniform continuă*. ■

**Corolarul 2.1.1** *În ipotezele teoremei precedente, funcția*

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx \quad (2.8)$$

*este uniform continuă în intervalul închis tridimensional*

$$\Pi^* = \{(u, v, y) \in \mathbb{R}^3 : a \leq u \leq b, a \leq v \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

**Demonstrație.** Din continuitatea funcției  $f$  pe intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , care este o mulțime compactă în  $\mathbb{R}^2$ , deducem că  $f$  este mărginită și își atinge efectiv marginile, deci există constanta pozitivă și finită  $C$  astfel încât

$$|f(x, y)| \leq C, \quad (x, y) \in \Pi.$$

Să evaluăm diferența valorilor funcției  $F$  în punctele

$$(u', v', y'), \quad (u'', v'', y'') \in \Pi^*,$$

adică

$$\Delta F = F(u', v', y') - F(u'', v'', y''). \quad (2.9)$$

Mai întâi,  $\Delta F$  este diferența integralelor

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} f(x, y') dx - \int_{u''}^{v''} f(x, y'') dx.$$

În membrul al doilea a acestei diferențe adunăm și scădem integralele

$$\int_{u'}^{u''} f(x, y'') dx; \quad \int_{v'}^{v''} f(x, y'') dx.$$

Folosind proprietatea de aditivitate a integralei definite în raport cu intervalul de integrare, diferența de integrale din membrul doi al relației (2.9) se scrie

$$\Delta F = \int_{u'}^{v'} (f(x, y') - f(x, y'')) dx + \int_{u'}^{u''} f(x, y'') dx - \int_{v'}^{v''} f(x, y'') dx.$$

Luând modulul ambilor membri și folosind proprietățile integralelor definite, găsim

$$|\Delta F| \leq \left| \int_{u'}^{v'} |\Delta f(x, \Delta y)| dx \right| + \left| \int_{u'}^{u''} |f(x, y'')| dx \right| + \left| \int_{v'}^{v''} |f(x, y'')| dx \right|$$

unde, pentru simplitatea scrierii, s-a făcut pentru moment notația

$$\Delta f(x, \Delta y) = f(x, y') - f(x, y'').$$

Prin urmare, o nouă evaluare pentru valoarea absolută a diferenței (2.9) este

$$|\Delta F| \leq \left| \int_{u'}^{v'} |f(x, y') - f(x, y'')| dx \right| + C(|u'' - u'| + |v'' - v'|).$$

Funcția  $f$  fiind continuă în intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , este uniform continuă, prin urmare pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_1(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $y', y'' \in [c, d]$  cu proprietatea

$$|y' - y''| < \delta_1(\varepsilon) \quad (2.10)$$

avem

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (2.11)$$

Să observăm că oriunde ar fi situat punctul  $(u', v')$  în intervalul bidimensional  $[a, b] \times [a, b]$ , diferența  $|u' - v'| \leq b - a$  deci, folosind această observație și (2.11), rezultă că oricare ar fi punctele  $y', y'' \in [c, d]$  care satisfac (2.10), modulul diferenței (2.9) se revaluează după cum urmează

$$|\Delta F| < \frac{\varepsilon}{2} + C(|u'' - u'| + |v'' - v'|).$$

Analiza raționamentului de mai sus conduce la concluzia că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \frac{\varepsilon}{4C}\}$$

astfel încât oricare ar fi punctele  $(u', v', y'), (u'', v'', y'') \in \Pi^*$  ale căror coordonate satisfac inegalitățile

$$|u' - u''| < \delta(\varepsilon), \quad |v' - v''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon), \quad (2.12)$$

avem că

$$|F(u', v', y') - F(u'', v'', y'')| < \varepsilon. \quad (2.13)$$

Din (2.12) și (2.13) și definiția uniforme continuități a unei funcții reale de trei variabile reale rezultă că funcția  $F : \Pi^* \rightarrow \mathbb{R}$  ale cărei valori sunt date de (2.8) este uniform continuă. ■

**Teorema 2.1.2 (Derivabilitatea unei integrale proprii care depinde de un parametru.)** *Dacă  $f$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt funcții continue pe intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , atunci funcția  $J$  definită de integrala depinzând de parametrul  $y$  (2.1) este derivabilă pe compactul  $[c, d]$  și are loc relația*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (2.14)$$

**Demonstrație.** Trebuie să demonstrăm că raportul incremental al funcției  $J$  în punctul  $y$  are limită în  $y$  și această limită este chiar integrala din ultimul membru al lui (2.14), adică

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad (2.15)$$



În acest scop vom demonstra că pentru  $\Delta y \neq 0$  diferența

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

ține la zero când  $\Delta y \rightarrow 0$ . Să remarcăm întâi că, în baza teoremei creșterilor finite a lui Lagrange, există numărul pozitiv și subunitar  $\theta$  astfel încât

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx = \int_a^b f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx.$$

În consecință, putem scrie

$$\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y) dx = \int_a^b (f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)) dx.$$

Să evaluăm diferența din membrul doi a acestei relații pentru valori suficient de mici ale lui  $|\Delta y|$ . Deoarece derivata  $f'_y(x, y)$  este continuă în intervalul bidimensional închis  $\Pi$  ea este uniform continuă și deci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât, pentru orice creștere a lui  $y$  care satisface

$$|\Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.16}$$

este adevărată inegalitatea

$$|f'_y(x, y + \Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \tag{2.17}$$

( $\forall$ )  $x \in [a, b]$  și ( $\forall$ )  $y, y + \Delta y \in [c, d]$ . Cum  $0 < \theta < 1$ , din (2.16) avem și

$$|\theta \Delta y| < \delta(\varepsilon) \tag{2.18}$$

ceea ce, în baza lui (2.17), atrage

$$|f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \tag{2.19}$$

Atunci, luând în considerație relațiile stabilite mai sus, avem inegalitatea

$$\left| \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{b - a} (b - a) = \varepsilon, \tag{2.20}$$

adevărată pentru toate valorile lui  $\Delta y$  care satisfac (2.16). Rezultatul stabilit în (2.20) arată că are loc (2.15) și teorema este demonstrată. ■

Formula (2.14), cunoscută ca *regula lui Leibniz* de derivare a unei integrale depinzând de parametru, poate fi scrisă și în forma

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [c, d].$$

**Observația 2.1.3** *Derivata unei integrale care depinde de un parametru este egală cu integrala derivatei parțiale a integrandului în raport cu variabila parametru.*

**Teorema 2.1.3** (Derivabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru a cărei limite de integrare depind de parametru) *Dacă funcțiile  $f$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt continue pe intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , iar  $x = x_1(y)$  și  $x = x_2(y)$  sunt funcții derivabile pe intervalul  $[c, d]$  cu valori în intervalul  $[a, b]$ , atunci integrala depinzând de parametrul  $y$*

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.21)$$

*este o funcție derivabilă pe compactul  $[c, d]$  și are loc relația*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + f(x_2(y), y) \cdot \frac{dx_2}{dy}(y) - f(x_1(y), y) \cdot \frac{dx_1}{dy}(y),$$

*oricare ar fi parametrul  $y \in [c, d]$ .*

**Demonstrație.** Avem

$$J(y) = F(x_1(y), x_2(y), y), \quad (2.22)$$

unde funcția  $F$ , definită în relația (2.8), posedă derivate parțiale continue pe paralelipipedul  $\Pi^*$  și :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v, y) = -f(u, y); \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v, y) = f(v, y); \\ \frac{\partial F}{\partial y}(u, v, y) = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \end{cases} \quad (2.23)$$

Primele două relații din (2.23) există și sunt egale cu expresiile din membrul al doilea ale acestora în baza rezultatului cunoscut de la integrale definite care afirmă că dacă funcția  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă, atunci funcțiile  $G_1$  și  $G_2$  definite pe  $[a, b]$  prin

$$G_1(t) = \int_a^t f(x)dx, \quad G_2(t) = \int_t^b g(x)dx$$

sunt derivabile și

$$G'_1(t) = f(t), \quad G'_2(t) = -f(t), \quad (\forall) t \in [a, b]. \quad (2.24)$$

După Teorema 2.1.2 este adevărată și cea de-a treia egalitate din (2.23), iar din Corolarul 2.1.1 rezultă că toate derivatele parțiale din (2.23) sunt funcții continue pe paralelipipedul  $\Pi^*$ . Deoarece funcțiile  $x = x_1(y)$  și  $x = x_2(y)$  sunt derivabile, aplicând funcției  $y \mapsto F(x_1(y), x_2(y), y)$  regula de derivare a funcțiilor compuse de o variabilă, obținem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} F(x_1(y), x_2(y), y) &= \frac{\partial F}{\partial u}(x_1(y), x_2(y), y) \cdot \frac{dx_1}{dy}(y) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial v}(x_1(y), x_2(y), y) \cdot \frac{dx_2}{dy}(y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1(y), x_2(y), y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Însă, funcția  $J$  din (2.21) este astfel încât are loc egalitatea (2.22). Acum, din relațiile (2.23), (2.25) și (2.22) rezultă concluzia teoremei. ■

**Exemplul 2.1.1** Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de un parametru cu limitele de integrare variabile, să se evalueze integrala

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2} dx. \quad (2.26)$$

**Soluție.** Suntem în ipotezele Teoremei 2.1.3 astfel că putem scrie

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \int_0^y \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)} dx.$$

Integrala din membrul doi este o integrală dintr-o funcție rațională. Descompunând în fracții simple această funcție rațională, obținem

$$\frac{x}{(1+yx)(1+x^2)} = -\frac{y}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+yx} + \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{x+y}{1+x^2}. \quad (2.27)$$

Deoarece, primitivele fracțiilor raționale din membrul doi al egalității (2.27) se exprimă prin funcții elementare, avem

$$\int_0^y \frac{x}{(1+yx)(1+x^2)} dx = -\frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2} \cdot \operatorname{arctg} y.$$

În acest fel am obținut

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2} \cdot \operatorname{arctg} y.$$

Trecând aici pe  $y$  în  $t$ , integrând apoi între 0 și  $y$  și ținând cont că din (2.26) rezultă  $J(0) = 0$ , obținem

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} dt + \int_0^y \frac{t}{1+t^2} \cdot \operatorname{arctg} t dt.$$

Cea de a doua integrală de mai sus se calculează folosind metoda integrării prin părți. Avem

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{t}{1+t^2} \cdot \operatorname{arctg} t dt &= \frac{1}{2} \int_0^y \operatorname{arctg} t \cdot (\ln(1+t^2))' dt = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} t \cdot \ln(1+t^2)) \Big|_0^y - \int_0^y \frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} dt. \end{aligned}$$

Folosind acum ultimele două rezultate, deducem că expresia funcției  $J$  este

$$J(y) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \cdot \ln(1+y^2).$$

■

**Teorema 2.1.4 (Integrabilitatea unei integrale proprii depinzând de parametru)** *Dacă funcția  $f$  este continuă pe intervalul bidimensional închis  $\Pi$ , atunci*

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2.28)$$

**Demonstrație.** În locul egalității (2.28) vom demonstra o alta mult mai generală, și anume

$$\int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (\forall) t \in [a, b]. \quad (2.29)$$

Pentru aceasta, introducem notațiile

$$\varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx, \quad \psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2.30)$$

Atunci, relația (2.29), care o avem de demonstrat, este echivalentă cu relația

$$\varphi(t) = \psi(t), \quad (\forall) t \in [a, b]. \quad (2.31)$$

Pentru a demonstra (2.31) este suficient să arătăm că au loc egalitățile:

$$\varphi'(t) = \psi'(t), \quad (\forall) t \in [a, b]; \quad (2.32)$$

$$\varphi(a) = \psi(a). \quad (2.33)$$

Egalitatea (2.33) este evidentă deoarece din expresiile (2.30) constatăm că

$$\varphi(a) = 0, \quad \psi(a) = 0.$$

Pentru demonstrația egalității (2.32) să introducem funcțiile  $F(t, y)$  și  $\xi(x)$  prin:

$$F(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx; \quad \xi(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2.34)$$

Vedem acum că funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  se exprimă cu ajutorul funcțiilor nou introduse din (2.34) în modul:

$$\varphi(t) = \int_c^d F(t, y) dy; \quad \psi(t) = \int_a^t \xi(x) dx.$$

Conform Corolarului 2.1.1, funcția  $F$  din (2.34) este continuă, iar derivata parțială a acesteia în punctul  $(t, y)$ , față de variabila  $t$  este, în baza lui (2.24)<sub>1</sub>, egală cu  $f(t, y)$  și această derivată este funcție continuă pentru  $(t, y) \in [a, b] \times [c, d]$ . Aplicând Teorema 2.1.3 deducem că avem

$$\varphi'(t) = \int_c^d \frac{\partial F}{\partial t}(t, y) dy = \int_c^d f(t, y) dy. \quad (2.35)$$

Funcția  $\xi = \xi(x)$  fiind uniform continuă pe compactul  $[a, b]$  în baza Teoremei 2.1.1, este continuă pe  $[a, b]$ . Fiind îndeplinite ipotezele Teoremei 2.1.3, prin aplicarea ei funcției  $\psi$ , găsim

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \xi(x) dx = \xi(t) = \int_c^d f(t, y) dy.$$

Din această egalitate și (2.35) rezultă că are loc (2.32) deci, în baza uneia din consecințele teoremei creșterilor finite a lui Lagrange, funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  diferă printr-o constantă  $C$ , constantă care este diferența valorilor acestor două funcții în orice punct din domeniul lor de definiție. Luând acest punct să fie  $t = a$  și având în vedere (2.33), deducem că are loc relația (2.31) și drept urmare are loc și egalitatea (2.29). În particular,  $\varphi(b) = \psi(b)$ , adică are loc egalitatea (2.28), care este ceea ce trebuia demonstrat. ■

**Observația 2.1.4** *Egalitatea (2.28) arată că pentru a integra pe intervalul  $[c, d]$  integrala depinzând de un parametru (2.1), integrăm funcția  $f(x, y)$  în raport cu acest parametru pe același interval, iar rezultatul integrării, care va fi o funcție de  $x$ , se integrează pe compactul  $[a, b]$ .*

**Exemplul 2.1.2** *Folosind teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru, să se calculeze integrala proprie depinzând de doi parametri*

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 \frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} dx.$$

**Soluție.** Se observă că

$$\frac{x^{y_1} - x^{y_2}}{\ln x} = \int_{y_2}^{y_1} x^y dy. \quad (2.36)$$

Folosind această observație, rezultă

$$J(y_1, y_2) = \int_0^1 dx \int_{y_2}^{y_1} x^y dy.$$

În ultima iterație de integrale aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de parametrul  $y$  și obținem

$$J(y_1, y_2) = \int_{y_2}^{y_1} dy \int_0^1 x^y dx = \int_{y_2}^{y_1} \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_{y_2}^{y_1} \frac{dy}{1+y}.$$

Cum ultima integrală este imediată, avem în final

$$J(y_1, y_2) = \ln \frac{1+y_1}{1+y_2}.$$

■

**Exemplul 2.1.3** Să se determine funcția  $J$  definită ca o integrală improprie depinzând de doi parametri  $a$  și  $b$

$$J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \cdot \cos \ln \frac{1}{x} dx.$$

**Soluție.** Folosim mai întâi rezultatul (2.36) în care  $y_1 = b$  și  $y_2 = a$ . Atunci,  $J(a, b)$  se scrie

$$J(a, b) = \int_0^1 \cos \ln \frac{1}{x} dx \int_a^b x^y dy.$$

În membrul doi al acestei relații aplicăm teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru și obținem

$$J(a, b) = \int_a^b J_1(y) dy, \quad (2.37)$$

unde am introdus notația

$$J_1(y) = \int_0^1 x^y \cos \ln \frac{1}{x} dx. \quad (2.38)$$

Pentru calculul integralei (2.38), efectuăm schimbarea de variabilă

$$\ln x = t \implies x = e^t \implies dx = e^t dt, \quad t \in (-\infty, 0].$$

Folosind formula schimbării de variabilă într-o integrală improprie, suntem conduși la

$$J_1(y) = \int_{-\infty}^0 e^{(y+1)t} \cos t dt.$$

Dacă în ultima integrală se aplică de două ori formula integrării prin părți, obținem

$$J_1(y) = y + 1 - (y + 1)^2 J_1(y),$$

de unde deducem că valoarea lui  $J_1(y)$  este

$$J_1(y) = \frac{y + 1}{1 + (y + 1)^2}.$$

Folosind acum acest rezultat în (2.37), deducem

$$J(a, b) = \int_a^b \frac{y + 1}{1 + (y + 1)^2} dy.$$

Ultima integrală este imediată și are valoarea

$$J(a, b) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + (y + 1)^2 \right) \Big|_a^b = \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + b + 2}{a^2 + a + 2}.$$

■

## 2.2 Integrale improprii simple depinzând de un parametru

Teoremele demonstrate în paragraful precedent pot fi extinse fără dificultate la integralele improprii de tipul particular

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) g(x) dx, \quad (2.39)$$

unde funcția  $f : [a, b) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și mărginită, iar funcția  $g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  poate fi discontinuă în caz general, însă integrala improprie  $\int_a^b g(x) dx$ , cu limita superioară punct singular, este absolut convergentă. Limita superioară poate fi finită sau infinită. Considerații analoage se pot face când  $a$  este punct singular.

Ipotezele pentru care teoremele din capitolul precedent sunt adevărate pentru integrale de tipul (2.39) le vom formula în teoremele care urmează. Aceste teoreme sunt folosite frecvent în fizica matematică și în teoria integralelor Fourier.

**Teorema 2.2.1** (Teoremă generalizată de continuitate a unei integrale improprii simple depinzând de un parametru) *Dacă funcția reală de două variabile reale*

$$f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.40)$$

*este continuă și mărginită, iar integrala improprie de speța întâi*

$$\int_a^{+\infty} |g(x)| dx \quad (2.41)$$

*este convergentă, atunci integrala improprie de speța întâi depinzând de un parametru*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x) dx \quad (2.42)$$

*este funcție uniform continuă de  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ .*

**Demonstrație.** Fie  $C > 0$  și  $K > 0$  constante reale cu proprietățile:

$$|f(x, y)| < C, \quad (\forall) \quad (x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]; \quad (2.43)$$

$$\int_a^{+\infty} |g(x)| dx = K < +\infty,$$



existența căroră rezultă din ipotezele teoremei. Fie acum  $\varepsilon > 0$  luat arbitrar. Integrala improprie (2.41) fiind convergentă, există  $\ell > a$ , suficient de mare, astfel încât

$$2C \int_{\ell}^{+\infty} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.44)$$

Luând un astfel de  $\ell$  încât să aibă loc inegalitatea (2.44) și alegând arbitrar pe  $y'$  și  $y''$  din intervalul  $[c, d]$ , putem reprezenta diferența  $J(y') - J(y'')$  în forma

$$\begin{aligned} J(y') - J(y'') &= \int_a^{\ell} (f(x, y') - f(x, y'')) g(x) dx + \\ &+ \int_{\ell}^{+\infty} (f(x, y') - f(x, y'')) g(x) dx. \end{aligned}$$

Deoarece funcția  $f$  este continuă în intervalul bidimensional închis  $[a, \ell] \times [c, d]$ , ea este uniform continuă. Prin urmare, pentru  $\varepsilon > 0$ , ales arbitrar mai sus, există  $\delta = \delta(\varepsilon)$  astfel încât la orice alegere a lui  $y'$  și  $y''$  din compactul  $[c, d]$  care să satisfacă inegalitatea

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon), \quad (2.45)$$

valorile corespunzătoare ale lui  $f$  în punctele  $(x, y')$  și  $(x, y'')$  satisfac inegalitatea

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad (\forall) x \in [a, \ell].$$

Această egalitate, împreună cu (2.43), (2.44) și (2.45), implică relațiile

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y'')| &\leq \int_a^{\ell} |f(x, y') - f(x, y'')| \cdot |g(x)| dx + \\ &+ \int_{\ell}^{+\infty} (|f(x, y')| + |f(x, y'')|) |g(x)| dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{2K} \int_a^{\ell} |g(x)| dx + 2C \int_{\ell}^{+\infty} |g(x)| dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

care arată că integrala improprie depinzând de parametrul  $y$  din (2.39) este o funcție continuă pe compactul  $[c, d]$ , deci și uniform continuă. ■

**Teorema 2.2.2 (Derivabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru)** *Dacă funcția (2.40) și derivata sa parțială în raport cu  $y$*

$$\frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

*sunt continue și mărginite, iar integrala improprie de speța întâi (2.41) este convergentă, atunci integrala improprie simplă (2.42), de speța întâi și depinzând de parametrul  $y$ , este o funcție derivabilă și*

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x)dx.$$

**Exercițiul 2.2.1** *Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze*

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} yx}{x\sqrt{1-x^2}}dx.$$

**Soluție.** Integrala improprie depinzând de un parametru din acest exemplu este de forma (2.39), unde:

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} yx}{x}; \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2 astfel că, putem scrie

$$J'(y) = \int_0^1 \frac{x}{x(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+y^2x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

În ultima integrală efectuăm schimbarea de variabilă  $x = \sin t$ . Obținem integrala

$$J'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}$$

care, după schimbarea de variabilă  $u = \operatorname{tg} t$ , devine

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(1+y^2)u^2}.$$

O primitivă a funcției de integrat din ultima integrală improprie depinzând de un parametru este simplu de calculat. Prin urmare,

$$J'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg}(u\sqrt{1+y^2}) \Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Deoarece valoarea în  $y = 0$  a funcției  $J$  este zero, avem

$$J(y) = \int_0^y J'(t) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Cum primitiva ultimei funcții de integrat este  $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$ , rezultă în final

$$J(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

■

**Exercițiul 2.2.2** Folosind teorema de derivabilitate a integralelor improprii simple depinzând de un parametru, să se calculeze

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2y)}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

unde parametrul  $y$  este astfel încât  $|y| < 1$ .

**Soluție.** La fel ca în exercițiul precedent,  $J(y)$  este de forma (2.39), unde

$$f(x, y) = \ln(1-x^2y), \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Constatăm că sunt îndeplinite ipotezele Teoremei 2.2.2, deci

$$J'(y) = - \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2y)\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Efectuând în ultima integrală schimbarea de variabilă  $x = \sin t$ , obținem

$$J'(y) = - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{1-y\sin^2 t},$$

după care, dacă schimbăm variabila folosind  $u = \operatorname{tg} t$ , deducem

$$J'(y) = - \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1+u^2)[1+(1-y)u^2]}.$$

Noua funcție de integrat se descompune în fracții simple și, după integrarea acestora, găsim

$$J'(y) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y\sqrt{1-y}} \right).$$

Procedând asemănător ca la exercițiul precedent, găsim că valoarea lui  $J(y)$  este  $J(y) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-y}}{2}$ . ■

**Teorema 2.2.3 (Integrabilitatea unei integrale improprii simple depinzând de un parametru)** *Dacă funcția (2.40) este continuă și mărginită, iar integrala improprie de speța întâi (2.41) este convergentă, atunci integrala improprie simplă de speța întâi (2.42), depinzând de parametrul  $y$ , este o funcție de  $y$  integrabilă Riemann pe intervalul  $[c, d]$  și*

$$\begin{aligned}\int_c^d J(y) dy &= \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} \left( g(x) \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.\end{aligned}$$

Operațiile de derivare și integrare ale integralelor improprii depinzând de un parametru de forma specială (2.42) se aplică pentru a calcula valorile unor integrale proprii sau improprii care nu conțin neapărat parametri dar în care, în prealabil, se introduc unul sau mai mulți parametri.

**Exemplul 2.2.1** *Să se evalueze integrala improprie de prima speță depinzând de parametrul  $y \in [-A, A]$*

$$J(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad (2.46)$$

unde  $\alpha$  este o constantă reală pozitivă fixată.

**Soluție.** Punând  $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$  și  $g(x) = e^{-\alpha x}$  observăm că  $f(x, y)$  și  $f'_y(x, y)$  sunt funcții continue și mărginite pe intervalul bidimensional nemărginit

$$[0, +\infty) \times [-A, A],$$

iar integrala

$$\int_0^{+\infty} |g(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

este convergentă. Prin urmare, putem aplica Teorema 2.2.2. După derivarea sub semnul integrală în (2.46), obținem

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos xy dx. \quad (2.47)$$

Integrând prin părți de două ori în membrul al doilea al relației (2.47), găsim

$$J'(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} \quad (2.48)$$

de unde, prin integrare de la 0 la  $y$  și  $J(0) = 0$ , obținem

$$J(y) = \int_0^y J'(t)dt = \int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} dt = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}. \quad (2.49)$$

Există și o altă cale de calculare a integralei (2.46) pornind de la rezultatul intermediar (2.48) care constă mai întâi în determinarea unei primitive a funcției

$$y \mapsto \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}.$$

O asemenea primitivă poate fi  $\operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}$  și prin urmare vom avea

$$J(y) = C + \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}, \quad (2.50)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară. Punând  $y = 0$  în (2.50) și ținând cont că  $J(0) = 0$  găsim că  $C = 0$  și din nou ajungem la (2.49).

Dacă în egalitatea (2.49) trecem la limită pentru  $\alpha \rightarrow +0$  și în rezultatul obținut punem  $y = 1$ , găsim valoarea integralei improprii a lui Dirichlet, a cărei natură am studiat-o anterior,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (2.51)$$

Desigur, pornind de la integrala (2.46), a cărei valoare este dată în (2.49), putem să dăm valorile altor integrale improprii. Ca exemplu, avem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin xy}{x} e^{-x} dx = \operatorname{arctg} y,$$

care se obține din (2.46) și (2.49) luând  $\alpha = 1$ . ■

## 2.3 Integrale improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

### 2.3.1 Definiția integralelor improprii depinzând de un parametru, uniform convergente

Să considerăm o funcție reală de două variabile reale

$$f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.52)$$

cu proprietatea că restricția sa la orice paralelă la axa  $Ox$  care trece prin punctul  $(0, y)$ , adică funcția  $f(\cdot, y) : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , este integrabilă în sens generalizat, ceea ce este echivalent cu a spune că integrala improprie de speța întâi depinzând de parametrul  $y$

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (2.53)$$

este convergentă. În baza definiției convergenței unei integrale improprii, avem

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x, y) dx. \quad (2.54)$$

Integralele improprii de speța a doua care depind de un parametru se definesc în mod asemănător. De exemplu, dacă

$$f : [a, b) \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.55)$$

este o funcție reală de două variabile reale nemărginită în vecinătatea punctelor  $(b, y)$ , iar integrala improprie

$$\int_a^b f(x, y) dx \quad (2.56)$$

este convergentă pentru orice valoare fixată a lui  $y$  din compactul  $[c, d]$ , atunci

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx \quad (2.57)$$

este o funcție de  $y$  definită pe compactul  $[c, d]$  care se numește *integrală improprie de speța a doua care depinde de un parametru*.

În studiul integralelor improprii depinzând de un parametru (2.54) și (2.57) un rol important îl are noțiunea de *uniformă convergență*.

**Definiția 2.3.1** *Spunem că integrala improprie de speța întâi (2.53), depinzând de parametrul  $y$ , este **uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $L = L(\varepsilon)$  astfel încât inegalitatea***

$$\left| J(y) - \int_a^\ell f(x, y) dx \right| = \left| \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*este satisfăcută simultan pentru toți  $\ell > L(\varepsilon)$  și  $y \in [c, d]$ .*

Uniforma convergență a unei integrale improprii de speța a doua, de forma (2.57), care depinde de parametrul  $y \in [c, d]$ , se definește asemănător.

**Definiția 2.3.2** *Integrala improprie de speța a doua (2.57), care depinde de parametrul  $y \in [c, d]$ , se numește **uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât inegalitatea***

$$\left| J^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\lambda}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*are loc simultan pentru toți  $\lambda < b - a$  care satisfac condiția  $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$  și pentru toți  $y \in [c, d]$ .*

**Exemplul 2.3.1** *Integrala improprie de speța întâi depinzând de un parametru*

$$J(y) = \int_0^{+\infty} y e^{-xy} dx \quad (2.58)$$

*este convergentă pentru fiecare  $y \in [0, 1]$ , însă nu este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe compactul  $[0, 1]$ .*

Într-adevăr, avem

$$\int_0^\ell y e^{-xy} dx = \int_0^{\ell y} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^{\ell y} = 1 - e^{-\ell y},$$

de unde deducem

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_0^{\ell y} e^{-xy} dx = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\ell y}) = 1$$

ceea ce arată că integrala improprie (2.58) este convergentă pentru fiecare  $y \in [0, 1]$ .

Conform Definiției 2.3.1, pentru studiul convergenței uniforme trebuie calculată diferența

$$J(y) - \int_0^\ell y e^{-xy} dx = \int_\ell^{+\infty} y e^{-xy} dx = \int_{\ell y}^{+\infty} e^{-u} du = e^{-\ell y}.$$

Pentru o valoare fixată și arbitrar de mare  $\ell > 0$ , această diferență întrece pe  $1/2$  pentru toate valorile lui  $y$  suficient de apropiate de zero și, în consecință,

pentru  $\varepsilon = 1/2$  nu există  $L(\varepsilon)$  astfel încât, pentru  $\ell > L(\varepsilon)$  și pentru toți  $y \in [0, 1]$ , să fie satisfăcută inegalitatea

$$\left| \int_t^{+\infty} y e^{-xy} dx \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Acest rezultat arată că integrala improprie de speța întâi (2.58) nu este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[0, 1]$ .

**Exercițiul 2.3.1** *Să se arate că integrala improprie (2.58) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[\delta, 1]$ , cu  $0 < \delta < 1$ .*

**Soluție.** Într-adevăr, avem

$$\int_{\ell}^{+\infty} y e^{-xy} dx = \int_{\ell y}^{+\infty} e^{-u} du = e^{-\ell y} \leq e^{-\ell \delta}$$

pentru  $0 < \delta \leq y \leq 1$  și prin urmare inegalitatea

$$\left| \int_{\ell}^{+\infty} y e^{-xy} dx \right| < \varepsilon$$

are loc pentru orice

$$\ell > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\delta}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (2.59)$$

și pentru toți  $y \in [\delta, 1]$ , unde  $0 < \delta < 1$ . În baza Definiției 2.3.1, rezultă că integrala improprie (2.58), de speța întâi și depinzând de parametrul  $y$ , este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe compactul  $[\delta, 1]$ , cu  $0 < \delta < 1$ . ■

### 2.3.2 Reducerea integralelor improprii depinzând de un parametru la șiruri de funcții

O integrală improprie depinzând de un parametru poate fi redusă la un șir de funcții, iar această reducere face posibilă demonstrația teoremelor fundamentale referitoare la astfel de integrale în baza teoremelor corespunzătoare ale șirurilor de funcții.

Dacă integrala (2.53) este convergentă pentru fiecare  $y \in [c, d]$ , atunci, pentru un șir numeric arbitrar,  $(\ell_n)$ , cu limita egală cu  $+\infty$  și termenii incluși



în intervalul nemărginit  $[a, +\infty)$ , șirul de funcții  $(F_n)$  definite pe intervalul  $[c, d]$ , cu termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_k} f(x, y) dx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad c \leq y \leq d$$

este evident convergent la  $J(y)$  pe intervalul  $[c, d]$ .

Pentru a se urmări cu eficiență raționamentele de mai jos se impune să reamintim definițiile convergenței și uniforme convergențe ale unui șir de funcții.

**Definiția 2.3.3** Șirul de funcții  $(f_n)$  se numește **convergent** la funcția  $f(x)$  pe intervalul  $[a, b]$  dacă pentru orice valoare fixată  $x \in [a, b]$  șirul numeric  $(f_n(x))$  este convergent la numărul  $f(x)$ , adică dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  și orice  $x \in [a, b]$  există un număr  $N = N(\varepsilon, x)$  (care depinde de  $\varepsilon$  și în general și de  $x$ , care nu este neapărat număr natural) astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } n > N(\varepsilon, x).$$

Dintre șirurile de funcții convergente de o importanță esențială sunt așa numitele șiruri *uniform convergente*.

**Definiția 2.3.4** Șirul de funcții  $(f_n)$  se numește **uniform convergent** la funcția  $f(x)$  pe intervalul  $[a, b]$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N = N(\varepsilon)$  (dependent de  $\varepsilon$ , însă independent de  $x$  și care nu este neapărat număr natural) astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{pentru orice } n > N(\varepsilon)$$

și pentru orice  $x \in [a, b]$ .

Pentru demonstrațiile teoremelor care formulează proprietățile integralelor improprii depinzând de un parametru, vom avea nevoie de trei rezultate stabilite la studiul șirurilor de funcții pe care le reamintim mai jos.

**Teorema 2.3.1** Dacă șirul de funcții continue  $(f_n)$  definite pe compactul  $[a, b]$  este nedescrescător și convergent la funcția continuă  $f(x)$ , atunci convergența este uniformă.

**Teorema 2.3.2** *Dacă șirul de funcții continuu diferențiabile  $(f_n)$  este convergent la funcția  $f$  pe  $[a, b]$ , iar șirul derivatelor  $(f'_n)$  este uniform convergent la funcția  $\varphi(x)$  pe  $[a, b]$ , atunci funcția  $f$  este derivabilă pe  $[a, b]$  și*

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x). \quad (2.60)$$

**Teorema 2.3.3** *Dacă șirul de funcții continue  $(f_n)$  este uniform convergent pe intervalul  $[a, b]$  la funcția  $f(x)$ , atunci șirul integralelor*

$$\left( \int_{x_0}^x f_n(t) dt \right)$$

*este uniform convergent pe intervalul  $[a, b]$  la funcția definită prin integrala  $\int_{x_0}^x f(t) dt$ , oricare ar fi  $x_0 \in [a, b]$ .*

Teorema de mai jos are loc în condiția ca integrala (2.53) să fie convergentă pentru orice  $y$  aparținând compactului  $[c, d]$ .

**Teorema 2.3.4** *Pentru ca integrala  $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  să fie uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe compactul  $[c, d]$ , este necesar și suficient ca șirul de funcții*

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

*să fie uniform convergent spre  $J(y)$  pe compactul  $[c, d]$  oricare ar fi alegerea șirului  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots$ , cu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell_n = +\infty$  și  $\ell_n \geq a$ .*

**Demonstrație. Necesitatea.** Presupunem că integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe compactul  $[c, d]$ . Atunci, considerând  $\varepsilon > 0$ , arbitrar, există  $L(\varepsilon) > a$ , astfel încât pentru orice  $\ell > L(\varepsilon)$  inegalitatea

$$|J(y) - \int_a^\ell f(x, y) dx| < \varepsilon$$

este satisfăcută simultan pentru toți  $y \in [c, d]$ .

Să considerăm șirul numeric  $(\ell_n)$ , cu limita egală cu  $+\infty$  și termenii situați în intervalul  $[a, +\infty)$ . Considerându-l pe  $L(\varepsilon)$  de mai sus, din teorema de caracterizare a limitei unui șir numeric, deducem că există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel

încât  $\ell_n > L(\varepsilon)$  pentru toți  $n > N(\varepsilon)$ . În consecință, pentru un astfel de  $n$ , inegalitatea

$$|J(y) - F_n(y)| = |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx| < \varepsilon$$

are loc pentru orice  $y \in [c, d]$ . Aceasta înseamnă că șirul de funcții  $(F_n)$ , având termenul general dat de (2.61), este uniform convergent la funcția  $J(y)$ , definită de (2.53), pe intervalul  $[c, d]$ .

**Suficiența.** Să arătăm că dacă orice șir de funcții  $(F_n)$ , având termenul general dat de (2.61), unde  $\ell_n \rightarrow +\infty$ ,  $\ell_n \geq a$ , este uniform convergent la funcția  $J(y)$ , definită de (2.53), pe intervalul  $[c, d]$ , atunci integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe acest interval.

Într-adevăr, dacă presupunem că (2.53), care prin ipoteză este convergentă pentru orice  $y \in [c, d]$  fixat, converge neuniform în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , atunci există  $\varepsilon_0$  astfel încât pentru orice  $L$  arbitrar de mare există  $\ell > L$  și  $y \in [c, d]$  așa fel încât să avem

$$|J(y) - \int_a^{\ell} f(x, y) dx| \geq \varepsilon_0.$$

Presupunând că  $L$  ia valorile  $[a] + 1, [a] + 2, \dots, [a] + n, \dots$ , obținem șirul numeric  $(\ell_n)$ , cu  $\ell_n > n$ , și un șir  $(y_n)$ , cu  $y_n \in [c, d]$ , pentru care

$$|J(y_n) - \int_a^{\ell_n} f(x, y_n) dx| = |J(y_n) - F_n(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Aceasta înseamnă că șirul de funcții  $(F_n)$ , cu termenul general  $F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx$ , astfel construit, converge neuniform pe intervalul  $[c, d]$ , ceea ce contrazice ipoteza. ■

**Observația 2.3.1** Dacă funcția  $f$  nu schimbă de semn, atunci pentru ca integrala improprie (2.53) să fie uniform convergentă în raport cu parametrul  $y \in [c, d]$  este suficient ca șirul de funcții (2.61) să fie convergent la integrala  $J(y)$  cel puțin pentru o alegere particulară a șirului numeric  $(\ell_n)$ , cu elementele din intervalul  $[a, +\infty)$  și cu limita  $+\infty$ .

Într-adevăr, presupunând  $f$  funcție nenegativă, avem

$$\int_a^{\ell} f(x, y) dx \geq \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx$$

pentru orice  $\ell \geq \ell_n$ . În consecință,

$$|J(y) - \int_a^\ell f(x, y)dx| \leq |J(y) - \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx| < \varepsilon$$

pentru orice  $\ell > \ell_n$  și pentru toți  $y \in [c, d]$  și cu  $\ell_n$  suficient de mare. ■

**Observația 2.3.2** Dacă funcția  $f$  este continuă și nu schimbă de semn (de exemplu, este nenegativă) și integrala improprie (2.53) este funcție continuă de parametrul  $y \in [c, d]$ , această integrală este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ .

Într-adevăr, considerând șirul numeric crescător  $(\ell_n)$  cu limita egală cu  $+\infty$  și termenii situați în intervalul  $[a, +\infty)$  ajungem la șirul de funcții  $(F_n)$  având termenul general

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

Funcția  $f$  fiind nenegativă, șirul de funcții  $(F_n)$  cu termenul general (2.62) este monoton nedescrescător, iar conform Teoremei 2.1.1, funcțiile  $F_n(y)$  din (2.62) sunt continue. Mai mult, acest șir de funcții converge la funcția continuă

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx \quad (2.63)$$

pe intervalul  $[c, d]$ . Dar Teorema 2.3.1 implică convergența uniformă a șirului de funcții (2.62) la funcția limită (2.63) și, în consecință, după Observația 2.3.1 integrala  $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe acest interval. ■

**Observația 2.3.3** Integrala improprie de speța a doua

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y)dx$$

se poate reduce în mod asemănător la șirul de funcții  $(F_n^*)$ , unde

$$F_n^*(y) = \int_a^{b-\lambda_n} f(x, y)dx,$$

iar  $(\lambda_n)$  este un șir numeric convergent la zero având termenii cuprinși în intervalul  $(0, b-a)$ .

### 2.3.3 Proprietățile integralelor improprii uniform convergente în raport cu parametrul $y$

În continuare prezentăm unele proprietăți ale integralelor improprii de tipul (2.53) și (2.57) din care vom constata că ipoteza suplimentară a uniformei convergențe în raport cu parametrul  $y$  ale acestora implică continuitatea, derivabilitatea și integrabilitatea lor.

**Teorema 2.3.5 (Continuitatea unei integrale improprii depinzând de parametru)** *Dacă funcția  $f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  este continuă și integrala (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , atunci funcția  $J(y)$  din (2.53) este continuă pe acest interval.*

**Demonstrație.** Considerăm șirul de funcții  $(F_n)$  cu termenul general (2.62), unde  $y \in [c, d]$ . După Teorema 2.1.1, funcțiile (2.62) sunt continue pe intervalul  $[c, d]$ . Mai departe, Teorema 2.3.4 implică că șirul considerat este uniform convergent la integrala  $J(y)$  din (2.53) și, în consecință, funcția  $J(y)$  este continuă pentru că este limita unui șir de funcții uniform convergent. ■

**Teorema 2.3.6 (Derivabilitatea unei integrale improprii depinzând de parametru)** *Dacă funcțiile*

$$f : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : [a, +\infty) \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

*sunt continue, integrala improprie (2.53) este convergentă, iar integrala improprie depinzând de parametrul  $y$*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad (2.64)$$

*este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , atunci funcția (2.53) este derivabilă pe  $[c, d]$  și*

$$\frac{dJ}{dy}(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx, \quad y \in [c, d]. \quad (2.65)$$

**Demonstrație.** Considerăm din nou șirul de funcții  $(F_n)$  cu termenul general (2.62), unde  $y \in [c, d]$ , convergent la integrala (2.53) pe intervalul  $[c, d]$ . Conform Teoremei 2.1.2, funcțiile  $F_n(y)$  sunt derivabile și are loc egalitatea

$$F'_n(y) = \frac{d}{dy} \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx = \int_a^{\ell_n} f'_y(x, y) dx, \quad (2.66)$$

unde  $n = 1, 2, \dots$ ,  $c \leq y \leq d$ , iar funcțiile  $F'_n(y)$  sunt continue pe  $[c, d]$ .

Din ipoteze și Teorema 2.3.4 rezultă că șirul de funcții  $(F'_n)$  este uniform convergent la integrala improprie (2.64) și  $F'_n(y)$  sunt funcții continue pe  $[c, d]$ . Constatăm că șirul de funcții  $(F_n)$  satisface ipotezele din Teorema 2.3.2, prin urmare, integrala improprie  $J(y)$  este o funcție continuu diferențiabilă pe  $[c, d]$  și relația

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

are loc pentru orice  $y \in [c, d]$ , ceea ce trebuia de demonstrat. ■

**Observația 2.3.4** Având în vedere expresia (2.53) a funcției  $J(y)$ , rezultă că identitatea (2.65) se scrie

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx,$$

de unde deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.6 operațiile de derivare și integrare ale unei integrale improprii depinzând de un parametru sunt comutabile.

**Teorema 2.3.7 (Integrabilitatea unei integrale improprii depinzând de un parametru)** Dacă funcția  $f$  din (2.52) este continuă și integrala improprie depinzând de un parametru (2.53) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ , atunci funcția  $J(y)$  din (2.53) este integrabilă și

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (2.67)$$

**Demonstrație.** Pentru orice șir de numere

$$\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots, \quad (\ell_n \geq a, \lim_{n \rightarrow \infty} \ell_n = +\infty),$$

șirul de funcții corespunzător

$$F_n(y) = \int_a^{\ell_n} f(x, y) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

este uniform convergent la funcția  $J(y)$  pe  $[c, d]$ , aceasta rezultând din Teorema 2.3.4. După Teorema 2.1.1, toate funcțiile  $F_n(y)$  sunt continue pe intervalul  $[c, d]$ . Fiindcă sunt îndeplinite ipotezele din Teorema 2.3.3, avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^d F_n(y) dy = \int_c^d J(y) dy.$$

Pe de altă parte, Teorema 2.1.4 implică egalitățile

$$\int_c^d F_n(y)dy = \int_c^d dy \int_a^{\ell_n} f(x, y)dx = \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

În consecință, pentru orice alegere a șirului  $(\ell_n)$ , cu limita egală cu  $+\infty$  și termenii aparținând intervalului nemărginit  $[a, +\infty)$ , avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^{\ell_n} dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d J(y)dy.$$

Aceasta înseamnă că integrala improprie de speța întâi

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy$$

este convergentă și egalitatea

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

este satisfăcută și astfel teorema este demonstrată. ■

**Corolarul 2.3.1** Dacă  $f(x, y)$  este o funcție continuă care nu schimbă de semn pentru  $a \leq x < +\infty$ ,  $c \leq y \leq d$  (de exemplu,  $f(x, y)$  este nenegativă), iar integrala

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$$

este o funcție continuă de  $y$  pentru  $c \leq y \leq d$ , atunci relația (2.67) este adevărată.

**Demonstrație.** Într Observația 2.3.2 implică convergența uniformă a integralei improprie  $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$  pe intervalul  $c \leq y \leq d$  și, în consecință, după Teorema 2.3.7, egalitatea (2.67) este adevărată. ■

**Observația 2.3.5** Egalitatea (2.67) se mai poate scrie în forma

$$\int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

din care deducem că în ipotezele Teoremei 2.3.7 cele două operații de integrare sunt comutabile.

**Teorema 2.3.8 (Schimbarea ordinii de integrare într-o integrală improprie iterată a unei funcții de semn constant)** *Dacă*

$$f : [a, +\infty) \times [c, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.68)$$

*este o funcție continuă de semn constant, integralele improprii depinzând de parametrul  $y$*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{și} \quad J^*(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

*sunt funcții continue pe intervalele  $[c, +\infty)$ , respectiv  $[a, +\infty)$ , și cel puțin una din integralele improprii:*

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx; \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \quad (2.69)$$

*este convergentă, atunci cealaltă integrală improprie din (2.69) este convergentă și*

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy.$$

**Demonstrație.** Să considerăm că funcția  $f$  este nenegativă și că integrala improprie iterată

$$J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (2.70)$$

este convergentă. Trebuie să demonstrăm că

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (2.71)$$

Pentru aceasta vom arăta că valoarea absolută a diferenței dintre cantitatea variabilă  $\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  și cantitatea constantă

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

poate fi făcută mai mică decât un  $\varepsilon > 0$  ales arbitrar.

Conform Corolarului 2.3.1, are loc egalitatea

$$\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x, y) dx.$$



Funcția  $f(x, y)$  fiind nenegativă, putem scrie

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \\
 &= \int_c^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx = \\
 &= \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \leq \\
 &\leq \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx,
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

unde  $c < c_1 < +\infty$ .

Deoarece (2.70) este integrală improprie convergentă rezultă că pentru  $\varepsilon > 0$  există  $c_1 > c$  astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.73}$$

Din continuitatea integralei  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  pe intervalul  $c \leq y < +\infty$  (vezi ipoteza) și Observația 2.3.2 rezultă că integrala de mai sus este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe orice compact  $[c, c_1]$ . Prin urmare, pentru  $\varepsilon > 0$  ales arbitrar mai sus există  $L(\varepsilon) > a$  astfel încât pentru orice  $\ell > L(\varepsilon)$  și  $y \in [c, c_1]$  are loc inegalitatea

$$\int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}. \tag{2.74}$$

Folosind acest rezultat constatăm că inegalitatea

$$\int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

are loc pentru toți  $\ell > L(\varepsilon)$ . Acum, din (2.72), (2.73) și iterata (2.74) tragem concluzia că

$$0 \leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy < \varepsilon$$

pentru toți  $\ell > L(\varepsilon)$ , ceea ce trebuia să demonstrăm pentru a fi adevărată concluzia teoremei. ■

Dacă  $f(x, y)$  din (2.68) nu are semn constant și concluziile Teoremei 2.3.8 dorim să fie adevărate, atunci ipotezele Teoremei 2.3.8 trebuiesc modificate după cum urmează.

**Teorema 2.3.9 (Schimbarea ordinii de integrare într-o integrală improprie iterată din funcția  $f$  care schimbă de semn)** *Dacă  $f$  din (2.68) este o funcție care își schimbă semnul de o infinitate de ori și integralele improprii depinzând de un parametru:*

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx; \quad J^*(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

sunt uniform convergente pe orice interval finit  $c \leq y \leq C$  și respectiv pe orice interval finit  $a \leq x \leq A$ , iar cel puțin una din integralele improprii iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx; \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)|dy \quad (2.75)$$

este convergentă, atunci integralele iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx; \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy \quad (2.76)$$

sunt convergente și

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy.$$

**Demonstrație.** Pentru precizare, presupunem că cea de a doua integrală din (2.75) este convergentă. Aplicând criteriul de comparație funcțiilor  $f(x, y)$ ,  $|f(x, y)|$ , precum și funcțiilor

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)dx, \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)|dx,$$

deducem că cea de a doua integrală improprie din (2.76) este convergentă.

Mai avem de demonstrat că

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y)dx. \quad (2.77)$$

Integrala improprie  $\int_c^{+\infty} f(x, y)dy$  fiind uniform convergentă, pe orice interval finit  $[a, A]$  și pentru orice număr finit  $\ell > a$ , avem

$$\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x, y)dx. \quad (2.78)$$

Să calculăm valoarea absolută a diferenței dintre cantitatea variabilă  $\int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  și numărul  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  care intră în relația (2.77). Ținând cont și de (2.78), constatăm că au loc egalitățile și inegalitățile

$$\begin{aligned}
& \left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| = \\
& = \left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_c^{+\infty} dy \int_a^\ell f(x, y) dx \right| = \\
& = \left| \int_c^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \\
& = \left| \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \\
& \leq \left| \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_\ell^{+\infty} |f(x, y)| dx \leq \\
& \leq \left| \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx
\end{aligned} \tag{2.79}$$

oricare ar fi  $c_1 > c$ . Din convergența integralei iterate

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $c_1 > c$  astfel încât

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.80}$$

Acum, fixând o valoare a lui  $c_1 > c$  pentru care inegalitatea (2.80) are loc și luând în considerație că integrala  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  este uniform convergentă, alegem, la fel ca în demonstrația Teoremei 2.3.8, o cantitate  $L(\varepsilon)$  astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea

$$\left| \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru orice  $\ell > L(\varepsilon)$  și pentru toți  $y \in [c, c_1]$ . Atunci, avem

$$\left| \int_c^{c_1} dy \int_\ell^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.81}$$

pentru orice  $\ell > L(\varepsilon)$  și, în consecință, în baza relațiilor (2.79) (2.80) și (2.81), se obține inegalitatea

$$\left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^\ell dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon$$

oricare ar fi  $\ell > L(\varepsilon)$ , ceea ce trebuia să demonstrăm. ■

**Observația 2.3.6** *Teoreme similare au loc pentru integrale improprii de speța a doua care depind de un parametru.*

**Exercițiul 2.3.2** *Să se arate că integrala lui Poisson*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (2.82)$$

are valoarea egală cu  $\sqrt{\pi}/2$ .

**Soluție.** În (2.82) facem substituția  $x = ut$  și apoi înmulțim în ambii membri cu  $e^{-u^2}$ . Obținem

$$I e^{-u^2} = \int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} dt.$$

Integrând în raport cu  $u$  pe intervalul  $[0, +\infty)$  ambii membri ai acestei egalități și ținând cont de definiția lui  $I$ , găsim

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} dt \right) du. \quad (2.83)$$

În baza Teoremei 2.3.8 se poate schimba ordinea de integrare în (2.83) astfel că putem scrie

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} du \right) dt. \quad (2.84)$$

Dar integrala din interior din membrul doi al relației (2.84) este imediată pentru că se cunoaște o primitivă a funcției de integrat și valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} u e^{-(1+t^2)u^2} du = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}. \quad (2.85)$$

Din (2.84) și (2.85) obținem

$$I^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

de unde găsim în final că valoarea integralei lui Poisson este  $\sqrt{\pi}/2$ . ■

## 2.4 Criterii de convergență uniformă

**Teorema 2.4.1** (Condiție necesară și suficientă de convergență uniformă a integralelor improprii de speța doua care depind de un parametru) *Integrala improprie*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (2.86)$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $L = L(\varepsilon)$  astfel încât inegalitatea

$$\left| \int_{\ell'}^{\ell''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (2.87)$$

are loc simultan pentru orice  $\ell', \ell'' > L(\varepsilon)$  și pentru orice  $y \in [c, d]$ .

**Demonstrație. Necesitatea.** În ipoteza că integrala (2.4.1) este uniform convergentă, atunci aplicând Definiția 2.3.1 rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $L = L(\varepsilon)$  astfel încât pentru toți  $\ell' > L(\varepsilon), \ell'' > L(\varepsilon)$  și  $y \in [c, d]$  inegalitățile:

$$\left| \int_{\ell'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \left| \int_{\ell''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

sunt îndeplinite. Prin urmare, pentru orice  $\ell', \ell'' > L(\varepsilon)$  și pentru orice  $y \in [c, d]$  obținem inegalitatea

$$\begin{aligned} \left| \int_{\ell'}^{\ell''} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{\ell'}^{+\infty} f(x, y) dx - \int_{\ell''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\ell'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{\ell''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

**Suficiența.** Dacă inegalitatea (2.87) are loc pentru orice  $\ell', \ell'' > L(\varepsilon)$  și pentru orice  $y \in [c, d]$ , conform criteriului general de convergență uniformă al lui Cauchy pentru integrale improprii, integrala improprie (2.86) este convergentă pentru orice  $y \in [c, d]$ . Prin urmare, trecând la limită pentru  $\ell'' \rightarrow +\infty$  obținem, pentru toți  $\ell' > L(\varepsilon)$ , inegalitatea

$$\left| \int_{\ell'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \quad (2.88)$$

care are loc  $(\forall) y \in [c, d]$ . Dar, în (2.88) recunoaștem definiția uniforme convergențe în raport cu parametrul  $y$  pe compactul  $[c, d]$  a integralei improprie (2.86). ■

Teorema 2.4.1 este cunoscută sub numele de **criteriul general de convergență uniformă al lui Cauchy**.

**Teorema 2.4.2 (Criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă a unei integrale improprie depinzând de un parametru).** *Dacă*

$$|f(x, y)| \leq g(x), \quad (\forall) x \in [a, +\infty), y \in [c, d] \quad (2.89)$$

*și integrala improprie de speța întâi*

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (2.90)$$

*este convergentă, atunci integralele improprie*

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad \text{și} \quad \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$$

*sunt uniform convergente în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$ .*

**Demonstrație.** Fie  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Din convergența integralei improprie (2.90) și criteriul general al lui Cauchy de convergență a integralelor improprie deducem existența lui  $L = L(\varepsilon) > 0$  astfel încât condiția

$$\int_{\ell'}^{\ell''} g(x) dx < \varepsilon \quad (2.91)$$

este satisfăcută pentru toți  $\ell', \ell'' > L(\varepsilon)$  cu  $\ell'' > \ell'$ . Pe de altă parte din (2.89) și proprietățile integralelor definite, avem

$$\left| \int_{\ell'}^{\ell''} f(x, y) dx \right| \leq \int_{\ell'}^{\ell''} |f(x, y)| dx \leq \int_{\ell'}^{\ell''} g(x) dx. \quad (2.92)$$

Atunci, din (2.91), (2.92) și Teorema 2.4.1 rezultă concluzia teoremei. ■

Criteriile corespunzătoare convergenței uniforme a integralelor improprie depinzând de parametru din funcții nemărginite și limite finite de integrare se formulează și se demonstrează într-un mod asemănător.

De exemplu, criteriul general al lui Cauchy de convergență uniformă a integralei improprie de speța doua depinzând de un parametru, cu limita superioară punct singular, are formularea care urmează.

**Teorema 2.4.3** (Condiție necesară și suficientă de convergență uniformă a integralelor improprii din funcții nemărginite depinzând de un parametru). *Integrala improprie de speța doua depinzând de un parametru*

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ \lambda > 0}} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul  $y$  pe intervalul  $[c, d]$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice  $\lambda'$  și  $\lambda''$  aparținând intervalului  $(0, \min\{b-a, \delta(\varepsilon)\})$  inegalitatea

$$\left| \int_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

este satisfăcută pentru orice  $y \in [c, d]$ .

**Exemplul 2.4.1** Să se evalueze funcția

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.93)$$

**Soluție.** Conform criteriului lui Weierstrass, integrala improprie depinzând de parametrul  $\alpha$  și  $\beta$ , definită în (2.93), este uniform convergentă în raport cu parametrul  $\beta$  pe orice interval compact din  $\mathbb{R}$  deoarece

$$|e^{-\alpha x^2} \cos \beta x| \leq e^{-\alpha x^2}$$

și  $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$  este convergentă. Este permisă derivarea în raport cu  $\beta$  sub semnul integrală în  $J(\alpha, \beta)$  deoarece în baza aceluiași criteriu integrala

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-\alpha x^2} \cos \beta x) dx = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx$$

este uniform convergentă în raport cu parametrul  $\beta$  pe orice interval compact din  $\mathbb{R}$ . Avem deci

$$\frac{\partial J}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x dx = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{+\infty} \sin \beta x \frac{d}{dx} (e^{-\alpha x^2}) dx.$$

Integrarea prin părți în ultima integrală conduce la ecuația diferențială simplă

$$\frac{\partial J}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{2\alpha} J,$$

din care obținem

$$J(\alpha, \beta) = C(\alpha) e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (2.94)$$

Rămâne să determinăm funcția  $\alpha \mapsto C(\alpha)$ . Luând pentru  $\beta$  valoarea zero, găsim

$$C(\alpha) = J(\alpha, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx. \quad (2.95)$$

Ultima integrală se obține din integrala lui Poisson după ce trecem pe  $x$  în  $\sqrt{\alpha}x$ :

$$J(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2} d(\sqrt{\alpha}x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.96)$$

Din (2.94), (2.95) și (2.96) rezultă

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

■

**Exemplul 2.4.2** Să se calculeze valorile integralelor lui **Fresnel**

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx \quad \text{și} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

**Soluție.** Punând  $(x^2) = t$ , obținem:

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt; \\ \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt. \end{cases}$$

Din relațiile (2.95) și (2.96), în care punem  $\alpha = t$  și  $x = u$ , avem

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du. \quad (2.97)$$

Înmulțind (2.97) cu funcția  $t \mapsto e^{-kt} \sin t$ ,  $k > 0$ , și integrând pe  $[0, +\infty)$  găsim

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t du \right) dt. \quad (2.98)$$



Dacă în (2.98) schimbăm ordinea de integrare și ținem cont de rezultatul

$$\int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t \, dt = \frac{1}{1 + (k + u^2)^2},$$

simply de demonstrat folosind de două ori metoda integrării prin părți, ajungem la concluzia

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} e^{-kt} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (k + u^2)^2} \, dt. \quad (2.99)$$

Trecând la limită în (2.99) pentru  $k \rightarrow 0$  deducem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + u^4} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (2.100)$$

În acest mod se găsește în final că valorile celor două integrale Fresnel sunt egale și

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) \, dx = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

După cum s-a mai afirmat, integralele lui Fresnel sunt utilizate în optică. ■

**Exemplul 2.4.3** Pornind de la valoarea integralei improprie de prima speță studiată în Exemplul 1.12.3, să se demonstreze, în baza Teoremei 2.3.5, că pentru  $0 < p < 1$  are loc relația

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (2.101)$$

**Soluție.** Din (1.103), avem  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \, dx = \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$ . Dacă în această integrală efectuăm substituția  $x = t^{\frac{1}{2n}}$ , obținem

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n}\pi}. \quad (2.102)$$

Cu notația  $p = \frac{2m+1}{2n}$  egalitatea precedentă devine

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} \, dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (2.103)$$

în care deocamdată  $p$  este număr rațional. Să extindem valorile pe care le poate lua  $p$  între 0 și 1, considerând că  $p \in \mathbb{R} \cap (0, 1)$  și să observăm că funcția reală de două variabile reale  $f(t) = \frac{t^{p-1}}{1+t}$  este continuă pe mulțimea  $(0, +\infty) \times (0, 1)$ . Despărțind intervalul de integrare în subintervalele  $(0, 1]$  și  $[1, +\infty)$  și aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor improprii depinzând de parametrul  $p$

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t} dt \quad \text{și} \quad \int_1^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$$

în care funcțiile  $g(t)$  sunt respectiv egale cu

$$g(t) = \frac{t^{p_1-1}}{1+t} \quad \text{și} \quad g(t) = \frac{t^{p_2-1}}{1+t},$$

unde  $0 < p_1 \leq p_2 < 1$ , vedem că integrala  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval compact  $[p_1, p_2]$ . În baza Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala improprie  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$  este o funcție continuă de parametrul  $p$  pe intervalul  $(0, 1)$ . Cum orice număr real este limita unui șir de numere raționale putem afirma că  $p \in (0, 1)$  este limita pentru  $m \rightarrow +\infty$  și  $n \rightarrow +\infty$  a șirului numeric cu termenul general egal cu  $\frac{2m+1}{2n}$ , unde  $0 < m < n$ . Trecând la limită în (2.102) pentru  $m \rightarrow +\infty$  și  $n \rightarrow +\infty$  ajungem la egalitatea (2.101), care trebuia să o demonstrăm. ■

## 2.5 Integrale Cauchy–Frullani

**Definiția 2.5.1** *Se numește integrală Cauchy–Frullani<sup>1</sup> integrala improprie de speța întâi depinzând de doi parametri*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx, \quad (2.104)$$

unde  $0 < a < b < +\infty$ .

---

<sup>1</sup>Frullani, Giuliano (1795 – 1834), matematician italian.

**Teorema 2.5.1** Dacă  $f \in C^1([0, +\infty))$ , derivata  $f'$  este integrabilă în sens generalizat și  $f$  are limita finită  $f(+\infty)$  când  $x \rightarrow +\infty$ , atunci

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a}. \quad (2.105)$$

**Demonstrație.** Din ipotezele  $f'$  este integrabilă în sens generalizat și  $f$  are limită la infinit, în urma aplicării formulei Leibniz-Newton de calcul a unei integrale improprie de speța întâi convergente, deducem

$$\int_0^{+\infty} f'(x) dx = f(+\infty) - f(0). \quad (2.106)$$

În baza criteriului lui Cauchy, aceleași ipoteze asigură uniforma convergență a integralei improprie

$$J(u) = \int_0^{+\infty} f'(ux) dx \quad (2.107)$$

în raport cu parametrul  $u$  pe intervalul  $[a, b]$ .

Într-adevăr, din Teorema Bolzano–Cauchy de existență a limitei finite a funcției  $f$  în punctul de la infinit rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi  $x', x'' > N(\varepsilon)$ , avem

$$|f(x') - f(x'')| < a\varepsilon. \quad (2.108)$$

Schimbarea de variabilă  $ux = t$  în integrala definită  $\int_{A'}^{A''} f'(ux) dx$ , urmată de integrarea prin părți și utilizarea inegalității (2.108), conduce la

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f'(ux) dx \right| &= \left| \frac{1}{u} \int_{A'u}^{A''u} f'(t) dt \right| \\ \left| \frac{f(A''u) - f(A'u)}{u} \right| &\leq \frac{1}{a} |f(A''u) - f(A'u)| < \varepsilon \end{aligned} \quad (2.109)$$

oricare ar fi  $A', A'' > \frac{1}{a}N(\varepsilon)$  și oricare ar fi  $u$  din intervalul  $[a, b]$ . În baza criteriului lui Cauchy de convergență uniformă a unei integrale improprie depinzând de un parametru rezultă că integrala (2.107) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $u$  pe intervalul  $[a, b]$ , iar valoarea sa este

$$\int_0^{+\infty} f'(ux) dx = \frac{f(bx) - f(ax)}{x}. \quad (2.110)$$

Având în vedere (2.110), rezultă că putem scrie

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux) du. \quad (2.111)$$

Aplicând Teorema 2.3.7 în ultima integrală din (2.111), obținem

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux) du = \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux) dx. \quad (2.112)$$

În ultima integrală din (2.112) efectuăm schimbarea de variabilă  $ux = t$  și folosim (2.106). Obținem

$$\begin{aligned} \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux) dx &= \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{u} du = \\ &= [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Relațiile (2.112) și (2.113) conduc la (2.105). ■

**Teorema 2.5.2** *Dacă funcția reală de variabilă reală  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  nu are limită finită în punctul de la infinit, însă integrala improprie de tipul întâi  $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ , unde  $A > 0$ , este convergentă și  $f$  este derivabilă în origine, atunci*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (2.114)$$

**Demonstrație.** Integralele depinzând de parametrul  $s$  :

$$\int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt; \quad \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt, \quad (2.115)$$

sunt proprii, singularitatea în origine fiind aparentă deoarece funcția de sub semnul integrală poate fi prelungită la toată semi-axa  $[0, +\infty)$  atribuindu-i ca valoare în origine limita sa în origine care este  $f'(0)$ , ce din ipoteză există. Efectuând schimbările de variabilă  $t = ax$  în prima integrală (2.115) și  $t = bx$  în cea de a doua, avem

$$\begin{aligned} \int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(ax) - f(0)}{x} dx, \\ \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(bx) - f(0)}{x} dx. \end{aligned} \quad (2.116)$$

În consecință,

$$\begin{aligned}\int_0^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \int_{as}^{bs} \frac{dt}{t} = \\ &= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}\quad (2.117)$$

Ultima integrală din (2.117) poate fi făcută oricât de mică de îndată ce  $s$  este foarte mare, ceea ce înseamnă că

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_0^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (2.118)$$

Definiția convergenței unei integrale improprii de speța întâi și relația (2.118) demonstrează egalitatea (2.114). ■

**Exercițiul 2.5.1** Folosind eventual integralele Cauchy–Frullani, să se studieze următoarele integrale improprii depinzând de parametri și în caz de convergență să se precizeze valorile acestora:

$$\begin{aligned}a) \quad I_1(a, b) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx, \quad 0 < a < b; \\ b) \quad I_2(a, b, p, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{p + q e^{-bx}}{p + q e^{-ax}} dx, \quad p, q > 0, \quad 0 < a < b; \\ c) \quad I_3(a, b) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(bx) - \operatorname{arctg}(ax)}{x} dx, \quad 0 < a < b; \\ d) \quad I_4(a, b) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x} dx, \quad 0 < a < b; \\ e) \quad I_5(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x) \sin(\beta x)}{x} dx, \quad \alpha \neq \pm\beta; \\ f) \quad I_6(a, b) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos(ax)}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;\end{aligned}$$

$$g) \quad I_7(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-b^2x^2} - e^{-a^2x^2}}{x^2} dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$h) \quad I_8(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + b^2x^2) - \ln(1 + a^2x^2)}{x^2} dx, \quad 0 < |a| < |b|;$$

$$i) \quad I_9(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{a \ln(1 + bx) - b \ln(1 + ax)}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;$$

$$j) \quad I_{10}(a, b) = \int_a^b \frac{1 - \cos(bx)}{x} \cos(ax) dx, \quad a \neq b;$$

$$k) \quad I_{11}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{a \sin(bx) - b \sin(ax)}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;$$

$$l) \quad I_{12}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx^n} - e^{-ax^n}}{x} dx, \quad n > 0, a > 0, b > 0;$$

$$m) \quad I_{13}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-bx} - e^{-ax})^2}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;$$

$$n) \quad I_{14}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax} + x(b - a)e^{-ax}}{x^2} dx, \quad 0 < a < b;$$

$$o) \quad I_{15}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx) - \sin(ax)}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

**Soluție.** După cum vom constata, unele din integralele de mai sus ori sunt integrale Cauchy–Frullani de tipul celor descrise în Teorema 2.5.1 și Teorema 2.5.2, ori se reduc la una din acestea.

a) Fie  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x}$ . Rezultă că această funcție satisface ipotezele Teoremei 2.5.1. Deci

$$I_1(a, b) = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a} \implies I_1(a, b) = \ln \frac{a}{b};$$

b) Înlocuind logaritmul cântului cu diferență logaritmilor numărătorului și numitorului se deduce că funcția  $f$  din Teorema 2.5.1 este  $f(x) = \ln(p + qe^{-x})$ . Deoarece  $f(0) = \ln(p + q)$  și  $f(+\infty) = \ln p$ , rezultă că

$$I_2(p, q, a, b) = \ln\left(1 + \frac{q}{p}\right) \ln \frac{a}{b};$$

- c)  $f(x) = \arctg x$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ , deci  $I_3(a, b) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$ ;
- d)  $f(x) = \cos x$ ,  $f(0) = 1$ . Nu există  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , în schimb integrala improprie de speța întâi  $\int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ , unde  $A > 0$ , este convergentă în baza criteriului lui Dirichlet (vezi Teorema 1.11.2)). Prin urmare, conform Teoremei 2.5.2, avem  $I_4(a, b) = \ln \frac{a}{b}$ .
- e) Deoarece  $\sin(\alpha x) \sin(\beta x) = \frac{\cos|\alpha - \beta|x - \cos|\alpha + \beta|x}{2}$ , rezultă că  $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$ ,  $a = |\alpha + \beta|$  și  $b = |\alpha - \beta|$ . Prin urmare  $I_5(a, b) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right|$ .
- f) Scriind  $\frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)'$  și aplicând metoda integrării prin părți, avem

$$\begin{aligned} I_6(a, b) &= - \int_0^{+\infty} (\cos(bx) - \cos(ax)) \left(\frac{1}{x}\right)' dx = \\ &= -\frac{1}{x} (\cos(bx) - \cos(ax)) \Big|_0^{+\infty} + \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{a \sin(ax) - b \sin(bx)}{x} dx = (a - b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Integrala la care s-a ajuns este integrala lui Dirichlet, a cărei valoare, conform relației (2.51)), este  $\frac{\pi}{2}$ . Prin urmare,  $I_6(a, b) = \frac{\pi}{2}(a - b)$ .

g) Procedând ca la punctul precedent, obținem

$$\begin{aligned} I_7(a, b) &= -\frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{a^2xe^{-a^2x^2} - b^2xe^{-b^2x^2}}{x} dx = \\ &= 2a^2 \int_0^{+\infty} e^{-a^2x^2} dx - 2b^2 \int_0^{+\infty} e^{-b^2x^2} dx = \\ &= 2(a - b) \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

Ultima integrală este integrala Euler-Poisson (vezi Exemplul 2.3.2) a cărei valoare este  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Deci,  $I_7(a, b) = (a - b)\sqrt{\pi}$ .

h) Se integrează prin părți și se găsește

$$\begin{aligned} I_8(a, b) &= 2b^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+b^2x^2} dx - 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+a^2x^2} dx = \\ &= 2b \operatorname{arctg}(bx) \Big|_0^{+\infty} - 2a \operatorname{arctg}(ax) \Big|_0^{+\infty} = \pi(b-a). \end{aligned}$$

i) Pentru calculul integralei  $I_9(a, b)$  observăm că se poate scrie

$$I_9(a, b) = ab \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\ln(1+bx)}{bx} - \frac{\ln(1+ax)}{ax}}{x} dx.$$

Funcția  $f(x)$  din Teorema 2.5.1 este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Avem  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  și  $f(0) = 1$ . Prin urmare,  $I_9(a, b) = ab \ln \frac{a}{b}$ .

j) Integrala  $I_{10}(a, b)$  se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} I_{10}(a, b) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(a+b)x}{x} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(bx) - \cos|a-b|x}{x} dx. \end{aligned}$$

Ambele integrale fiind integrale Cauchy–Frullani de tipul celei din Teorema 2.5.1, rezultă că

$$I_{10}(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{a}{a+b} + \frac{1}{2} \ln \frac{a}{|a-b|} = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2}{|a^2 - b^2|}.$$

k) Mai întâi, avem

$$I_{11}(a, b) = ab \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\sin(ax)}{ax} - \frac{\sin(bx)}{bx}}{x} dx.$$



Apoi, se vede că funcția  $f$  din Teorema 2.5.1 este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \in [0, +\infty) \\ 1, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

iar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 0$ . Prin urmare,  $I_{11}(a, b) = ab \ln ab$ .

l) Scriem întâi

$$I_{12}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx^n} - e^{-ax^n}}{x} x^{n-1} dx$$

și apoi efectuăm schimbarea de variabilă  $x^n = t$ . Obținem

$$I_{12}(a, b) = \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bt} - e^{-at}}{t} dt.$$

Folosim acum  $I_1(a, b)$ . Prin urmare,  $I_{12}(a, b) = \frac{1}{n} \ln \frac{a}{b}$ .

m) Se aplică metoda integrării prin părți și obținem

$$I_{13}(a, b) = 2a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2ax}}{x} dx + 2b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(a+b)x} - e^{-2bx}}{x} dx.$$

Ambele integrale sunt integrale Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.1. În acest mod valoarea integralei inițiale este

$$I_{13}(a, b) = \ln \frac{(2a)^{2a} (2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}.$$

n) Se integrează prin părți și se ajunge la

$$I_{14}(a, b) = b \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx - a(b-a) \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx.$$

Prima integrală este integrală Cauchy–Frullani, iar a doua este imediată. Se obține

$$I_{14}(a, b) = b \ln \frac{b}{a} + a - b.$$

o)  $I_{15}(a, b)$  este diferența a două integrale Dirichlet. Într-adevăr,

$$I_{15}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{bx} d(bx) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{ax} d(ax).$$

Fiecare integrală are valoarea  $\frac{\pi}{2}$ , deci  $I_{15}(a, b) = 0$ . Această integrală este totodată integrală Cauchy–Frullani care se încadrează în Teorema 2.5.2, funcția  $f$  fiind  $f(x) = \sin x$ . Pentru că valoarea în  $x = 0$  a funcției  $f$  este nulă rezultă că  $I_{15}(a, b) = 0$ . ■

## 2.6 Integralele lui Euler

### 2.6.1 Definițiile funcțiilor Beta și Gama

**Definiția 2.6.1** *Integrala depinzând de parametrii  $p$  și  $q$ ,*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (2.119)$$

*se numește integrala Euler de primul tip sau funcția Beta.*

**Definiția 2.6.2** *Integrala improprie depinzând de parametrul  $p$ ,*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (2.120)$$

*se numește integrala Euler de tipul al doilea sau funcția Gama.*

Funcțiile (2.119) și (2.120) joacă un rol important în diferite domenii ale matematicii și ale matematicii fizice. După cum se va arăta, funcția Beta se exprimă în funcție de funcția Gama și din acest motiv vom prezenta mai întâi proprietățile funcției Gama.

### 2.6.2 Proprietăți ale funcției Gama

**Teorema 2.6.1** *Integrala improprie (2.120) este convergentă pentru  $0 < p < +\infty$ , divergentă pentru  $p \leq 0$  și uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P]$ , unde  $0 < p_0 < P < +\infty$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $p - 1 < 0$ , integrandul din (2.120) are un punct singular în limita inferioară. Să despărțim intervalul de integrare în două subintervale, de exemplu  $[0, 1]$  și  $[1, +\infty)$ , prin intermediul punctului  $x = 1$ . Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (2.121)$$

Primul termen din membrul doi al egalității (2.121) este o integrală improprie de speța a doua dacă  $p - 1 < 0$ , cu punctul singular în limita inferioară. Scriind această integrală în forma  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} dx$  și aplicând criteriul de comparație în  $\alpha$ , formularea cu limită, deducem că integrala este convergentă dacă  $1 - p < 1$ , adică dacă  $p > 0$ , și divergentă dacă  $p \leq 0$ .

Cel de al doilea termen din membrul al doilea al egalității (2.121) este o integrală improprie de speța întâi convergentă pentru toate valorile reale ale lui  $p$ . Într-adevăr, pentru a arăta aceasta să remarcăm că egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{p-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = (p+1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

sunt satisfăcute pentru orice  $p \in \mathbb{R}$ .

În consecință, integrala improprie  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este convergentă pentru orice  $p > 0$  și divergentă pentru  $p \leq 0$ .

Să demonstrăm că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ . Ca și în cazul convergenței obișnuite a acestei integrale, scriem  $[0, +\infty) = [0, 1] \cup [1, +\infty)$  și studiem convergența uniformă în raport cu parametrul  $p$  a integralelor improprii

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{și} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Când  $p \geq p_0 > 0$  și  $x \in [0, 1]$ , funcția de integrat satisface inegalitatea  $x^{p-1} e^{-x} \leq x^{p_0-1}$ , iar integrala  $\int_0^1 x^{p_0-1} dx$  este convergentă dacă  $p_0 > 0$  și are valoarea  $1/p_0$ .

Conform criteriului lui Weierstrass de convergență a integralelor improprii depinzând de un parametru, rezultă că integrala  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $[p_0, +\infty)$ , unde  $p_0 > 0$ .

Evaluând integrala  $\int_0^\lambda x^{p-1} e^{-x} dx$  pentru  $p \rightarrow 0 + 0$  și  $\lambda = \text{const} > 0$  se observă că

$$\int_0^\lambda x^{p-1} e^{-x} dx \geq e^{-1} \int_0^\lambda x^{p-1} dx = \frac{\lambda^p}{pe} \rightarrow +\infty$$

și, în consecință, putem afirma că integrala  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  nu este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

Tot datorită criteriului lui Weierstrass rezultă că integrala improprie de speța întâi  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval de forma  $(-\infty, P_0]$ , unde  $P_0 < +\infty$ , deoarece

$$x^{p-1} e^{-x} \leq x^{P_0-1} e^{-x} \quad \text{pentru } 1 \leq x < +\infty, \quad -\infty < p \leq P_0$$

și integrala  $\int_1^{+\infty} x^{P_0-1} e^{-x} dx$  este convergentă.

Integrala improprie  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  nu converge uniform în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $(-\infty, +\infty)$ . Pentru a justifica această afirmație, evaluăm integrala  $\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  pentru  $\ell > 1$  arbitrar, dar fixat și pentru valori mari ale lui  $p$ , deci pentru  $p \rightarrow +\infty$ . Pentru orice număr întreg  $N > 0$  găsim valori ale lui  $p$  astfel încât  $p-1 > N$ , deoarece  $p \rightarrow +\infty$ . Prin urmare, pentru astfel de  $p$  se poate scrie

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx > \int_\ell^{+\infty} x^N e^{-x} dx = -e^{-x} x^N \Big|_{x=\ell}^{+\infty} + N \int_\ell^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} dx.$$

Aplicând repetat integrarea prin părți pentru calculul integralei improprii  $\int_\ell^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} dx$  în final se găsește

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx > (\ell^N + N\ell^{N-1} + N(N-1)\ell^{N-2} + \dots + N!)e^{-1} \rightarrow +\infty$$

când  $N \rightarrow +\infty$ . În consecință,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = +\infty, \quad (\forall) \ell > 0.$$

Astfel, integrala improprie  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval  $[p_0, +\infty)$  cu  $p_0 > 0$  arbitrar, dar fixat, iar integrala improprie  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă pe orice interval  $(-\infty, P_0]$ , unde  $P_0$  este un număr finit, arbitrar.

Așadar, ambele integrale sunt simultan uniform convergente în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ , ceea ce dovedește că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$ , ceea ce trebuia de demonstrat. ■

**Teorema 2.6.2** *Funcția  $\Gamma$  definită în (2.120) este o funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .*

**Demonstrație.** Funcția de integrat,  $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$ , este continuă pe mulțimea  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , iar conform Teoremei 2.6.1 integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ . Prin urmare, conform Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$  este funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$ . ■

**Teorema 2.6.3** *Funcția  $\Gamma$  definită în (2.120) este infinit diferențiabilă, derivata de ordin  $k$  exprimându-se prin integrala improprie depinzând de parametrul  $p$*

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.122)$$

**Demonstrație.** Derivarea formală în raport cu parametrul  $p$  în (2.120) conduce la egalitatea

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx. \quad (2.123)$$

Egalitatea (2.123) poate fi justificată arătând că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ , iar derivata parțială în raport cu variabila  $p$  a funcției de integrat  $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$  este o funcție continuă pe mulțimea  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Faptul că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$  se demonstrează aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx \quad \text{și} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx,$$

funcțiile  $g(x)$  din integralele  $\int_0^1 g(x)dx$  și  $\int_1^{+\infty} g(x)dx$  fiind date respectiv de

$$g(x) = x^{P_0-1}|\ln x| \quad \text{și} \quad g(x) = x^{P_0-1}|\ln x|e^{-x}.$$

Pentru obținerea derivatei secunde a funcției  $\Gamma(p)$  se aplică raționamentul de mai sus funcției  $\Gamma'(p)$  din (2.123). Din aproape în aproape se obține (2.122) și teorema este demonstrată. ■

Să stabilim acum o formulă de recurență pentru funcția  $\Gamma$ . Aplicând în (2.120) formula integrării prin părți, obținem

$$p\Gamma(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} - \lim_{x \rightarrow 0+0} x^p e^{-x} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Însă, aplicând o teoremă de tip Hospital, obținem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^p e^{-x} = 0,$$

deci

$$p\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx,$$

adică

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (2.124)$$

Aplicând în mod repetat această relație de recurență, obținem

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \cdots (p+1)p\Gamma(p). \quad (2.125)$$

Din (2.125) rezultă că este suficient să cunoaștem valorile funcției  $\Gamma$  pentru orice  $p$  pozitiv și subunitar pentru a obține valorile lui  $\Gamma$  pentru toate celelalte valori pozitive ale lui  $p$ . De exemplu

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(\frac{1}{2} + 2 - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 2 - 2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.126)$$

Pentru a finaliza relația (2.126) este necesar să știm valoarea lui  $\Gamma(p)$  pentru  $p = \frac{1}{2}$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx. \quad (2.127)$$

Punând în (2.127)  $x = t^2$  și ținând cont de integrala Poisson, obținem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \quad (2.128)$$

Din (2.126) și (2.128) rezultă  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ .

Luând, în (2.125),  $p = 1$  și ținând seama că

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (2.129)$$

rezultă

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (2.130)$$

Cu alte cuvinte, funcția  $\Gamma$  este, întrun anume sens, o generalizare a noțiunii de factorial; putem spune că prin intermediul funcției  $\Gamma$  noțiunea de factorial capătă sens pentru orice număr pozitiv.

Funcția  $\Gamma$  este de cea mai mare importanță în analiză. Ultima proprietate stabilită face să se întrevadă această importanță.

**Teorema 2.6.4** *Există o valoare  $p_0$  a lui  $p$ , în intervalul  $(1, 2)$ , astfel încât funcția  $\Gamma(p)$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, p_0)$  și strict crescătoare pe  $(p_0, +\infty)$ .*

**Demonstrație.** Din expresia (2.119) a funcției  $\Gamma(p)$  deducem că, pentru  $p > 0$ , valorile sale sunt pozitive. De asemenea, din (2.124) avem

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

pentru  $p > 0$  și deci  $\Gamma(p) \rightarrow +\infty$  pentru  $p \rightarrow 0+0$  deoarece  $\Gamma(p+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$  pentru  $p \rightarrow 0+0$ . Mai mult, se poate arăta că  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Gamma(p) = +\infty$ .

Observând că din relațiile (2.128) și (2.129) avem că  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  și folosind Teorema 2.6.1 și Teorema 2.6.2, constatăm că pe intervalul  $[1, 2]$  funcția  $\Gamma$  satisface ipotezele Teoremei lui Rolle. Conform acestei teoreme derivata  $\Gamma'(p)$  se anulează întrun punct  $p_0 \in (1, 2)$ . Deoarece  $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0$  pentru orice  $p > 0$  rezultă că derivata  $\Gamma'(p)$  este o funcție monoton crescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ . În consecință, derivata  $\Gamma'(p)$  nu are alte rădăcini, în afară de  $p_0$ , în intervalul  $(0, +\infty)$ . În plus,  $\Gamma'(p) < 0$  pentru  $p < p_0$  și  $\Gamma'(p) > 0$  pentru  $p > p_0$  deoarece  $\Gamma'(p)$  este o funcție monoton crescătoare. Deci, funcția  $\Gamma(p)$  are numai o valoare extremă pe intervalul  $0 < p < +\infty$ , și anume un minim în punctul  $p = p_0$ .

### 2.6.3 Proprietăți ale funcției Beta

**Teorema 2.6.5** *Integrala improprie de speța a doua (2.119) este convergentă pentru  $p > 0$  și  $q > 0$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $p \geq 1$  și  $q \geq 1$ , funcția de sub semnul integrală este continuă pe  $[0, 1]$ , deci integrala are sens chiar pe  $[0, 1]$  ceea ce arată că (2.119)

este o integrală definită sau proprie. Dacă cel puțin unul din numerele  $p$  și  $q$  este mai mic decât 1, integrala (2.119) este una improprie de speța a doua și pentru studiul naturii acesteia vom descompune intervalul de integrare prin intermediul punctului  $1/2$ .

Dacă  $p < 1$ , atunci din cele două integrale care rezultă după descompunerea intervalului  $[0, 1]$ , integrala

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$$

este improprie de speța a doua cu limita inferioară punct singular. Aplicând criteriul de comparație în  $\alpha$ , în varianta cu limită, constatăm că pentru  $1-p < 1$ , deci pentru  $p > 0$ , această integrală este convergentă.

Dacă  $q < 1$ , atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$$

este improprie de speța a doua cu limita superioară punct singular. Aplicând același criteriu de comparație, deducem că integrala este convergentă pentru  $1-q < 1$ , deci pentru  $q > 0$ .

Deci, pentru  $p > 0$ ,  $q > 0$ , integrala (2.119) este convergentă. Prin urmare, putem spune că funcția  $B(p, q)$  este definită în porțiunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive. ■

**Teorema 2.6.6** *Funcția Beta este simetrică în variabilele sale  $p$  și  $q$ , adică*

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (2.131)$$

**Demonstrație.** În integrala (2.119) efectuăm schimbarea de variabilă  $x = 1 - t$  și constatăm că are loc (2.131). ■

Să aplicăm integralei (2.119) teorema de schimbare de variabilă pentru integrale pe interval necompact, punând

$$x = \varphi(u) = \frac{u}{1+u}. \quad (2.132)$$

Funcția  $\varphi$  este derivabilă, cu derivată continuă pe  $(0, +\infty)$ , și aplică intervalul  $(0, +\infty)$  pe intervalul  $(0, 1)$ . Din faptul că derivata

$$\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$$



este pozitivă pe  $(0, +\infty)$ , rezultă că  $\varphi$  este funcție strict crescătoare pe  $(0, +\infty)$ , deci toate condițiile pentru aplicarea schimbării de variabilă definită de (2.132) sunt îndeplinite. Avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p-1}(1+u)^{q-1}(1+u)^2}du = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du,\end{aligned}$$

deci

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du. \quad (2.133)$$

Integrala din membrul doi al relației (2.133) o scriem în forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du, \quad (2.134)$$

iar în cea de a doua integrală din membrul doi al acestei egalități efectuăm schimbarea de variabilă  $u = \frac{1}{y}$ . Obținem

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \quad (2.135)$$

Din (2.133), (2.134) și (2.135) deducem o nouă expresie pentru valorile funcției Beta, și anume

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{u^{p-1} + u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

Această expresie arată că funcția Beta este de fapt o integrală improprie cu punctul singular doar în limita inferioară.

**Teorema 2.6.7** *Dacă  $q > 1$ , atunci funcția Beta satisface relația de recurență*

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1), \quad (2.136)$$

iar dacă  $p > 1$ , atunci

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1, q). \quad (2.137)$$

**Demonstrație.** Să presupunem întâi că  $q > 1$ . Scriind că  $x^{p-1} = \left(\frac{x^p}{p}\right)'$  și aplicând integralei (2.119) teorema de integrare prin părți pentru integrale improprii, obținem

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx. \quad (2.138)$$

Utilizând în (2.138) identitatea  $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ , deducem

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q),$$

de unde rezultă (2.136).

Ținând seama de (2.136) și presupunând că  $p > 1$ , în baza relației de simetrie (2.131), avem (2.137) și teorema este demonstrată. ■

Aplicând în mod succesiv formula (2.136) pentru diferite valori naturale ale lui  $q$ , obținem

$$B(a, n) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \cdots \frac{1}{p+1} \cdot B(p, 1).$$

Însă  $B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = 1/p$ , deci, ținând seama de (2.131), obținem

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}. \quad (2.139)$$

Luând în rolul lui  $p$  un număr natural  $m$ , din (2.139) rezultă, multiplicând numărătorul și numitorul cu  $(m-1)!$ ,

$$B(m, n) = B(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

## 2.6.4 Relație între funcțiile Beta și Gama

Să cercetăm acum dacă între funcțiile Beta și Gama există vreo relație. Pentru aceasta vom avea nevoie de o altă expresie a funcției  $\Gamma$  și în acest sens vom aplica integralei (2.120) teorema de schimbare de variabilă, punând  $x = \varphi(u) = \ln \frac{1}{u}$ . Această funcție aplică intervalul  $(0, 1)$  pe intervalul  $(+\infty, 0)$ .

De asemeni,  $\varphi$  este strict monotonă pe  $(0, 1)$ , derivabilă, cu derivată continuă pe  $(0, 1)$  și  $\varphi'(u) = -1/u$ . Avem

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx &= - \int_1^0 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} e^{-\frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \\ &= - \int_1^0 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du. \quad (2.140)$$

Pe de altă parte, funcția  $\ln \frac{1}{u}$  este limita unui șir de funcții reale  $(f_n)$ , cu termenul general funcția continuă  $f_n = n(1 - u^{\frac{1}{n}})$ , definită pe intervalul  $(0, +\infty)$ . Deci,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = \ln \frac{1}{u}. \quad (2.141)$$

Șirul de funcții  $(f_n)$  este strict crescător deoarece funcția reală de variabilă reală  $x$  definită pe intervalul  $(0, +\infty)$ , cu valorile date de  $\frac{1 - e^x}{x}$  este crescătoare, având derivata pozitivă. În plus, funcția  $\ln \frac{1}{u}$  este continuă și prin urmare, conform Teoremei 2.3.1, convergența șirului de funcții  $(f_n)$  este uniformă. Putem deci aplica teorema de trecere la limită sub semnul integrală și obținem, în baza relațiilor (2.140) și (2.141),

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p-1} \int_0^1 \left( 1 - u^{\frac{1}{n}} \right) du.$$

Făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă  $u = y^n$ , obținem

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{p-1} dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p B(n, p). \quad (2.142)$$

Ținând seama de relația (2.139), rezultă

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}. \quad (2.143)$$

Relațiile (2.142) și (2.143) stabilesc, între funcțiile  $B$  și  $\Gamma$ , o legătură mijlocită de o trecere la limită.

Să stabilim o legătură mai simplă între aceste două funcții. În acest scop, aplicăm integralei (2.120) schimbarea de variabilă  $x = ty$ , unde  $t \geq 0$ . Obținem

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-ty} dy. \quad (2.144)$$

Înlocuind în (2.144) pe  $p$  cu  $p + q$ , în care  $q > 0$ , și pe  $t$  cu  $1 + t$ , găsim

$$\frac{\Gamma(p + q)}{(1 + t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (2.145)$$

Înmulțind ambii membri ai acestei egalități cu  $t^{p-1}$  și integrând, în raport cu  $t$ , pe intervalul  $(0, +\infty)$ , obținem

$$\begin{aligned} \Gamma(p + q) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1 + t)^{p+q}} dt = \\ = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Însă, în baza relației (2.133), integrala din primul membru al egalității (2.146) este egală cu  $B(p, q)$ , astfel că putem scrie

$$\Gamma(p + q) \cdot B(p, q) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (2.147)$$

Să demonstrăm acum că este permisă schimbarea ordinii de integrare în integrala din membrul al doilea al relației (2.147) pentru  $p > 1$  și  $q > 1$ . Pentru aceasta trebuie să arătăm că cele cinci ipoteze ale Teoremei 2.3.8 asupra schimbării ordinii de integrare într-o integrală iterată sunt îndeplinite. Întrădevăr:

(a) funcția

$$f(y, t) = y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$$

este continuă pentru  $0 \leq y < +\infty$ ,  $0 \leq t < +\infty$ ;

(b) dacă  $p > 1$  și  $q > 1$  integrala din membrul doi al relației (2.146) este convergentă;

(c) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dy = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy$$

este o funcție continuă de variabila  $t$  pe intervalul  $(0, +\infty)$  deoarece, în baza relației (2.145), avem

$$\int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(p+q) \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}},$$

iar  $\Gamma$ , după Teorema 2.6.1, este funcție continuă;

(d) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dt \quad (2.148)$$

este de asemenea o funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$  deoarece din (2.148) avem mai întâi

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt,$$

iar apoi, după schimbarea de variabilă  $u = ty$ ,

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = y^{q-1} e^{-y} \cdot \Gamma(p), \quad (2.149)$$

membrul doi al acestei relații fiind o funcție continuă de  $y$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ ;

(e) integrala improprie de prima speță

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y, t) dt$$

este convergentă deoarece, conform egalității (2.149) și definiției (2.120) a funcției  $\Gamma(q)$ , avem

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y, t) dt = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q), \quad (2.150)$$

iar membrul al doilea este număr real. În consecință, integrala iterată

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(y, t) dy = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy \quad (2.151)$$

este convergentă și egală cu integrala din primul membru al egalității (2.152). Așadar, din (2.147), (2.152) și (2.151) deducem că pentru  $p > 1$  și  $q > 1$  are loc identitatea

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (2.152)$$

numită *formula lui Jacobi* ce dă legătura între funcțiile  $B$  și  $\Gamma$  ale lui Euler.

Pentru a extinde relația (2.150) la toți  $p > 0$  și  $q > 0$  scriem din nou această relație pentru  $p > 1$  și  $q > 1$  și aplicăm apoi formulele de recurență (2.136) și (2.137) membrului său stâng și formula de recurență (2.124) membrului drept.

Dacă în relația (2.133) considerăm că  $q = 1 - p$ , atunci ea devine

$$B(p, 1 - p) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{1+u} du, \quad (2.153)$$

unde  $0 < p < 1$ . În Exemplul 2.4.3 (vezi relația (2.101)) am arătat că integrala din (2.153) are valoarea  $\frac{p}{\sin p\pi}$ , prin urmare avem

$$B(p, 1 - p) = \frac{p}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \quad (2.154)$$

Relația de recurență (2.152), împreună cu (2.129) și (2.152) conduc la relația importantă

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1 - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \quad (2.155)$$

**Exercițiul 2.6.1** Folosind funcțiile lui Euler, să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

**Soluție.** Se observă că  $I = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$ , iar dacă folosim relația (2.152), obținem

$$I = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}. \quad (2.156)$$

Conform relației de recurență (2.124), avem:

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Dacă introducem aceste valori în (2.156) și folosim (2.155), găsim

$$I = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

■

**Exercițiul 2.6.2** Să se calculeze integrala  $J = \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{5}{2}} x \cdot \cos^{\frac{3}{2}} x dx$ .

**Soluție.** Cu substituția  $\sin^2 x = z$  suntem conduși la relația  $J = 2B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$  și procedând ca la calculul integralei precedente, găsim  $J = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$ . ■

**Exercițiul 2.6.3** Să se studieze integrala  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx$ , unde  $p > 0$  și  $q > 0$ .

**Soluție.** Efectuând schimbarea de variabilă  $\sin^2 x = z$ , obținem

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1} (1-z)^{\frac{q}{2}-1} dz \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \end{aligned}$$

În particular, pentru  $q = 1$ , obținem formula

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

■

# Capitolul 3

## Integrale curbilinii

### 3.1 Drum, drum rectificabil, curbă

Fie  $xOy$  un reper cartezian în plan,  $\mathbf{i}$  și  $\mathbf{j}$  versorii acestuia și cercul de ecuație

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (3.1)$$

Un punct  $M(x, y)$  aparținând acestui cerc poate fi considerat ca imaginea unui punct  $t$  prin funcția vectorială de argument real

$$\mathbf{r}(t) = \varphi(t) \mathbf{i} + \psi(t) \mathbf{j} \quad (3.2)$$

definită pe intervalul compact  $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$  cu valori în  $\mathbb{R}^2$ , unde

$$\begin{cases} \varphi(t) = \cos t, \\ \psi(t) = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.3)$$

În această situație spunem că aplicația vectorială  $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ale cărei valori se determină după legea (3.2), unde funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt date în (3.3), realizează o *reprezentare parametrică* a cercului (3.1), iar argumentul  $t$  se numește *parametrul* acestei reprezentări.

Acest exemplu simplu sugerează introducerea de reprezentări parametrice și pentru alte mulțimi de puncte din plan.

**Definiția 3.1.1** *Fie un interval compact  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Se numește **drum în plan** o funcție vectorială de variabilă reală, continuă,  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .*



Punctele  $A$  și  $B$  de vectori de poziție  $\mathbf{r}(a)$  și  $\mathbf{r}(b)$  se numesc **capetele** sau **extremitățile drumului**. **Imaginea drumului**  $(d)$  este submulțimea  $I(d) \subset \mathbb{R}^2$  a tuturor punctelor  $M(x, y)$  ale căror vectori de poziție sunt valori ale funcției  $\mathbf{r}$ , adică

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b].$$

Dacă notăm cu  $\mathbf{r}$  vectorul de poziție al unui punct  $M(x, y) \in I(d)$ , atunci

$$(d) : \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.4)$$

unde:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}. \quad (3.5)$$

Din ecuația (3.4) și notațiile (3.5), obținem

$$(d) : \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]. \quad (3.6)$$

**Definiția 3.1.2** Când  $t$  parcurge intervalul  $[a, b]$  se spune că (3.6) constituie o **reprezentare parametrică** a imaginii drumului  $I(d)$  și a drumului  $(d)$ , iar  $t$  se numește **parametru**. Relația (3.4) se numește **ecuația vectorială** a imaginii  $I(d)$  sau a drumului  $(d)$ .

**Definiția 3.1.3** Drumul  $(d)$  se numește **închis** dacă extremitățile sale coincid; dacă există  $t_1, t_2 \in [a, b]$ , cu  $t_1 \neq t_2$ , astfel încât  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$ , spunem că punctul  $M_1 \in I(d)$  (sau  $M_2 \in I(d)$ ) de vector de poziție

$$\overrightarrow{OM_1} = \mathbf{r}(t_1) \quad (\text{sau} \quad \overrightarrow{OM_2} = \mathbf{r}(t_2))$$

este **punct multiplu** al drumului. Un drum fără puncte multiple se numește **simplu**.

**Definiția 3.1.4** Drumul  $(d)$  se numește **neted** dacă

$$\varphi, \psi \in C^1([a, b]), \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}(t)\right)^2 > 0, \quad t \in [a, b].$$

Deoarece membrul întâi a inegalității din Definiția 3.1.4 este pătratul mărimii (normei) vectorului  $\mathbf{r}'(t)$ , definiția poate fi reformulată în limbaj vectorial.

**Definiția 3.1.5** Drumul  $(d)$  se numește **neted** dacă funcția vectorială  $\mathbf{r} \in C^1([a, b])$  și peste tot în compactul  $[a, b]$  este satisfăcută inegalitatea

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0.$$

**Definiția 3.1.6** Drumurile  $(d_1)$  și  $(d_2)$  definite de funcțiile vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se numesc **juxtapozabile** dacă  $b_1 = a_2$  și  $\mathbf{r}_1(b_1) = \mathbf{r}_2(a_2)$ . În acest caz funcția

$$\mathbf{r} : [a_1, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{dacă } t \in [a_1, b_1], \\ \mathbf{r}_2(t), & \text{dacă } t \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

definește un nou drum numit **juxtapunerea** drumurilor  $(d_1)$  și  $(d_2)$  și este notat prin  $(d_1 \cup d_2)$ .

**Definiția 3.1.7** Un drum  $(d)$  se numește **neted pe porțiuni** dacă se poate obține prin juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Fie  $(d)$  drumul parametrizat în plan definit de (3.4) și  $\Delta \subset [a, b]$  mulțimea de puncte

$$\Delta = \{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}. \quad (3.7)$$

**Definiția 3.1.8** Mulțimea  $\Delta$  se numește **diviziune a intervalului**  $[a, b]$  dacă

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Totalitatea diviziunilor intervalului  $[a, b]$  va fi notată cu  $\mathcal{D}([a, b])$ .

**Definiția 3.1.9** Norma diviziunii  $\Delta$  este numărul pozitiv

$$\nu(\Delta) = \|\Delta\| = \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}\}.$$

**Definiția 3.1.10** Punctele

$$\begin{aligned} A(\varphi(a), \psi(a)) &= A_0(\varphi(a), \psi(a)), \quad A_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)), \dots, \\ A_{n-1}(\varphi(t_{n-1}), \psi(t_{n-1})), \quad B(\varphi(b), \psi(b)) &= A_n(\varphi(b), \psi(b)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

se spune că determină **linia poligonală cu vârfurile** în imaginea drumului.

**Definiția 3.1.11** Prin lungimea drumului  $\Delta$  se înțelege numărul nenegativ  $\ell_\Delta$  dat de

$$\begin{aligned}\ell_\Delta &= \sum_{i=0}^{n-1} \|A_i \overrightarrow{A_{i+1}}\| = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

**Definiția 3.1.12** Fie  $\Delta$  și  $\Delta'$  două diviziuni ale intervalului  $[a, b]$ . Spunem că diviziunea  $\Delta'$  este **mai fină** decât diviziunea  $\Delta$ , și scriem aceasta  $\Delta \subset \Delta'$ , dacă elementele mulțimii  $\Delta$  din (3.7) sunt și elemente ale mulțimii  $\Delta'$ .

**Observația 3.1.1** Dacă diviziunea  $\Delta'$  este mai fină decât diviziunea  $\Delta$ , atunci între normele acestora are loc inegalitatea  $\|\Delta'\| \leq \|\Delta\|$ .

Fie  $\mathcal{L} = \{\ell_\Delta : \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\} \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**Definiția 3.1.13** Drumul  $(d)$  se numește **rectificabil** dacă mulțimea  $\mathcal{L}$  este mărginită superior. Marginea superioară a mulțimii  $\mathcal{L}$ , dacă există, se numește **lungimea** drumului  $(d)$  și se notează cu  $\ell(d)$ . Deci,

$$\ell(d) = \sup \mathcal{L}.$$

**Teorema 3.1.1** Fie  $(d)$  un drum neted din  $\mathbb{R}^2$  a cărui imagine  $I(d)$  are reprezentarea parametrică (3.6). Atunci,  $(d)$  este rectificabil și

$$\begin{aligned}\ell(d) &= \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \\ &= \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.\end{aligned}\tag{3.10}$$

**Demonstrație.** Fie  $\Delta$  diviziunea (3.7) și linia poligonală corespunzătoare (3.8) cu lungimea sa dată de (3.9). Deoarece  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile, aplicând teorema creșterilor finite a lui Lagrange, există

$$\alpha_i, \beta_i \in (t_i, t_{i+1}), \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

astfel încât

$$\ell_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\beta_i))^2} (t_{i+1} - t_i).\tag{3.11}$$

În membrul al doilea al egalității (3.11) adunăm și scădem termenul

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2} (t_{i+1} - t_i).$$

În felul acesta (3.11) devine

$$\begin{aligned} \ell_\Delta = & \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2} (t_{i+1} - t_i) + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\beta_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2} \right) (t_{i+1} - t_i). \end{aligned} \quad (3.12)$$

A doua sumă din membrul doi al egalității (3.12) poate fi făcută oricât de mică pentru  $\Delta$  suficient de fină. Într-adevăr, funcția

$$h : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \sqrt{(\varphi'(x))^2 + (\psi'(y))^2}, \quad (3.13)$$

fiind continuă pe mulțimea compactă  $[a, b] \times [a, b]$ , este uniform continuă și deci  $(\forall) \varepsilon > 0$ ,  $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi punctele  $(x_1, y_1)$  și  $(x_2, y_2)$  din intervalul bidimensional  $[a, b] \times [a, b]$  cu

$$|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon), \quad |y_1 - y_2| < \delta(\varepsilon) \quad (3.14)$$

are loc inegalitatea

$$|h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (3.15)$$

Considerând că  $(x_1, y_1) = (\alpha_i, \beta_i)$  și  $(x_2, y_2) = (\tau_i, \tau_i)$  și alegând diviziunea  $\Delta$  astfel încât

$$\|\Delta\| < \delta(\varepsilon), \quad (3.16)$$

din (3.14) și (3.15) rezultă

$$-\frac{\varepsilon}{b - a} < h(\alpha_i, \beta_i) - h(\tau_i, \tau_i) < \frac{\varepsilon}{b - a}. \quad (3.17)$$

Prin sumarea după  $i$  de la 0 până la  $n - 1$  în extremitatea dreaptă a inegalităților (3.17), obținem

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt{(\varphi'(\alpha_i))^2 + (\psi'(\beta_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\tau_i))^2 + (\psi'(\tau_i))^2} \right) (t_{i+1} - t_i) < \varepsilon. \quad (3.18)$$

Prima sumă din (3.12) este o sumă Riemann corespunzătoare funcției integrabile (3.13), diviziunii  $\Delta$  cu proprietatea (3.16) și punctelor intermediare

$$\tau_i \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Fie subșirul de numere naturale  $(k_n)_{n \geq 0}$  și

$$\Delta_n = \{t_0^n = a, t_1^n, \dots, t_{k_n-1}^n, t_{k_n}^n = b\}$$

un șir de diviziuni cu proprietatea că șirul normelor este convergent la zero, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta_n\| = 0. \quad (3.19)$$

Făcând în (3.12) pe  $n \rightarrow \infty$ , al doilea termen din membrul doi tinde la zero în baza lui (3.18) și (3.19), iar primul termen are ca limită integrala Riemann

$$\int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt. \quad (3.20)$$

Din acest rezultat deducem că șirul  $(\ell_{\Delta_n})$ , corespunzător șirului de diviziuni  $(\Delta_n)$ , are limită finită și aceasta este integrala din (3.20), deci drumul  $(d)$  este rectificabil și are loc (3.10). ■

**Definiția 3.1.14** *Drumurile  $(d_1)$  și  $(d_2)$  definite de funcțiile vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  se numesc echivalente dacă există o funcție  $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  continuă, strict crescătoare și surjectivă, astfel încât*

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(\alpha(t)), \quad (\forall) t \in [a_1, b_1]. \quad (3.21)$$

**Observația 3.1.2** *Dacă drumul  $(d_1)$  este echivalent cu drumul  $(d_2)$ , atunci  $(d_2)$  este echivalent cu  $(d_1)$ , aplicația din Definiția 3.1.14 fiind funcția inversă  $\alpha^{-1}$ .*

**Observația 3.1.3** *Dacă  $(d_1)$  este echivalent cu  $(d_2)$ , atunci  $I(d_1) = I(d_2)$ , adică imaginea drumului este invariantă la relația de echivalență a drumurilor în plan. De asemenea, noțiunile de drum simplu și de drum închis sunt invariante la această relație.*

Propoziția de mai jos va demonstra că noțiunea de drum rectificabil și lungimea unui drum sunt invariante la relația de echivalență în mulțimea drumurilor în plan.

**Propoziția 3.1.1** *Dacă drumurile în plan  $(d_1)$  și  $(d_2)$  definite de funcțiile vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{r}_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  și  $\mathbf{r}_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sunt echivalente, iar  $(d_1)$  este rectificabil, atunci  $(d_2)$  este rectificabil și  $\ell(d_1) = \ell(d_2)$ .*

**Demonstrație.** Să considerăm că cele două funcții care definesc respectiv cele două drumuri sunt:

$$\mathbf{r}_1(t) = \varphi_1(t)\mathbf{i} + \psi_1(t)\mathbf{j}, \quad t \in [a_1, b_1];$$

$$\mathbf{r}_2(\tau) = \varphi_2(\tau)\mathbf{i} + \psi_2(\tau)\mathbf{j}, \quad \tau \in [a_2, b_2].$$

Fie  $\alpha : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  funcția continuă, strict crescătoare și surjectivă cu proprietatea (3.21). Dacă  $\Delta' \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$ ,

$$\Delta' = \{a_2 = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n = b_2\}, \quad \tau_i < \tau_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.22)$$

atunci există o diviziune  $\Delta \in \mathcal{D}([a_1, b_1])$ ,

$$\Delta = \{a_2 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b_2\}, \quad t_i < t_{i+1}, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (3.23)$$

astfel încât

$$\alpha(t_i) = \tau_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Reciproc, dacă  $\Delta \in \mathcal{D}([a_1, b_1])$  de forma (3.23), atunci imaginile prin funcția  $\alpha$  ale punctelor lui  $\Delta \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$  de forma (3.22). Ținând cont de (3.21) și de cele deduse mai sus, avem

$$\begin{aligned} \ell_\Delta &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(\varphi_1(t_{i+1}) - \varphi_1(t_i))^2 + (\psi_1(t_{i+1}) - \psi_1(t_i))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{(\varphi_2(\tau_{i+1}) - \varphi_2(\tau_i))^2 + (\psi_2(\tau_{i+1}) - \psi_2(\tau_i))^2} = \ell_{\Delta'}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Din (3.24) rezultă că

$$\{\ell_\Delta \mid \Delta \in \mathcal{D}([a_1, b_1])\} = \{\ell_{\Delta'} \mid \Delta' \in \mathcal{D}([a_2, b_2])\}. \quad (3.25)$$

Prin ipoteză ( $d_1$ ) este drum rectificabil ceea ce înseamnă că mulțimea din membrul stâng al egalității (3.25) este mărginită superior. Va rezulta că și mulțimea din membrul al doilea al egalității (3.25) este mărginită superior, adică ( $d_2$ ) este rectificabilă. În plus, marginile lor superioare lor coincid, deci  $\ell(d_1) = \ell(d_2)$ . ■

**Observația 3.1.4** *Relația de echivalență în mulțimea drumurilor din plan este reflexivă, simetrică și tranzitivă. Rezultă că această relație împarte mulțimea drumurilor în clase de echivalență. Vom spune că două drumuri aparțin aceleiași clase dacă și numai dacă sunt echivalente.*

**Definiția 3.1.15** *Se numește curbă plană o clasă de drumuri în plan echivalente.*

**Observația 3.1.5** *Deoarece următoarele noțiuni: drum simplu; drum închis; imaginea unui drum; drum neted; drum neted pe porțiuni; drum rectificabil și lungimea unui drum sunt invariante la relația de echivalență, pentru curbele în plan vom introduce corespunzător noțiunile: curbă simplă sau arc simplu de curbă; curbă închisă; imaginea unei curbe; curbă netedă sau curbă regulată; curbă netedă pe porțiuni; curbă rectificabilă și lungimea unei curbe sau lungimea unui arc de curbă rectificabilă.*

De exemplu,

**Definiția 3.1.16** *Se numește imaginea curbei imaginea unui drum din clasa de echivalență care definește curba respectivă.*

Definiția dată este corectă deoarece toate drumurile dintr-o clasă au aceeași imagine. În cele ce urmează o curbă se va nota fie prin  $C$  fie specificându-i extremitățile imaginii sale în cazul când nu este închisă, adică  $(AB)$ .

**Definiția 3.1.17** *Prin ecuația vectorială a unei curbe în plan și ecuații parametrice ale unei curbe în plan înțelegem ecuația vectorială respectiv ecuații parametrice ale oricărui drum din clasa de echivalență care definește curba.*

**Definiția 3.1.18** Curbele  $C_1$  și  $C_2$  se numesc **juxtapozabile**, dacă există drumurile  $(d_1) \in C_1$  și  $(d_2) \in C_2$  cu  $(d_1)$  și  $(d_2)$  juxtapozabile. În acest caz, clasa de echivalență a drumului  $(d_1 \cup d_2)$  se numește **juxtapusa** curbelor  $C_1$  și  $C_2$  și se notează cu  $(C_1 \cup C_2)$ . Curba  $C$  se numește **netedă pe porțiuni** dacă este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede.

În cele ce urmează, identificând drumurile echivalente între ele, vom folosi termenul de *imaginea curbei* în aceeași accepțiune ca termenul *imaginea drumului*. Noțiunea de *drum* sau cea de *curbă* va fi desemnată de cel mai multe ori printr-o reprezentare parametrică. În loc de *imaginea curbei* vom spune tot *curbă* dacă acest lucru nu creează confuzii.

**Observația 3.1.6** Toate considerațiile de mai sus se transpun fără dificultate pentru **curbe în spațiul tridimensional sau curbe în spațiu** cu modificările impuse de apariția celei de a treia coordonate. Spre exemplu, dacă

$$(d) : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

este reprezentarea parametrică a drumului neted  $(d)$  în spațiu, lungimea sa va fi

$$\ell(d) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt,$$

unde  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  este ecuația vectorială a drumului,  $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$ , iar  $\mathbf{k}$  este cel de al treilea versor al reperului cartezian  $Oxyz$  din  $\mathbb{R}^3$ .

**Observația 3.1.7** O curbă admite o infinitate de reprezentări parametrice.

În continuare vom pune în evidență o parametrizare importantă a curbelor rectificabile și anume *parametrizarea naturală*.

În acest sens fie  $t \in [a, b]$  oarecare căruia îi corespunde punctul  $M$  pe imaginea curbei netede sau netede pe porțiuni  $C$  din spațiu. Presupunem că extremitățile  $A$  și  $B$  sunt corespunzătoare respectiv valorilor  $t = a$  și  $t = b$  și fie  $\mathbf{r}(\tau)$  vectorul de poziție al unui punct curent  $P$  de pe imaginea curbei astfel încât  $P$  să se găsească între  $A$  și  $M$ . Aceasta înseamnă că  $\tau \in [a, t]$ . Putem vorbi de lungimea arcului de curbă  $(AM)$  pe care o notăm cu  $s$  și care este o



funcție  $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$ , unde  $L$  este lungimea curbei considerate. Valorile funcției  $s = s(t)$  sunt date de

$$s(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^2 + (\chi'(\tau))^2} d\tau \quad (3.26)$$

și  $s'(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$ , de unde deducem că funcția  $s$  este diferențiabilă, iar diferențiala sa, numită și *element de arc al curbei*, este

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt. \quad (3.27)$$

Se observă de asemeni că

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \|d\mathbf{r}\|. \quad (3.28)$$

Deoarece  $s'(t) > 0$ , rezultă că funcția  $s = s(t)$  este strict crescătoare. Fiind injectivă, funcția  $s = s(t)$  este inversabilă.

Să notăm  $\beta = \beta(s)$  inversa funcției  $s$ .

Atunci, funcția

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\beta(s)) \quad (3.29)$$

caracterizează un drum din aceeași clasă care definește curba. Astfel, am introdus o nouă parametrizare a curbei care se numește *parametrizarea naturală*.

Dacă  $\mathbf{r}(\beta(s)) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$ , atunci *ecuațiile parametrice naturale* ale unei curbe în spațiu  $C$ , rectificabilă și de lungime  $L$ , sunt

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s), \end{cases} \quad s \in [0, L]. \quad (3.30)$$

Dacă arcul de curbă rectificabil  $C$  este în planul  $xOy$ , atunci are ecuațiile parametrice naturale

$$C : \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \end{cases} \quad s \in [0, L], \quad (3.31)$$

iar elementul de arc al său este dat de

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \|d\mathbf{r}\|. \quad (3.32)$$

Din expresiile (3.27), (3.28) și (3.32) rezultă  $\left\|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right\| = 1$ , ceea ce arată că vectorul

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s) \quad \text{sau} \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (3.33)$$

al cărui reprezentant în punctul  $P$  al curbei are direcția și sensul tangentei în  $P$  la curbă, este un versor care se numește *versorul tangentei* la curbă în punctul  $P$  al curbei corespunzător valorii  $s$  a parametrului natural.

**Exemplul 3.1.1** *Să se determine elementul de arc și lungimea curbei plane*

$$C : \begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}, \\ y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$$

**Soluție.** După un calcul simplu găsim  $\varphi'(t) = \frac{1}{\sin t}$  și  $\psi'(t) = \frac{1}{\cos t}$ . Atunci, elementul de arc este

$$ds = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}} dt = \frac{dt}{\sin t \cos t} = \frac{2dt}{\sin 2t}.$$

Lungimea  $L$  a curbei  $C$  este

$$L = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{2dt}{\sin 2t} = \ln \operatorname{tg} t \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln 3.$$

■

## 3.2 Definiția integralei curbilinii de primul tip

Fie  $(AB)$  o curbă plană netedă sau netedă pe porțiuni și  $f(M)$  o funcție definită pe un domeniu  $D$  din planul  $xOy$  care include imaginea curbei.

Considerăm o partiție  $\Delta$  a curbei în subarcele (părțile)  $(A_{i-1}A_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , prin intermediul punctelor de diviziune

$$A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$$

și alegem un punct arbitrar  $M_i$  pe fiecare din arcele  $(A_{i-1}A_i)$ . Cu aceste date formăm suma

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta s_i, \quad (3.34)$$

unde  $\Delta s_i$  este lungimea arcului  $(A_{i-1}A_i)$ , numită *sumă integrală* a funcției  $f$  corespunzătoare diviziunii  $\Delta$  și alegerii  $M_i \in (A_{i-1}A_i)$  a *punctelor intermediare*.

**Definiția 3.2.1** *Funcția  $f$  se numește integrabilă în raport cu arcul pe curba  $(AB)$  dacă sumele integrale (3.34) admit limita finită  $I$  când cel mai mare dintre  $\Delta s_i$  tinde la zero și această limită nu depinde de alegerea punctelor intermediare  $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ .*

**Definiția 3.2.2** *Dacă funcția  $f$  este integrabilă în raport cu arcul pe curba  $(AB)$ , limita  $I$  a sumelor integrale (3.34) când cel mai mare dintre  $\Delta s_i$  tinde la zero se numește **integrala curbilinie de primul tip** a funcției  $f(M)$  pe curba  $(AB)$  și se notează cu simbolul*

$$I = \int_{(AB)} f(M) ds. \quad (3.35)$$

Punctele curbei  $(AB)$  fiind determinate de coordonatele  $(x, y)$  în reperul cartezian  $Oxy$ , valoarea  $f(M)$  a funcției  $f$  în punctul  $M \in (AB)$  se poate nota prin  $f(x, y)$ , astfel că integrala curbilinie de prima speță (3.35) se poate scrie în forma echivalentă

$$I = \int_{(AB)} f(x, y) ds.$$

Variabilele  $x$  și  $y$  nu sunt independente; punctul  $M(x, y)$  aparținând curbei  $(AB)$ , coordonatele sale  $x$  și  $y$  trebuie să satisfacă ecuația curbei.

Putem arăta că integrala curbilinie de primul tip sau *integrala curbilinie de prima speță* nu diferă în mod esențial de cea a integralei definite dintr-o funcție de o variabilă independentă și, mai mult, vom arăta că o integrală curbilinie de primul tip se reduce la o integrală definită. În acest sens să considerăm parametrizarea naturală a curbei  $(AB)$  cu originea de arc în  $A$  și având lungimea  $L$ . Această parametrizare naturală este dată de (3.31). Restricția funcției arbitrare  $f(x, y)$  în punctele arcului  $(AB)$  este o funcție compusă de o singură variabilă, și anume

$$f(x(s), y(s)), \quad s \in [0, L].$$

Fie  $s_i^*$  valoarea parametrului  $s$  corespunzătoare punctului  $M_i$ , adică  $s_i^*$  este lungimea arcului  $(AM_i)$ . Suma integrală (3.34) se poate scrie acum în forma

$$\sum_{i=1}^n f(x(s_i^*), y(s_i^*)) \Delta s_i, \quad (3.36)$$

unde  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ , valoarea lui  $s_0$  fiind zero deoarece considerăm că punctul  $A$  este originea de arc pe curbă. Constatăm că (3.36) este o sumă integrală corespunzătoare integralei definite  $\int_0^L f(x(s), y(s)) ds$ . Sumele integrale (3.34) și (3.36) fiind egale, integralele definite legate de acestea sunt egale, prin urmare

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_0^L f(x(s), y(s)) ds \quad (3.37)$$

ambele integrale existând sau neexistând simultan. În consecință, dacă funcția  $f(M)$  este continuă sau continuă pe porțiuni și mărginită de-a lungul curbei netede sau netedă pe porțiuni  $(AB)$ , integrala curbilinie de primul tip (3.35) există deoarece integrala definită (Riemann) din membrul doi al relației (3.37) există.

**Observația 3.2.1** *Deși integrala curbilinie de prima speță se reduce direct la o integrală definită există o distincție netă între cele două noțiuni. Conținutul acestei distincții constă în aceea că lungimile  $\Delta s_i$  ale arcelor  $(A_{i-1}A_i)$  sunt pozitive indiferent care din extremitățile  $A$  sau  $B$  a fost aleasă ca origine. Deci, orientarea curbei  $(AB)$ , adică alegerea unui anumit sens de parcurs pe curbă începând de la origine către cealaltă extremitate, nu afectează valoarea integralei (3.35) și, în consecință, avem*

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_{(BA)} f(M) ds.$$

*După cum se știe, integrala definită pe compactul  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  dintr-o funcție de variabila  $x \in [a, b]$  schimbă de semn când limitele de integrare se schimbă între ele.*

Când reducem o integrală curbilinie de primul tip la o integrală definită corespunzătoare putem folosi la fel de bine orice parametru al curbei în locul lungimii de arc  $s$ . Presupunem așadar că o curbă netedă  $(AB)$  este dată prin ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \quad (3.38)$$

unde funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt astfel încât  $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$  și  $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ . În aceste condiții, putem introduce ca parametru pe curbă lungimea de arc  $s$  măsurată de la punctul  $A$  al curbei corespunzător lui  $t = a$  și astfel arcul  $s$  crește odată cu parametrul  $t$ , aceasta însemnând că  $s$  este o funcție strict crescătoare de  $t \in [a, b]$ .

Pornind de la *formula de calcul* (3.37), efectuând în integrala definită din membrul al doilea al acestei formule schimbarea de variabilă

$$t \mapsto s = s(t), \quad t \in [a, b], \quad s(t) \in [0, L] \quad (3.39)$$

și având în vedere notațiile  $x(s(t)) = \varphi(t)$ ,  $y(s(t)) = \psi(t)$ , obținem

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} f(M) ds &= \int_0^L f(x(s), y(s)) ds = \\ &= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

În acest mod am demonstrat

**Teorema 3.2.1** *Dacă  $(AB)$  este o curba netedă din domeniul  $D \subset \mathbb{R}^2$ , de ecuații parametrice (3.38), și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție reală de două variabile reale continuă în punctele  $M(x, y)$  ale curbei, atunci are loc egalitatea*

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (3.40)$$

ori de câte ori integralele care intră în ea există; integrala curbilinie din membrul stâng există dacă și numai dacă integrala definită din membrul al doilea există.

Când curba  $(AB)$  este reprezentată prin ecuația carteziană explicită

$$y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$$

se poate lua ca parametru pe curbă abscisa  $x$  și formula (3.40) devine

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (3.41)$$

Un *reper polar* în plan este ansamblul format de un punct  $O$ , numit *pol*, și o semidreaptă cu originea în pol, de direcție definită de versorul  $\mathbf{i}$ , numită

*axă polară.* Raza vectoare a unui punct  $M$  din plan este vectorul cu originea în pol și extremitatea în  $M$ , iar *unghiul polar* al punctului  $M$  este unghiul dintre versorul  $\mathbf{i}$  și raza vectoare a acelui punct. Perechile  $(r, \theta)$  se numesc *coordonate polare* în plan. Dacă polul reperului polar coincide cu originea reperului cartezian  $Oxy$ , iar axa sa polară este axa absciselor, legătura dintre coordonatele carteziene și cele polare ale unui punct este

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad r \in [0, +\infty), \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Să presupunem că arcul de curbă  $(AB)$  este reprezentat în coordonate polare prin ecuația polară explicită

$$r = r(\theta), \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad (3.42)$$

unde  $r$  este mărimea razei vectoare iar  $\theta$  este unghiul polar măsurat în radiani și cuprins între 0 și  $2\pi$ . În ipoteza că cele două repere sunt legate precum am menționat, putem scrie o reprezentare parametrică a arcului de curbă  $(AB)$  în care parametrul pe curbă să fie unghiul polar

$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta, \\ y = r(\theta) \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]. \quad (3.43)$$

Pentru calculul integralei curbilinii de primul tip în plan când curba  $(AB)$  este dată de (3.43) vom folosi (3.40) în care în locul lui  $t$  avem acum  $\theta$ , iar funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt cele din membrii doi ai relațiilor (3.43). Calculând radicalul care apare în egalitatea (3.40) se găsește

$$\sqrt{(\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2} = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}.$$

Rezultă că în cazul când arcul de curbă plană netedă  $(AB)$  este reprezentat în coordonate polare, formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip este

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta. \quad (3.44)$$

Integrala definită a unei funcții nenegative  $f$  pe compactul  $[a, b]$  are ca interpretare geometrică aria trapezului curbiliniu limitat de dreptele  $x = a$ ,  $x = b$ , axa  $Ox$  și graficul arcului de curbă  $(AB)$  de ecuație  $y = f(x)$ .

**Observația 3.2.2** *Plecând de la interpretarea geometrică dată integralei definite, putem afirma că integrala curbilinie de primul tip a unei funcții pozitive  $f(x, y)$  pe arcul  $(AB)$  este aria porțiunii din suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  și curba directoare arcul  $(AB)$ , porțiune limitată de arcul  $(AB)$  și de mulțimea de puncte de coordonate  $(x, y, f(x, y))$ , unde  $M(x, y) \in (AB)$ .*

**Observația 3.2.3** *Definiția și formula de calcul a integralei curbilinie de primul tip pe o curbă plană se transpun direct la cazul când funcția  $f(M)$  este definită în punctele  $M(x, y, z)$  unui arc  $(AB)$  al curbei în spațiu sau curbei strâmbe reprezentat parametric prin*

$$(AB) : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad a \leq t \leq b, \quad (3.45)$$

*integrala curbilinie de prima speță a funcției  $f(M)$  de-a lungul curbei  $(AB)$  se reduce la o integrala definită*

$$\int_{(AB)} f(M) ds = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt. \quad (3.46)$$

**Observația 3.2.4** *Rezultatele stabilite rămân adevărate când curba  $C$  este netedă pe porțiuni, iar funcția de integrat este continuă și mărginită pe fiecare porțiune netedă a curbei. În această situație, integrala curbilinie de primul tip este suma integralelor curbilinie de speță întâi pe porțiunile netede care prin juxtapunere dau curba  $C$ .*

**Exercițiul 3.2.1** *Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip*

$$I = \int_C (x^2 + y^2) \ln z \, ds$$

*unde curba  $C$  pe care se efectuează integrarea funcției  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \ln z$  este reprezentată parametric de*

$$C : \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

**Soluție.** Vom aplica formula de calcul (3.46). Pentru aceasta trebuie calculate derivatele funcțiilor care definesc curba și apoi radicalul sumei pătratelor acestor derivate. Găsim

$$\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} = e^t \sqrt{3}.$$

Conform formulei de calcul (3.46), avem

$$I = \sqrt{3} \int_0^1 t e^{3t} dt.$$

Integrala definită la care s-a redus integrala curbilinie dată se calculează aplicând metoda integrării prin părți și se găsește

$$I = \frac{1 + 2e^3}{3\sqrt{3}}.$$

După prezentarea aplicațiilor integralelor curbilinii în mecanică, rezultatul găsit poate fi interpretat. Mai precis, valoarea integralei este momentul de inerție față de axa  $Oz$  al unui fir material care are configurația curbei ( $C$ ) și a cărui densitate în fiecare punct  $M(x, y, z)$  al curbei este  $\ln z$ . ■

### 3.3 Proprietățile integralelor curbilinii

Proprietățile integralelor curbilinii de primul tip sunt analoage celor ale integralelor definite și sunt implicate direct de către acestea din urmă prin formulele de calcul (3.37) și (3.46) care dau legăturile integralelor curbilinii de primul tip în plan și respectiv în spațiu cu integrale definite.

1. (*liniaritatea*). Dacă funcțiile  $f(M)$  și  $g(M)$  sunt integrabile de-a lungul curbei  $(AB)$  și  $\lambda$  și  $\mu$  sunt constante reale arbitrare, atunci funcția  $(\lambda f + \mu g)(M)$  este integrabilă pe  $(AB)$  și are loc egalitatea

$$\int_{(AB)} (\lambda f + \mu g)(M) ds = \lambda \int_{(AB)} f(M) ds + \mu \int_{(AB)} g(M) ds.$$

2. (*monotonie*). Dacă  $f(M)$  este o funcție nenegativă integrabilă pe curba  $(AB)$ , atunci

$$\int_{(AB)} f(M) ds \geq 0.$$



3. (*aditivitatea*). Dacă arcul  $(AB)$  este juxtapunerea a două arce netede sau netede pe porțiuni  $(AC)$  și  $(CB)$ , egalitatea

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(AC)} f(M)ds + \int_{(CB)} f(M)ds$$

are loc când integralele care apar există; integrala din membrul stâng există dacă și numai dacă ambele integrale din membrul drept există.

4. (*evaluarea modului integralei curbilinii*). Dacă  $f(M)$  este integrabilă pe  $(AB)$ , atunci funcția  $|f|(M) = |f(M)|$  este de asemenea integrabilă pe  $(AB)$  și

$$\left| \int_{(AB)} f(M)ds \right| \leq \int_{(AB)} |f(M)| ds.$$

5. (*teorema valorii medii*). Dacă  $f(M)$  este funcție continuă pe o curbă netedă sau netedă pe porțiuni de lungime  $L$ , atunci există un punct  $M^* \in (AB)$  astfel încât

$$\int_{(AB)} f(M)ds = f(M^*) L.$$

6. (*independența integralei curbilinii de primul tip de orientarea arcului de curbă pe care se integrează*). Alegerea sensului de parcurs pe arcul de curbă neted sau neted pe porțiuni  $(AB)$  nu influențează valoarea integralei curbilinii de primul tip pe  $(AB)$ , în sensul că

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds,$$

fapt ce a fost menționat și în paragraful precedent.

### 3.4 Aplicații ale integralelor curbilinii de primul tip

Vom pune în evidență unele probleme tipice ale căror rezolvări naturale implică integralele curbilinii de primul tip.

### 3.4.1 Masa și centrul de greutate ale unui fir material

**Definiția 3.4.1** *Se numește fir material ansamblul dintre o curbă netedă sau netedă pe porțiuni  $(AB)$  și o funcție pozitivă și continuă  $\rho$  definită în punctele curbei. Curba  $(AB)$  se numește configurația firului material, iar funcția  $\rho$  se numește densitatea firului material, valoarea acesteia în punctul  $M \in (AB)$  numindu-se densitatea de materie sau densitatea materială în punctul  $M$ . Firul material se numește omogen sau neomogen după cum densitatea este funcția constantă sau nu.*

Este posibil să precizăm densitatea materială într-un punct fie prin  $\rho(x, y)$ , dacă curba  $(AB)$  se află în planul  $Oxy$ , fie prin  $\rho(x, y, z)$  dacă  $(AB)$  este o curbă în spațiu.

Densitatea materială în punctul  $M \in (AB)$  este limita raportului dintre masa  $\Delta m$  a arcului de curbă  $(MM')$  și lungimea  $\Delta s$  a acestuia când  $M'$  tinde la  $M$  pe curbă.

Împărțim arcul  $(AB)$  în  $n$  subarce cu ajutorul diviziunii  $\Delta$  formată de punctele de diviziune  $\Delta = \{A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = B\}$  și pe fiecare arc  $(A_{i-1}A_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , luăm un punct  $M_i$  în care densitatea are valoarea  $\rho(M_i)$ . Dacă

$$\Delta s_i = s_i - s_{i-1} = \ell(AA_i) - \ell(AA_{i-1}), \quad i = \overline{1, n}$$

reprezintă lungimea arcului  $(A_{i-1}A_i)$ , atunci masa firului material de configurație  $(A_{i-1}A_i)$  poate fi aproximată prin  $\rho(M_i) \Delta s_i$ .

În acest mod, firul material continuu de configurație arcul  $(AB)$  și densitate  $\rho(M)$  se poate înlocui cu  $n$  puncte materiale izolate, situate pe arc,

$$M_1, M_2, \dots, M_n,$$

având masele

$$\rho(M_1) \Delta s_1, \quad \rho(M_2) \Delta s_2, \quad \dots, \quad \rho(M_n) \Delta s_n.$$

Presupunând că punctele  $M_i$  au coordonatele  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , rezultă că suma

$$\sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

este o valoare aproximativă a masei firului material  $(AB)$  care corespunde diviziunii  $\Delta$  a arcului  $(AB)$  și alegerii arbitrare a punctelor  $M_i \in (A_{i-1}A_i)$ .

Dacă considerăm un șir de diviziuni  $(\Delta_n)$  ale arcului  $(AB)$  cu proprietatea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$$

și presupunem densitatea de materie funcție continuă pe arc  $(AB)$ , atunci

$$\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i$$

există și reprezintă masa firului material cu configurația curba netedă sau netedă pe porțiuni  $(AB)$ . Ținând seama de definiția integralei curbilinii de primul tip avem că masa totală  $\mathcal{M}$  a firului material considerat este

$$\mathcal{M} = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i) \Delta s_i = \int_{(AB)} \rho(M) ds = \int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds.$$

În cazul în care arc de curbă se află în planul  $Oxy$ , masa firului material de configurație  $(AB)$  și densitate  $\rho(x, y)$  în punctul  $M(x, y) \in (AB)$  este

$$\mathcal{M} = \int_{(AB)} \rho(M) ds = \int_{(AB)} \rho(x, y) ds.$$

**Observația 3.4.1** Când firul material este omogen, cu densitatea constantă  $\rho_0$ , masa firului material corespunzător este  $\mathcal{M} = \rho_0 \int_{(AB)} ds$ .

Pe de altă parte, când firul este omogen,  $\mathcal{M} = \rho_0 L$ , unde  $L = \ell(AB)$  este lungimea firului. De aici deducem că lungimea unui arc de curbă netedă sau netedă pe porțiuni se poate prezenta ca integrala curbilinii de primul tip

$$\ell(AB) = \int_{(AB)} ds = \int_a^b \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Din statică, se știe că date  $n$  puncte materiale

$$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n),$$

de mase corespunzătoare  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , coordonatele centrului de greutate  $G$  al sistemului format de cele  $n$  puncte materiale sunt:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Să considerăm din nou firul material  $(AB)$  căruia îi aplicăm o divizare prin punctele  $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$ . Atunci, firul se poate înlocui cu un sistem de  $n$  puncte materiale  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , cu ponderile  $m_i = \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$ , unde  $i = \overline{1, n}$ . Ponderea reprezintă masa firului material omogen  $(A_{i-1}A_i)$  a cărui densitate este valoarea funcției  $\rho(x, y, z)$  în punctul  $M_i^*(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  ales arbitrar pe arcul  $(A_{i-1}A_i)$ . Coordonatele centrului de greutate pentru acest sistem de puncte materiale vor fi

$$\begin{aligned} \bar{x}_G &= \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}; & \bar{y}_G &= \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}; \\ \bar{z}_G &= \frac{\sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i}. \end{aligned}$$

În aceleași ipoteze asupra arcului  $(AB)$  și asupra densității de materie pe care le-am întâlnit la determinarea masei firului material, avem:

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i &= \int_{(AB)} x \rho(x, y, z) ds; \\ \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i &= \int_{(AB)} y \rho(x, y, z) ds; \\ \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \zeta_i \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i &= \int_{(AB)} z \rho(x, y, z) ds; \end{aligned} \right.$$

Astfel, coordonatele centrului de greutate al firului material neomogen  $(AB)$  sunt:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\int_{(AB)} x \rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}; & y_G &= \frac{\int_{(AB)} y \rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}; \\ z_G &= \frac{\int_{(AB)} z \rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}. \end{aligned}$$

Dacă firul material este omogen, atunci coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{1}{L} \int_{(AB)} x \, ds; \quad y_G = \frac{1}{L} \int_{(AB)} y \, ds; \quad z_G = \frac{1}{L} \int_{(AB)} z \, ds,$$

unde  $L = \int_{(AB)} ds$  este lungimea arcului de curbă  $(AB)$ .

În cazul în care arcul de curbă se află în planul  $Oxy$ , centru de greutate  $G$  va avea coordonatele:

$$x_G = \frac{\int_{(AB)} x \rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds}; \quad y_G = \frac{\int_{(AB)} y \rho(x, y, z) ds}{\int_{(AB)} \rho(x, y, z) ds},$$

iar dacă firul este omogen coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{\int_{(AB)} x \, ds}{L}; \quad y_G = \frac{\int_{(AB)} y \, ds}{L}. \quad (3.47)$$

Ultima relație din (3.47) se scrie în forma

$$y_G L = \int_{(AB)} y \, ds$$

sau în forma

$$2\pi y_G L = 2\pi \int_{(AB)} y \, ds. \quad (3.48)$$

Dacă avem în vedere că expresia ariei  $S$  a suprafeței de rotație generate prin rotirea arcului

$$(AB) : y = y(x), \quad x \in [a, b],$$

în jurul axei  $Ox$  este

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} \, dx = \int_{(AB)} y \, ds,$$

putem scrie relația (3.48) în forma

$$2\pi y_G L = S.$$

În felul acesta rezultă *prima teoremă a lui Guldin*.

**Teorema 3.4.1** *Dacă se rotește un arc rectificabil plan  $(AB)$  în jurul unei drepte  $(D)$  din plan care nu intersectează arcul, aria suprafeței obținute este egală cu produsul dintre lungimea arcului  $(AB)$  și lungimea cercului descris prin rotația în jurul dreptei  $(D)$  de centrul de greutate al arcului  $(AB)$ .*

**Exercițiul 3.4.1** *Să se calculeze masa și centrul de greutate ale firului material omogen cu densitatea constantă egală cu unitatea și configurația imaginea curbei*

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{\pi^2 - t^2} \cos t, \\ y = \sqrt{\pi^2 - t^2} \sin t, \\ z = \sqrt{4\pi^2 - 1} \sqrt{\pi^2 - t^2}, \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

**Soluție.** Analizând datele problemei constatăm că integralele curbilinii de primul tip care definesc masa  $\mathcal{M}$  și coordonatele centrului de greutate  $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$  există și avem

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_C \rho(x, y, z) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2 + t^2}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} dt; \\ \begin{cases} x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_C x ds = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt; \\ y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_C y ds = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt; \\ z_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_C z ds = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt. \end{cases} \end{aligned}$$

Înlocuind funcțiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei  $C$ , găsim

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \cos t dt; \\ y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) \sin t dt; \\ z_G = \frac{\sqrt{4\pi^2 - 1}}{\mathcal{M}} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 + t^2) dt. \end{cases}$$

Integrala care dă valoarea masei este una improprie, convergentă în baza criteriului de comparație în  $\alpha$ . Mai mult, pentru că funcția de integrat este pară, putem scrie

$$\mathcal{M} = 2 \int_0^\pi \frac{\pi^2 + t^2}{\sqrt{\pi^2 - t^2}} dt$$

Această integrală devine o integrală definită dacă se efectuează schimbarea de variabilă  $t = \pi \cos \tau$ . Obținem

$$\mathcal{M} = 2\pi^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 \tau) d\tau = \frac{3\pi^3}{2}.$$

Cota centrului de greutate se determină simplu, ordonata este zero pentru că funcția de integrat din expresia sa este impară și intervalul de integrare este simetric față de origine, iar abscisa centrului de greutate se determină ușor dacă în integrala care dă expresia acestuia se integrează de două ori prin părți. Se găsește:

$$x_G = -\frac{8}{3\pi^2}; \quad y_G = 0; \quad z_G = \frac{16}{9}\sqrt{4\pi^2 - 1},$$

remarcând totodată că centrul de greutate  $G$  se află în planul  $Oxz$ . ■

### 3.4.2 Momente de inerție ale unui fir material

**Definiția 3.4.2** *Se numește moment de inerție față de un element geometric al spațiului al unui punct material  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , de masă  $m_0$ , produsul dintre masa  $m_0$  și pătratul distanței de la punctul  $M_0$  la elementul respectiv.*

Elementul geometric poate fi o dreaptă, un plan sau un punct și, de cele mai multe ori, acestea sunt legate de elementele reperului cartezian  $Oxyz$ . Vom avea deci *momente de inerție axiale* când se aleg ca drepte axele de coordonate ale reperului, *momente de inerție planare* când planele alese sunt planele de coordonate și *moment de inerție central* când se alege ca punct al spațiului originea reperului.

**Definiția 3.4.3** *Se numește moment de inerție față de un punct  $P$  (o dreaptă  $(D)$  sau un plan  $(\Pi)$ ) al unui sistem de  $n$  puncte materiale*

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \quad M_2(x_2, y_2, z_2), \quad \dots, \quad M_n(x_n, y_n, z_n),$$

*având masele  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , suma tuturor momentelor de inerție corespunzătoare fiecărui punct față de punctul  $P$  (dreapta  $(D)$  sau planul  $(\Pi)$ ).*

Din definițiile de mai sus rezultă că momentul de inerție al sistemului de puncte considerat față de originea axelor  $O(0, 0, 0)$  este

$$I_O = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) m_k.$$

Momentele de inerție al aceluiași sistem de puncte față de axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sunt

$$I_{Ox} = \sum_{k=1}^n (y_k^2 + z_k^2) m_k, \quad I_{Oy} = \sum_{k=1}^n (z_k^2 + x_k^2) m_k, \quad I_{Oz} = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2) m_k,$$

în timp ce momentele de inerție ale sistemului de puncte în discuție față de planele de coordonate  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Oxz$  au expresiile

$$I_{Oxy} = \sum_{k=1}^n z_k^2 m_k; \quad I_{Oyz} = \sum_{k=1}^n x_k^2 m_k; \quad I_{Oxz} = \sum_{k=1}^n y_k^2 m_k.$$

Firul material din spațiu, cu configurația  $(AB)$  și densitatea materială  $\rho(x, y, z)$ , poate fi înlocuit cu sistemul de puncte materiale  $M_k$  având masele

$$m_k = \rho(M_k) \Delta s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Raționând ca la determinarea masei firului material deducem că momentele de inerție ale firului material față de originea, axele și planele reperului de coordonate  $Oxyz$  sunt respectiv

$$I_O = \int_{(AB)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Ox} = \int_{(AB)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad I_{Oy} = \int_{(AB)} (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oz} = \int_{(AB)} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oxy} = \int_{(AB)} z^2 \rho(x, y, z) ds; \quad I_{Oyz} = \int_{(AB)} x^2 \rho(x, y, z) ds,$$

$$I_{Oxz} = \int_{(AB)} y^2 \rho(x, y, z) ds.$$



Dacă firul material se află în planul  $Oxy$ , vom putea vorbi doar de momentele de inerție axiale:

$$I_{Ox} = \int_{(AB)} y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_{Oy} = \int_{(AB)} x^2 \rho(x, y) ds$$

și de momentul de inerție central

$$I_O = \int_{(AB)} (x^2 + y^2) \rho(x, y) ds.$$

**Definiția 3.4.4** Mărima infinitesimală  $dm = \rho(M)ds$  se numește **element de masă filiformă**.

**Observația 3.4.2** Formulele care dau masa, coordonatele centrului de greutate și momentele de inerție ale unui fir material se pot scrie astfel încât să se pună în evidență elementul de masă filiformă.

**Observația 3.4.3** Formulele care dau coordonatele centrului de greutate ale unui fir material în plan și în spațiu se pot scrie întruna singură

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{(AB)} \mathbf{r} dm,$$

unde  $\mathbf{r}_G$  este vectorul de poziție al centrului de greutate, iar  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție al unui punct care descrie configurația firului material.

**Exemplul 3.4.1** Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa  $Oz$  a firului material neomogen având configurația curbei

$$C : x = t \cos t, \quad y = t \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, 1]$$

și densitatea în fiecare punct egală cu cota acelui punct.

**Soluție.** Rezultă că densitatea este  $\rho(x, y, z) = z$ . Pentru calculul momentului de inerție  $I_{Oz}$  trebuie să calculăm integrala curbilinie de primul tip

$$I_{Oz} = \int_C (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_C (x^2 + y^2) z ds.$$

Avem  $\varphi(t) = t \cos t$ ,  $\psi(t) = t \sin t$  și  $\chi(t) = t$ . Calculând elementul de arc găsim  $ds = \sqrt{2 + t^2} dt$ . Atunci, momentul de inerție cerut este

$$I_{Oz} = \int_0^1 t^3 \sqrt{2 + t^2} dt.$$

Făcând substituția  $\sqrt{2+t^2} = u$ , obținem

$$I_{Oz} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} u^2(u^2 - 2) du = \left( \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} \right) \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

■

### 3.5 Definiția integralei curbilinii de al doilea tip

Pentru o funcție reală  $f$  definită și mărginită pe un interval compact  $[a, b]$  s-a introdus integrala Riemann  $\int_a^b f(x) dx$ . Vom vedea în continuare cum extinderea integralei definite conduce la *integrala curbilinie de al doilea tip* sau *integrala curbilinie în raport cu coordonatele*. Compactul  $[a, b]$  din integrala definită se va înlocui acum cu o curbă netedă sau netedă pe porțiuni, iar în locul funcției  $f$  va apare o funcție vectorială de argument vectorial definită pe un domeniu din planul  $xOy$  sau din spațiu care conține curba. Introducerea acestui tip de integrală a fost sugerată de probleme întâlnite în practică cum ar fi lucrul mecanic al unui câmp de forțe de-a lungul unei curbe sau circulația unui fluid pe o curbă.

#### 3.5.1 Lucrul mecanic al unui câmp de forțe

Vom introduce integrala curbilinie de al doilea tip pornind de la o problemă practică, din fizică.

Să considerăm două puncte  $A$  și  $B$  ale spațiului, de vectori de poziție  $\mathbf{r}_1$  și  $\mathbf{r}_2$ ,

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}.$$

Aceste puncte, de coordonate  $A(x_1, y_1, z_1)$ ,  $B(x_2, y_2, z_2)$ , definesc vectorul  $\overrightarrow{AB}$  a cărui expresie analitică în reperul  $Oxyz$  este

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}.$$

Considerăm de asemenea un vector constant  $\mathbf{F}$  de coordonate  $P, Q, R$ ,

$$\mathbf{F} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k},$$

care din punct de vedere fizic poate fi interpretat ca o forță care acționează în fiecare punct  $M(x, y, z)$  al segmentului de dreaptă  $AB$ .

Lucrul mecanic  $\mathcal{L}$  efectuat de forța constantă  $\mathbf{F}$  care acționează asupra unui punct material pentru a-l deplasa din punctul  $A$  în punctul  $B$  pe segmentul de dreaptă  $AB$  este produsul dintre mărimea forței, lungimea segmentului  $AB$  și cosinusul unghiului  $\theta$  dintre vectorii  $\mathbf{F}$  și  $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \|\mathbf{F}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \cos \theta.$$

Dar expresia din membrul al doilea este produsul scalar al vectorilor  $\mathbf{F}$  și  $\overrightarrow{AB}$

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

și având în vedere că produsul scalar a doi vectori este suma produselor coordonatelor de același nume, rezultă că lucrul mecanic  $\mathcal{L}$  este

$$\mathcal{L} = (x_2 - x_1)P + (y_2 - y_1)Q + (z_2 - z_1)R.$$

Să găsim acum expresia lucrului mecanic în cazul general când forța  $\mathbf{F}$  este variabilă ca direcție, mărime și sens, iar traiectoria mișcării punctului  $M(x, y, z)$  este o curbă.

Considerăm în acest sens curba netedă  $C$  de ecuații parametrice

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (3.49)$$

sau de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t \in [a, b], \quad (3.50)$$

unde  $\mathbf{r}(t) = \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k}$ , și o forță

$$\mathbf{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \quad (3.51)$$

ale cărei componente  $P, Q, R$  sunt funcții reale de variabilele reale  $x, y, z$  definite pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^3$  care conține imaginea curbei  $C$  și care sunt funcții continue în punctele imaginii curbei  $C$ .

Pentru a defini integrala curbilinie de al doilea tip introducem noțiunea de *curbă orientată*. Fie în acest sens  $M(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ , sau  $M(\mathbf{r}(t))$ , punctul de pe imaginea curbei  $C$  corespunzător lui  $t \in [a, b]$  prin (3.49), respectiv (3.50). Când  $t$  parcurge în mod continuu intervalul  $[a, b]$  de la  $a$  la  $b$ , punctul corespunzător parcurge imaginea  $I(C)$  a curbei  $C$  într-un sens pe care-l numim *sens direct*. Dacă valorii  $t = a$  îi corespunde punctul  $A$  de pe imaginea curbei  $C$ , iar lui  $t = b$  îi corespunde punctul  $B \in I(C)$ , atunci sensul direct este de la  $A$  către  $B$ , adică este sensul imprimat de creșterea parametrului  $t$ . Când  $t$  parcurge intervalul  $[a, b]$  de la  $b$  către  $a$ , punctul corespunzător  $M$  parcurge  $I(C)$  în *sens indirect* sau *sens negativ*.

**Definiția 3.5.1** *O curbă împreună cu unul din sensurile de parcurgere al imaginii sale se numește curbă orientată.*

Curba  $C$  împreună cu sensul direct de parcurgere a lui  $I(C)$  se notează cu  $C^+$ . În mod asemănător se definește  $C^-$ .

**Observația 3.5.1** *Dacă ținem seama de faptul că funcția  $\alpha$  din definiția echivalenței a două drumuri este continuă și strict crescătoare, rezultă că sensul de parcurgere a lui  $I(C)$  nu depinde de alegerea drumului din clasa de echivalență care definește curba  $(C)$ , ceea ce înseamnă că odată ales un sens de parcurs al curbei  $(C)$ , trecerea la o altă parametrizare a ei nu modifică sensul de parcurs.*

Împărțim arcul de curbă orientată  $C$  de extremități  $A$  și  $B$  în  $n$  subarce prin intermediul punctelor

$$A = A_0, \quad A_1, \quad \dots, \quad A_{n-1}, \quad A_n = B \quad (3.52)$$

și considerăm linia poligonală cu vârfurile în aceste puncte. Putem considera că forța  $\mathbf{F}$  din (3.51) are o valoare constantă de-a lungul fiecărui segment orientat  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ , egală cu  $\mathbf{F}(M_i)$ , unde  $M_i$  este un punct oarecare, dar fixat, de pe arcul de curbă  $(A_{i-1}A_i)$ . Calculăm acum lucrul mecanic corespunzător mișcării punctului material de-a lungul liniei poligonale, considerând că pe fiecare segment de extremități  $A_{i-1}$  și  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  acționează forța  $\mathbf{F}(M_i)$ . Dacă  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $A_i(x_i, y_i, z_i)$  și

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}, \quad (3.53)$$

atunci lucrul mecanic corespunzător mișcării punctului material de-a lungul segmentului orientat cu originea în  $A_{i-1}$  și extremitatea  $A_i$  este

$$\Delta \mathcal{L}_i = \mathbf{F}(M_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i,$$

iar lucrul mecanic total  $\mathcal{L}_\Delta$  corespunzător deplasării de-a lungul liniei poligonale este

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i. \quad (3.54)$$

Ultima sumă poate fi luată ca expresie aproximativă a lucrului mecanic efectuat de către câmpul de forțe  $\mathbf{F}(M)$  de-a lungul curbei  $(AB)$ . Pentru a obține valoarea exactă a lucrului mecanic trebuie să trecem la limită în suma (3.54) când lungimea celui mai mare dintre arcele  $(A_{i-1}A_i)$  tinde la zero. O astfel de trecere la limită în formă generală conduce la un nou tip de integrală curbilinie.

### 3.5.2 Definiția integralei curbilinii de al doilea tip

Fie  $C^+ = (AB)$  o curbă netedă sau netedă pe porțiuni de reprezentare parametrică (3.49) și câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  din (3.51). Împărțim curba  $(AB)$  în  $n$  arce cu ajutorul punctelor de diviziune (3.52) și formăm suma integrală

$$T = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i, \quad (3.55)$$

unde  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in (A_{i-1}A_i)$ , iar  $\Delta x_i, \Delta y_i$  și  $\Delta z_i$  sunt date în (3.53).

**Definiția 3.5.2** Dacă sumele integrale (3.55) admit o limită finită  $I$  când cea mai mare lungime a arcelor  $(A_{i-1}A_i)$  tinde la zero, funcția vectorială  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  se numește **integrabilă în raport cu coordonatele pe curba  $C = (AB)$** , iar limita  $I$  se numește **integrala curbilinie de tipul al doilea sau integrala curbilinie în raport cu coordonatele a funcției vectoriale  $\mathbf{F}$  și se notează**

$$I = \int_{(AB)} P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz \quad (3.56)$$

sau, folosind coordonatele punctului curent  $M$ ,

$$I = \int_{(AB)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (3.57)$$

De multe ori integrala curbilinie de al doilea tip se notează fără a mai menționa coordonatele funcțiilor componente ale câmpului vectorial  $\mathbf{F}$ , deci

$$I = \int_{(AB)} P dx + Q dy + R dz.$$

Având în vedere că expresia de sub semnul integrală din (3.56) este produsul scalar dintre câmpul vectorial (3.51) și vectorul  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ , rezultă că integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale  $\mathbf{F}(M)$  de-a lungul curbei orientate direct  $C^+ = (AB)$  poate fi notată și în forma

$$I = \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}.$$

**Observația 3.5.2** *Integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale de trei variabile reale  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  de-a lungul curbei orientate  $C^+$  este suma integralelor curbilinii de tipul al doilea*

$$\int_{C^+} P(M) dx, \quad \int_{C^+} Q(M) dy, \quad \int_{C^+} R(M) dz,$$

*corespunzătoare câmpurilor vectoriale*

$$(P, 0, 0), \quad (0, Q, 0), \quad (0, 0, R),$$

*care sunt proiecțiile funcției vectoriale  $\mathbf{F}$  pe respectiv versorii  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  și  $\mathbf{k}$  ai reperului  $Oxyz$ .*

**Observația 3.5.3** *Integrala curbilinie de al doilea tip nu trebuie confundată cu integrala unui câmp vectorial în raport cu una din variabilele sale pe un interval compact din  $\mathbb{R}$  situat pe axa variabilei.*

Dacă domeniul  $D$  de definiție a funcției  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  conține intervalul  $[a, b] \subset Ox$ , atunci

$$\int_a^b \mathbf{F}(x, y, z) dx = \mathbf{i} \int_a^b P(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_a^b Q(x, y, z) dx + \mathbf{k} \int_a^b R(x, y, z) dx.$$

Integralele din membrul doi sunt integrale proprii depinzând de doi parametri, iar rezultatul integrării este o funcție vectorială ce depinde de variabilele  $y$  și  $z$ .

### 3.6 Legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii

Integrala curbilinie de al doilea tip se poate reduce la integrala curbilinie de primul tip, legătura dintre ele fiind descrisă în teorema de mai jos.

**Teorema 3.6.1** *Fie  $C^+ = (AB)$  curba netedă de ecuații parametrice (3.49) și câmpul vectorial (3.51) definit și mărginit pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^3$  care include curba  $C$  și continuu în punctele curbei. Atunci, avem egalitatea*

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(M) \cdot \boldsymbol{\tau}(M) ds, \quad (3.58)$$

unde  $\boldsymbol{\tau}(M)$  este versorul tangentei la curba orientată  $C^+$  în punctul curent  $M(x, y, z)$  al curbei, cu condiția ca integralele curbilinii care apar să existe. Integrala curbilinie din primul membru al egalității (3.58) există dacă și numai dacă există integrala curbilinie de primul tip din membrul doi.

**Demonstrație.** Să demonstrăm mai întâi egalitatea

$$\int_{C^+} P(M) dx = \int_C P(M) \cos \alpha(M) ds, \quad (3.59)$$

unde  $\cos \alpha(M)$  este mărimea algebrică a proiecției versorului  $\boldsymbol{\tau}(M)$  pe direcția versorului  $\mathbf{i}$  al axei  $Ox$ , adică  $\cos \alpha(M) = \boldsymbol{\tau}(M) \cdot \mathbf{i}$ . Integrala din primul membru al egalității (3.59) este, prin definiție, limita sumelor integrale de forma

$$T = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i. \quad (3.60)$$

Să considerăm că originea de arc pe curba  $C^+$  coincide cu extremitatea  $A$  corespunzătoare valorii  $t = a$  și să comparăm suma integrală (3.60) cu suma integrală

$$T^* = \sum_{i=1}^n P(M_i) \cos \alpha(M_i) \Delta s_i,$$

unde  $s_i$  este lungimea arcului  $(AA_i)$ ,  $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ , iar  $\alpha(M_i)$  este unghiul pe care îl face cu axa  $Ox$  tangenta în punctul  $M_i \in (A_{i-1}A_i)$  la curba  $C^+$ . Să considerăm că parametrizarea curbei  $(AB)$  este cea naturală

$$\begin{cases} x = x(s), \\ y = y(s), \\ z = z(s), \end{cases} \quad t \in [0, L],$$

unde  $L$  este lungimea arcului  $(AB)$ . Versorul  $\boldsymbol{\tau}(M)$  este legat de parametrul natural  $s$  al curbei  $C^+$ , unde  $s$  este lungimea arcului  $(AM)$ , prin relația

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}(M),$$

unde vectorul  $\mathbf{r}$  care apare în exprimarea lui  $\boldsymbol{\tau}(M)$  este vectorul de poziție al punctului curent  $M(x, y, z)$  al curbei

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte, expresia analitică a oricărui versor se poate scrie în forma

$$\boldsymbol{\tau}(M) = \cos \alpha(M)\mathbf{i} + \cos \beta(M)\mathbf{j} + \cos \gamma(M)\mathbf{k},$$

unde  $\beta(M)$  și  $\gamma(M)$  sunt unghiurile dintre versorul tangentei  $\boldsymbol{\tau}(M)$  și axele  $Oy$ , respectiv  $Oz$ . Atunci,

$$\Delta x_i = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \frac{dx}{ds}(M) ds = \int_{s_{i-1}}^{s_i} \cos \alpha(M) ds. \quad (3.61)$$

Aplicând teorema valorii medii în integrala Riemann (3.61), găsim

$$\Delta x_i = \cos \alpha(M_i^*) \Delta s_i, \quad M_i^* \in (A_{i-1}A_i).$$

În aceste condiții, diferența dintre sumele  $T$  și  $T^*$  este

$$T - T^* = \sum_{i=1}^n P(M_i) [\cos \alpha(M_i^*) - \cos \alpha(M_i)] \Delta s_i. \quad (3.62)$$

Luând valoarea absolută în ambii membri ai lui (3.62) și folosind proprietățile funcției modul, obținem

$$|T - T^*| \leq \sum_{i=1}^n |P(M_i)| \cdot |\cos \alpha(M_i^*) - \cos \alpha(M_i)| \Delta s_i. \quad (3.63)$$

Funcția  $\cos \alpha(M)$  este continuă deoarece curba  $C^+$  este netedă. Ca mulțime de puncte, curba  $C^+$  este o mulțime mărginită și închisă, deci este o mulțime compactă în  $\mathbb{R}^3$ . Cum o funcție continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă, deducem că funcția  $\cos \alpha(M)$  este uniform continuă și prin urmare, dat un  $\varepsilon > 0$ , inegalitatea

$$|\cos \alpha(M_i^*) - \cos \alpha(M_i)| < \frac{\varepsilon}{L \sup |P|} \quad (3.64)$$



este satisfăcută pentru orice partiție a curbei  $C^+ = (AB)$  a cărei normă (cel mai mare dintre numerele  $\Delta s_i$ ) este destul de mică. Din (3.63) și (3.64) rezultă

$$|T - T^*| < \frac{\varepsilon}{L \sup |P|} \sup |P| \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \varepsilon. \quad (3.65)$$

Inegalitatea (3.65) demonstrează că sumele integrale  $T^*$  și  $T$  au aceeași limită când norma diviziunii  $\Delta = \{A_0 = A, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B\}$  tinde la zero și ca urmare egalitatea (3.59) este demonstrată.

În mod asemănător se demonstrează egalitățile

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Q(M) dy &= \int_C Q(M) \cos \beta ds, \\ \int_{C^+} R(M) dy &= \int_C R(M) \cos \gamma ds. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Sumând membru cu membru egalitățile (3.59) și (3.66) se obține (3.58) și teorema este demonstrată. ■

**Observația 3.6.1** Când curba  $C^+ = (AB)$  este în planul  $xOy$  legătura dintre cele două tipuri de integrale curbilinii este

$$\int_{C^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C (P(x, y) \cos \alpha + Q(x, y) \sin \alpha) ds,$$

unde  $\alpha = \alpha(M)$  este unghiul dintre direcția pozitivă a axei  $Ox$  și tangenta la curba  $(AB)$  în punctul  $M$  al ei.

### 3.7 Formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip

Teorema care dă formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip și cea care dă legătura dintre integralele curbilinii de primul și cel de al doilea tip implică următorul rezultat pe care, din motive de simplitate a scrierii formulelor, îl vom formula pentru cazul în care curba se află în planul  $Oxy$ .

**Teorema 3.7.1** Fie  $C^+ = (AB)$  o curbă netedă de ecuații parametrice

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [a, b]$$

și  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  o funcție vectorială de două variabile reale definită într-un domeniu plan  $D$  care conține arcul  $C$ . Atunci, avem următoarea relație

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Pdx + Qdy &= \\ &= \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt, \end{aligned} \quad (3.67)$$

dacă integralele care intră în componența ei există. Mai mult, integrala din membrul stâng a lui (3.67) există dacă integrala definită din membrul al doilea există.

Teorema de mai sus rămâne adevărată dacă arcul de curbă  $C^+$  este neted pe porțiuni. Ea poate fi ușor transpusă la cazul în care curba  $(AB)$  este în spațiu și este reprezentată parametric de ecuațiile (3.49) iar câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este (3.51). Avem

$$\begin{aligned} \int_{C^+} Pdx + Qdy + Rdz &= \\ &= \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + \\ &\quad + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)] dt. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Formulele de calcul (3.67) și (3.68) se pot scrie vectorial în forma

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

cu mențiunea că în cazul integralei curbilinii în planul  $xOy$ , mărimile care intervin au expresiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) &= P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j}, \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}, \\ \mathbf{r}(t) &= \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j}, \end{cases}$$

iar în cazul integralei curbilinii în spațiu, aceleași mărimi au semnificațiile

$$\begin{cases} \mathbf{F}(M) &= P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}, \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}, \\ \mathbf{r}(t) &= \varphi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j} + \chi(t)\mathbf{k} \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) &= \mathbf{r}'(t) = \varphi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j} + \chi'(t)\mathbf{k}. \end{cases}$$

Să considerăm unele cazuri particulare importante ale formulei de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în plan.

Dacă curba  $C^+ = (AB)$  din planul  $xOy$  este determinată de ecuația

$$y = y(x), \quad x \in [a, b]$$

formula (3.68) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx.$$

În particular, dacă  $(AB)$  este un segment de dreaptă paralelă cu axa  $Ox$ , deci de ecuație  $y = y_0$ ,  $x \in [a, b]$ , fapt ce implică  $y'(x) = 0$ , atunci formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea este

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, y_0) dx.$$

În mod similar, pentru o curbă plană determinată de ecuația

$$x = x(y), \quad y \in [c, d],$$

formula corespunzătoare de calcul a integralei curbilinii este

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_c^d [P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)] dy. \quad (3.69)$$

Dacă  $(AB)$  este un segment de dreaptă paralel cu axa  $Oy$ , descris de ecuația

$$x = x_0, \quad y \in [c, d],$$

avem  $x'(y) = 0$  și formula de calcul (3.69) devine

$$\int_{C^+} Pdx + Qdy = \int_c^d Q(x_0, y) dy.$$

**Exercițiul 3.7.1** Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în plan

$$I = \int_C xy dx - y^2 dy, \text{ unde } C : x = t^2, y = t^3, t \in [0, 1].$$

**Soluție.** Avem  $\varphi(t) = t^2$ ,  $\psi(t) = t^3$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile și cu derivată continuă și  $\varphi'(t) = 2t$ ,  $\psi'(t) = 3t^2$ . Funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt date de  $P(x, y) = xy$  și  $Q(x, y) = -y^2$ , deci sunt continue în tot planul. Putem deci aplica formula de calcul (3.67). Avem:

$$P(\varphi(t), \psi(t)) = t^5, \quad Q(\varphi(t), \psi(t)) = -t^6;$$

$$I = \int_0^1 (2t^6 - 3t^8) dt = \left( \frac{2}{7}t^7 - \frac{3}{9}t^9 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{21}.$$

■

**Exercițiul 3.7.2** Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu

$$I = \int_C z\sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz, \text{ unde}$$

$$C : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, \quad t \in [0, \pi/2], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

**Soluție.** Funcțiile care definesc reprezentarea parametrică a curbei sunt derivabile și admit derivată continuă pe intervalul de variație al parametrului  $t$ . Funcția  $P$  este definită și continuă pe porțiunea spațiului în care abscisele punctelor satisfac dubla inegalitate  $-a \leq x \leq a$ . Funcțiile  $Q$  și  $R$  sunt definite și continue pe întreg spațiul. Deoarece avem  $-a \leq \varphi(t) \leq a$  pentru  $t \in [0, \pi/2]$ , rezultă că imaginea curbei  $C$  este conținută în domeniul comun de definiție al funcțiilor  $P$ ,  $Q$  și  $R$ , deci integrala dată există. Aplicând formula de calcul (3.68), obținem

$$I = a^2 b \int_0^{\pi/2} (t \cos 2t + 1) dt = \frac{a^2 b}{2} (\pi - 1).$$

■

### 3.8 Proprietăți ale integralelor curbilinii de al doilea tip

Din modul cum a fost definită integrala curbilinii de al doilea tip

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.70)$$

deducem că un factor constant poate fi scos în afara semnelui de integrală și că integrala unei sume de funcții vectoriale este suma integralelor funcțiilor termenilor. Ambele proprietăți pot fi exprimate prin egalitatea

$$\int_{C^+} (\lambda \mathbf{F}(M) + \mu \mathbf{G}(M)) \cdot d\mathbf{r} = \lambda \int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{C^+} \mathbf{G}(M) \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.71)$$

unde  $\lambda$  și  $\mu$  sunt constante reale arbitrare, iar  $\mathbf{F}$  și  $\mathbf{G}$  sunt câmpuri vectoriale integrabile pe curba  $C^+$  în raport cu coordonatele.

O altă proprietate importantă a integralei curbilinii de al doilea tip (3.70) este dependența sa de orientarea curbei, fapt care se exprimă prin egalitatea

$$\int_{C^+} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{C^-} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.72)$$

a cărei demonstrație este simplă. Într-adevăr, dacă schimbăm direcția în care curba  $C^+ = (AB)$  este parcursă trebuie să înlocuim cantitățile  $\Delta x_i$  și  $\Delta y_i$ , care intră în suma integrală (3.55), prin  $-\Delta x_i$  și respectiv  $-\Delta y_i$ . Această înlocuire schimbă semnul sumelor integrale (3.55) și, în consecință, semnul limitei lor ceea ce conduce la (3.72).

Dependența de orientarea curbei a integralei curbilinii de al doilea tip este în concordanță cu interpretarea fizică a acesteia care reprezintă lucrul mecanic al unui câmp de forțe de-a lungul unei curbe.

Într-adevăr, lucrul mecanic efectuat de câmpul de forțe schimbă de semn dacă sensul de parcurs al curbei se schimbă.

### 3.9 Integrale curbilinii de tipul al doilea pe curbe închise

Pe o curbă simplă închisă  $C$  este esențial să specificăm sensul de parcurs al curbei deoarece, după cum s-a văzut, valoarea integralei curbilinii de al doilea

tip depinde de sensul de parcurs al curbei. Extremitățile unei asemenea curbe fiind identice, în general nu se poate desprinde din context care este sensul de parcurs al curbei. De regulă, sensul pozitiv de parcurs al unei curbe plane închise este sensul invers acelor de ceasornic, iar pentru integrala curbilinie de al doilea tip pe o astfel de curbă se folosește un simbol special și anume cel de integrală prevăzut cu un cerc la mijlocul ei, cerc pe care se figurează o săgeată reprezentând sensul de parcurs al curbei. Când nu se figurează săgeata pe cercul plasat pe semnul integrală, deci când aceasta se notează cu simbolul  $\oint$ , vom înțelege că integrarea se efectuează pe o curbă închisă parcursă în sens pozitiv.

## 3.10 Independența de drum a integralei curbilinii de al doilea tip

### 3.10.1 Formularea problemei

Fie  $D$  domeniul de definiție al câmpului vectorial  $\mathbf{F}$  și  $(AB)$  un arc de curbă, neted pe porțiuni, inclus în întregime în mulțimea  $D$ . Când se studiază integrala curbilinie de al doilea tip în plan sau în spațiu

$$I = \int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} \quad (3.73)$$

este posibil ca în anumite cazuri valoarea sa fie independentă de forma drumului de integrare și să fie determinată doar de extremitățile  $A$  și  $B$  ale drumului. Cu alte cuvinte numărul real  $I$  exprimat prin (3.73) este același pentru toate căile de integrare care au originea în  $A$  și extremitatea în punctul  $B$ .

**Definiția 3.10.1** *Integrala curbilinie în raport cu coordonatele a câmpului vectorial  $\mathbf{F}$  se numește independentă de drum în domeniul  $D$  dacă are loc egalitatea*

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r}, \quad (3.74)$$

*oricare ar fi curbele netede pe porțiuni  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ , incluse în  $D$ , având origine comună în  $A$  și extremitate comună în  $B$ , punctele  $A$  și  $B$  fiind alese arbitrar în domeniul  $D$ .*

Ne propunem să determinăm condiții care să implice independența de drum pe domeniul  $D$  a unei integrale curbilinii de tipul al doilea sub forma generală (3.73). Vom vedea că această problemă este legată de determinarea unei funcții  $U$ , diferențiabile pe domeniul  $D$ , a cărei diferențială să fie egală cu expresia diferențială de sub semnul integralei din (3.73), adică

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (3.75)$$

Pentru simplitatea scrierii formulelor și relațiilor matematice vom considera cazul plan, transpunerea rezultatelor pentru cazul spațial fiind simplă. În acest caz funcția vectorială  $\mathbf{F}$  are două componente  $P$  și  $Q$ , iar integrala din (3.73) se scrie

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (3.76)$$

sau, mai simplu,

$$\int_{(AB)} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} Pdx + Qdy. \quad (3.77)$$

### 3.10.2 Cazul unui domeniu plan simplu conex

**Definiția 3.10.2** *Un domeniu plan  $D$  se numește **simplu conex** dacă orice curbă simplă închisă cu imaginea inclusă în interiorul lui  $D$  este frontiera unei submulțimi incluse în întregime în  $D$ .*

**Teorema 3.10.1** *Dacă funcțiile  $P$  și  $Q$  și derivatele lor parțiale  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue pe domeniul simplu conex  $D \subset \mathbb{R}^2$ , atunci următoarele patru condiții sunt echivalente:*

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q)$  de-a lungul oricărei curbe închise ( $C$ ), netedă sau netedă pe porțiuni, inclusă în  $D$  este egală cu zero*

$$\int_C Pdx + Qdy = 0;$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea (3.76) este independentă de alegerea căii de integrare de extremități  $A$  și  $B$ , puncte fixate dar alese arbitrar în  $D$ ;*

## 3. expresia diferențială

$$\omega = Pdx + Qdy \quad (3.78)$$

este diferențiala totală (exactă) a unei funcții reale de două variabile reale  $U$  definită și diferențiabilă pe  $D$ , adică avem (3.75);

## 4. relația

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad (3.79)$$

are loc în orice punct  $M(x, y) \in D$ .

**Demonstrație.** Vom arăta că prima condiție implică pe cea de a doua, a doua condiție implică cea de a treia condiție, a treia condiție implică condiția a patra și, la sfârșit, condiția a patra implică prima condiție. Atunci, echivalența celor patru condiții este stabilită.

Arătăm întâi că **1**  $\implies$  **2**. Pentru aceasta considerăm două drumuri de integrare situate în domeniul  $D$  cu origine comună în  $A$ , punct fixat dar arbitrar din  $D$ , și extremitate comună în punctul  $B$ , ales de asemenea arbitrar în  $D$ . Primul drum îl vom nota cu  $(ACB)$ , iar cel de al doilea va fi notat cu  $(AEB)$ . Juxtapunerea acestor drumuri este un drum închis pe care îl vom considera parcurs în sensul de la  $A$  către  $B$  prin  $C$  și apoi din  $B$  către  $A$  prin  $E$  și îl vom nota cu  $(ACBEA)$ . Conform ipotezei, integrala curbilinie luată pe acest contur este egală cu zero și deci

$$\int_{ACBEA} Pdx + Qdy = 0.$$

Însă, folosind proprietățile integralei curbilinii de al doilea tip, avem

$$\begin{aligned} \int_{ACBEA} Pdx + Qdy &= \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BEA} Pdx + Qdy = \\ &= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{AEB} Pdx + Qdy \end{aligned}$$

și, în consecință,

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{AEB} Pdx + Qdy,$$

ceea ce arată că implicația **1**  $\implies$  **2** este demonstrată. Implicația rămâne adevărată și atunci când cele două căi de integrare au puncte în comun.



Să demonstrăm că **2**  $\implies$  **3**. Presupunem că integrala curbilinie (3.76) nu depinde de calea de integrare situată în domeniul plan simplu conex  $D$ , ci doar de extremitățile  $A$  și  $B$  ale acesteia. Atunci, dacă fixăm punctul  $A$ , integrala poate fi considerată o funcție de coordonatele  $x$  și  $y$  ale punctului variabil  $B$ , aflat oriunde în domeniul  $D$ . Dacă notăm această funcție cu  $U$ , atunci valoarea sa  $U(x, y)$  în punctul  $B(x, y)$  este

$$U(x, y) = \int_{AB} Pdx + Qdy. \quad (3.80)$$

Să arătăm că funcția  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  ale cărei valori se determină după legea (3.80) este diferențiabilă și că are loc (3.75). Pentru a demonstra aceasta este suficient să arătăm că funcția  $U$  din (3.80) este derivabilă parțial în  $D$ , iar valorile derivatelor parțiale în punctul  $B$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y)$$

sunt egale respectiv cu  $P(x, y)$  și  $Q(x, y)$ . Pentru derivabilitatea parțială a funcției  $U$  trebuie să cercetăm existența limitelor:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(x+t, y) - U(x, y)}{t}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(x, y+t) - U(x, y)}{t}. \quad (3.81)$$

Cantitatea de la numărătorul primei limite este egală cu integrala expresiei diferențiale  $Pdx + Qdy$  de-a lungul unui drum de integrare care leagă punctele  $B(x, y)$  și  $B_1(x+t, y)$  drum care este paralel cu axa  $Ox$ . Folosind formulele de calcul ale integralelor curbilinii de al doilea tip în cazul în care calea de integrare este paralelă cu una din axele de coordonate, găsim:

$$\begin{cases} U(x+t, y) - U(x, y) = \int_x^{x+t} P(\tau, y) d\tau; \\ U(x, y+t) - U(x, y) = \int_y^{y+t} Q(x, \tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.82)$$

Funcțiile  $P$  și  $Q$  fiind continue, ele sunt în același timp parțial continue și ca atare integranții din (3.82) sunt funcții continue. Rezultă că integralelor din membrul doi al lui (3.82) li se poate aplica teorema valorii medii. Obținem

$$\begin{cases} U(x+t, y) - U(x, y) = tP(x + \theta_1 t, y); \\ U(x, y+t) - U(x, y) = tQ(x, y + \theta_2 t). \end{cases} \quad (3.83)$$

Din (3.83) și continuitatea funcțiilor  $P$  și  $Q$  deducem că limitele din (3.81) există, ceea ce atrage că funcția  $U$  este derivabilă parțial pe  $D$  și derivatele parțiale sunt date de

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y). \quad (3.84)$$

În baza faptului că funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt continue deducem că derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $U$  sunt continue pe  $D$ . Ori, o funcție care posedă derivate parțiale continue pe domeniul  $D$  este diferențiabilă pe  $D$ . Având în vedere (3.84) rezultă că diferențiala funcției  $U$  în punctul  $B(x, y)$  este dată de (3.75).

Urmează să arătăm că **3**  $\implies$  **4**. Dacă expresia diferențială (3.78) este diferențiala totală exactă a funcției  $U$  în punctul  $B(x, y)$ , atunci din unicitatea expresiei diferențialei unei funcții avem (3.84). Din ipotezele acestei părți a teoremei avem că există derivatele parțiale mixte secunde ale funcției  $U$  în punctul  $B(x, y)$  și că acestea sunt continue pe domeniul  $D$  deoarece continue pe  $D$  sunt derivatele parțiale ale funcției  $Q$  în raport cu  $x$  și ale funcției  $P$  în raport cu  $y$ . Conform criteriului lui Schwarz, derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale funcției  $U$  sunt egale oriunde în  $D$  ceea ce atrage că avem (3.79) în orice punct al domeniului  $D$ .

Rămâne să mai demonstrăm că **4**  $\implies$  **1**. Presupunem că egalitatea (3.79) este satisfăcută peste tot în domeniul  $D$  și fie  $C$  o curbă închisă, arbitrară, netedă sau netedă pe porțiuni, inclusă în domeniul  $D$ . Domeniul  $D$  fiind unul conex, submulțimea  $D_1$  a lui  $\mathbb{R}^2$  care are ca frontieră curba închisă  $C$  este în același timp submulțime a domeniului  $D$ , iar pe această submulțime derivatele față de  $y$  a lui  $P$  și față de  $x$  a lui  $Q$  sunt definite și continue. Prin urmare, în baza formulei integrale a lui Green, care o vom demonstra în capitolul următor, integrala curbilinie

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (3.85)$$

poate fi transformată într-o integrală dublă prin relația

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \quad (3.86)$$

În baza ipotezei, exprimată prin egalitatea (3.79), integrala din membrul drept a relației (3.86) este egală cu zero. În consecință, integrala curbilinie

(3.85) este egală cu zero pe orice curbă închisă  $C$ , netedă sau netedă pe porțiuni, situată în întregime în domeniul  $D$ . Cu aceasta teorema enunțată este complet demonstrată. ■

### 3.10.3 Cazul unui domeniu în spațiu simplu conex

Rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1 pot fi transpuse și în cazul spațial. Pentru aceasta ar trebui mai întâi să definim noțiunea de domeniu tridimensional simplu conex.

**Definiția 3.10.3** *Un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^3$  se numește **simplu conex** dacă orice suprafață  $S$  închisă, netedă sau netedă pe porțiuni, cu imaginea inclusă în interiorul lui  $D$  este frontiera unei submulțimi incluse în întregime în  $D$ .*

Dăm mai jos enunțul teoremei similare care transpune în spațiu rezultatele demonstrate în Teorema 3.10.1.

**Teorema 3.10.2** *Dacă funcțiile  $P, Q$  și  $R$  și derivatele lor parțiale:*

$$\frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial y}$$

*sunt definite și continue pe domeniul tridimensional simplu conex  $D$ , atunci următoarele patru condiții sunt echivalente:*

1. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  de-a lungul oricărei curbe închise ( $C$ ), netede sau netede pe porțiuni, inclusă în  $D$ , este egală cu zero*

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2. *integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  este independentă de alegerea căii de integrare de extremități  $A$  și  $B$ , puncte fixate dar alese arbitrar în  $D$ .*

3. *expresia diferențială*

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

*este diferențiala totală (exactă) a unei funcții reale de trei variabile reale  $U$  definită și diferențiabilă pe  $D$ , adică avem*

$$dU(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

4. relațiile

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z), \\ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \end{cases} \quad (3.87)$$

au loc în orice punct  $M(x, y, z) \in D$ .

### 3.10.4 Operatorul rotor

Teorema 3.10.2 sugerează folosirea operatorului diferențial  $\nabla$  a lui Hamilton cu ajutorul căruia unele din concluziile teoremei se vor scrie mai simplu. Deși acest operator a fost introdus anterior, preferăm să reamintim și să prezentăm unele chestiuni care au legătură cu subiectul tratat și anume cu independența de drum a integralelor curbilinii.

**Definiția 3.10.4** Se numește **rotorul câmpului vectorial diferențiabil**

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k} \in C^1(D),$$

vectorul notat cu simbolul  $\text{rot } \mathbf{F}$  a cărei expresie analitică în baza  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  este

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \quad (3.88)$$

**Observația 3.10.1** Expresia rotorului câmpului vectorial  $\mathbf{F}$  poate fi scrisă convenabil ca determinantul simbolic

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad (3.89)$$

unde, în formula de calcul a determinantului după elementele primei linii, înmulțirea uneia din operațiile  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  și  $\frac{\partial}{\partial z}$  cu o funcție înseamnă derivata parțială a acelei funcții în raport cu variabila corespunzătoare: de exemplu,  $\frac{\partial}{\partial x} Q$  înseamnă derivata în raport cu  $x$  a funcției  $Q$ , adică  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ .

**Observația 3.10.2** *Având în vedere că expresia analitică a operatorului vectorial  $\nabla$  este*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

*și ținând cont de expresia produsului vectorial a doi vectori, deducem că rotorul unui câmp vectorial  $\mathbf{F}$  este produsul vectorial al operatorului  $\nabla$  cu vectorul  $\mathbf{F}$ . Prin urmare relațiile (3.88) și (3.89) se scriu în forma*

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}.$$

**Definiția 3.10.5** *Câmpul vectorial  $\mathbf{F} \in C^1(D)$  se numește irotațional dacă egalitatea  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$  are loc în toate punctele lui  $D$ .*

**Observația 3.10.3** *Câmpul vectorial diferențiabil  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  este irotațional pe domeniul tridimensional  $D$  dacă și numai dacă au loc relațiile (3.87).*

Folosind rezultatele de mai sus, o parte a Teoremei 3.10.2 se poate reformula.

**Teorema 3.10.3** *Integrala curbilinie de tipul al doilea a câmpului vectorial*

$$\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C^1(D)$$

*este independentă de drumul de integrare situat în domeniul simplu conex  $D$  dacă și numai dacă câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este irotațional.*

Așadar, după ce verificăm dacă domeniul pe care este definit câmpul diferențiabil  $\mathbf{F}$  este simplu conex, independența de drum pe  $D$  a integralei curbilinii în raport cu coordonatele din câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este funcție de rotorul acestui câmp. Dacă  $\mathbf{F}$  este câmp irotațional și  $D$  este domeniu simplu conex, atunci integrala curbilinie (3.73) este independentă de drum pe  $D$ .

### 3.11 Primitiva unei expresii diferențiale

În demonstrația Teoremei 3.10.1 am rezolvat implicit următoarea problemă: dată expresia diferențială (3.78) să se găsească o funcție reală diferențiabilă  $U$ , de două variabile reale, a cărei diferențială totală să coincidă cu expresia (3.78), adică să avem (3.75). Odată găsită o astfel de funcție  $U$ , oricare alta cu aceeași proprietate diferă de  $U$  printr-o constantă.

**Definiția 3.11.1** Fie  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  un câmp vectorial definit pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$  pentru care există rotorul  $\nabla \times \mathbf{F}$  care să fie funcție continuă. Se numește **primitivă** expresiei diferențiale

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

funcția reală de trei variabile reale  $U$  definită și diferențiabilă pe  $D$  care are proprietatea

$$dU(x, y, z) = \omega.$$

**Observația 3.11.1** Dacă domeniul tridimensional  $D$  este simplu conex și câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este irotațional, integrala curbilinie din expresia diferențială  $\omega$  este independentă de drum pe  $D$ , iar funcția

$$U : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x, y, z) = \int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (3.90)$$

unde  $A$  este un punct fixat din  $D$  și  $B(x, y, z)$  este punct variabil al lui  $D$ , este o primitivă a expresiei diferențiale  $\omega$ .

**Observația 3.11.2** Fiindcă integrala din (3.90) nu depinde de calea de integrare, putem considera că  $(AB)$  este o linie poligonală paralelă cu axele de coordonate. Considerând că punctele  $A$  și  $B$  au coordonatele  $A(x_0, y_0, z_0)$  și  $B(x, y, z)$ , linia poligonală  $(ACDB)$  este paralelă cu axele de coordonate dacă  $C(x, y_0, z_0)$  și  $D(x, y, z_0)$ .

Să calculăm integrala curbilinie din expresia diferențială  $\omega$  pe linia poligonală  $(ACDB)$ . Avem

$$U(x, y, z) = \int_{(AC)} \omega + \int_{(CD)} \omega + \int_{(DB)} \omega. \quad (3.91)$$

Dar pe drumul  $(AC)$ ,  $y = y_0$  (constant),  $z = z_0$  (constant), deci  $dy = 0$ ,  $dz = 0$  și

$$\int_{(AC)} \omega = \int_{(AC)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt. \quad (3.92)$$

Pe drumul (segmentul de dreaptă)  $(CD)$ ,  $x = x$  (constant),  $z = z_0$  (constant), deci  $dx = 0$ ,  $dz = 0$  și

$$\int_{(CD)} \omega = \int_{(CD)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt.$$

În sfârșit, pe ultima porțiune netedă de drum  $(DB)$ ,  $x = x$  (constant),  $y = y$  (constant), deci  $dx = 0$ ,  $dy = 0$  și

$$\int_{(DB)} \omega = \int_{(DB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt. \quad (3.93)$$

Folosind (3.92) – (3.93) în (3.91), obținem că funcția

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt \quad (3.94)$$

este o primitivă a expresiei diferențiale  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  și anume aceea primitivă care se anulează în punctul  $A(x_0, y_0, z_0)$ .

Să remarcăm că o formulă analoagă formulei (3.94) se obține dacă se integrează expresia diferențială  $\omega$  pe oricare alte trei muchii paralele cu axele de coordonate ale paralelipipedului cu două din vârfurile opuse  $A(x_0, y_0, z_0)$  și  $B(x, y, z)$ . De exemplu, dacă drumul de integrare este  $(AEFB)$ , unde  $E(x_0, y, z_0)$  și  $F(x_0, y, z)$ , primitiva din (3.94) se scrie în forma unei sume de trei integrale curbilinii pe segmente de drepte

$$U(x, y, z) = \int_{(AE)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{(EF)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{(FB)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii în spațiu, găsim că o altă expresie a primitivei expresiei diferențiale  $\omega = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$  este

$$U(x, y, z) = \int_{y_0}^y Q(x_0, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x_0, y, t) dt + \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt. \quad (3.95)$$

În cazul plan, două din primitivele expresiei diferențiale (3.78) sunt:

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt;$$

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt$$

și se obțin respectiv când integrăm  $\omega$  pe linia poligonală  $(ACB)$  cu  $C(x, y_0)$  și pe calea de integrare rezultată din reuniunea segmentelor de dreaptă  $(AD)$  și  $(DB)$ , unde  $D(x_0, y)$ .

**Exercițiul 3.11.1** *Se dă expresia diferențială*

$$\omega = \left( \frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) z dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left( \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz$$

definită pe orice domeniu tridimensional  $D$ , simplu conex, care nu intersectează planele de coordonate  $Oyz$  și  $Ozx$ . Să se arate că expresia de mai sus este o diferențială totală exactă și să se determine funcțiile primitive ale sale.

**Soluție.** Funcțiile  $P$ ,  $Q$  și  $R$  au valorile

$$P(x, y, z) = \left( \frac{1}{x^2 y} - \frac{1}{x^2 + z^2} \right) z, \quad Q(x, y, z) = \frac{z}{xy^2},$$

$$R(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy}$$

și, după cum se vede, sunt continue și derivabile pe domeniul simplu conex  $D$ . Trebuie să mai verificăm că  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , unde  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ . Efectuând derivatele parțiale ale funcțiilor coordonate  $P, Q, R$ , găsim

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{1}{xy^2}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1}{x^2 y} + \frac{z^2 - x^2}{(x^2 + z^2)^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{z}{x^2 y^2}, \end{aligned}$$

deci câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este irotational pe  $D$ . Pentru determinarea unei primitive vom lua  $A(x_0, y_0, 0)$  cu  $x_0 \cdot y_0 \neq 0$  și  $B(x, y, z)$  și aplicăm formula (3.95). Avem

$$U(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, 0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, 0) dt + \int_0^z R(x, y, t) dt.$$

Primele două integrale sunt nule pentru că în puncte ale planului  $xOy$  funcțiile  $P$  și  $Q$  au valori egale cu zero. Calculând cea de a treia integrală, găsim

$$U(x, y, z) = \int_0^z \left( \frac{x}{x^2 + t^2} - \frac{1}{xy} \right) dt.$$



Rezultă că primitiva expresiei diferențiale  $\omega$  care se anulează în punctele domeniului  $D$  situate în planul  $xOy$  este

$$U(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{x} - \frac{z}{xy},$$

oricare altă primitivă fiind  $V(x, y, z) = U(x, y, z) + C$ , unde  $C$  este o constantă reală arbitrară. ■

**Exercițiul 3.11.2** Fie expresia diferențială

$$\omega = \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + 2y \right) dx + \left( 2x - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy$$

definită într-un domeniu plan simplu conex  $D$  care nu conține originea. Să se arate că  $\omega$  este diferențială totală exactă pe  $D$  și să se determine funcția diferențiabilă  $U : D \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea  $dU(x, y) = \omega$ .

**Soluție.** Funcțiile reale de două variabile reale  $P$  și  $Q$  au valorile date de:

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} + 2y; \quad Q(x, y) = 2x - \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Derivatele parțiale  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  și  $\frac{\partial P}{\partial y}$  au valorile egale, și anume

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2,$$

deci integrala curbilinie de tipul al doilea din expresia diferențială  $\omega$  nu depinde de drumul de integrare situat în  $D$ . Funcția  $U$  a cărei diferențială este  $\omega$  și care se anulează în punctul  $A(a, b)$  are valorile:

$$U(x, y) = \int_a^x \left( \frac{b}{t^2 + b^2} + 2b \right) dt + \int_b^y \left( 2x - \frac{x}{x^2 + t^2} \right) dt;$$

$$U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{t}{b} \Big|_{t=a}^{t=x} + 2bt \Big|_{t=a}^{t=x} + 2xt \Big|_{t=b}^{t=y} - \operatorname{arctg} \frac{t}{x} \Big|_{t=b}^{t=y};$$

$$U(x, y) = 2xy + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - 2ab - \operatorname{arctg} \frac{a}{b}.$$

Oricare altă primitivă  $V$  a expresiei diferențiale date este de forma

$$V(x, y) = 2xy + \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C,$$

unde  $C$  este o constantă reală arbitrară. ■

# Capitolul 4

## Integrala dublă

### 4.1 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^2$

În acest paragraf vom reaminti unele noțiuni de topologie în spațiul euclidian  $\mathbb{R}^2$ . Între punctele acestui spațiu și cele ale unui plan în care s-a ales o pereche de axe perpendiculare  $Ox$  și  $Oy$ , de versori  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$  și respectiv  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ , există o corespondență biunivocă.

**Definiția 4.1.1** *Se numește **disc deschis** cu centrul în  $\mathbf{a} = (a, b)$  și rază  $\varepsilon > 0$  mulțimea*

$$B(\mathbf{a}, \varepsilon) = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \varepsilon\},$$

unde  $d$  este metrica euclidiană pe  $\mathbb{R}^2$  și  $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$  este distanța dintre punctele  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{a}$ .

Pentru simplitatea expunerii, discului deschis îi vom spune simplu **disc**.

**Definiția 4.1.2** *Un punct  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$  se numește **punct interior** al mulțimii  $D \subset \mathbb{R}^2$  dacă există un  $\varepsilon > 0$  astfel încât  $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \subset D$ .*

**Observația 4.1.1** *Un punct interior al mulțimii  $D$  aparține acesteia.*

**Definiția 4.1.3** *Submulțimea  $D \subset \mathbb{R}^2$  se numește mulțime **deschisă** dacă toate elementele sale sunt puncte interioare.*

**Definiția 4.1.4** Spunem că mulțimea  $D \subset \mathbb{R}^2$  este **mulțime conexă** dacă oricare două puncte ale lui  $D$  pot fi unite printr-un arc de curbă conținut în întregime în  $D$ .

**Definiția 4.1.5** O mulțime deschisă și conexă se numește **domeniu**.

De exemplu, discul cu centrul în origine și rază 1, adică totalitatea punctelor  $(x, y)$  care satisfac inegalitatea  $x^2 + y^2 < 1$ , este un domeniu, în timp ce mulțimea rezultată din reuniunea a două discuri

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + y^2 < 1\}$$

nu este un domeniu deoarece, deși este mulțime deschisă, nu este mulțime conexă întrucât există perechi de puncte ale sale care nu pot fi unite printr-un arc de curbă conținut în întregime în această mulțime.

**Definiția 4.1.6** Un punct  $a \in \mathbb{R}^2$  se numește **punct frontieră** al mulțimii  $D$  dacă orice vecinătate a sa conține atât puncte ale lui  $D$  cât și puncte care nu aparțin lui  $D$ . Totalitatea punctelor frontieră ale unei mulțimi se numește **frontiera** acelei mulțimi.

**Observația 4.1.2** Un punct frontieră al unei mulțimi  $D$  poate să aparțină sau să nu aparțină lui  $D$ . În particular, o mulțime deschisă nu conține nici unul din punctele frontierei sale.

**Definiția 4.1.7** O mulțime care își conține toate punctele frontieră se numește **mulțime închisă**.

**Observația 4.1.3** Fiecărei mulțimi  $i$  se poate atașa o mulțime închisă, care se numește **închiderea** acelei mulțimi, care constă din toate punctele mulțimii la care se adaugă punctele sale frontieră.

În particular, când adăugăm unui domeniu  $D$  punctele sale frontieră obținem o mulțime închisă pe care putem să o numim **domeniu închis** sau **continuu**.

**Definiția 4.1.8** Punctul  $a \in \mathbb{R}^2$  se numește **punct limită** sau **punct de acumulare** al mulțimii  $D \subset \mathbb{R}^2$  dacă există un șir de puncte din  $D$ , cu termeni diferiți de  $a$ , convergent la  $a$ .

**Observația 4.1.4** *Un punct limită al unei mulțimi  $D$  poate să aparțină sau să nu aparțină mulțimii  $D$ .*

Se știe că o mulțime este închisă dacă și numai dacă își conține toate punctele de acumulare.

**Definiția 4.1.9** *Mulțimea  $D \subset \mathbb{R}^2$  se numește **mărginită** dacă poate fi inclusă într-un disc cu centrul într-un punct oarecare al spațiului  $\mathbb{R}^2$  deci, indiferent de  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ , există  $r > 0$  astfel încât*

$$D \subset B(\mathbf{x}_0, r).$$

**Definiția 4.1.10** *O mulțime mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^2$  se numește **mulțime compactă** în  $\mathbb{R}^2$ .*

Dacă  $D$  este o mulțime mărginită în  $\mathbb{R}^2$ , atunci mulțimea tuturor distanțelor  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  între punctele arbitrare  $\mathbf{x} \in D$  și  $\mathbf{y} \in D$  este o mulțime de numere reale nenegative mărginită deoarece oricare din aceste distanțe nu poate fi mai mare decât diametrul discului în care este inclusă mulțimea  $D$ . Prin urmare, putem vorbi de marginea superioară a acestei mulțimi de numere.

**Definiția 4.1.11** *Se numește **diametrul** mulțimii mărginită  $D \subset \mathbb{R}^2$  marginea superioară a mulțimii de numere nenegative  $\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x} \in D, \mathbf{y} \in D\}$ .*

**Definiția 4.1.12** *Fie  $D$  și  $E$  două mulțimi arbitrare din  $\mathbb{R}^2$ . Se numește **distanța dintre mulțimile  $D$  și  $E$**  marginea inferioară  $d(D, E)$  a mulțimii de numere reale nenegative  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , unde  $\mathbf{x} \in D$ , iar  $\mathbf{y} \in E$ .*

Dacă mulțimile  $D$  și  $E$  au cel puțin un punct în comun (au intersecție nevidă), atunci  $d(A, B) = 0$ . Reciproca acestei afirmații nu are loc în general. De exemplu, distanța între hiperbola echilaterală  $x \cdot y = 1$  și axa  $Ox$  este zero deși aceste două mulțimi de puncte nu au nici un punct comun deoarece axa  $Ox$  nu intersectează hiperbola, ea fiind însă asimptotă hiperbolei. În legătură cu această afirmație avem următorul rezultat.

**Teorema 4.1.1 (Separabilitatea mulțimilor închise)** *Dacă mulțimile  $D$  și  $E$  sunt compacte și disjuncte în  $\mathbb{R}^2$ , atunci  $d(D, E) > 0$ .*

**Demonstrație.** Presupunem contrariul, adică  $d(D, E) = 0$ . Din Definiția 4.1.12 și teorema de caracterizare a marginii inferioare a unei mulțimi, rezultă că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$  există punctele  $\mathbf{x}_n \in D$  și  $\mathbf{y}_n \in E$  astfel încât

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) < \frac{1}{n}. \quad (4.1)$$

Deoarece mulțimea  $D$  este mărginită rezultă că șirul de puncte  $(\mathbf{x}_n)$  este mărginit și, după lema lui Cesaro, admite un subșir

$$\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \dots, \mathbf{x}_{k_n}, \dots$$

convergent la un punct  $\mathbf{x}_0$ . Corespunzător, șirul de puncte

$$\mathbf{y}_{k_1}, \mathbf{y}_{k_2}, \dots, \mathbf{y}_{k_n}, \dots,$$

subșir al șirului  $(\mathbf{y}_n)$ , este convergent conform lui (4.1) la același punct  $\mathbf{x}_0$ .

Să demonstrăm că punctul  $\mathbf{x}_0$  aparține mulțimii  $D$ . Într-adevăr, pot exista două posibilități. Ori subșirul  $(\mathbf{x}_{k_n})$  conține o infinitate de puncte distincte, fapt care arată că  $\mathbf{x}_0$  este punct limită al mulțimii  $D$ , prin urmare  $\mathbf{x}_0 \in D$  deoarece  $D$  este o mulțime închisă ori, de la un rang înainte, toți termenii subșirului sunt egali cu  $\mathbf{x}_0$ , caz în care limita este de asemenea  $\mathbf{x}_0$ , care din nou aparține lui  $D$ . Limita celui de al doilea subșir este tot  $\mathbf{x}_0$  și aparține lui  $E$ , deoarece și  $E$  este mulțime închisă. Atunci,  $D$  și  $E$  au un punct în comun ceea ce contrazice ipoteza teoremei. ■

## 4.2 Aria figurilor plane

Prin **mulțime poligonală** înțelegem mulțimea constituită dintr-un număr finit de submulțimi ale lui  $\mathbb{R}^2$  ale căror frontiere sunt linii frânte închise. Noțiunea de **arie a unei mulțimi poligonale** este bine cunoscută din geometria elementară. Aria unei mulțimi poligonale este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăți:

1. (*monotonie*) Dacă  $P$  și  $Q$  sunt două mulțimi poligonale, iar  $P \subset Q$ , atunci

$$\text{aria } P \leq \text{aria } Q;$$

2. (*aditivitate*) Dacă  $P_1$  și  $P_2$  sunt două mulțimi poligonale disjuncte și  $P_1 \cup P_2$  este reuniunea acestora, atunci

$$\text{aria } (P_1 \cup P_2) = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2;$$

3. (*invariantă*) Dacă două mulțimi poligonale  $P_1$  și  $P_2$  sunt congruente, atunci

$$\text{aria } P_1 = \text{aria } P_2.$$

Să extindem noțiunea de arie, cu păstrarea celor trei proprietăți, la o clasă mai amplă de mulțimi plane. În acest scop considerăm mulțimea  $F$ , o submulțime a mulțimii  $\mathbb{R}^2$ . Vom considera de asemeni toate mulțimile poligonale  $P$  incluse în  $F$  și toate mulțimile poligonale  $Q$  care includ mulțimea  $F$ . Primele mulțimi se vor numi **mulțimi scufundate** în mulțimea  $F$ , iar mulțimile din cea de a doua categorie formează ceea ce se numește **înfășurătoarea** mulțimii  $F$ . Ariile mulțimilor scufundate în mulțimea  $F$  sunt mărginite superior, un majorant fiind aria oricărei mulțimi mărginite care face parte din înfășurătoarea lui  $F$ . Mulțimea de numere reale nenegative care reprezintă ariile mulțimilor scufundate, fiind o mulțime majorată, admite o margine superioară

$$S_* = S_*(F) = \sup\{\text{aria } P : P \subset F\},$$

iar mulțimea ariilor mulțimilor care constituie înfășurătoarea lui  $F$  posedă evident minoranți și ca atare admite margine inferioară

$$S^* = S^*(F) = \inf\{\text{aria } Q : Q \supset F\}.$$

Cantitatea  $S_*$  este cunoscută ca *măsura Jordan interioară* a mulțimii  $F$ , iar numărul  $S^*$  se numește *măsura Jordan exterioară* a aceleiași mulțimi. Aria oricărei mulțimi scufundate în  $F$  nu întrece aria oricărei mulțimi care înfășoară pe  $F$  și, ca urmare, avem

$$S_* \leq S^*.$$

Dacă  $S_* = S^* = S$ , atunci valoarea comună  $S$  se numește *măsura Jordan* a mulțimii  $F$ . În acest caz mulțimea  $F$  se zice că este *carabilă* sau *măsurabilă Jordan*.

Astfel, am extins conceptul de arie de la o mulțime poligonală, care este evident o mulțime carabilă, la o mulțime mărginită oarecare din plan. Vom

demonstra că cele trei proprietăți ale ariilor mulțimilor poligonale se conservă și pentru ariile mulțimilor oarecare mărginite din plan.

Vom stabili acum o condiție necesară și suficientă ca o mulțime mărginită să fie carabilă.

**Teorema 4.2.1** *O figură plană mărginită  $F$  este carabilă dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există două mulțimi poligonale  $P \subset F$  și  $Q \supset F$  astfel încât*

$$\text{aria } Q - \text{aria } P < \varepsilon. \quad (4.2)$$

**Demonstrație.** Într-adevăr, dacă aceste mulțimi  $P$  și  $Q$  există, atunci din (4.2) și din

$$\text{aria } P \leq S_* \leq S^* \leq \text{aria } Q$$

rezultă

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon > 0$$

și fiindcă  $\varepsilon > 0$  este ales arbitrar rezultă că  $S_* = S^*$ .

Reciproc, dacă  $S_* = S^*$ , atunci după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară și superioară, pentru orice  $\varepsilon > 0$  dat există o mulțime poligonală  $P$ , scufundată în  $F$ , și o mulțime  $Q$  din înfășurătoarea lui  $F$ , astfel încât

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{aria } P \leq S_*, \quad S^* \leq \text{aria } Q < S^* + \frac{\varepsilon}{2},$$

care implică (4.2), ceea ce completează demonstrația teoremei. ■

Mulțimea punctelor care aparțin unei mulțimi poligonale  $Q$  care înfășoară mulțimea  $F$  și nu aparțin mulțimii poligonale  $P$ , scufundată în  $F$ , este o mulțime poligonală având aria egală cu diferența dintre aria lui  $Q$  și aria lui  $P$ . Această mulțime de puncte conține frontiera mulțimii  $F$ . În consecință, condiția din Teorema 4.2.1 implică că  $F$  este carabilă dacă și numai dacă frontiera sa poate fi scufundată într-o mulțime poligonală cu arie arbitrar de mică.

Cu ajutorul Teoremei 4.2.1 se poate stabili măsurabilitatea Jordan a unor mulțimi diferite de cele poligonale. O astfel de mulțime poate fi discul de rază  $r$ . Mulțimile  $P$  și  $Q$  pentru disc pot fi mulțimile mărginite de poligoane regulate înscrise și respectiv circumscrise discului, numărul  $n$  al laturilor acestor poligoane fiind suficient de mare. De altfel, acesta este modul în care, în geometria elementară, se obține formula ariei discului de rază  $r$ .

**Definiția 4.2.1** O mulțime de puncte din  $\mathbb{R}^2$  se numește **mulțime de arie nulă** dacă ea poate fi scufundată într-o mulțime poligonală de arie arbitrar de mică.

**Observația 4.2.1** O curbă în planul  $Oxy$  este o mulțime de arie nulă.

Noțiunea din Definiția 4.2.1 face ca Teorema 4.2.1 să poată fi reformulată în următoarea formă echivalentă.

**Teorema 4.2.2** Necesari și suficienți pentru ca mulțimea  $F$  să fie măsurabilă Jordan este ca frontiera sa să fie de arie nulă.

Bazat pe această teoremă putem prezenta o clasă suficient de vastă de mulțimi carabile la care vom face referire în considerațiile ulterioare. Pentru aceasta să ne amintim că o curbă plană  $(C)$  reprezentată parametric prin ecuațiile

$$(C) \quad \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

unde funcțiile  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt continue, derivabile, cu derivate continue sau continue pe porțiuni este o curbă rectificabilă, lungimea  $L$  a acesteia fiind dată de integrala definită

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

**Lema 4.2.1** Orice curbă plană rectificabilă este o mulțime de arie nulă.

**Demonstrație.** Fie  $(C)$  o curbă plană rectificabilă de lungime  $L$ . Divizăm curba în  $n$  părți prin  $n+1$  puncte astfel încât lungimea fiecărei părți să fie  $L/n$  și construim un pătrat de latură  $2L/n$  cu centrul de simetrie în punctul de diviziune de ordin  $k$ , unde  $k$  ia toate valorile de la 1 până la  $n+1$ . Reuniunea acestor pătrate este o mulțime poligonală care înfășoară curba  $(C)$  și a cărei arie nu întrece suma ariilor pătrateleor construite, prin urmare nu este mai mare decât

$$\frac{4L^2}{n^2}(n+1).$$

Deoarece  $L$  este fixat și  $n$  poate lua valori numere naturale oricât de mari dorim, curba  $(L)$  poate fi scufundată într-o mulțime poligonală de arie extrem de mică și ca atare aria lui  $(C)$  este egală cu zero. ■



**Corolarul 4.2.1** *Orice mulțime plană mărginită a cărei frontieră este o reuniune finită de curbe plane rectificabile este mulțime măsurabilă Jordan.*

Aceasta este clasa de mulțimi care o vom considera în continuare.

**Observația 4.2.2** *Orice mulțime de puncte din plan, cu frontiera reprezentată ca o reuniune finită de curbe plane definite printr-o ecuație carteziană explicită de forma*

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

*sau printr-o ecuație carteziană explicită de forma*

$$x = g(y), \quad c \leq y \leq d,$$

*unde funcțiile  $f$  și  $g$  sunt funcții continue, cu derivate continue pe porțiuni, este o mulțime măsurabilă în sens Jordan.*

Avem acum pregătite toate condițiile pentru a arăta că noțiunea de arie a unei mulțimi plane mărginită satisface proprietățile de monotonie, aditivitate și invarianță.

În ce privește monotonia aceasta este implicată de însăși definiția ariei, demonstrația sa putând fi ușor efectuată. Să stabilim aditivitatea.

**Teorema 4.2.3** *Fie  $F_1$  și  $F_2$  două figuri măsurabile Jordan având interioarele disjuncte și fie  $F$  reuniunea lor. Atunci,  $F$  este carabilă și*

$$\text{aria } F = \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2. \quad (4.3)$$

**Demonstrație.** Măsurabilitatea Jordan a mulțimii  $F$  rezultă din Teorema 4.2.2 și din faptul că frontiera lui  $F$  este o mulțime de arie nulă deoarece această frontieră este inclusă în reuniunea frontierelor mulțimilor  $F_1$  și  $F_2$ . Prin urmare, pentru a completa demonstrația, trebuie să deducem egalitatea (4.3). Pentru aceasta considerăm mulțimile poligonale  $P_1$  și  $P_2$  scufundate în respectiv mulțimile  $F_1$  și  $F_2$  și mulțimile poligonale  $Q_1$  și  $Q_2$  care înfășoară  $F_1$  și  $F_2$  respectiv. Deoarece mulțimile poligonale  $P_1$  și  $P_2$  nu se intersectează, aria mulțimii poligonale  $P$  rezultată din reuniunea acestora este egală cu suma ariilor lor. Reuniunea  $Q$  a mulțimilor  $Q_1$  și  $Q_2$ , care pot avea intersecție nevidă, are arie care nu întrece suma ariilor acestora. Prin urmare, avem:

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F \leq \text{aria } Q \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2;$$

$$\text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 \leq \text{aria } F_1 + \text{aria } F_2 \leq \text{aria } Q_1 + \text{aria } Q_2.$$

Deoarece diferențele ( $\text{aria } Q_1 - \text{aria } P_1$ ) și ( $\text{aria } Q_2 - \text{aria } P_2$ ) pot fi făcute arbitrar de mici rezultă că are loc egalitatea (4.3). Astfel aditivitatea este demonstrată. ■

Proprietatea de invarianță a măsurabilității Jordan a unei mulțimi din  $\mathbb{R}^2$  este de asemenea evidentă. În plus, remarcăm o altă proprietate a mulțimilor plane mărginite și măsurabile Jordan.

**Teorema 4.2.4** *Intersecția a două mulțimi din  $\mathbb{R}^2$ , măsurabile în sensul lui Jordan, este o mulțime carabilă.*

**Demonstrație.** Dacă  $F_1$  și  $F_2$  sunt două mulțimi carabile și  $F$  este intersecția lor, atunci fiecare punct frontieră este un punct frontieră al cel puțin uneia din frontierele mulțimilor  $F_1$  și  $F_2$ . Afirmatia teoremei rezultă din Teorema 4.2.2 și din faptul că aria unei reuniuni de mulțimi de arie nulă este egală cu zero. ■

Noțiunea de arie a fost introdusă în conformitate cu ideea lui Jordan, deși această introducere are unele dezavantaje. Într-adevăr, după cum s-a arătat, reuniunea a două mulțimi carabile este o mulțime carabilă. Aceasta implică imediat că reuniunea unui număr finit de mulțimi carabile este o mulțime carabilă. Proprietatea însă nu se mai păstrează dacă numărul mulțimilor măsurabile în sens Jordan este infinit. Această situație face necesară introducerea unei alte măsuri în care să se păstreze proprietatea de mai sus. O astfel de măsură poate fi *măsura Lebesgue*, pe care nu o vom prezenta aici deoarece în continuare vom considera doar integrabilitatea funcțiilor definite pe mulțimi măsurabile în sens Jordan.

## 4.3 Definiția integralei duble

Fie  $D$  o mulțime mărginită și carabilă din planul cartezian raportat la reperul ortogonal  $xOy$  și

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.4)$$

o funcție reală de două variabile reale definită și mărginită pe mulțimea  $D$ .

**Definiția 4.3.1** *Se numește **partiție** sau **divizare** a mulțimii  $D$  mulțimea*

$$\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \quad (4.5)$$

*de submulțimi a lui  $D$  cu proprietățile:*

1. interioarele oricăror două mulțimi distincte sunt disjuncte;
2. reuniunea tuturor mulțimilor partiției, numite **elemente**, în număr de  $n \in \mathbb{N}^*$ , este mulțimea  $D$ .

**Observația 4.3.1** O partiție a mulțimii mărginite  $D \subset \mathbb{R}^2$ , măsurabilă în sens Jordan, se poate realiza cu ajutorul unor elemente a două familii uni-parametrice de curbe plane. De exemplu, aceste curbe plane pot fi unele paralele la axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$ .

Deoarece mulțimea  $D$  este mărginită rezultă că fiecare din elementele partiției  $\Delta$  este mărginită și ca atare mulțimea tuturor diametrelor  $d(D_i)$  are un cel mai mare element.

**Definiția 4.3.2** Fie mulțimea mărginită și carabilă  $D$  și  $\Delta$  o partiție a acesteia. Se numește **norma** sau **finețea** divizării  $\Delta$  numărul real  $\nu(\Delta)$  sau  $\|\Delta\|$  egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor partiției.

Considerăm o partiție  $\Delta$  a mulțimii  $D$  și suma de forma

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i, \quad (4.6)$$

unde  $S_i$  este aria lui  $D_i$ , iar  $(\xi_i, \eta_i)$  este un punct arbitrar aparținând lui  $D_i$ , numit **punct intermediar**.

**Definiția 4.3.3** Sumele din relația (4.6) se numesc **sume integrale asociate** funcției  $f$  din (4.4), modului de divizare  $\Delta$  de forma (4.5) al mulțimii  $D$  și sistemului de puncte intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  ales arbitrar.

**Definiția 4.3.4** O partiție  $\Delta' = \{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\}$  a mulțimii  $D$  se spune că este o **rafinare** a divizării  $\Delta$  din (4.5) dacă fiecare element  $D_i$  al partiției  $\Delta$  este sau element al partiției  $\Delta'$  sau reuniunea câtorva elemente  $D'_j$  din partiția  $\Delta'$ .

**Observația 4.3.2** Există o infinitate de sume integrale căci există o infinitate de moduri de a diviza mulțimea  $D$  și în cadrul fiecărei partiții există o infinitate de posibilități de a alege punctele intermediare.

Introducem următoarea definiție a limitei sumelor integrale (4.6).

**Definiția 4.3.5** Numărul real  $J$  este **limita sumelor integrale** (4.6) când  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  astfel încât oricare ar fi partiția  $\Delta$  a mulțimii  $D$  cu

$$\|\Delta\| < \delta \quad (4.7)$$

și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  să avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - J| < \varepsilon. \quad (4.8)$$

Inegalitatea (4.8) trebuie să fie adevărată pentru toate sumele integrale  $\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$  care corespund partiției  $\Delta$  din (4.5) ce satisface condiția (4.7), indiferent de alegerea punctelor intermediare.

**Definiția 4.3.6** Funcția (4.4) se numește **integrabilă pe  $D$**  dacă limita sumelor integrale (4.6) pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  există și este finită.

**Definiția 4.3.7** Dacă funcția (4.4) este integrabilă pe  $D$ , atunci numărul real

$$J = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i \quad (4.9)$$

se numește **integrala dublă a funcției  $f$  pe mulțimea  $D$**  și se notează cu unul din simbolurile

$$J = \iint_D f(x, y) d\omega; \quad J = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4.10)$$

Funcția  $f$  se numește *integrand*,  $D$  se numește *domeniu de integrare*, iar expresiile  $f(x, y) d\omega$  și  $f(x, y) dx dy$  se numesc *elemente de integrare*.

Să găsim condiții care, impuse funcției (4.4), asigură existența integralei duble (4.10). Aceste condiții le vom numi condiții de integrabilitate.

Pentru a stabili condiții de integrabilitate introducem *sume Darboux inferioară și superioară*. În acest sens notăm prin  $M_i$  și  $m_i$  marginea superioară și respectiv marginea inferioară a valorilor restricției funcției  $f$  la elementul  $D_i$  al partiției  $\Delta$  din (4.5).

**Definiția 4.3.8** *Sumele:*

$$\Omega = S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n M_i S_i; \quad \omega = s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n m_i S_i \quad (4.11)$$

se numesc respectiv **suma Darboux superioară** și **suma Darboux inferioară** a funcției  $f$  corespunzătoare diviziunii  $\Delta$  a mulțimii carabile  $D$ .

**Observația 4.3.3** *Din modul cum au fost definite sumele Darboux (4.11) rezultă că oricare ar fi divizarea  $\Delta$  a mulțimii  $D$ , avem*

$$\Omega \geq \omega.$$

Să enumerăm proprietățile fundamentale ale sumelor Darboux.

1. Pentru orice divizare  $\Delta$  a mulțimii  $D$  și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare, suma integrală corespunzătoare se află cuprinsă între suma Darboux inferioară și suma Darboux superioară corespunzătoare partiției  $\Delta$ ,

$$s_{\Delta}(f) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i \leq S_{\Delta}(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulțimii  $D$ , sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Aceasta înseamnă că dacă  $\omega$  și  $\Omega$  sunt sumele Darboux corespunzătoare modului de divizare  $\Delta$ , iar  $\omega'$  și  $\Omega'$  sunt sumele Darboux corespunzătoare partiției  $\Delta'$ , atunci

$$\omega \leq \omega' \leq \Omega' \leq \Omega.$$

3. Fie  $\Delta'$  și  $\Delta''$  două diviziuni arbitrare a mulțimii  $D$  și fie  $\omega'$ ,  $\Omega'$  și  $\omega''$ ,  $\Omega''$ , sumele Darboux corespunzătoare asociate acestor partiții. Atunci, avem

$$\omega' \leq \Omega'' \quad \text{și} \quad \omega'' \leq \Omega'$$

adică orice sumă Darboux inferioară asociată funcției  $f$  și corespunzătoare unui mod de divizare nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiași funcții și corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulțimii  $D$ .

4. Mulțimea tuturor sumelor Darboux superioare corespunzătoare funcției (4.4) este mărginită inferior, un minorant al acesteia fiind oricare dintre sumele Darboux inferioare asociate aceleiași funcții.
5. Mulțimea tuturor sumelor Darboux inferioare corespunzătoare funcției  $f$  din (4.4) este mărginită superior, un majorant al acestei mulțimi fiind oricare din sumele Darboux superioare asociate funcției  $f$ .

6. Dacă notăm cu  $\mathcal{D}$  mulțimea divizărilor mulțimii  $D$ , atunci există numerele reale:

$$\overline{J} = \inf\{S_{\Delta}(f) : \Delta \in \mathcal{D}\}; \quad \underline{J} = \sup\{s_{\Delta}(f) : \Delta \in \mathcal{D}\},$$

care se numesc *integralele Darboux superioară* și respectiv *inferioară* ale funcției  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.3.1** *Integralele Darboux inferioară și superioară ale funcției reale de două variabile reale  $f$  definită pe mulțimea carabilă  $D \subset \mathbb{R}^2$  satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \leq \overline{J}.$$

**Demonstrație.** Presupunem contrariul și anume că  $\underline{J} > \overline{J}$ . Atunci, există un număr  $\varepsilon > 0$  astfel încât

$$\underline{J} - \overline{J} > \varepsilon > 0. \quad (4.12)$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară și superioară, putem spune că pentru  $\varepsilon > 0$  de mai sus există o sumă Darboux superioară  $\Omega_1$  și o sumă Darboux inferioară  $\omega_2$  astfel încât

$$\Omega_1 - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde deducem

$$\Omega_1 - \omega_2 + (\underline{J} - \overline{J}) < \varepsilon.$$

În consecință, în conformitate cu (4.12), avem

$$\Omega_1 - \omega_2 < 0$$

care contrazice proprietatea 3. a sumelor Darboux. ■

## 4.4 Condiții de integrabilitate

Proprietățile sumelor Darboux inferioare și superioare permit stabilirea unei condiții necesare și suficiente pentru integrabilitatea funcției reale  $f$  definită și mărginită pe o mulțime carabilă din  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.4.1 (Darboux)** *Integrala superioară  $\bar{J}$  (respectiv integrala inferioară  $\underline{J}$ ) este limita pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  a sumelor Darboux superioare (respectiv a sumelor Darboux inferioare).*

**Demonstrație.** Introducem mai întâi noțiunea de **frontieră** a partiției  $\Delta$  a mulțimii  $D$ . Dacă partiția  $\Delta \in \mathcal{D}$  este compusă din submulțimile  $D_i$ , atunci reuniunea  $\partial\Delta$  a frontierelor  $\partial D_i$  ale mulțimilor  $D_i$  se numește frontiera partiției  $\Delta$ . Prin urmare,

$$\partial\Delta = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \dots \cup \partial D_n.$$

Frontierele  $\partial D_i$  fiind de arie nulă oricare ar fi divizarea  $\Delta \in \mathcal{D}$ , rezultă că frontiera divizării  $\partial\Delta$  este de arie nulă.

În plus, putem afirma că frontiera  $\partial\Delta$  se poate prezenta în cele din urmă ca reuniune de curbe închise, care sunt mulțimi închise în  $\mathbb{R}^2$ , și ca urmare  $\partial\Delta$  este o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^2$ .

Având în vedere cine este  $\bar{J}$  rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există o divizare  $\Delta^*$  a mulțimii  $D$  cu proprietatea că suma Darboux superioară  $\Omega^*$  satisface condiția

$$0 \leq \Omega^* - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Frontiera  $\partial\Delta^*$  a divizării  $\Delta^*$  poate fi scufundată într-o mulțime poligonală  $Q$  de arie mai mică decât  $\varepsilon/(2M)$ , unde  $M = \sup\{|f(x, y)| : (x, y) \in D\}$ , incluziunea  $\partial\Delta^* \subset Q$  fiind strictă. Frontiera  $\partial\Delta^*$  și frontiera mulțimii poligonale  $Q$  sunt două mulțimi închise în  $\mathbb{R}^2$  care nu au puncte comune. În consecință, distanța dintre aceste mulțimi este un număr pozitiv  $\alpha$ . Considerăm acum o partiție arbitrară  $\Delta \in \mathcal{D}$  cu proprietatea  $\|\Delta\| < \alpha$ . Elementele partiției  $\Delta$ , deci mulțimile  $D_i$ , au următoarea proprietate evidentă: dacă  $D_i$  și  $\partial\Delta^*$  au cel puțin un punct în comun, atunci mulțimea  $D_i$  este strict inclusă în interiorul mulțimii poligonale  $Q$ . Asemenea mulțimi componente ale partiției  $\Delta$  vor fi numite *elemente frontieră*, iar toate celelalte elemente, care nu se încadrează în această categorie, le vom numi *elemente interioare*. Să arătăm acum că oricărei partiții  $\Delta \in \mathcal{D}$  cu  $\|\Delta\| < \alpha$ , corespunde o sumă Darboux superioară  $\Omega$  care diferă de integrala Darboux superioară  $\bar{J}$  cu mai puțin decât  $\varepsilon$ . Pentru aceasta împărțim termenii care intră în definiția sumei  $\Omega$  în două grupe de termeni

$$\Omega = \sum_{i=1}^n M_i S_i = \sum' M'_i S'_i + \sum'' M''_i S''_i,$$

unde sumarea în penultima sumă se extinde la toate elementele interioare în timp ce, în ultima sumă, sumarea se referă la elementele frontieră. Să evaluăm separat fiecare din aceste sume. Fiecare element interior al partiției  $\Delta$  este strict inclus întrun element al partiției  $\Delta^*$ . Fiindcă marginea superioară  $M'_i$  a valorilor funcției  $f(x, y)$ , pe un element interior al divizării  $\Delta$ , nu depășește marginea superioară a aceleiași funcții pe elementul divizării  $\Delta^*$  care conține elementul interior respectiv, rezultă că partea din suma Darboux superioară  $\Omega$  referitoare la elementele interioare nu poate întrece pe  $\Omega^*$ , adică

$$\sum' M'_i S'_i \leq \Omega^*.$$

Mai departe, avem inegalitățile evidente:

$$|M''_i| \leq M; \quad \sum'' S''_i < \text{aria } Q < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

În consecință, vom avea satisfăcută inegalitatea

$$|\sum'' M''_i S''_i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

și ca urmare,

$$\Omega = \sum' M'_i S'_i + \sum'' M''_i S''_i \leq \Omega^* + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{J} + \varepsilon.$$

Așadar am demonstrat că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\alpha$  care depinde de  $\varepsilon$  încât oricare ar fi divizarea  $\Delta$  cu  $\|\Delta\| < \alpha$ , avem

$$\Omega - \bar{J} < \varepsilon$$

rezultat care arată că limita, pentru norma divizărilor tinzând la zero, a sumelor Darboux superioare este integrala superioară Darboux. În mod asemănător se demonstrează și cealaltă afirmație a lemei. ■

**Teorema 4.4.1 (Criteriul de integrabilitate a lui Darboux).** *O funcție mărginită  $f(x, y)$  definită pe o mulțime mărginită și carabilă  $D \subset \mathbb{R}^2$  este integrabilă pe  $D$  dacă și numai dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $\delta(\varepsilon)$ , astfel încât oricare ar fi partiția  $\Delta$  a mulțimii  $D$  cu  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ , să avem*

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon. \quad (4.13)$$



**Demonstrație.** Condiția este necesară. Dacă  $f$  este o funcție mărginită și integrabilă pe mulțimea plană mărginită și carabilă  $D$ , atunci există numărul real  $J$

$$J = \iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

iar acest număr este limita sumelor integrale Riemann pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$ , care nu depinde de alegerea punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , unde  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  este o divizare a mulțimii  $D$ . De aici rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi divizarea  $\Delta \in \mathcal{D}$  cu  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$  și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  are loc inegalitatea

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - J| < \frac{\varepsilon}{2},$$

care poate fi scrisă și în forma echivalentă

$$J - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) < J + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.14)$$

De asemenea, știm că sumele Darboux superioară și inferioară corespunzătoare partiției  $\Delta \in \mathcal{D}$  sunt respectiv marginea superioară și marginea inferioară a sumelor integrale Riemann asociate acelei divizări. Prin urmare, putem lua o divizare fixată  $\Delta \in \mathcal{D}$  și să alegem punctele intermediare  $(\xi'_i, \eta'_i) \in D_i$  și  $(\xi''_i, \eta''_i) \in D_i$  astfel încât să fie satisfăcute următoarele inegalități:

$$\Omega - \sum_{i=1}^n f(\xi'_i, \eta'_i) S_i < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=1}^n f(\xi''_i, \eta''_i) S_i - \omega < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.15)$$

Fiecare din cele două sume integrale Riemann din (4.15) satisface condiția (4.14) și, ca urmare, din (4.15) obținem rezultatul dorit, adică (4.13).

Condiția este suficientă. Dacă pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi divizarea  $\Delta \in \mathcal{D}$  cu  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$  să avem (4.13), atunci  $\underline{J} = \bar{J}$ .

Într-adevăr, din proprietățile sumelor Darboux avem

$$s_\Delta(f) \leq \underline{J} \leq \bar{J} \leq S_\Delta(f) \quad (4.16)$$

pentru orice diviziune  $\Delta$  a lui  $D$ . Dacă  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ , din inegalitatea (4.16) și din condiția (4.13), obținem

$$0 \leq \bar{J} - \underline{J} \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

adică  $0 \leq \bar{J} - \underline{J} < \varepsilon$ . Deoarece  $\varepsilon > 0$  a fost presupus arbitrar rezultă că  $\underline{J} = \bar{J}$ .

Să notăm valoarea comună a cantităților  $\underline{J}$  și  $\bar{J}$  cu  $J$  și să arătăm că  $J$  este limita pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  a sumelor integrale Riemann asociate funcției  $f$ , adică este integrala dublă a funcției  $f$  pe domeniul de integrare  $D$ . După lema lui Darboux,  $J$  este limita comună pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  a sumelor Darboux inferioare și superioare asociate funcției  $f$  și modurilor de divizare  $\Delta \in \mathcal{D}$ , adică

$$J = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} s_{\Delta}(f) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S_{\Delta}(f). \quad (4.17)$$

Pe de altă parte, avem

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) \leq S_{\Delta}(f) \quad (4.18)$$

oricare ar fi divizarea  $\Delta \in \mathcal{D}$  și oricare ar fi punctele intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ .

Trecerea la limită în (4.18) pentru  $\|\Delta\| \rightarrow 0$  și folosirea lui (4.17) conduce la rezultatul dorit. ■

**Observația 4.4.1** *Din criteriul de integrabilitate a lui Darboux rezultă că o funcție reală  $f$ , definită și mărginită pe o mulțime mărginită și carabilă din  $\mathbb{R}^2$ , este integrabilă pe  $D$ , dacă și numai dacă integralele Darboux corespunzătoare,  $\underline{J}$  și  $\bar{J}$  sunt egale. Valoarea comună a celor două integrale  $J = \underline{J} = \bar{J}$  este tocmai integrala lui  $f$  pe domeniul de integrare  $D$ .*

## 4.5 Clase de funcții integrabile

În cele ce urmează vom considera funcții definite pe mulțimi mărginite și închise, deci mulțimi compacte în  $\mathbb{R}^2$ , care sunt carabile.

Aplicând Teorema 4.4.1, vom stabili integrabilitatea unor clase importante de funcții prima dintre ele fiind clasa funcțiilor continue.

**Teorema 4.5.1** *Orice funcție continuă  $f$  definită pe mulțimea compactă  $D \subset \mathbb{R}^2$  este integrabilă pe  $D$ .*

**Demonstrație.** Fie  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  o divizare oarecare a lui  $D$ . Deoarece funcția  $f$  este continuă pe  $D$ , va fi funcție continuă pe fiecare domeniu compact  $D_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Însă, o funcție continuă pe o mulțime

compactă este mărginită și își atinge efectiv marginile. Prin urmare, funcția  $f$  este mărginită pe  $D_i$  și își atinge marginile. Putem afirma că există două puncte  $\mathbf{x}'_i = (x'_i, y'_i)$  și  $\mathbf{x}''_i = (x''_i, y''_i)$  din  $D_i$  astfel încât să avem:

$$m_i = f(x'_i, y'_i); \quad M_i = f(x''_i, y''_i).$$

Rezultă

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) S_i = \sum_{i=1}^n (f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)) S_i.$$

Deoarece  $f$  este continuă pe o mulțime compactă ea este mărginită și uniform continuă pe acea mulțime. Uniforma continuitate a funcției  $f$  implică că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice două puncte  $\mathbf{x}' = (x', y')$  și  $\mathbf{y} = (x'', y'')$  cu

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta(\varepsilon)$$

să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Pentru orice diviziune  $\Delta$  a lui  $D$ , cu  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$  avem

$$d(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i) < \delta(\varepsilon)$$

și deci

$$|f(x'_i, y'_i) - f(x''_i, y''_i)| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Așadar, dacă  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ , atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \sum_{i=1}^n |f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)| S_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \cdot \text{aria } D = \varepsilon$$

adică  $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ , ( $\forall$ )  $\Delta$ , cu  $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$ . Deci  $f$  este integrabilă pe  $D$ . ■

Condiția de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabilește existența integralei duble pentru o clasă de funcții discontinue.

**Teorema 4.5.2** *Dacă funcția  $f(x, y)$  este mărginită pe mulțimea compactă  $D$  și este continuă peste tot în  $D$  cu excepția unei mulțimi de arie nulă, atunci ea este integrabilă pe  $D$ .*

**Demonstrație.** Luăm un  $\varepsilon > 0$  arbitrar. Din ipoteză,  $f(x, y)$  este mărginită, aceasta însemnând că există un număr real  $K$  astfel încât  $|f(x, y)| \leq K$ . Să scufundăm partea din mulțimea  $D$ , unde funcția  $f$  este discontinuă, într-o mulțime poligonală  $Q$  de arie mai mică decât  $\varepsilon/(4K)$ , astfel încât această mulțime să fie strict inclusă în mulțimea poligonală  $Q$ . Notăm cu  $\widetilde{D}$  partea din domeniul de integrare  $D$  care nu este inclusă în interiorul lui  $Q$ . Punctele frontieră ale mulțimii poligonale  $Q$  care aparțin lui  $D$  sunt situate în  $\widetilde{D}$  și prin urmare  $\widetilde{D}$  este mulțime închisă și mărginită deci compactă. Restricția funcției  $f$  la mulțimea compactă  $\widetilde{D}$  este continuă prin urmare este uniform continuă. Alegem  $\delta > 0$  astfel încât oscilația funcției  $f$  în orice parte a mulțimii  $\widetilde{D}$ , cu diametrul mai mic decât  $\delta$ , să fie mai mică decât  $\varepsilon/(2S)$ , unde  $S$  este aria lui  $D$ . Considerăm acum o partiție  $\Delta = \{D_i : i = \overline{1, n}\}$  a domeniului de integrare  $D$  cu proprietatea ca primul element  $D_1$  să coincidă cu  $Q$ , iar toate celelalte element să aibă diametrele mai mici decât  $\delta$  și să evaluăm diferența  $\Omega - \omega$  pentru această divizare. Avem

$$\Omega - \omega = M_1 S_1 - m_1 S_1 + \sum_{i=2}^n (M_i - m_i) S_i < (M_1 - m_1) \frac{\varepsilon}{4K} + \sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon}{2S} S_i.$$

Însă  $M_1 - m_1 \leq 2K$  și  $\sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon}{2S} S_i < S$ , astfel că

$$\Omega - \omega < 2K \frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2S} S = \varepsilon.$$

Numărul  $\varepsilon > 0$  fiind ales arbitrar, în baza Teoremei 4.4.1 funcția  $f$  este integrabilă pe submulțimea compactă  $D$  a lui  $\mathbb{R}^2$ . ■

## 4.6 Proprietățile integralei duble

Proprietățile fundamentale ale integralei duble sunt complet analoage proprietăților integralei definite

$$\int_a^b f(x) dx$$

și de aceea vom enumera aceste proprietăți urmând a da demonstrația doar pentru una din ele.

1. Dacă funcțiile  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe domeniul de integrare  $D$ , iar  $\lambda$  și  $\mu$  sunt constante reale arbitrare, atunci funcția  $\lambda f + \mu g$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x, y) dx dy = \lambda \iint_D f(x, y) dx dy + \mu \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Aceasta este proprietatea de *liniaritate* a integralei duble.

2. Dacă  $D = D_1 \cup D_2$ , unde  $D_1, D_2$  sunt mulțimi compacte în  $\mathbb{R}^2$  care nu au puncte interioare comune și funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $D$ , atunci  $f$  este integrabilă pe fiecare din mulțimile  $D_1$  și  $D_2$  și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy.$$

Aceasta este proprietatea de *aditivitate* a integralei duble ca funcție de domeniu de integrare.

3. Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$  și

$$f(x, y) \geq 0, \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

atunci integrala dublă din funcția  $f$  satisface inegalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0.$$

4. Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe  $D$  și

$$f(x, y) \leq g(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

atunci între integralele celor două funcții avem inegalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Aceasta este proprietatea de *monotonie* a integralei duble. Ea implică următoarele două proprietăți.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei duble*). Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D$ , atunci funcția valoarea absolută a lui  $f$  este integrabilă pe  $D$  și

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

6. (*teorema valorii medii*). Dacă o funcție  $f$  este integrabilă pe  $D$  și satisface inegalitatea

$$m \leq f(x, y) \leq M, \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

iar  $S$  este aria lui  $D$ , atunci

$$m S \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M S.$$

Dacă funcția  $f$  este în plus continuă pe  $D$ , atunci teorema valorii medii devine

7. Dacă  $f$  este funcție continuă pe domeniul compact de integrare  $D$ , atunci există un punct  $(\xi, \eta) \in D$ , astfel încât

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) S.$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iint_D dx dy = \text{aria } D = S.$$

**Demonstrația teoremei valorii medii pentru funcții continue.** Deoarece  $f$  este continuă pe domeniul compact  $D$ , rezultă că  $f$  este mărginită pe  $D$  și își atinge marginile. Prin urmare, există punctele  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1) \in D$ ,  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2) \in D$  astfel încât

$$m = f(x_1, y_1), \quad M = f(x_2, y_2),$$

unde  $m$  și  $M$  sunt marginile lui  $f$ . Pentru simplitate, să presupunem că ambele puncte sunt în interiorul domeniului de integrare  $D$ , demonstrația

fiind ceva mai complicată dacă unul sau ambele puncte  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  se situează pe frontiera lui  $D$ . În baza uneia din proprietățile de mai sus, avem

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS,$$

de unde rezultă

$$m \leq \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{S} \leq M.$$

Notând

$$\mu = \frac{\iint_D f(x, y) dx dy}{S}$$

avem evident inegalitățile

$$m \leq \mu \leq M.$$

Fie  $\Gamma$  o curbă a cărei imagine este complet conținută în  $D$  și având capetele  $A_1(x_1, y_1)$  și  $A_2(x_2, y_2)$ . Existența unei astfel de curbe rezultă chiar din definiția noțiunii de domeniu. Dacă

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

este o reprezentare parametrică a lui  $\Gamma$ , atunci funcția compusă

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

este continuă pe compactul  $[a, b]$ . Din  $f(x_1, y_1) = m$  și  $f(x_2, y_2) = M$  rezultă  $g(a) = m$  și  $g(b) = M$ .

Din proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue deducem existența unei valori  $t_0 \in [a, b]$  așa fel încât  $g(t_0) = \mu$ , adică

$$f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = \mu.$$

Dacă luăm  $\xi = \varphi(t_0)$  și  $\eta = \psi(t_0)$  avem  $\mu = f(\xi, \eta)$  și teorema valorii medii pentru cazul când funcția de integrat este continuă este demonstrată. ■

## 4.7 Evaluarea integralei duble

### 4.7.1 Integrala dublă pe intervale bidimensionale închise

**Teorema 4.7.1** *Dacă funcția reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty$$

*este integrabilă pe intervalul bidimensional închis*

$$I_2 = [a, b] \times [c, d]$$

*și pentru orice  $x \in [a, b]$  există numărul real  $F(x)$  definit de integrala depinzând de parametrul  $x$*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad x \in [a, b], \quad (4.19)$$

*atunci funcția  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , ale cărei valori sunt date în (4.19), este integrabilă Riemann și are loc egalitatea*

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (4.20)$$

**Demonstrație.** Fie  $d'$  și  $d''$  diviziuni ale respectiv intervalelor  $[a, b]$  și  $[c, d]$

$$\begin{aligned} d' &= \{x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}, \\ d'' &= \{y_0, y_1, \dots, y_j, y_{j+1}, \dots, y_m\}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde

$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b, \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_m = d. \end{aligned}$$

Aceste diviziuni definesc diviziunea  $\Delta$  a intervalului bidimensional închis  $I_2$

$$\Delta = \{I_{00}, I_{10}, \dots, I_{ij}, \dots, I_{nm}\}, \quad (4.22)$$

unde  $I_{ij}$  sunt intervalele bidimensionale închise

$$I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}], \quad i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1}.$$



Notăm

$$m_{ij} = \inf\{f(x, y) : (x, y) \in I_{ij}\},$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x, y) : (x, y) \in I_{ij}\}.$$

Aceste cantități sunt numere reale deoarece funcția  $f$  este mărginită pe fiecare din intervalele bidimensionale închise  $I_{ij}$ .

Deoarece se urmărește a se demonstra că funcția  $F$  definită de (4.19) este integrabilă Riemann va trebui să considerăm sumele integrale Riemann corespunzătoare tuturor diviziunilor  $d'$  de forma (4.20) ale intervalului  $[a, b]$ , pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ . Aceste sume au forma

$$\sigma_{d'}(F, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i). \quad (4.23)$$

Dacă ținem seama de modul cum este definită funcția  $F$  și de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)dy = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy. \quad (4.24)$$

Aplicând formula de medie pentru integralele simple care intră în membrul al doilea din (4.24) deducem că există numerele reale  $\mu_{ij}$ , cu  $m_{ij} \leq \mu_{ij} < M_{ij}$ , astfel încât

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j). \quad (4.25)$$

Folosind acum (4.25) în (4.23) constatăm că suma Riemann  $\sigma_{d'}(F, \xi_i)$  se scrie în final în forma

$$\sigma_{d'}(F, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}, \quad (i = \overline{0, n-1}, \quad j = \overline{0, m-1})$$

rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) &\leq \sigma_{d'}(F, \xi_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j). \end{aligned}$$

Dar prima sumă din aceste inegalități este tocmai suma Darboux superioară a funcției  $f$  relativă la diviziunea  $\Delta$  din (4.22)

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Ultima sumă din inegalitățile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară a funcției  $f$  relativă la aceeași diviziune  $\Delta$

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Avem deci inegalitățile  $s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{d'}(F, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f)$  pentru orice diviziune  $\Delta$  de forma (4.22) și pentru orice alegere a punctelor intermediare  $\xi_i$ .

Fie acum  $(d'_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  un șir oarecare de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  cu proprietatea că șirul normelor acestor diviziuni  $(\|d''_k\|)_{k \in \mathbb{N}^*}$  este convergent la zero. Fie de asemenea  $(d''_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  un șir de diviziuni ale lui  $[c, d]$  cu  $\|d''_k\| \rightarrow 0$ . Notăm cu  $\Delta_k$  diviziunea intervalului bidimensional închis  $I_2 = [a, b] \times [c, d]$  definită de diviziunile  $d'_k$  și  $d''_k$ . Se vede imediat că din condițiile  $\|d'_k\| \rightarrow 0$  și  $\|d''_k\| \rightarrow 0$  rezultă  $\|\Delta_k\| \rightarrow 0$ . Pentru fiecare  $k$  avem inegalitățile

$$s_{\Delta_k}(f) \leq \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) \leq S_{\Delta_k}(f). \quad (4.26)$$

Funcția  $f$  fiind presupusă integrabilă pe  $I_2$ , aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Delta_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{\Delta_k}(f) = \iint_{I_2} f(x, y) dx dy. \quad (4.27)$$

Trecând la limită în (4.26) pentru  $k \rightarrow +\infty$  și ținând cont de (4.27) obținem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) = \iint_{I_2} f(x, y) dx dy. \quad (4.28)$$

Dacă ținem seama de definiția integralei pentru funcțiile reale de o variabilă reală

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) = \int_a^b F(x) dx. \quad (4.29)$$

Din egalitățile (4.28) și (4.29) obținem (4.21). De obicei se folosește notația

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (4.30)$$

Folosind notația (4.30) constatăm că (4.21) se scrie în forma

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (4.31)$$

Putem spune că (4.22) sau (4.31) reprezintă *formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional închis*. Observăm că integrala dublă pe un interval bidimensional închis este o iterație de integrale simple adică un calcul succesiv a două integrale Riemann ale unor funcții reale de o variabilă reală, prima dintre ele fiind o integrală depinzând de parametru. ■

În mod asemănător se demonstrează

**Teorema 4.7.2** *Dacă funcția reală mărginită, de două variabile reale,*

$$f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad -\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty$$

*este integrabilă pe intervalul bidimensional închis  $I_2 = [a, b] \times [c, d]$  și pentru orice  $y \in [c, d]$  există numărul real  $G(y)$  definit de integrala depinzând de parametrul  $y$*

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

*atunci funcția*

$$G : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

*este integrabilă Riemann și are loc egalitatea*

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy. \quad (4.32)$$

Folosind și aici o notație asemănătoare lui (4.30), și anume

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

vedem că relația (4.32) se scrie în forma

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (4.33)$$

Relația (4.33) reprezintă de asemeni o formulă de calcul a integralei duble din funcția  $f$  pe intervalul bidimensional închis  $I_2$ .

**Observația 4.7.1** Când sunt satisfăcute ipotezele din ambele teoreme de mai sus, avem

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \iint_{I_2} f(x, y) dx dy. \quad (4.34)$$

Prima egalitate din (4.34) a fost demonstrată în teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de un parametru.

**Observația 4.7.2** Dacă  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$  și  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile Riemann, atunci  $f$  este integrabilă pe intervalul bidimensional închis  $I_2 = [a, b] \times [c, d]$  și are loc egalitatea

$$\iint_{I_2} f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy,$$

relație care arată că în acest caz particular integrala dublă este un produs de integrale simple.

## 4.7.2 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa $Oy$

**Definiția 4.7.1** Mulțimea  $D_y \subset \mathbb{R}^2$  definită de

$$D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), (\forall) x \in [a, b]\}, \quad (4.35)$$

unde  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt funcții continue pe  $[a, b]$ , se numește **domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$** .

**Observația 4.7.3** Frontiera domeniului simplu în raport cu axa  $Oy$  definit în relația (4.35) este curba netedă pe porțiuni ( $C^+$ ) compusă din arcele  $(AB)$ ,  $(CD)$  și din segmentele de dreaptă  $\overline{BC}$  și  $\overline{DA}$ , unde

$$\left\{ \begin{array}{l} (AB) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = \varphi_1(x), x \in [a, b]\}, \\ \overline{BC} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = b, \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)\}, \\ (CD) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [b, a], y = \varphi_2(x), x \in [b, a]\}, \\ \overline{DA} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, y \in [\varphi_2(b), \varphi_1(a)]\}. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

Așa cum a fost definită în (4.36), frontiera  $(C^+)$  a domeniului simplu în raport cu axa  $Oy$  este o curbă orientată pozitiv căci un observator care parcurge această frontieră în sensul indicat de (4.36) vede mulțimea  $D_y$  mereu la stânga sa. Să menționăm în plus că este posibil ca unul sau ambele segmente de dreaptă din (4.36) să se reducă la un punct. Aceasta se va întâmpla când funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  au valori egale în  $x = a$  sau (și) în  $x = b$ .

**Observația 4.7.4** Dacă  $D_y$  este un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$ , atunci orice paralelă la axa  $Oy$  prin punctul  $M(x, 0)$ , unde  $a < x < b$ , intersectează frontiera acestei mulțimi în două puncte distincte  $P$  și  $Q$  de coordonate:  $P(x, \varphi_1(x))$ ;  $Q(x, \varphi_2(x))$ . Acestor puncte le vom spune:  $P$  – **punct de intrare în  $D_y$** ;  $Q$  – **punct de ieșire din  $D_y$** .

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  este dată de teorema care urmează.

**Teorema 4.7.3** Fie  $D_y$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  definit de inegalitățile:

$$a \leq x \leq b; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

și  $f$  o funcție reală mărginită definită pe mulțimea  $D_y$ .

Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D_y$  și pentru orice  $x \in [a, b]$ , fixat, există integrala depinzând de parametrul  $x$

$$J(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

atunci funcția  $J : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și

$$\int_a^b J(x) dx = \iint_{D_y} f(x, y) dx dy.$$

**Demonstrație.** Înainte de a începe demonstrația propriu-zisă să observăm că având în vedere expresia valorii în  $x \in [a, b]$  a funcției  $J$ , integrala definită a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\int_a^b J(x) dx = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Concluzia teoremei devine

$$\iint_{D_y} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (4.37)$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei duble* pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$ .

Să procedăm acum la demonstrația teoremei.

Fie  $c = \min\{\varphi_1(x); x \in [a, b]\}$  și  $d = \max\{\varphi_2(x); x \in [a, b]\}$  care sunt numere reale în baza faptului că funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt continue pe mulțimea compactă  $[a, b]$ . După teorema lui Weierstrass, funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt mărginite și își ating efectiv marginile. Atunci, intervalul bidimensional  $I_2 = [a, b] \times [c, d]$  include domeniul simplu  $D_y$ .

Funcția auxiliară

$$f^* : I_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{dacă } (x, y) \in D_y \\ 0, & \text{dacă } (x, y) \in I_2 \setminus D_y. \end{cases} \quad (4.38)$$

satisface ipotezele Teoremei 4.7.1. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcției  $f$  pe mulțimea  $D_y$ , rezultă că  $f^*$  este integrabilă pe  $D_y$ . Restricția lui  $f^*$  la mulțimea  $I_2 \setminus D_y$  fiind funcția identic nulă, rezultă că este funcție integrabilă pe  $I_2 \setminus D_y$ . Dacă la aceste două rezultate adăugăm proprietatea de aditivitate a integralei duble, deducem că funcția  $f^*$  din (4.38) este integrabilă. Mai mult, avem

$$\begin{aligned} \iint_{D_y} f^*(x, y) dx dy &= \iint_{D_y} f(x, y) dx dy \\ \iint_{I_2 \setminus D_y} f^*(x, y) dx dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

În baza proprietății de aditivitate a integralei duble, din (4.39) rezultă

$$\iint_{I_2} f^*(x, y) dx dy = \iint_{D_y} f(x, y) dx dy. \quad (4.40)$$

Pentru fiecare valoare a lui  $x$  situat între  $a$  și  $b$ , are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_c^d f^*(x, y) dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} f^*(x, y) dy + \\ &+ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{\varphi_2(x)}^d f^*(x, y) dy \end{aligned} \quad (4.41)$$

deoarece fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în  $I_2$  și care unesc respectiv perechile de puncte  $(x, c)$ ,  $(x, \varphi_1(x))$  și  $(x, \varphi_2(x))$ ,  $(x, d)$ , valorile funcției  $f^*$  sunt egale cu zero, deducem că prima și a treia integrală din membrul doi al relației (4.41) sunt nule, fapt ce conduce la egalitatea

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (4.42)$$

Funcția  $f^*$  definită pe intervalul bidimensional  $I_2$  satisface ipotezele Teoremei 4.7.1 și, în consecință, integrala dublă din ea peste  $I_2$  poate fi redusă la iterația de integrale simple

$$\iint_{I_2} f^*(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy. \quad (4.43)$$

Din (4.43), (4.40) și (4.42), rezultă are loc relația (4.37). ■

### 4.7.3 Integrala dublă pe domenii simple în raport cu axa $Ox$

**Definiția 4.7.2** Mulțimea  $D_x \subset \mathbb{R}^2$  definită de

$$D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), (\forall) y \in [c, d]\},$$

unde  $\psi_1$  și  $\psi_2$  sunt funcții continue pe  $[c, d]$  se numește **domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$** .

**Observația 4.7.5** Dacă  $D_x$  este un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$ , atunci orice paralelă la axa  $Ox$  prin punctul  $M(0, y)$ , unde  $c < y < d$ , intersectează frontiera acestei mulțimi în două puncte distincte  $P$  și  $Q$  de coordonate:  $P(\psi_1(y), y)$ ;  $Q(\psi_2(y), y)$ . Ca și la domenii simple în raport cu cealaltă axă de coordonate, acestor puncte le vom spune:  $P$ —**punct de intrare în  $D_x$** ;  $Q$ —**punct de ieșire din  $D_x$** .

Regula de calcul a unei integrale duble pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  este asemănătoare cu aceea prezentată în concluzia teoremei precedente și este dată de teorema care urmează.

**Teorema 4.7.4** Fie  $D_x$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  și  $f$  o funcție reală mărginită definită pe mulțimea  $D_x$ . Dacă  $f$  este integrabilă pe  $D_x$  și pentru orice  $y \in [c, d]$  există integrala depinzând de parametrul  $y$

$$I(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

atunci funcția  $I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și are loc egalitatea

$$\int_c^d I(y) dy = \iint_{D_x} f(x, y) dx dy. \quad (4.44)$$

**Observația 4.7.6** Având în vedere că integrala definită din funcția  $I$  pe intervalul  $[c, d]$  se poate scrie în una din formele

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

rezultă că egalitatea (4.44) se poate scrie în forma echivalentă

$$\iint_{D_x} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (4.45)$$

care constituie formula de calcul a integralei duble pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$ .

**Observația 4.7.7** Dacă domeniul de integrare  $D$  nu este simplu în raport cu una din axe de coordonate, atunci descompunem pe  $D$  prin paralele la axele de coordonate într-un număr finit de subdomenii  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , simple în raport cu aceeași axă de coordonate, astfel încât interioarele oricăror două astfel de domenii  $D_i$  și  $D_j$ , cu  $i \neq j$ , să fie disjuncte, iar reuniunea lor să fie mulțimea  $D$ . Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei duble în raport cu domeniul de integrare, avem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy, \quad (4.46)$$

urmând ca, pentru toate integralele duble din membrul doi al egalității (4.46), să se aplice una din formulele de calcul (4.37) sau (4.45).



**Exercițiul 4.7.1** Să se scrie integrala dublă

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

unde  $D$  este domeniul mărginit de curbele

$$y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad y = \sqrt{2ax}, \quad x = 2a, \quad a > 0,$$

ca o iterație de integrale simple, în ambele ordini de integrare.

**Soluție.** Domeniul  $D$  este mărginit de semicercul superior (aflat în semiplanul  $y \geq 0$ ) al cercului de rază  $a$  cu centrul în punctul  $C(a, 0)$ , de un segment din parabola cu vârful în origine având axa de simetrie semiaxa pozitivă  $Ox$  și de un segment din dreapta de ecuație  $x = 2a$ , paralelă cu axa  $Oy$ . Constatăm că domeniul  $D$  este simplu în raport cu axa  $Oy$  deoarece putem scrie

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2a; \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax}\}.$$

Prin urmare, folosind (4.37), avem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy.$$

Domeniul  $D$  nu este simplu în raport cu axa  $Ox$ . Paralela  $y = a$  la axa  $Ox$  descompune  $D$  în trei domenii  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ , simple în raport cu axa  $Ox$ , unde:

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a; \frac{y^2}{2a} \leq x \leq a - \sqrt{a^2 - y^2}\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq a; a + \sqrt{a^2 - x^2} \leq x \leq 2a\};$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq 2a; \frac{y^2}{2a} \leq x \leq 2a\},$$

Ținând cont de (4.46), rezultă

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy + \iint_{D_3} f(x, y) dx dy,$$

integralele din membrul al doilea scriindu-se ca iterații de integrale simple, după cum urmează:

$$\iint_{D_1} f(x, y) dx dy = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y) dx;$$

$$\iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^a dy \int_{a + \sqrt{a^2 - x^2}}^{2a} f(x, y) dx;$$

$$\iint_{D_3} f(x, y) dx dy = \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) dx.$$

Astfel, am scris integrala dublă ca iterație de integrale simple în ambele ordini. De remarcat că prima scriere este mai simplă. ■

## 4.8 Formula integrală Riemann–Green

În anumite condiții există o legătură între integrala curbilinie și integrala dublă. Pentru a stabili această legătură introducem noțiunea de *frontieră orientată* a unui domeniu plan compact.

**Definiția 4.8.1** Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$ , un domeniu compact având frontiera  $\Gamma = \partial D$  formată dintr-o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porțiuni. Sensul dat pe  $\Gamma$  de un observator care prin deplasare pe această curbă lasă la stânga domeniul  $D$  se numește **sensul direct** sau **pozitiv** de parcurgere a lui  $\Gamma$ . Curba  $\Gamma$  împreună cu sensul direct de parcurgere se numește curbă orientată direct sau pozitiv și se notează cu  $\Gamma_+$  sau cu  $\Gamma^+$ . În mod asemănător se introduce și  $\Gamma_-$ .

Când pe curba  $\Gamma = \partial D$  s-a ales un sens de parcurs, curba devine orientată.

**Definiția 4.8.2** Un domeniu plan a cărui frontieră este formată dintr-o singură curbă închisă netedă sau netedă pe porțiuni  $\Gamma$  se numește **pozitiv orientat** dacă curba  $\Gamma$  este pozitiv orientată. Dacă domeniul  $D$  este pozitiv orientat, atunci el se notează cu  $D_+$  sau cu  $D^+$ . Analog se definește domeniul **negativ orientat** notat cu  $D_-$  sau  $D^-$ .

Este posibil ca frontiera unui domeniu plan să fie formată din mai multe curbe plane închise netede sau netede pe porțiuni, disjuncte.

**Definiția 4.8.3** Fie curbele plane simple, închise și netede sau netede pe porțiuni  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  cu proprietățile:

1. mulțimea din plan care are ca frontieră pe  $\Gamma_0$  conține în interiorul ei toate celelalte curbe  $\Gamma_i, i = \overline{1, p}$ ;
2. oricare două curbe  $\Gamma_i$  și  $\Gamma_j$  cu  $i \neq j, i, j \in \overline{1, p}$ , nu au puncte comune.

Se numește **domeniu**  $p + 1$  **conex** mulțimea  $D$  limitată de curba  $\Gamma_0$  din care s-au scos mulțimile limitate de curbele  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_p$ . Frontiera unui astfel de domeniu  $D$  este reuniunea tuturor curbelor  $\Gamma_k, k \in \overline{0, n}$ . Domeniul se numește în plus **compact** dacă își conține frontiera.

**Definiția 4.8.4** Domeniul compact  $p + 1$  conex  $D$  se numește **pozitiv orientat** dacă observatorul care se deplasează pe frontiera lui  $D$  vede mereu pe  $D$  la stânga sa.

Un domeniu compact  $p + 1$  conex, pozitiv orientat, care se notează cu  $D_+$ , are frontiera exterioară  $\Gamma_0$  orientată în sens contrar acelor de ceasornic în timp ce toate celelalte curbe  $\Gamma_i, i = \overline{1, p}$ , sunt parcurse de observator în sensul acelor de ceasornic. Pentru a intuit forma unui domeniu  $p + 1$  conex am putea să spunem că acesta prezintă *găuri* sau *goluri*. Dacă  $p = 1$ , deci  $D$  are un gol, el se numește *dublu conex*, iar cel cu două goluri se va numi *domeniu triplu conex*. Domeniile simple în raport cu una din axele de coordonate sunt domenii simplu conexe. Un gol poate fi și un punct.

În scopul stabilirii formulei integrale Riemann–Green pentru un domeniu compact oarecare, vom prezenta două rezultate ajutătoare, valabile în cazul domeniilor simple în raport cu una din axele de coordonate.

**Teorema 4.8.1** Fie  $P$  o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat  $D_y$ , simplu în raport cu axa  $Oy$  și având frontiera  $\Gamma_y$ . Dacă derivata parțială a funcției  $P$  în raport cu variabila  $y$  există și este continuă pe  $D_y$ , atunci are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x, y) dx = \iint_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (4.47)$$

**Demonstrație.** Deoarece domeniul  $D_y$  este simplu în raport cu axa  $Oy$ , frontiera acestuia  $\Gamma_y$  este formată mai întâi din curbele netede pe porțiuni:

$$y = \varphi_1(x), \quad x \in [a, b]; \quad (4.48)$$

$$y = \varphi_2(x), \quad x \in [b, a], \quad (4.49)$$

unde funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  care definesc cele două porțiuni netede din frontiera  $\Gamma_y$  sunt continue, admit derivate continue pe porțiuni și sunt astfel încât

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad x \in [a, b]. \quad (4.50)$$

Cealaltă parte a frontierei  $\Gamma_y$  este constituită din două segmente de dreaptă situate respectiv pe drepte paralele cu axa  $Oy$ :

$$x = a, \quad \varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a); \quad (4.51)$$

$$x = b, \quad \varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b). \quad (4.52)$$

Pentru primul segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu  $a$ , iar ordonatele sale  $y$  au proprietatea  $\varphi_1(a) \leq y \leq \varphi_2(a)$ , în timp ce, pe cel de al doilea segment de dreaptă, abscisele punctelor sale sunt egale cu  $b$ , ordonatele fiind astfel încât  $\varphi_1(b) \leq y \leq \varphi_2(b)$ . Dacă introducem punctele:

$$A(a, \varphi_1(a)); \quad B(b, \varphi_1(b)); \quad C(b, \varphi_2(b)); \quad D(a, \varphi_2(a)), \quad (4.53)$$

atunci frontiera pozitiv orientată  $\Gamma_y^+$  a domeniului  $D_y^+$  se poate scrie evident sub forma

$$\Gamma_y^+ = ABCDA,$$

în care sensul de parcurs este de la  $A$  spre  $B$ , apoi spre  $C$ , de aici spre  $D$  și din nou la  $A$ .

Existența celor două integrale din (4.47) este asigurată de continuitatea funcțiilor de sub semnul integrală și de ipoteza făcută asupra lui  $D$ .

Să calculăm integrala din membrul al doilea din (4.47). Avem,

$$\begin{aligned} \iint_{D_y^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy = \\ &= \int_a^b -P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))) dx. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_y^+} P(x, y) dx &= \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{\overline{BC}} P(x, y) dx + \\ &+ \int_{CD} P(x, y) dx + \int_{\overline{DA}} P(x, y) dx, \end{aligned} \quad (4.55)$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este cel specificat mai sus.

Integralele curbilinii de speța a doua pe  $\overline{BC}$  și pe  $\overline{DA}$  sunt nule, deoarece aici  $x$  este constant, fapt care se vede din (4.51) și (4.52). Prin urmare,  $dx = 0$ .

O reprezentare parametrică a arcului de curbă plană  $AB$  este dată de ecuațiile

$$AB : \begin{cases} x = t, \\ y = \varphi_1(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]. \quad (4.56)$$

Având în vedere reprezentarea parametrică (4.56) și formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speță, deducem

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt. \quad (4.57)$$

Pentru porțiunea de frontieră formată din arcul de curbă  $CD$ , avem reprezentarea parametrică

$$CD : \begin{cases} x = \tau, \\ y = \varphi_1(\tau), \end{cases} \quad \tau \in [b, a]. \quad (4.58)$$

Această reprezentare parametrică (4.58) și formula de calcul a unei integrale curbilinii de a doua speță conduc la

$$\int_{CD} P(x, y) dx = \int_b^a P(t, \varphi_2(t)) dt = - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt. \quad (4.59)$$

Prin urmare, valoarea integralei curbilinii din membrul întâi a relației de demonstrat (4.47) este

$$\int_{\Gamma_y^+} P(x, y) dx = \int_a^b (P(t, \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t))) dt. \quad (4.60)$$

Din relațiile (4.54) și (4.60), rezultă (4.47) și în acest fel teorema este demonstrată. ■

**Teorema 4.8.2** *Fie  $Q$  o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact pozitiv orientat  $D_x$ , simplu în raport cu axa  $Ox$  a cărei frontieră este curba închisă pozitiv orientată  $\Gamma_x^+$ . Dacă derivata parțială a funcției  $Q$  în raport cu variabila  $x$  există și este continuă pe  $D_x$ , atunci are loc egalitatea*

$$\int_{\Gamma_x^+} Q(x, y) dx = \iint_{D_x^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \quad (4.61)$$

**Demonstrație.** Să considerăm întâi integrala dublă din membrul doi al egalității (4.61). După cum știm, un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  poate fi prezentat astfel

$$D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}, \quad (4.62)$$

unde funcțiile  $\psi_1$  și  $\psi_2$  sunt continue și derivabile pe porțiuni. Dacă scriem domeniul de integrare în forma (4.62), atunci integrala dublă ce o avem de calculat este dată de

$$\begin{aligned} \iint_{D_y^+} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \\ &= \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Să notăm cu  $A_1, B_1, C_1$  și  $D_1$  punctele lui  $\Gamma_x^+$  de coordonate:

$$A_1(c, \psi_1(c)); \quad B_1(c, \psi_2(c)); \quad C_1(d, \psi_2(d)); \quad D_1(d, \psi_1(d)). \quad (4.64)$$

Atunci, frontiera pozitiv orientată  $\Gamma_x^+$  a domeniului  $D_x^+$  se poate scrie sub forma

$$\Gamma_x^+ = A_1 B_1 C_1 D_1 A_1,$$

în care sensul de parcurs este de la  $A_1$  spre  $B_1$ , apoi spre  $C_1$ , de aici spre  $D_1$  și din nou la  $A_1$ . Porțiunile  $\overline{A_1 B_1}$  și  $\overline{C_1 D_1}$  ale frontierei  $\Gamma_x^+$  sunt segmente de drepte paralele cu axa  $Ox$  și ca urmare pe aceste segmente avem  $dy = 0$  ceea ce atrage

$$\int_{\overline{A_1 B_1}} Q(x, y) dy = \int_{\overline{C_1 D_1}} Q(x, y) dy = 0. \quad (4.65)$$

Integrala definită din membrul al doilea al relației (4.63) poate fi privită ca suma a două integrale curbilinii pe arce de curbă corespunzătoare, după

cum urmează

$$\int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy = \int_{B_1 C_1} Q(x, y) dy + \int_{D_1 A_1} Q(x, y) dy. \quad (4.66)$$

Dacă la membrul doi al relației (4.66) adăugăm integralele curbilinii din (4.65), obținem

$$\begin{aligned} \int_c^d (Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)) dy &= \int_{A_1 B_1} Q(x, y) dy + \\ &+ \int_{B_1 C_1} Q(x, y) dy + \int_{C_1 D_1} Q(x, y) dy + \\ &+ \int_{D_1 A_1} Q(x, y) dy = \int_{\Gamma_x^+} Q(x, y) dy. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Din relațiile (4.63) și (4.67) rezultă (4.61) și teorema este demonstrată. ■

Egalitatea (4.47) a fost demonstrată pentru un domeniu de o formă specială, însă ea poate fi extinsă la un domeniu arbitrar care poate fi divizat într-un număr finit de domenii simple în raport cu axa  $Oy$ .

Astfel, dacă un domeniu oarecare  $D$ , cu frontiera  $\Gamma$ , este descompus în  $n$  subdomenii  $D_{iy}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , simple în raport cu axa  $Oy$  și cu interioarele oricăror două dintre ele disjuncte, conform Teoremei 4.8.1, pentru fiecare din domeniile  $D_{iy}$  are loc relația

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x, y) dx = \iint_{D_{iy}^+} -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \quad (4.68)$$

Putem suma acum de la 1 la  $n$  relațiile (4.68) obținându-se în membru drept o integrală dublă pe domeniul  $D$  din aceeași funcție de integrat ca în (4.68), iar în membrul stâng o sumă de  $n$  integrale curbilinii de speța a doua din expresia diferențială  $P(x, y) dx$ . Însă fiecare contur  $\Gamma_{iy}^+$  constă atât din anumite arce ale frontierei lui  $D^+$  cât și din porțiuni de curbe auxiliare care servesc pentru divizarea domeniului  $D$  în părțile  $D_{iy}$ , cu  $i$  de la 1 până la  $n$ . Fiecare arc al unei curbe auxiliare intră în exact două contururi de tipul  $D_{iy}$  și este parcurs în sensuri contrare când ne raportăm la cele două contururi vecine. Prin urmare, când sumăm toate integralele curbilinii de forma

$$\int_{\Gamma_{iy}^+} P(x, y) dx, \quad (4.69)$$

integralele curbilinii luate pe arcele auxiliare se anulează reciproc și deci va rămâne numai integrala pe frontiera  $\Gamma^+$  a domeniului  $D^+$  din expresia diferențială  $P(x, y) dx$ . Astfel, obținem egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y) dx = \iint_{D^+} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad \Gamma_{iy} = \partial D_{iy}. \quad (4.70)$$

Să observăm că divizarea lui  $D$  în domenii simple în raport cu axa  $Oy$  se poate efectua prin paralele la axa  $Oy$  care să fie eventual tangente în anumite puncte ale frontierei  $\Gamma$  sau să aibă în comun cu  $\Gamma$  doar un punct dacă acesta este punct unghiular.

Printr-un raționament asemănător celui efectuat pentru demonstrația relației (4.61), deducem că egalitatea

$$\int_{\Gamma^+} Q(x, y) dy = \iint_{D^+} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy \quad (4.71)$$

are loc pentru orice domeniu compact care se reprezintă ca reuniune finită de domenii simple în raport cu axa  $Ox$ . Descompunerea unui domeniu compact în domenii simple în raport cu axa  $Ox$  este posibilă întotdeauna și se poate efectua prin construcția unor paralele la axa  $Ox$ , paralele care, eventual, pot avea un punct comun cu frontiera domeniului.

Prin construcția descrisă mai sus cu ajutorul paralelelor la axele de coordonate, orice domeniu plan compact  $D^+$ , simplu sau multiplu conex, pozitiv orientat, având frontiera  $\Gamma^+$  o reuniune finită de curbe închise netede sau netede pe porțiuni care satisfac condițiile din Definiția 4.8.3, se poate scrie ca reuniune finită de domenii simple în raport cu una, oricare, din axele de coordonate. Pentru astfel de domenii, pe care prescurtat le vom numi mai departe *domenii plane simple*, au loc relațiile (4.70) și (4.71). Sumând aceste două relații, obținem formula integrală

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{D^+} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy \quad (4.72)$$

cunoscută sub numele de *formula integrală Riemann–Green*. În acest fel am demonstrat

**Teorema 4.8.3** *Fie  $D$  un domeniu plan simplu conex și  $P, Q$  două funcții reale definite și continue pe compactul  $D$ . Dacă derivatele parțiale  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$*



există și sunt continue pe  $D$ , atunci are loc formula integrală Riemann–Green (4.72).

Din modul cum s-a efectuat demonstrația Teoremei 4.8.3 rezultă câteva observații pe care le dăm în continuare.

**Observația 4.8.1** Dacă frontiera  $\Gamma^+$  a domeniului simplu  $D^+$  este compusă dintr-un număr finit de contururi separate, ceea ce înseamnă că suntem în cazul unui domeniu multiplu conex, simbolul

$$\int_{\Gamma^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad (4.73)$$

trebuie înțeles ca sumă de integrale curbilinii luate pe toate contururile care alcătuiesc frontiera domeniului, fiecare contur fiind parcurs în sensul în care un observator vede domeniul  $D^+$  la stânga sa.

**Observația 4.8.2** Când s-a demonstrat formula integrală Riemann–Green s-a presupus că funcțiile  $P$  și  $Q$  precum și derivatele parțiale ale lor  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  sunt continue nu numai în interiorul domeniului  $D^+$  dar și pe frontiera acestuia  $\Gamma^+$ . Se constată însă că este suficient ca aceste funcții împreună cu derivatele menționate să fie continue și mărginite în interiorul lui  $D^+$ .

**Observația 4.8.3** Având în vedere că la schimbarea sensului de parcurs al unei curbe integrala curbiline de speța a doua schimbă de semn, rezultă că formula integrală Riemann–Green se poate scrie și în forma

$$\int_{\Gamma^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \iint_{D^+} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy. \quad (4.74)$$

Când nu se precizează orientarea domeniului de integrare și nici a frontierei sale, formula integrală Riemann–Green trebuie scrisă astfel

$$\int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy, \quad (4.75)$$

urmând ca semnul din membrul al doilea să se stabilească în funcție de orientarea domeniului de integrare a integralei duble în raport cu orientarea

frontierei: semnul plus corespunde când  $D = D^+$  și  $\Gamma = \Gamma^+$ ; semnul minus se ia când  $D$  și  $\Gamma$  au orientări diferite. Evident, este posibil să întâlnim formula integrală Riemann–Green și sub forma

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \pm \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy, \quad (4.76)$$

caz în care în membrul doi se alege semnul plus dacă  $D = D^+$  sau semnul minus când  $D$  este negativ orientat.

Ca o aplicație a formulei integrale Riemann–Green să exprimăm aria  $S$  a unui domeniu plan simplu  $D$ , care știm că se calculează cu integrala dublă

$$S = \int_D dx dy, \quad (4.77)$$

cu ajutorul unei integrale curbilinii pe frontiera  $\Gamma$  a acestuia. Pentru aceasta să considerăm integrala curbilinie

$$\int_{\Gamma^+} x dy. \quad (4.78)$$

Aplicând formula integrală Riemann–Green, din (4.78) obținem

$$\int_{\Gamma^+} x dy = \int_D dx dy = S. \quad (4.79)$$

În mod asemător obținem formula

$$S = - \int_{\Gamma^+} y dx. \quad (4.80)$$

Combinând aceste formule deducem o altă formulă de calcul ariei unui domeniu plan simplu în care integrările în raport cu  $x$  și  $y$  sunt implicate simetric:

$$S = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx. \quad (4.81)$$

**Exemplul 4.8.1** *Să se calculeze aria domeniului plan simplu delimitat de astroida cu brațe egale de ecuații parametrice*

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (4.82)$$

**Soluție.** Aplicând formula (4.81) obținem

$$\begin{aligned} S &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

■

**Exemplul 4.8.2** Folosind integrala curbilinie, să se calculeze aria domeniului plan limitat de elipsa de semiaxe  $a$  și  $b$ .

**Soluție.** Dacă centrul de simetrie al elipsei se află în originea reperului  $Oxy$  din plan și axele sale de simetrie coincid cu axele de coordonate ale reperului, atunci ecuația carteziană explicită a elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

O reprezentare parametrică a acestei elipsei  $C$ , orientată pozitiv, poate fi

$$C : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

unde parametrul  $t$  parcurge intervalul  $[0, 2\pi]$ .

Domeniul plan  $D$ , delimitat de elipsă, este simplu în raport cu ambele axe, deci pentru calculul ariei lui  $D$  putem aplica formula

$$2\text{Aria}(D) = \int_C x dy - y dx = ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = 2\pi ab,$$

de unde deducem că aria elipsei este  $\pi ab$ .

■

## 4.9 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Fie  $\Omega$  un domeniu plan simplu conex situat în planul  $O'uv$  având frontiera  $\Gamma'$  o curbă simplă închisă și netedă pe porțiuni. Dacă

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega \quad (4.84)$$

este o transformare punctuală regulată (difeomorfism) de la planul  $O'uv$  la planul  $xOy$ , atunci  $D = T(\Omega) = \text{Im } T$  este un domeniu simplu conex din planul  $xOy$ , iar curba  $\Gamma = T(\Gamma')$  este o curbă simplă închisă, netedă pe porțiuni și în plus  $\partial D = \Gamma$ .

Transformarea punctuală regulată  $T$  se numește *directă*, dacă un punct care se deplasează în sens invers acelor de ceasornic pe curba  $\Gamma'$  este transformat prin  $T$ , într-un punct care se deplasează pe  $\Gamma$ , tot în sensul invers acelor de ceasornic. Dacă cel de-al doilea sens de mișcare este cel al acelor de ceasornic, atunci transformarea punctuală regulată  $T$  se spune că este *indirectă* sau *inversă*.

Jacobianul transformării punctuale regulate  $T$  din (4.84) este funcția reală nenulă  $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$  ale cărei valori se determină după legea

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}. \quad (4.85)$$

**Teorema 4.9.1** *Dacă funcțiile  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  și  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  care definesc difeomorfismul  $T$  sunt astfel încât admit derivate parțiale mixte de ordinul doi continue, iar jacobianul lui  $T$  este pozitiv pe  $\Omega$*

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) > 0, \quad (\forall) (u, v) \in \Omega, \quad (4.86)$$

*atunci  $T$  este o transformare punctuală regulată directă.*

**Demonstrație.** Să presupunem că o reprezentare parametrică a curbei orientate  $\Gamma'$  este

$$\Gamma' : \begin{cases} u = u(t), \\ v = v(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]. \quad (4.87)$$

Atunci, curba  $\Gamma = T(\Gamma')$  va avea o reprezentare parametrică dată de

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(u(t), v(t)), \\ y = \psi(u(t), v(t)), \end{cases} \quad t \in [a, b]. \quad (4.88)$$

Convenim ca sensul direct sau pozitiv de parcurs al curbei închise  $\Gamma$  să fie sensul imprimat de creșterea parametrului  $t$ . Atunci, folosind un rezultat din

paragraful precedent și formula de calcul a integralelor curbilinii de speța a doua, deducem

$$\text{aria } D = \oint_{\Gamma} x \, dy = \int_a^b \varphi(u(t), v(t)) \frac{dy}{dt}(t) \, dt. \quad (4.89)$$

Însă

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t) \quad (4.90)$$

Înlocuind (4.90) în (4.89) găsim o altă exprimare a ariei lui  $D$

$$\begin{aligned} \text{aria } D = \int_a^b \varphi(u(t), v(t)) & \left( \frac{\partial \psi}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt}(t) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \psi}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt}(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Integrala din membrul al doilea din (4.91) este de fapt o integrală curbilinie pe  $\Gamma'$ , astfel că putem scrie

$$\text{aria } D = \int_{\Gamma'} \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) \, du + \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \, dv. \quad (4.92)$$

Ultimei integrale îi aplicăm formula integrală Riemann–Green (4.75) adaptată la variabilele independente  $u$  și  $v$

$$\int_{\Gamma'} P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv = \pm \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial P}{\partial v}(u, v) \right) du \, dv, \quad (4.93)$$

unde semnul plus corespunde sensului direct pe  $\Gamma'$ , iar semnul minus corespunde sensului invers pe  $\Gamma'$ . Din relațiile (4.92) deducem că funcțiile  $P(u, v)$  și  $Q(u, v)$  din (4.93) au expresiile:

$$P(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v); \quad Q(u, v) = \psi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \quad (4.94)$$

și deci expresia integrantului din membrul al doilea a egalității (4.93) va fi

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}. \quad (4.95)$$

În baza criteriului lui Schwarz, derivatele parțiale de ordinul al doilea mixte sunt egale și deci (4.95) devine

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}. \quad (4.96)$$

În felul acesta, am obținut egalitatea

$$\text{aria } D = \pm \iint_{\Omega} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \, dudv. \quad (4.97)$$

Deoarece aria  $D > 0$ , în fața ultimei integrale trebuie luat semnul plus, adică în ultima integrală curbilinie pe curba închisă  $\Gamma'$  din șirul de egalități (4.92) trebuie luat sensul direct.

În mod asemănător se arată că dacă jacobianul transformării punctuale regulate  $T$  este negativ, atunci în cea de a doua integrală curbilinie din (4.92) trebuie luat sensul invers pe curba  $\Gamma'$ . ■

**Observația 4.9.1** *Din demonstrația teoremei precedente, rezultă că putem scrie egalitatea*

$$\text{aria } D = \iint_{\Omega} \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \right| \, dudv \quad (4.98)$$

*indiferent dacă transformarea punctuală regulată  $T$  este directă sau inversă.*

Funcția de sub semnul integrală din (4.98), fiind continuă, putem aplica teorema de medie pentru integrala dublă, de unde rezultă existența unui punct  $(u_0, v_0) \in \Omega$  astfel încât

$$\text{aria } D = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \right|_{(u_0, v_0)} \cdot \text{aria } \Omega. \quad (4.99)$$

**Observația 4.9.2** *Egalitatea (4.99) are o analogie remarcabilă în cazul domeniilor unidimensionale. Dacă  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  este o funcție Rolle cu derivata nenulă, atunci teorema creșterilor finite a lui Lagrange se poate transcrie în forma*

$$l([a, b]) = |f'(\xi)| \cdot l([\alpha, \beta]), \quad (4.100)$$

*unde  $\xi \in (\alpha, \beta)$ ,  $l([a, b])$  este lungimea intervalului  $[a, b]$ , iar  $l([\alpha, \beta]) = \beta - \alpha$  este lungimea intervalului  $[\alpha, \beta]$ . Egalitatea (4.100) este analoaga unidimensională a egalității (4.99).*

**Teorema 4.9.2** *Dacă  $T$  este transformarea punctuală regulată (4.84) și  $f$  este o funcție reală definită și continuă pe  $D$ , atunci are loc egalitatea*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Omega f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \right| du dv \quad (4.101)$$

numită **formula schimbării de variabile în integrala dublă sau formula de transport**.

**Demonstrație.** Existența integralelor din egalitatea (4.101) rezultă din faptul că funcția  $f$  este continuă pe  $D$ , iar  $T$  este transformare punctuală regulată în  $\mathbb{R}^2$ . Fie acum

$$\Delta' = \{D'_1, D'_2, \dots, D'_n\} \quad (4.102)$$

o diviziune a oarecare a domeniului  $\Omega$  pe care este definită transformarea punctuală regulată  $T$ . Această transformare punctuală regulată duce  $D'_i$  în domeniul  $D_i \subset D$  astfel încât

$$\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \quad (4.103)$$

este o diviziune a lui  $D = T(\Omega)$ .

Pentru fiecare domeniu  $D_i$  aplicăm formula (4.99). Rezultă în acest fel că pentru fiecare indice  $i$  cu valori de la 1 până la  $n$  putem scrie

$$\text{aria } D_i = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \right|_{(u_i, v_i)} \cdot \text{aria } D'_i. \quad (4.104)$$

Formăm acum suma integrală Riemann a funcției  $f$  corespunzătoare modului de divizare  $\Delta$  și alegerii punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , unde

$$\xi_i = \varphi(u_i, v_i), \quad \eta_i = \psi(u_i, v_i). \quad (4.105)$$

Avem

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i. \quad (4.106)$$

Considerăm funcția

$$F : \Omega \rightarrow D, \quad F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v) \right|. \quad (4.107)$$

Din (4.106) și (4.107) deducem

$$\sigma_{\Delta}(f; \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \cdot \text{aria} D'_i = \sigma_{\Delta'}(F; u_i, v_i). \quad (4.108)$$

Din (4.108) rezultă că suma integrală Riemann a funcției  $f$  relativă la modul de divizare  $\Delta$  din (4.103), și pentru alegerea (4.105) a punctelor intermediare, este egală cu o suma integrală Riemann a funcției  $F$  din (4.107), corespunzătoare modului arbitrar  $\Delta'$  de divizare a lui  $\Omega$  și punctelor intermediare  $(u_i, v_i)$  care intră în relațiile (4.104).

Fie  $(\Delta'_k)_{k \geq 1}$  un șir de diviziuni ale lui  $\Omega$  cu proprietatea  $\nu(\Delta'_k) \rightarrow 0$ . Din continuitatea lui  $T$  pe mulțime compactă  $\Omega$  rezultă uniforma continuitate a sa și deci condiția  $\nu(\Delta'_k) \rightarrow 0$  implică  $\nu(\Delta_k) \rightarrow 0$ , unde  $\Delta_k$  este diviziunea lui  $D$  corespunzătoare diviziunii  $\Delta'_k$  a lui  $\Omega$ . Atunci, pentru fiecare număr natural  $k \geq 1$ , putem scrie egalitatea

$$\sigma_{\Delta_k}(f; \xi_i^k, \eta_i^k) = \sigma_{\Delta'_k}(F; u_i^k, v_i^k). \quad (4.109)$$

Din existența celor două integrale care intră în (4.101) și prin trecerea la limită în relația (4.109), obținem formula de transport (4.101) și teorema este demonstrată. ■

**Observația 4.9.3** *Formula schimbării de variabilă în integrala dublă se aplică ori de câte ori integrala dublă din membrul al doilea al relației (4.101) este mai simplă decât cea din membrul întâi.*

**Observația 4.9.4** *Schimbarea de variabile (4.84) se alege astfel încât să se simplifice fie domeniul de integrare, fie funcția de integrat, fie ambele. Alegerea schimbării de variabile este sugerată de integrala din membrul stâng al egalității (4.101).*

**Exemplul 4.9.1** *Să se calculeze aria domeniului plan  $D$  mărginit de curbele:*

$$\begin{aligned} xy &= a; & xy &= b; & b &> a > 0 \\ y &= \alpha x; & y &= \beta x, & \beta &> \alpha > 0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

*situat în primul cadran al sistemului de coordonate  $xOy$ .*



**Soluție.** Aria domeniului  $D$ , calculată cu ajutorul integralei duble, este

$$\text{aria } D = \iint_D dx dy. \quad (4.111)$$

Dacă scriem domeniul  $D$  în forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x y \leq b; \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta\}, \quad (4.112)$$

atunci pentru calculul integralei duble ni se sugerează transformarea punctuală

$$T^{-1} : \begin{cases} u = x y, \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad (u, v) \in [a, b] \times [\alpha, \beta], \quad (x, y) \in D, \quad (4.113)$$

care se vede că este inversa transformării punctuale

$$T : \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}, \end{cases} \quad (u, v) \in [a, b] \times [\alpha, \beta], \quad (x, y) \in D. \quad (4.114)$$

Ambele transformări punctuale sunt regulate, iar difeomorfismul  $T$  transformă intervalul bidimensional  $\Omega = [a, b] \times [\alpha, \beta]$  în domeniul  $D$ . Cum  $T$  și  $T^{-1}$  sunt transformări punctuale regulate inverse una alteia rezultă

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & -\frac{y}{x^2} \\ x & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}. \quad (4.115)$$

Deci aria căutată va fi

$$\text{aria } D = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{du dv}{v} = \frac{1}{2} \int_a^b du \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dv}{v} = \frac{b-a}{2} \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha}. \quad (4.116)$$

■

Trecerea la coordonate polare este una dintre cele mai des utilizate schimbări de variabile și este definită de transformarea

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad (4.117)$$

unde  $(\rho, \theta) \in \Omega \subset [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$  și  $(x, y) \in D$ .

Se constată simplu că transformarea (4.117) este o transformare punctuală regulată, iar

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho \quad (4.118)$$

care este pozitiv în toate punctele din interiorul lui  $\Omega$ .

Formula schimbării de variabile în integrala dublă când se trece de la coordonatele carteziene la variabilele polare date de relațiile (4.117) este

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (4.119)$$

**Exemplul 4.9.2** Să se calculeze integrala dublă

$$I(R) = \iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad (4.120)$$

unde  $D$  este discul închis cu centrul în origine de rază  $R$ . Folosind rezultatul stabilit să se arate că

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.121)$$

**Soluție.** Pentru calculul integralei duble efectuăm schimbarea de variabile (4.117). Se vede imediat că  $\Omega$  este intervalul bidimensional  $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$ . Aplicând formula (4.119), obținem

$$I(R) = \iint_{\Omega} \rho e^{-\rho^2} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi(1 - e^{-R^2}). \quad (4.122)$$

Din acest rezultat, prin trecere la limită pentru  $R \rightarrow +\infty$ , găsim

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi. \quad (4.123)$$

Să considerăm acum intervalul bidimensional închis  $\Omega = [-a, a] \times [-a, a]$ , cu  $a > 0$ , și integrala dublă

$$J(a) = \iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dx dy. \quad (4.124)$$

Evident,  $\Omega$  este intervalul bidimensional cu laturile egale cu  $2a$  și cu centrul de simetrie în originea reperului  $xOy$ . Avem

$$J(a) = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \int_{-a}^a e^{-y^2} dy = \left( \int_{-a}^a e^{-t^2} dt \right)^2 = \left( 2 \int_0^a e^{-t^2} dt \right)^2. \quad (4.125)$$

Trecând la limită pentru  $a \rightarrow +\infty$  în egalitatea

$$J(a) = \left( 2 \int_0^a e^{-t^2} dt \right)^2, \quad (4.126)$$

obținem o altă evaluare a integralei duble pe întreg planul din funcția  $e^{-x^2-y^2}$  care, în analogie cu integralele improprii, putem să o numim *integrală dublă improprie*. După trecerea la limită, găsim

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = 4 \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dt \right)^2. \quad (4.127)$$

Din (4.123) și (4.127) deducem (4.121), rezultat utilizat în teoria probabilităților. ■

## 4.10 Aplicații ale integralei duble în mecanică și geometrie

### 4.10.1 Masa și centrul de greutate ale unei plăci

Considerăm că într-un plan s-a ales reperul cartezian  $xOy$  și considerăm în acesta domenii simple despre care se știe că sunt mulțimi carabile.

**Definiția 4.10.1** *Se numește placă materială în planul  $xOy$  ansamblul  $\mathcal{P}$  dintre un domeniu simplu  $D \subset \mathbb{R}^2$  și funcția reală  $\rho$  definită și continuă pe  $D$ . Mulțimea  $D$  se numește configurația plăcii iar funcția  $\rho$  este denumită densitatea de distribuție a materiei în placă. Placa materială se numește omogenă dacă  $\rho$  este funcția constantă pe  $D$  și neomogenă când densitatea acesteia este variabilă de la punct la punct.*

**Observația 4.10.1** *Dacă placa  $\mathcal{P}$  este omogenă și are densitatea egală cu constanta  $\rho_0$ , atunci masa  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$  a acesteia este produsul dintre densitatea constantă  $\rho_0$  și aria domeniului  $D$ , deci*

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \rho_0 \cdot \text{aria } D. \quad (4.128)$$

Să determinăm masa unei plăci materiale neomogene  $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$ . Pentru aceasta, să efectuăm o divizare a domeniului  $D$  și în fiecare parte componentă  $D_i$  a diviziunii alegem un punct de coordonate  $(\xi_i, \eta_i)$ . Masa fiecărei plăci componente  $\mathcal{P}_i = \{D_i; \rho\}$  poate fi aproximată cu masa plăcii omogene care are configurația  $D_i$  și densitatea constantă egală cu  $\rho(\xi_i, \eta_i)$ . Atunci, o valoare aproximativă a masei întregii plăci poate fi

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) \approx \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i. \quad (4.129)$$

Pentru a obține masa exactă a plăcii materiale este necesar să trecem la limită, pentru norma divizării lui  $D$  tinzând la zero, în suma integrală Riemann din (4.129). Deoarece  $\rho$  este funcție continuă, iar  $D$  este un domeniu simplu rezultă că în locul lui (4.129) vom avea

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \iint_D \rho(x, y) dx dy = \iint_D dm, \quad (4.130)$$

unde

$$dm = \rho(x, y) dx dy \quad (4.131)$$

se numește **element de masă** al plăcii.

Să determinăm coordonatele centrului de greutate a plăcii  $\mathcal{P}$ . Pentru aceasta, divizăm iarăși domeniul  $D$  cu ajutorul divizării  $\Delta$  care constă din domeniile  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , alegem în fiecare domeniu component punctul  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  și notăm:

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n).$$

Considerînd că porțiunea  $D_i$  din placă este una omogenă cu densitatea constantă și egală cu  $\rho(\xi_i, \eta_i)$ , masa  $m_i$  a acestei plăci omogene va fi

$$m_i = \rho(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i. \quad (4.132)$$

Gândind aproximativ, putem asimila placa  $\mathcal{P}$  cu sistemul de puncte materiale

$$M_1, M_2, \dots, M_n$$

care au respectiv ponderile  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Atunci, putem scrie expresiile bine cunoscute ale coordonatelor  $x_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  și  $y_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  ale centrului de

greutate al unui sistem de puncte materiale:

$$x_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}; \quad y_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i}. \quad (4.133)$$

Pentru a obține valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate a plăcii  $\mathcal{P}$ , trebuie să trecem la limită în relațiile (4.133) când norma divizării  $\Delta$  tinde la zero. Numitorii expresiilor din membrul drept al egalităților (4.133) sunt egali cu suma Riemann a funcției  $\rho$  corespunzătoare divizării  $\Delta$  și alegerii  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$  a punctelor intermediare. Numărătorul primei expresii de mai sus este suma integrală Riemann  $\sigma_\Delta(x\rho; \xi_i, \eta_i)$ , iar cel de al doilea numărător este  $\sigma_\Delta(y\rho; \xi_i, \eta_i)$ . Deoarece funcțiile  $\rho(x, y)$ ,  $x\rho(x, y)$  și  $y\rho(x, y)$  sunt continue, aceste expresii au limită pentru  $\nu(\Delta) \rightarrow 0$  și aceste limite sunt integralele duble ale funcțiilor de mai sus pe domeniul  $\Delta$ . Notând cu  $x_G$  și  $y_G$  valorile exacte ale coordonatelor centrului de greutate al plăcii, avem:

$$x_G = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} x_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}); \quad y_G = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} y_G(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}). \quad (4.134)$$

După trecerea la limită și folosirea relațiilor (4.130), (4.131) și (4.134) deducem că expresiile coordonatelor centrului de greutate  $G$  al plăcii  $\mathcal{P}$  sunt

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})} \iint_D x \, dm; \quad y_G = \frac{1}{\mathcal{M}(\mathcal{P})} \iint_D y \, dm. \quad (4.135)$$

Dacă placa materială este omogenă, formulele pentru coordonatele centrului de greutate se simplifică și devin

$$\left\{ \begin{array}{l} x_G = \frac{\iint_D x \, dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D x \, dx dy, \\ y_G = \frac{\iint_D y \, dm}{\iint_D dx dy} = \frac{1}{\text{aria } D} \iint_D y \, dx dy. \end{array} \right. \quad (4.136)$$

**Exemplul 4.10.1** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii omogene  $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ , cu densitatea constantă și egală cu unitatea, unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0\}, \quad (a > 0). \quad (4.137)$$

**Soluție.** Configurația plăcii  $\mathcal{P}$  este domeniul plan închis  $D$  inclus în semiplanul superior a cărui frontieră se compune din: semicercul superior al cercului cu centrul în origine și raza egală cu  $a$ ; segmentul de dreaptă de pe  $Ox$  cu abscisele  $-a \leq x \leq 0$ ; semicercul superior al cercului cu centrul în punctul  $(a/2, 0)$  și rază  $a/2$ .

Prin trecerea la coordonate polare

$$T : x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \rho \geq 0 \quad (4.138)$$

domeniul  $D$  se transformă în domeniul  $\Omega = D'_1 \cup D'_2$  unde:

$$D'_1 = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \cos \theta \leq \rho \leq a\}; \quad (4.139)$$

$$D'_2 = \{(\rho, \theta) : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq a\}. \quad (4.140)$$

Observăm că domeniul  $D'_1$  este transformatul prin  $T$  din (4.138) a porțiunii  $D_1$  a lui  $D$  aflată în primul cadran al reperului  $xOy$ ,  $D'_2$  este transformatul părții  $D_2$  a lui  $D$  situată în cadranul al doilea și  $D = D_1 \cup D_2$ .

Pentru calculul integralelor duble care urmează vom efectua schimbarea de variabile (4.138).

Placa  $\mathcal{P}$  fiind omogenă, are masa  $\mathcal{M}$  dată de integrala dublă

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \iint_D dx \, dy = \iint_{\Omega} \rho \, d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{a \cos \theta}^a \rho \, d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^a \rho \, d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (a^2 - a^2 \cos^2 \theta) \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 \, d\theta = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

Coordonatele centrului de greutate  $G(x_G, y_G)$  sunt

$$\begin{aligned}
 x_G &= \frac{1}{\mathcal{M}} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint_{\Omega} \rho^2 \cos \theta \, d\rho d\theta = \\
 &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \int_{a \cos \theta}^a \rho^2 \, d\rho + \\
 &\quad + \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \, d\theta \int_0^a \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) \cos \theta \, d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = -\frac{a}{6}, \\
 y_G &= \iint_D y \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = \iint_{D'_1} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta = \\
 \iint_{D'_2} \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_{a \cos \theta}^a \rho^2 \, d\rho + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^a \rho^2 \, d\rho = \\
 &= \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) \sin \theta \, d\theta + \frac{a^3}{3\mathcal{M}} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{14a}{9\pi}.
 \end{aligned}$$

Prin urmare, centrul de greutate al plăcii considerate coordonatele  $(-a/6, 14a/(9\pi))$ . ■

#### 4.10.2 Momente de inerție ale unei plăci

După cum bine se știe, momentul de inerție al unui punct material de pondere  $m$  față de un element geometric, care în plan poate fi o dreaptă sau un punct, este egal cu produsul dintre masa acestuia și pătratul distanței dintre punctul material și acel element. Momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale față de un element geometric este suma momentelor fiecărui punct material în parte față de același element geometric.

Să determinăm momentele de inerție ale plăcii  $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$  față de elementele reperului cartezian  $xOy$ , adică față de axele sale și față de originea  $O$ .

În acest scop divizăm din nou placa  $\mathcal{P}$  în plăcile componente  $\mathcal{P}_i = \{D_i, \rho\}$ , unde  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  este o divizare a lui  $D$ , apoi fiecare dintre

aceste plăci o considerăm placă omogenă cu densitatea egală cu  $\rho(\xi_i, \eta_i)$ , unde  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , după care putem aproxima placa  $\mathcal{P}_i$  cu punctul material  $M_i$  având ponderea  $m_i$  dată în (4.132). Momentele de inerție ale acestui sistem de puncte materiale față de axele de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$ , conform celor stabilite mai sus, sunt

$$\begin{aligned} I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^n \eta_i^2 m_i = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i, \\ I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 m_i = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Observăm că

$$I_x(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(y^2 \rho; \xi_i, \eta_i), \quad I_y(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sigma_\Delta(x^2 \rho; \xi_i, \eta_i).$$

Momentul de inerție al aceluiași sistem de puncte materiale față de originea  $O$  a reperului este

$$\begin{aligned} I_O(\Delta; \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) m_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \rho(\xi_i, \eta_i) \text{aria } D_i = \\ &= \sigma_\Delta((x^2 + y^2) \rho; \xi_i, \eta_i). \end{aligned} \quad (4.142)$$

Trecând la limită în (4.141) și (4.142) când norma divizării  $\Delta$  tinde la zero și ținând cont că funcțiile  $y^2 \rho(x, y)$ ,  $x^2 \rho(x, y)$  și  $(x^2 + y^2) \rho(x, y)$  sunt continue pe  $D$ , deci integrabile, constatăm că limitele din membrul doi există și sunt integralele duble pe  $D$  din funcțiile indicate. Prin urmare, există și limitele din membrul întâi ale relațiilor (4.141) și (4.142), pe care le notăm cu  $I_x$ ,  $I_y$  și  $I_O$  și care sunt momentele de inerție față de respectiv axele de coordonate și față de originea reperului. Avem

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy = \iint_D y^2 dm, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy = \iint_D x^2 dm, \\ I_O &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = \iint_D (x^2 + y^2) dm. \end{aligned}$$



Se observă că are loc relația

$$I_O = I_x + I_y. \quad (4.143)$$

**Exemplul 4.10.2** Să se determine momentele de inerție ale plăcii  $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$  în raport cu elementele reperului de coordonate  $xOy$ , unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\} \quad (4.144)$$

și densitatea este  $\rho(x, y) = xy$ .

**Soluție.** Configurația plăcii  $\mathcal{P}$  este domeniul închis  $D$  având frontiera triunghiul isoscel dreptunghic cu catetele de lungime 1 situate pe axele de coordonate în porțiunea lor pozitivă. Rezultă că  $D$  este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Prezintăndu-l ca domeniu simplu în raport cu  $Ox$  și respectiv în raport cu  $Oy$ , avem

$$D = D_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y\}; \quad (4.145)$$

$$D = D_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}. \quad (4.146)$$

În calculul momentului de inerție  $I_x$ , în raport cu axa  $Ox$ , vom considera că  $D$  are forma (4.145), iar pentru calculul lui  $I_y$  vom lua pe  $D$  sub forma (4.146). Deci:

$$I_x = \iint_{D_x} y^2 \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} xy^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^2) y^3 dy = \frac{1}{120};$$

$$I_y = \iint_{D_y} x^2 \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) x^3 dx = \frac{1}{120}.$$

Așadar, momentele de inerție în raport cu axele de coordonate sunt egale, iar cel în raport cu originea reperului,  $I_O$ , este suma  $I_O = I_x + I_y = \frac{1}{60}$ . ■

### 4.10.3 Momente statice ale unei plăci

Momentele statice  $M_x$  și  $M_y$  ale plăcii materiale  $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$  în raport cu axele de coordonate  $Ox$  și  $Oy$ , se exprimă prin formulele

$$M_x = \iint_D y \rho(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy. \quad (4.147)$$

**Exemplul 4.10.3** Să se calculeze momentele statice în raport cu axele de coordonate ale plăcii  $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ , mărginită de dreapta  $x + y = 2$  și de parabola  $y = x^2$  știind că densitatea este  $\rho(x, y) = y$ .

**Soluție.** Domeniul  $D$  este simplu în raport cu  $Oy$  căci poate fi definit de inegalitățile

$$-2 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq 2 - x. \quad (4.148)$$

Aplicând formulele (4.147) de calcul ale momentelor statice și ținând cont de inegalitățile (4.148), avem:

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_D y \rho(x, y) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} y^2 dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-2}^1 ((2-x)^3 - x^6) dx = -\frac{1}{3} \left( \frac{(x-2)^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{423}{28}; \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_D x \rho(x, y) dx dy = \int_{-2}^1 x dx \int_{x^2}^{2-x} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 x((2-x)^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x^3 - 4x^2 + 4x - x^5) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 2x^2 - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{45}{8}. \end{aligned} \quad (4.150)$$

În cazul în care  $D$  s-ar considera domeniu simplu în raport cu  $Ox$ , volumul de calcul al integralelor duble pe  $D = D_x$  este mai mare deoarece trebuie să scriem  $D_x$  ca o reuniune de două domenii, ambele simple în raport cu  $Ox$ . ■

#### 4.10.4 Flux luminos incident pe o placă

Considerăm că placa  $\mathcal{P} = \{D; \rho\}$  este situată în planul  $xOy$  a reperului spațial  $Oxyz$  și că în punctul  $(0, 0, z_0)$  de pe axa  $Oz$  se află o sursă luminoasă de intensitate constantă în toate direcțiile notată cu  $I$ . Ne propunem să calculăm fluxul luminos incident pe placa  $\mathcal{P}$ .

Fluxul luminos  $dF$  primit de placa elementară de arie  $ds$  este egal cu  $I d\omega$ , unde  $d\omega$  este *unghiul solid* în punctul  $(0, 0, z_0)$  subîntins de elementul de suprafață  $ds = dxdy$  asociat punctului plăcii de coordonate  $(x, y)$ . Unghiul solid  $d\omega$  este egal cu produsul raportului dintre aria  $ds$  a elementului de

suprafață și pătratul distanței de la acest element la sursa de lumină, și cosinusul unghiului  $\varphi$  dintre normala la elementul de suprafață și direcția spre care se află sursa. Avem evident

$$\cos \varphi = \frac{z_0}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}}. \quad (4.151)$$

Valoarea derivatei  $\frac{dF}{ds}$  în punctul  $(x, y)$  al plăcii este cunoscută ca *intensitatea de luminozitate* în acest punct și este notată cu  $A(x, y)$ . Rezultă că

$$A(x, y) = \frac{dF}{ds} = \frac{I d\omega}{ds} = \frac{I z_0}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (4.152)$$

Procedând similar ca în cazul determinării masei plăcii constatăm că fluxul luminos total  $F$  primit de placă este integrala dublă pe  $D$  din funcția  $A(x, y)$

$$F = \iint_D A(x, y) dx dy = I z_0 \iint_D \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (4.153)$$

#### 4.10.5 Debitul unui fluid prin secțiunea transversală a unui canal

Considerăm un fluid care curge într-un canal și o secțiune transversală a sa  $D$ , perpendiculară pe direcția de curgere a fluidului. Introducând sistemul de coordonate cartezian  $xOy$  în planul secțiunii transversale, putem privi viteza  $V$  a fluidului, în fiecare punct al secțiunii, ca fiind o funcție de  $x$  și  $y$ , coordonatele carteziene ale aceluși punct.

Ne propunem să determinăm cantitatea de fluid care trece prin secțiune în unitatea de timp.

În acest scop, în punctul  $(x, y)$  al secțiunii transversale considerăm un element infinitesimal  $ds$  al acesteia de arie  $dx dy$ . Cantitatea de fluid care străbate elementul de plan  $ds$  în unitatea de timp este egală evident cu masa unui cilindru elementar, care conține fluid, cu baza egală cu  $ds$  și înălțimea egală cu viteza fluidului în punctul  $(x, y)$  al secțiunii transversale. Așadar, *debitul elementar*  $dQ$  al fluidului este

$$dQ = \rho(x, y) V(x, y) dx dy, \quad (4.154)$$

unde  $\rho(x, y)$  este densitatea fluidului în punctul  $(x, y)$ . Pentru a găsi debitul  $Q(D)$  prin secțiunea  $D$  ar trebui să sumăm toate debitele elementare, sumare care conduce la integrala dublă pe domeniul  $D$  din funcția  $\rho V$ . Prin urmare,

$$Q(D) = \iint_D \rho(x, y) V(x, y) dx dy. \quad (4.155)$$

### 4.10.6 Volumul unui cilindroid

**Definiția 4.10.2** Fie  $D$  un domeniu simplu aflat în planul  $xOy$  al reperului cartezian spațial  $Oxyz$  și  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^+$  o funcție reală, de două variabile reale, pozitivă și continuă pe  $D$ . Se numește **cilindroid** mulțimea  $\mathcal{C}$  a punctelor din spațiu definită prin

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; 0 \leq z \leq f(x, y)\}. \quad (4.156)$$

Mulțimile  $D$  și  $\mathcal{B}_s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D; z = f(x, y)\}$  sunt prin definiție **bazele** cilindroidului.

Dacă considerăm o divizare  $\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$  a domeniului  $D$  și în fiecare domeniu component  $D_i$  al acesteia alegem un punct  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ , atunci putem considera corpurile prismatice  $\Pi_i$

$$\Pi_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_i; 0 \leq z \leq f(\xi_i, \eta_i)\} \quad (4.157)$$

care are baza  $D_i$  și înălțimea  $h_i$  egală cu valoarea funcției  $f$  în punctul  $(\xi_i, \eta_i)$ . Volumul  $\mathcal{V}(\Pi_i)$  a unui asemenea corp prismatic este

$$\mathcal{V}(\Pi_i) = f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i. \quad (4.158)$$

Suma

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{V}(\Pi_i) \quad (4.159)$$

reprezintă o valoare aproximativă a volumului cilindroidului  $\mathcal{C}$ . O aproximare mai bună a volumului cilindroidului se va obține dacă se va considera o diviziune  $\Delta'$  mai fină decât diviziunea  $\Delta$ . Mai mult, analiză modului de abordare a celorlalte aplicații ale integralei duble conduce la observația următoare.

**Observația 4.10.2** Valoarea exactă a volumului cilindroidului va fi limita sumei din (4.159) când norma divizării  $\Delta$  tinde la zero, în cazul în care această limită există.

Din (4.158) și (4.159) constatăm că valoarea aproximativă a volumului  $\mathcal{V}(\mathcal{C})$  al cilindroidului  $\mathcal{C}$  este suma integrală Riemann a funcției  $f$  corespunzătoare modului de divizare  $\Delta$  și alegerii  $(\xi_i, \eta_i)$  a punctelor intermediare

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i = \sigma_{\Delta}(f; \xi_i, \eta_i). \quad (4.160)$$

Din Observația 4.10.2, relația (4.160) și din faptul că  $f$  este funcție continuă deducem formula de calcul a volumului cilindroidului  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (4.161)$$

**Observația 4.10.3** *Funcția continuă  $f$  din Definiția 4.10.2 poate avea și valori negative, noțiunea de cilindroid păstrându-și sensul, acesta fiind o reunire de mulțimi de forma (4.156) în acele subdomenii ale lui  $D$  unde  $f$  are valori pozitive și de mulțimi de forma*

$$\mathcal{C}_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_-; f(x, y) \leq z \leq 0\} \quad (4.162)$$

*în acele părți  $D_-$  a lui  $D$  unde funcția  $f$  are valori negative.*

Cu alte cuvinte într-un astfel de cilindroid baza  $\mathcal{B}_s$  este o reuniune de porțiuni de suprafețe situate atât în semispațiul superior  $z > 0$  cât și în semispațiul inferior  $z < 0$ .

Înălțimea corpului prismatic atașat porțiunii de cilindroid (4.162) va fi

$$h_i = -f(\xi_i, \eta_i) = |f(\xi_i, \eta_i)|, \quad (4.163)$$

iar o valoare aproximativă a volumului întregului cilindroid este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) \approx \sum_{i=1}^n |f(\xi_i, \eta_i)| \cdot \text{aria } D_i = \sigma_{\Delta}(|f|; \xi_i, \eta_i), \quad (4.164)$$

unde  $|f|$  este funcția valoare absolută a funcției  $f$ .

În acest mod, constatăm că volumul unui cilindroid cu o bază domeniu simplu  $D \subset xOy$ , iar cealaltă bază având porțiuni atât în semispațiul  $z > 0$  cât și în semispațiul  $z < 0$ , este dat de integrala dublă

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D |f|(x, y) dx dy = \iint_D |f(x, y)| dx dy. \quad (4.165)$$

**Exemplul 4.10.4** Să se determine volumul corpului ale cărui puncte au coordonatele  $(x, y, z)$  care satisfac inegalitățile

$$hz \geq x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (4.166)$$

**Soluție.** Corpul căruia trebuie să-i determinăm volumul este complementara cilindroidului  $\mathcal{C}_2$  față de cilindroidul  $\mathcal{C}_1$ . Acești doi cilindroizi au aceeași bază, situată în planul  $xOy$ , și anume discul închis cu centrul în origine de rază  $h$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq h^2\}. \quad (4.167)$$

Cilindroidul  $\mathcal{C}_1$  are baza superioară discul închis de rază  $h$  cu centrul în punctul  $M_0(0, 0, h)$  situat în planul paralel cu planul  $xOy$  care trece prin  $M_0$ , plan care are ecuația  $z = h$ , în timp ce cilindroidul  $\mathcal{C}_2$  are baza superioară o porțiune din paraboloidul de revoluție de ecuație  $z = \frac{1}{h}(x^2 + y^2)$ . Atunci, volumul  $\mathcal{V}$  al corpului considerat în enunț este

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \mathcal{V}(\mathcal{C}_1) - \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = \iint_D h \, dx dy - \iint_D \frac{1}{h}(x^2 + y^2) dx dy = \\ &= h \cdot \text{aria } D - \frac{1}{h} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned} \quad (4.168)$$

Observăm că valoarea ultimei integrale se poate determina foarte simplu dacă se trece la coordonate polare

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Pentru ca  $(x, y) \in D$  trebuie ca punctul de coordonate  $(\rho, \theta)$  să se afle în intervalul bidimensional  $\Delta = [0, h] \times [0, 2\pi)$ . Aplicând formula schimbării de variabile, găsim

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{\Delta} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho^3 \, d\rho = 2\pi \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^h = \frac{\pi h^4}{2}. \end{aligned}$$

Ținând cont că aria  $D = \pi h^2$  și folosind rezultatele determinate mai sus constatăm că volumul corpului din enunț este

$$\mathcal{V} = \pi h^3 - \frac{\pi h^4}{2} = \frac{\pi h^3}{2},$$

rezultat care arată că volumul corpului este același cu volumul cilindroidului  $\mathcal{C}_2$ . ■

**Exemplul 4.10.5** *Să se calculeze volumul cilindroidului cu baza superioară pe suprafața de ecuație*

$$z = x^2 + y^2,$$

*iar baza inferioară, inclusă în planul  $xOy$ , domeniul compact*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq x, x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

**Soluție.** Volumul cilindroidului este

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Trecând la coordonate polare

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta \quad (4.169)$$

se constată că punctul  $(x, y) \in D$  dacă  $(\rho, \theta) \in \Omega$ , unde

$$\Omega = \{(\rho, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \cos \theta \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}.$$

Aplicând formula schimbării de variabilă în integrala dublă, găsim:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_{\cos \theta}^{2 \cos \theta} \rho^3 d\rho = \frac{15}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{45}{32} \pi. \quad \blacksquare$$

**Exemplul 4.10.6** *Folosind integrala dublă, să se determine volumul  $V$  al corpului mărginit de suprafețele:*

$$z = 6 - x^2 - y^2; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Soluție.** Pentru a evalua volumul corpului dat, calculăm volumele a doi cilindroizi, primul cu baza superioară pe suprafața  $z = 6 - x^2 - y^2$ , iar cel de al doilea cu baza superioară pe suprafața  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , ambii având aceeași bază inferioară, în planul  $xOy$ , definită de domeniul

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Volumul  $V$  este diferența volumelor celor doi cilindroizi. Avem:

$$\mathcal{V}(\mathcal{C}_1) = \iint_D (6 - x^2 - y^2) dx dy; \quad \mathcal{V}(\mathcal{C}_2) = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Ambele integrale se calculează trecând la coordonatele polare (4.169) și se găsește în final că  $V = \frac{32\pi}{3}$ . ■

## 4.11 Integrale duble improprii

### 4.11.1 Domeniul de integrare nu este mărginit

**Definiția 4.11.1** *Se spune că un domeniu plan  $D$  este **nemărginit** dacă el conține puncte exterioare oricărui interval bidimensional închis și mărginit, sau echivalent, oricărui disc închis.*

Vom presupune că orice parte mărginită a frontierei lui  $D$  este o curbă netedă sau netedă pe porțiuni. Un astfel de domeniu poate fi

- exteriorul unui domeniu mărginit sau a unui număr finit de domenii mărginite;
- porțiunea din plan limitată de o curbă de măsură Jordan nulă, care se întinde indefinit în ambele sensuri.

Să considerăm un șir infinit de discuri închise

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

cu centrul într-un punct oarecare  $C$  al planului raportat la reperul cartezian ortogonal  $Oxy$  și drept raze termenii șirului arbitrar strict crescător de numere pozitive

$$R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$$

cu limita egală cu infinit. Fiecare din aceste discuri poate avea puncte comune cu un domeniu nemărginit dat  $D$ . Să notăm cu  $DK_n$  intersecția mulțimilor  $D$  și  $K_n$ . Orice punct  $P \in D$  va fi conținut, pentru  $n$  suficient de mare, în mulțimea corespunzătoare  $DK_n$ . Într-adevăr, este suficient să luăm pe  $n$  astfel încât să avem  $R_n > d(P, C)$ , unde  $d(P, C)$  este distanța euclidiană între punctele  $P$  și  $O$  ale planului. Acest lucru este posibil întotdeauna



deoarece  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = +\infty$ . Proprietatea de mai sus poate fi exprimată echivalent spunând că șirul de mulțimi

$$DK_1, DK_2, \dots, DK_n, \dots$$

tinde către domeniul  $D$  și vom scrie, convențional

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} DK_n = D.$$

În această situație se spune că domeniul nemărginit  $D$  admite o *exhaustiune*.

**Definiția 4.11.2** Fie  $D$  o mulțime nemărginită din plan. Spunem că  $D$  admite o **exhaustiune** dacă există un șir  $(D_n)$  de mulțimi din plan, compacte, măsurabile Jordan astfel încât:

- șirul  $(D_n)$  este ascendent față de operația de incluziune, adică  $D_n \subset D_{n+1}$  și  $\cup_{n=1}^{+\infty} D_n = D$ ;
- orice mulțime compactă inclusă în  $D$  este conținută într-un  $D_n$ .

Pentru cele ce vor urma, este util să dăm definiția noțiunii de secțiune a unui domeniu nemărginit.

**Definiția 4.11.3** Vom spune că un domeniu  $D'$  constituie o **secțiune** a domeniului nemărginit  $D$ , dacă există un disc închis  $K$  cu centrul în origine, conținând o porțiune din  $D$  și astfel încât să avem

$$DK \subset D' \subset D.$$

Elementele unei exhaustiuni a domeniului nemărginit  $D$  constituie, cel puțin de la un anumit rang, secțiuni ale lui  $D$ .

**Teorema 4.11.1** Din orice șir  $(D_n)$  de secțiuni ale domeniului nemărginit  $D$ , tinzând către  $D$ , se poate extrage un subșir  $(D_{k_n})$ , astfel încât

$$D_{k_1} \subset D_{k_2} \subset \dots \subset D_{k_n} \subset \dots$$

și

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_{k_n} = D.$$

**Demonstrație.** Luăm  $k_1 = 1$  și fie  $K_1$  un disc închis care să conțină domeniul  $D_1$ . Vom nota  $D_{k_2}$ , primul domeniu din șirul

$$D_2, D_3, \dots,$$

pentru care  $DK_1 \subset D_{k_2}$ . Fie  $K_2$  un disc închis care să conțină pe  $D_{k_2}$ . Vom numi  $D_{k_3}$ , primul domeniu din șirul care începe cu  $D_{k_2}$ , și pentru care  $DK_2 \subset D_{k_3}$ . Continuând, obținem un șir de secțiuni ale lui  $D$  care îndeplinește condiția cerută. ■

**Definiția 4.11.4** Vom numi **șir crescător de domenii** orice șir de mulțimi în care fiecare domeniu este conținut în următorul.

**Definiția 4.11.5** Fie  $f$  o funcție reală definită pe un domeniu nemărginit  $D \subset \mathbb{R}^2$  și integrabilă pe orice subdomeniu compact care are arie, a lui  $D$ . Spunem că  $f$  este **integrabilă** pe  $D$ , dacă există un număr real  $J(D)$ , astfel încât pentru orice exhaustiune  $(D_n)$  a lui  $D$  să avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = J(D)$$

și vom scrie

$$\iint_D f(x, y) dx dy = J(D).$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă* pe mulțimea  $D$ .

Unei integrale duble pe un domeniu nemărginit i se poate spune *integrală improprie*.

**Exemplul 4.11.1** Funcția  $f(x, y) = x^2 y$  nu este integrabilă pe mulțimea  $D = \mathbb{R}^2$ .

Într-adevăr, dacă considerăm exhaustiunea  $(D_n)$  a mulțimii  $\mathbb{R}^2$ , unde

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\},$$

iar  $n$  este un număr întreg pozitiv, atunci

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy = \iint_{D_n} x^2 y dx dy = \int_0^n d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = 0.$$

Pe de altă parte, dacă considerăm exhaustiunea  $(D'_n)$  a lui  $\mathbb{R}^2$ , unde  $D'_n$  este intervalul bidimensional închis  $[-n, 2n] \times [-n, 2n]$ , se vede imediat că

$$\iint_{D'_n} f(x, y) dx dy = \int_{-n}^{2n} x^2 dx \cdot \int_{-n}^{2n} y dy = \frac{7n^5}{2},$$

$$\text{deci } \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D'_n} f(x, y) dx dy = 0.$$

Din Definiția 4.11.5 rezultă că funcția  $f(x, y) = x^2 y$  nu este integrabilă pe  $\mathbb{R}^2$  sau că integrala improprie  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$  este *divergentă*. ■

**Teorema 4.11.2** *Condiția necesară și suficientă pentru ca  $f$  să fie integrabilă pe domeniul nemărginit  $D$  este ca oricărui număr pozitiv  $\varepsilon$  să -i corespundă o secțiune  $\overline{D} = \overline{D}(\varepsilon)$ , astfel încât, pentru orice pereche de secțiuni  $D', D''$ , verificând relațiile*

$$\overline{D} \subset D', \quad \overline{D}'' \subset D'',$$

să avem

$$\left| \iint_{D''} f(x, y) dx dy - \iint_{D'} f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon. \quad (4.170)$$

**Demonstrație.** **Condiția este necesară.** Într-adevăr, să presupunem funcția  $f$  integrabilă pe  $D$  și să notăm cu  $J(D)$  valoarea sa, adică

$$J(D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Să arătăm că pentru un  $\varepsilon > 0$  dat putem determina o secțiune  $\overline{D}$  în  $D$ , astfel încât, pentru orice altă secțiune  $D'$  a lui  $D$  cu proprietatea  $\overline{D} \subset D'$ , să avem

$$\left| J(D) - \iint_{D'} f(x, y) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.171)$$

Într-adevăr, dacă acest lucru nu este posibil, atunci pentru orice disc  $K$  de rază  $R$  există cel puțin o secțiune  $D_R$ , verificând relația  $DK \subset D_R$ , astfel încât să avem

$$\left| J(D) - \iint_{D_R} f(x, y) dx dy \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Să considerăm un șir crescător divergent  $R_n$  și să punem  $D_n = D_{R_n}$ . Avem, pe de o parte,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = D,$$

iar pe de altă parte,

$$\left| J(D) - \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right| \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ . Pe această cale se ajunge la concluzia absurdă că șirul numeric având termenul general

$$\iint_{D_n} f(x, y) dx dy$$

nu are limita  $J(D)$ .

Așadar, relația (4.171) este satisfăcută pentru orice secțiune  $D'$  a domeniului nemărginit  $D$ , cu proprietatea  $\overline{D} \subset D'$ . Fie  $D''$  o altă secțiune, astfel încât  $\overline{D} \subset D''$ . Alături de relația (4.171), putem scrie relația

$$\left| J(D) - \iint_{D''} f(x, y) dx dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (4.172)$$

iar din (4.171) și (4.172) deducem imediat relația (4.170).

**Condiția este suficientă.** Fie  $\varepsilon > 0$ ,  $\overline{D}$  o secțiune a domeniului nemărginit  $D$  și  $(D_n)$  un șir monoton crescător de secțiuni ale lui  $D$ . Există un număr naturală  $N(\varepsilon) = N$ , astfel încât, pentru  $n > N$ , să avem  $\overline{D} \subset D_n$ . Dar, potrivit relației (4.170), presupusă satisfăcută, vom avea

$$\left| \iint_{D_m} f(x, y) dx dy - \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon,$$

pentru orice pereche de indici  $(m, n)$ , astfel încât  $m > N$ ,  $n > N$ .

În baza criteriului general al lui Cauchy pentru șiruri numerice, aceasta înseamnă că șirul numeric

$$\left( \iint_{D_n} f(x, y) dx dy \right)$$

are o limită finită, deci  $f(P)$  este integrabilă pe  $D$ . ■

**Corolarul 4.11.1** *O condiție necesară și suficientă pentru ca funcția  $f$  să fie integrabilă pe domeniul nemărginit  $D$  este ca să existe un număr real  $J(D)$ , astfel încât, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , să avem*

$$\left| J(D) - \iint_{D'} f(x, y) dx dy \right| < \varepsilon,$$

îndată ce  $\overline{D} \subset D'$ , unde  $\overline{D}$  este o secțiune ce depinde de  $\varepsilon$ .

Justificarea acestui corolar nu prezintă nici o dificultate.

Integrala pe un domeniu nemărginit, așa cum a fost definită mai sus, păstrează principalele proprietăți ale integralei duble pe un domeniu mărginit. Astfel, aditivitatea în raport cu domeniul de integrare, liniaritatea, monotonia și formula schimbării de variabile sunt proprietăți adevărate și în cazul integralei duble pe un domeniu nemărginit.

În legătură cu integrabilitatea unei funcții pozitive  $f$  pe un domeniu nemărginit  $D$  are loc

**Teorema 4.11.3** *Dacă funcția pozitivă  $f$  definită pe un domeniu nemărginit  $D \subset \mathbb{R}^2$  este integrabilă pe orice subdomeniu compact al lui  $D$ , care are arie, atunci  $f$  este integrabilă impropriu pe  $D$  dacă și numai dacă există o exhaustiune  $(D_n)$  a lui  $D$  astfel încât limita*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy = I \quad (4.173)$$

să existe și să fie finită. În plus, are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy.$$

**Demonstrație.** Necesitatea este evidentă în baza Definiției 4.11.5.

**Suficiența.** Fie  $(D_n)$  o exhaustiune a lui  $D$  pentru care există și este finită limita (4.173) și  $(D'_n)$  o altă exhaustiune a lui  $D$ . Din Definiția 4.11.2 rezultă că există un indice  $k(n)$  astfel încât  $D'_n \subset D_{k(n)}$ . Din faptul că  $f$  are valori pozitive pe  $D$ , rezultă

$$\iint_{D'_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{D_{k(n)}} f(x, y) dx dy \leq I.$$

Tot din faptul că  $f(x, y) \geq 0$  pe  $D$  rezultă că șirul  $\left( \iint_{D'_n} f(x, y) dx dy \right)$  este monoton crescător și mărginit superior de  $I$ , prin urmare există și este finită limita

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D'_n} f(x, y) dx dy = I'. \quad (4.174)$$

Între limitele (4.173) și (4.174) are loc inegalitatea  $I' \leq I$ . Dacă schimbăm rolul celor două exhaustiuni obținem că  $I \leq I'$  și deci  $I' = I$ . Cum exhaustiunea  $(D'_n)$  a fost luată arbitrar, deducem că  $f$  este integrabilă impropriu pe  $D$  și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I. \quad (4.175)$$

■

**Exercițiul 4.11.1** Să se arate că funcția  $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$  este integrabilă impropriu pe mulțimea  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  și să se deducă apoi că valoarea integralei lui Poisson este

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (4.176)$$

**Soluție.** Deoarece  $f$  este pozitivă pe domeniul nemărginit de integrare  $D$ , este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui  $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_+^2$ . Luăm

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$

și atunci

$$I = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare în plan, obținem

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\rho^2} \Big|_0^n = \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

ceea ce arată că  $f$  este integrabilă impropriu pe  $\mathbb{R}_+^2$  și că valoarea integralei este  $\frac{\pi}{4}$ . Considerând orice altă exhaustiune  $(D'_n)$  a lui  $\mathbb{R}_+^2$ , limita (4.174) are aceeași valoare, adică  $\pi/4$ .

Să considerăm exhaustiunea  $(D'_n)$ , unde  $D'_n = [0, n] \times [0, n]$ . Atunci,

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n dx \int_0^n e^{-(x^2+y^2)} dy =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^n e^{-x^2} \right)^2 = \left( \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \right)^2.$$

Dacă ținem seama de Teorema 4.11.3, din confruntarea celor două rezultate deducem (4.176). ■

În continuare vom da, fromână demonstrație, unele rezultate în legătură cu integralele duble improprii.

**Teorema 4.11.4** *O condiție necesară și suficientă pentru ca  $f$  să fie funcție integrabilă pe domeniul nemărginit  $D$  este ca funcția  $|f|$  să fie integrabilă pe acest domeniu.*

Această teorema confirmă faptul că definiția dată, în cazul domeniilor nemărginite, pentru simbolul  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , conduce la un mod de convergență foarte rapid pentru integralele respective, convergență care are ca urmare coincidența naturii integralelor improprii

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{și} \quad \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

O asemenea echivalență nu are loc în cazul unei singure dimensiuni.

Din punct de vedere practic, teorema precedentă aduce o simplificare considerabilă în studiul convergenței integralelor duble improprii, întrucât noțiunea de integrală *semiconvergentă* din teoria integralelor improprii a unei funcții de o variabilă nu-și mai are corespondent în teoria integralelor duble. Divergența integralei  $\iint_D |f(x, y)| dx dy$  atrage după sine totdeauna divergența

integralei  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

Cazurile în care se poate stabili convergența unei integrale duble pe baza celor două teoreme precedente sunt foarte rare. De aceea, în practică, ca și în orice problemă de convergență, se caută condiții suficiente (criterii) pe baza cărora să se poată stabili dacă o integrală dublă improprie este sau nu convergentă. Vom enunța aici câteva condiții de acest gen.

**Teorema 4.11.5** *Dacă  $g$  este funcție integrabilă pe domeniul nemărginit  $D$  și*

$$|f(x, y)| \leq |g(x, y)|, \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

*atunci  $f$  este funcție integrabilă pe  $D$ .*

**Teorema 4.11.6** *Dacă funcția  $g$  este integrabilă pe domeniul nemărginit  $D$  și există  $M > 0$  astfel încât*

$$\left| \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right| < M, \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

*atunci  $f$  este funcție integrabilă pe  $D$ .*

**Teorema 4.11.7** *Orice funcție  $f$  care se poate pune sub forma*

$$f(P) = \frac{\varphi(P)}{(d(C, P))^\alpha}, \quad (\forall) P \in D,$$

*unde  $\alpha > 2$ ,  $C$  este un punct fix al planului, iar  $\varphi$  o funcție mărginită pe domeniul nemărginit  $D$ , este integrabilă pe  $D$ .*

**Teorema 4.11.8** *Dacă pentru un șir particular  $(D_n)$  de secțiuni ale domeniului nemărginit  $D$  tinzând către acest domeniu, șirul numeric corespunzător*

$$\left( \iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy \right)$$

*este convergent, atunci  $f$  este integrabilă pe domeniul  $D$ .*

**Teorema 4.11.9** *Dacă integralele improprii de prima speță*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy$$



sunt absolut convergente, atunci funcția  $f(x) \cdot g(y)$  este integrabilă pe  $\mathbb{R}^2$  și are loc egalitatea

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \cdot g(y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy.$$

În particular, dacă  $f$  și  $g$  sunt funcții pare, absolut integrabile pe  $[0, +\infty)$ , atunci funcția  $f(x) \cdot g(y)$ , definită pentru  $(x, y) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ , este integrabilă pe  $\mathbb{R}_+^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$  și

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} f(x) \cdot g(y) dx dy = \int_0^{+\infty} f(x) dx \cdot \int_0^{+\infty} g(y) dy.$$

Folosind ultima teoremă putem stabili formula lui Jacobi care dă legătura între funcțiile  $B$  și  $\Gamma$  ale lui Euler. Reamintim că

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y} dy, \quad B(p, q) = \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv.$$

Pe lângă numărul pozitiv  $p$ , să considerăm valoarea în  $q > 0$  a funcției  $\Gamma$  scrisă astfel

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} x^{q-1} e^{-x} dx$$

și să efectuăm produsul numerelor  $\Gamma(p)$  și  $\Gamma(q)$ . Conform ultimei teoreme,

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x+y)} x^{q-1} y^{p-1} dx dy.$$

Dacă în integrala dublă improprie facem schimbarea de variabilă

$$T : \begin{cases} x &= u(1-v) \\ y &= uv \end{cases}$$

atunci domeniul  $D' = [0, +\infty) \times [0, 1]$  se transformă în  $\mathbb{R}_+^2$ .

Jacobianul transformării punctuale regulate  $T$  va fi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & v \\ -u & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u$$

și deci

$$\begin{aligned}\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) &= \int_0^1 dv \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{p+q-1} \cdot v^{p-1} \cdot (1-v)^{q-1} du = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{p+q-1} du \cdot \int_0^1 v^{p-1} \cdot (1-v)^{q-1} dv = \Gamma(p+q) \cdot B(p, q).\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

**Exercițiul 4.11.2** *Să se studieze natura integralei duble improprii pe domeniul nemărginit*

$$I = \iint_D \exp \left[ - \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy,$$

$$\text{unde } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\}.$$

**Soluție.** Domeniul de integrare este exteriorul mulțimii de puncte aflate în interiorul elipsei de semiaxe  $a$  și  $b$  ce are axele de coordonate drept axe de simetrie. Este deci un domeniu nemărginit închis.

Folosim coordonatele polare generalizate din plan. Prin urmare, efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x &= a\rho \cos \theta \\ y &= b\rho \sin \theta. \end{cases}$$

Pentru ca punctul  $M(x, y)$  să descrie domeniul  $D$ , perechea  $(\rho, \theta)$  trebuie să fie astfel încât  $\rho \in [0, +\infty)$  și  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Ținând cont că jacobianul transformării punctuale regulate de mai sus este  $J = ab\rho$ , rezultă că integrala improprie de mai sus devine

$$I = ab \iint_{\Delta} \rho \exp(-\rho^2) d\rho d\theta,$$

unde  $\Delta$  este intervalul bidimensional nemărginit  $\Delta = [1, +\infty) \times [0, 2\pi]$ .

Scriind noua integrală ca o iterație de integrale, obținem

$$I = ab \int_1^{+\infty} \rho \exp(-\rho^2) d\rho \int_0^{2\pi} = \frac{\pi ab}{e}.$$

■

### 4.11.2 Integrale duble din funcții nemărginite

Să considerăm cazul în care funcția reală  $f$  este definită pe domeniul  $D \setminus \{M_0\} \subset \mathbb{R}^2$ , unde  $M_0$  este un punct din  $D$  cu proprietatea că  $f$  este nemărginită în orice mulțime  $D \cup V$ , mulțimea  $V$  fiind o vecinătate oarecare a lui  $M_0$ . Atunci, se spune că  $f$  are o singularitate în punctul  $M_0$ .

În continuare vom presupune că  $D$  și  $V$  sunt mulțimi care au arie și că  $f$  este integrabilă pe  $D \setminus D \cap V$ . Notăm cu  $d(V)$  diametrul lui  $V$  și fie  $(V_n)$  un șir descendent  $V_{n+1} \subset V_n$  de vecinătăți ale lui  $M_0$  care să tindă la mulțimea formată doar din punctul  $M_0$ . Ultima condiție are loc dacă  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(V_n) = 0$ .

**Definiția 4.11.6** *Spunem că  $f$  este integrabilă impropriu pe  $D$  dacă există un număr  $I$ , astfel încât pentru orice șir de vecinătăți  $(V_n)$  ale lui  $M_0$ , cu  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(V_n) = 0$ , să avem*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D \setminus D \cap V_n} f(x, y) dx dy = I$$

și vom scrie

$$\iint_D f(x, y) dx dy = I.$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este *convergentă*. Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite și în acest caz. Presupunând pentru simplitate că punctul singular este originea reperului  $Oxy$ , se poate arăta că orice problemă privind integrabilitatea funcției  $f$  pe domeniul  $D$ , unde  $f$  este nemărginită în vecinătăți ale originii se reduce la problema integrabilității funcției

$$F(u, v) = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \cdot f\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right)$$

pe domeniul nemărginit  $\Delta$ , imaginea lui  $D$  prin transformarea punctuală

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Într-adevăr, transformarea punctuală de mai sus are inversa

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2} \quad (4.177)$$

care, în ipoteza  $u^2 + v^2 > 0$ , reprezintă o inversiune de pol  $O$  și de putere 1, al cărei determinant funcțional este

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -\frac{1}{(u^2 + v^2)^2} < 0.$$

În urma acestei inversiuni, orice curbă rectificabilă închisă  $C$  din planul  $(x, y)$  se transformă într-o curbă  $C_1$  a planului  $(u, v)$ , închisă sau cu ramuri infinite, după cum curba  $C$  conține sau nu polul de inversiune.

În primul caz, domeniului închis de curba  $C$  îi corespunde, în planul  $(u, v)$ , domeniul nemărginit exterior curbei  $C_1$ .

În cazul al doilea, domeniului limitat de curba  $C$  îi corespunde una din regiunile nemărginite ale planului  $(u, v)$  determinate de curba  $C_1$ .

În ambele cazuri, oricărui șir de domenii  $(C_n(O))$ , tinzând către punctul singular  $O$ , îi corespunde în planul  $(u, v)$  un șir de secțiuni  $(\Delta_n)$  ale domeniului transformat  $\Delta$ , tinzând către acest domeniu și reciproc.

Formula de schimbare a variabilelor

$$\iint_{C_n(O)} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta_n} F(u, v) du dv$$

justifică afirmația făcută la începutul comentariului.

Ca aplicație, vom transpune la cazul studiat criteriul formulat în Teorema 4.11.8.

Să presupunem că putem scrie funcția  $f$  sub forma

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

unde  $\varphi$  este mărginită pe domeniul  $D$ . Cu schimbarea de variabilă (4.177), obținem

$$\iint_{C_n(O)} \frac{\varphi(x, y)}{(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha} dx dy = \iint_{\Delta_n} \frac{\Phi(u, v)}{(u^2 + v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}} du dv,$$

unde

$$\Phi(u, v) = \varphi\left(\frac{u}{u^2 + v^2}, \frac{v}{u^2 + v^2}\right).$$

Dar, potrivit criteriului din Teorema 4.11.7, funcția

$$F(u, v) = \frac{\Phi(u, v)}{(u^2 + v^2)^{2-\frac{\alpha}{2}}}$$

este integrabilă pe  $\Delta$  dacă  $4 - \alpha > 2$ , adică  $\alpha < 2$ .

Așadar, orice funcție  $f$  care se poate scrie sub forma

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{(d(O, P))^\alpha},$$

unde  $P(x, y)$ ,  $\alpha < 2$ , iar  $\varphi$  este integrabilă în sens obișnuit (deci mărginită) pe domeniul  $D$ , este integrabilă pe acest domeniu.

În cazul în care  $\varphi(x, y) = 1$ , valorile lui  $\alpha > 0$  pentru care  $f(x, y) = \frac{1}{(d(O, P))^\alpha}$  este integrabilă pe un disc de rază  $R$  cu centrul în punctul  $O$  se pot determina utilizând trecerea la coordonatele polare în plan. Este posibil ca punctul  $O$  să fie înlocuit cu un punct oarecare  $M_0(x_0, y_0)$ .

**Exercițiul 4.11.3** Să se afle valorile lui  $\alpha > 0$  pentru care este convergentă integrala

$$\iint_D \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^\alpha} dx dy,$$

unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\}.$$

**Soluție.** În acest caz  $M_0 = (x_0, y_0)$ . Considerăm

$$V_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \frac{1}{n^2}\},$$

unde  $n$  este un număr natural suficient de mare astfel încât  $V_n \subset D$ , și integrala dublă

$$I_n = \iint_{D \setminus V_n} \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^\alpha} dx dy,$$

care o vom calcula trecând la coordonate polare în plan.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{1/n}^R \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}} = 2\pi \int_{1/n}^R \rho^{1-2\alpha} d\rho = \\ &= 2\pi \left. \frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \right|_{1/n}^R = \frac{\pi}{1-\alpha} \left[ R^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2(1-\alpha)}} \right]. \end{aligned}$$

Trecând la limită în rezultatul găsit, obținem că dacă  $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \iint_{D \setminus V_n} \frac{1}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^\alpha} dx dy = \frac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}.$$

Așadar, integrala studiată este convergentă doar dacă  $\alpha \in (0, 1)$ . ■

# Capitolul 5

## Integrale de suprafață

### 5.1 Elemente de geometria diferențială a suprafețelor

În acest paragraf vom utiliza rezultate ale calculului diferențial pentru a studia unele noțiuni frecvent întâlnite în geometria diferențială a suprafețelor și teoria integrabilității pe suprafețe a funcțiilor reale de mai multe variabile reale.

#### 5.1.1 Pânze parametrice netede

În spațiul afin euclidian tridimensional  $\mathcal{E}_3$ , asociat spațiului liniar  $\mathbb{R}^3$ , considerăm reperul cartezian  $Oxyz$ , a cărui bază  $\mathcal{B}'$  este constituită din versorii

$$\mathcal{B}' = \{\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (5.1)$$

Un punct oarecare  $M \in \mathcal{E}_3$  este determinat de coordonatele carteziene  $(x, y, z)$  sau de vectorul de poziție  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ , unde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , iar  $x, y, z$  sunt mărimile algebrice ale proiecțiilor ortogonale ale vectorului  $\mathbf{r}$  pe respectiv versorii  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ .

**Definiția 5.1.1** *Se numește pânză parametrică netedă funcția vectorială de două variabile reale*

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.2)$$

*continuu pe mulțimea nevidă  $A$  și cu derivate parțiale continue pe  $\overset{\circ}{A}$ .*

Funcția vectorială de două variabile reale (5.2) stabilește o corespondență între punctele  $(u, v) \in A$  și punctele  $M \in \mathcal{E}_3$  ale căror vectori de poziție sunt

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in A. \quad (5.3)$$

**Observația 5.1.1** *Având în vedere modurile de reprezentare ale unei funcții vectoriale de mai multe variabile reale, rezultă că în locul lui (5.2), pe lângă (5.3), putem considera și reprezentarea*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in A. \quad (5.4)$$

**Definiția 5.1.2** *Imaginea funcției (5.2), adică mulțimea  $\mathbf{r}(A) \subset \mathbb{R}^3$ , va fi numită de asemenea **pânză netedă în  $\mathcal{E}_3$** , iar (5.4) și (5.3) se numesc respectiv **ecuații parametrice** și **ecuația vectorială** ale pânzei netede.*

Submulțimea de puncte  $(S) \subset \mathcal{E}_3$  ale căror vectori de poziție au forma (5.3) o vom numi, de asemenea, pânză netedă.

**Observația 5.1.2** *Deoarece  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  are derivate parțiale continue pe  $\overset{\circ}{A}$ , rezultă că este diferențiabilă pe  $\overset{\circ}{A}$ , deci în orice punct  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$  se poate defini diferențiala sa  $d\mathbf{r}((u_0, v_0)) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ , unde  $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  este spațiul vectorial al aplicațiilor liniare definite pe  $\mathbb{R}^2$  cu valori în  $\mathbb{R}^3$ .*

Matricea aplicației liniare  $d\mathbf{r}((u_0, v_0))$  în perechea de baze canonice

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$$

și  $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^3$  din (5.1), este de tipul  $3 \times 2$  și are elementele

$$J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

**Observația 5.1.3** Coloanele matricei jacobiene  $J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0))$  sunt respectiv matricele coloană ale coordonatelor vectorilor:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0); \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

în baza canonică  $\mathcal{B}'$ .

În aplicațiile practice ale calculului integral, ale geometriei diferențiale, mecanicii, fizicii etc. în definiția pânzei parametrice se include încă o *condiție de regularitate* care afirmă că rangul matricei  $J_{\mathbf{r}}((u_0, v_0))$  este egal cu 2 în orice punct  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ . Această condiție se scrie sub forma

$$\left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\right)^2 + \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0)\right)^2 > 0. \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Semnificația geometrică a condiției de regularitate. Linii parametrice

Pentru a vedea semnificația geometrică a condiției de regularitate (5.5) să considerăm funcția

$$u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in I \subset \mathbb{R}, \quad I \times \{v_0\} \subset A, \quad (5.6)$$

care este restricția funcției  $\mathbf{r}$  la segmentul de dreaptă  $v = v_0$  paralel cu axa absciselor reperului cartezian din  $\mathcal{E}_2$ . Acest segment trece prin punctul  $M'_0(u_0, v_0)$  și este conținut în mulțimea  $A$ . Aplicația (5.6) este continuu diferențiabilă pe  $\overset{\circ}{I}$ , prin urmare reprezintă un drum parametrizat neted în  $\mathbb{R}^3$  de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0), \quad u \in I. \quad (5.7)$$

Avem  $\text{Im } \mathbf{r}(\cdot, v_0) \subset \text{Im } \mathbf{r}$ , deci imaginea drumului (5.7) este o submulțime a pânzei netede de ecuație vectorială (5.3). După cum se știe,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \mathbf{k} \quad (5.8)$$

este vectorul director al tangentei la drumul de ecuație vectorială (5.7) în punctul  $M_0 \in (S)$ .

În mod similar, aplicația

$$v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in J \subset \mathbb{R}, \quad \{u_0\} \times J \subset A, \quad (5.9)$$



este un drum parametrizat neted în  $\mathbb{R}^3$  de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v), \quad v \in J, \quad (5.10)$$

a cărui imagine este tot o submulțime a lui  $\text{Im} \mathbf{r}$ . Vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \mathbf{k} \quad (5.11)$$

este vector director al tangentei la drumul parametrizat neted (5.10) în punctul  $M_0 \in (S)$ .

Produsul vectorial al vectorilor (5.8) și (5.11) este vectorul

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} \quad (5.12)$$

care, după dezvoltarea determinantului din membrul al doilea după elementele primei linii, se scrie

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) = A \mathbf{i} + B \mathbf{j} + C \mathbf{k}, \quad (5.13)$$

unde

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad B = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u_0, v_0), \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0).$$

Vectorul (5.13) este ortogonal pe vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$  și pe vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ .

Din cele prezentate mai sus rezultă că condiția de regularitate (5.5) este echivalentă cu

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} > 0 \quad (5.14)$$

și exprimă faptul că vectorii  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$  și  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$  sunt necoliniari sau liniar independenți. Din punct de vedere geometric, condiția (5.14) se traduce prin

aceea că imaginile drumurilor parametrizate (5.7) și (5.10) au în punctul comun  $M_0$  tangente distincte. Corespondența (5.4) fiind și biunivocă, rezultă că în vecinătatea punctului  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$  drumurile (5.7) și (5.10) au în comun doar punctul  $M_0 \in (S)$ . Imaginile acestor drumuri se numesc *linii parametrice*. Prin fiecare punct  $M_0 \in (S)$ , corespunzător punctului  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ , unde sunt satisfăcute condițiile de regularitate, trece un drum și numai unul singur de forma (5.6) și numai un drum de tipul (5.9).

### 5.1.3 Interpretarea geometrică a diferențialei funcției vectoriale $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ în punctul $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{A}$ . Plan tangent

Să vedem acum ce interpretare geometrică are funcția afină

$$(u, v) \mapsto \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.15)$$

unde valoarea în perechea  $(u - u_0, v - v_0)$  a diferențialei în punctul  $(u_0, v_0)$  a funcției  $\mathbf{r}$  este

$$d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right) = \mathbf{e}'\left(J_{\mathbf{r}}(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}\right). \quad (5.16)$$

Vectorul  $\mathbf{e}'$  din relația (5.16) aparține spațiului liniar  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  și are expresia  $\mathbf{e}' = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Aplicația (5.15) definește o nouă pânză parametrică netedă de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad (5.17)$$

sau de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = x(u_0, v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ y = y(u_0, v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0) \\ z = z(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)(u - u_0) + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)(v - v_0). \end{cases} \quad (5.18)$$

Eliminarea lui  $u - u_0$  și  $v - v_0$  din (5.18) conduce la ecuația

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (5.19)$$

unde  $x_0 = x(u_0, v_0)$ ,  $y_0 = y(u_0, v_0)$ ,  $z_0 = z(u_0, v_0)$  sunt coordonatele punctului  $M_0$ . Ecuația (5.19) arată că vectorul cu originea în  $M_0$  și extremitatea într-un punct curent  $M$  al pânzei (5.17) este ortogonal pe vectorul (5.13).

Toate punctele  $M$  din spațiu cu proprietatea că vectorul  $\overrightarrow{M_0M}$  este ortogonal pe vectorul  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$  formează un plan.

Prin urmare, pânza parametrică de ecuație vectorială (5.17) sau de ecuații parametrice (5.18) are ca imagine un plan care se numește *plan tangent* în punctul  $M_0$  la pânza parametrică netedă de ecuație vectorială (5.3). Acest plan are în comun cu  $\text{Im } \mathbf{r}$ , într-o vecinătate a punctului  $M_0$ , doar punctul  $M_0$ . Diferența

$$\mathbf{r}(u, v) - \mathbf{r}(u_0, v_0) - d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (u - u_0, v - v_0)\right), (u, v) \in \overset{\circ}{A} \quad (5.20)$$

caracterizează *abaterea* dintre coordonatele punctelor de pe imaginea pânzei netede de ecuație vectorială (5.3) și coordonatele punctelor corespunzătoare de pe planul (5.17) în vecinătatea punctului  $(u_0, v_0)$  căruia pe pânză îi corespunde punctul  $M_0$ .

Deoarece diferențiabilitatea lui  $\mathbf{r}$  în punctul  $(u_0, v_0)$  implică faptul că abaterea (5.20) tinde la zero mai repede decât tinde la zero distanța euclidiană dintre punctele  $(u, v)$  și  $(u_0, v_0)$  când  $(u, v) \rightarrow (u_0, v_0)$ , rezultă că planul (5.17) *aproximează* satisfăcător  $\text{Im } \mathbf{r}$  într-o vecinătate a punctului  $M_0$ .

**Exemplul 5.1.1** *Să se arate că aplicația  $\mathbf{r} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definită prin*

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \sin v) \mathbf{i} + (a \sin u \sin v) \mathbf{j} + (a \cos v) \mathbf{k}, \quad a > 0,$$

*reprezintă o pânză parametrică netedă și să se studieze această pânză.*

**Soluție.** Aplicația dată este continuu diferențiabilă pe  $\overset{\circ}{A} = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  deoarece funcțiile coordonate  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sunt diferențiabile pe  $\overset{\circ}{A}$ .

Ecuațiile parametrice ale pânzei sunt

$$\begin{cases} x = a \cos u \sin v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos v, \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi), v \in [0, \pi].$$

Calculând distanța euclidiană de la punctul  $M(x, y, z)$  al pânzei la originea reperului  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , găsim

$$\begin{aligned} d^2(M, O) &= x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \sin^2 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + a^2 \cos^2 v = \\ &= a^2 (\sin^2 v + \cos^2 v) = a^2, \end{aligned}$$

de unde rezultă  $d(M, O) = a$ , ceea ce arată că  $\text{Im} \mathbf{r}$  este frontiera bilei cu centrul în origine și raza egală cu  $a$ , adică sfera de rază  $a$  cu centrul în origine.

Matricea jacobiană  $J_{\mathbf{r}}(u, v)$  a aplicației date este

$$J_{\mathbf{r}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin u \sin v & a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v & a \sin u \cos v \\ 0 & -a \sin v \end{pmatrix}.$$

Conform Observației 5.1.3, elementele coloanelor matricei  $J_{\mathbf{r}}$  sunt coordonatele vectorilor  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  și respectiv  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ , prin urmare

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) &= -(a \sin u \sin v) \mathbf{i} + (a \cos u \sin v) \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) &= (a \cos u \cos v) \mathbf{i} + \\ &+ (a \sin u \cos v) \mathbf{j} - (a \sin v) \mathbf{k}. \end{cases} \quad (5.21)$$

Produsul vectorial al vectorilor (5.21) este

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u \sin v & a \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \sin u \sin v & -a \sin v \end{vmatrix} = \\ &= -a \sin v \mathbf{r}(u, v), \end{aligned}$$

oricare ar fi perechea  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ . Deoarece pentru  $v \in (0, \pi)$  avem  $a \sin v > 0$  rezultă că vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ , diferit de vectorul nul, este coliniar și de sens contrar vectorului de poziție  $\mathbf{r}(u, v)$ .

Tangentele la liniile parametrice care trec prin punctul  $M_0$  de vector de poziție  $\vec{OM_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ , unde  $(u_0, v_0) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , determină planul tangent la sferă în  $M_0$  care are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v_0) + d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); (t - u_0, s - v_0)\right), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Pentru punctele  $(t, s) = (u, v)$  situate într-o vecinătate a punctului  $(u_0, v_0)$  din mulțimea deschisă  $(0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , membrul doi din ultima ecuație aproximează satisfăcător punctele corespunzătoare de pe sferă.

Spre exemplu, dacă luăm  $u_0 = v_0 = \frac{\pi}{4}$ , atunci  $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , matricea jacobiană  $J_{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  este

$$J_{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

iar ecuațiile parametrice ale planului tangent la sferă în punctul  $M_0$  sunt

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}t + \frac{a}{2}s \\ y = \frac{a(2-\pi)}{4} + \frac{a}{2}t + \frac{a}{2}s \\ z = \frac{a\sqrt{2}(\pi+4)}{8} - \frac{a\sqrt{2}}{2}s, \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Eliminând  $t$  și  $s$  din aceste ecuații obținem ecuația explicită a planului tangent

$$x + y + z\sqrt{2} - 2a = 0.$$

Un vector normal acestui plan este  $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$ . ■

Este posibil ca funcțiile  $x$ ,  $y$ ,  $z$  din (5.4) să fie astfel încât

$$x(u, v) = u, \quad y(u, v) = v, \quad z(u, v) = f(u, v),$$

unde  $f \in \mathcal{F}(A)$  este o funcție continuă pe mulțimea  $A$  situată în planul  $Oxy$ , cu derivate parțiale continue pe mulțimea  $\overset{\circ}{A}$ , aceasta însemnând că  $u = x$ ,

$v = y$ , iar  $z$  este o funcție *continuu diferențiabilă* de  $x$  și  $y$ . În această situație, în locul ecuațiilor (5.4) putem considera doar ecuația

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in A. \quad (5.22)$$

Funcția reală  $f$ , continuă pe mulțimea  $A \subset Oxy$  și diferențiabilă pe mulțimea  $\overset{\circ}{A}$ , definește *explicit* pânda netedă  $\text{Im } \mathbf{r}$ , iar (5.22) se numește *ecuația explicită* a pânzei netede. Ecuația vectorială a pânzei, corespunzătoare acestui caz particular, este

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + f(x, y) \mathbf{k}, \quad (x, y) \in A. \quad (5.23)$$

Vectorul tangent în  $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + f(x, y_0) \mathbf{k}, \quad x \in I, \quad I \times \{y_0\} \subset \overset{\circ}{A} \quad (5.24)$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(x_0, y_0) = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \mathbf{k} = \mathbf{i} + p \mathbf{k}, \quad (5.25)$$

iar vectorul tangent în  $M_0$  la drumul parametrizat

$$\mathbf{r} = x_0 \mathbf{i} + y \mathbf{j} + f(x_0, y) \mathbf{k}, \quad y \in J, \quad \{x_0\} \times J \subset \overset{\circ}{A} \quad (5.26)$$

este

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(x_0, y_0) = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \mathbf{k} = \mathbf{j} + q \mathbf{k}. \quad (5.27)$$

Drumurile parametrizate (5.24) și (5.26) sunt obținute prin intersecția pânzei netede (5.22) cu planele  $y = y_0$  și  $x = x_0$  care sunt paralele respectiv cu planele  $Oxz$  și  $Oyz$ . Coeficienții  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt:

$$A = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -p; \quad B = -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -q; \quad C = 1, \quad (5.28)$$

astfel că ecuația planului tangent în  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  la pânda netedă (5.22) este

$$-(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + (z - z_0) = 0. \quad (5.29)$$

### 5.1.4 O altă definiție a planului tangent

Să considerăm acum pânza netedă de ecuație vectorială (5.3) și un drum parametrizat neted  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^3)$ , unde  $I$  este interval din  $\mathbb{R}$ , cu proprietatea că există  $t_0 \in I$  astfel încât

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{r}(u_0, v_0), \text{ și } \text{Im } \mathbf{f} \subset \text{Im } \mathbf{r}. \quad (5.30)$$

Aceste proprietăți arată că imaginea drumului parametrizat considerat este situat pe pânza parametrică netedă (5.3) și că această imagine trece prin punctul  $M_0$  de pe pânză al cărui vector de poziție este  $\overrightarrow{OM_0} = \mathbf{r}(u_0, v_0)$ . Proprietățile de mai sus au loc dacă există un drum neted

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : I \rightarrow A \text{ astfel încât } \mathbf{f} = \mathbf{r} \circ \varphi. \quad (5.31)$$

Tangenta în  $M_0$  la drumul parametrizat neted  $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$  are ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_0) + \mathbf{f}'(t_0) s, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (5.32)$$

Pe de altă parte, după regula lanțului de derivare a unei funcții compuse, avem

$$\mathbf{f}'(t_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0) \varphi'_1(t_0) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0) \varphi'_2(t_0). \quad (5.33)$$

Din (5.33) și valoarea în  $\mathbf{h} = \varphi'(t_0)$  a diferențialei funcției  $\mathbf{r}$  în punctul  $(u_0, v_0)$  rezultă

$$\mathbf{f}'(t_0) = d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); \varphi'(t_0)\right),$$

iar din liniaritatea diferențialei de ordinul întâi, avem

$$\mathbf{f}'(t_0) s = d\mathbf{r}\left((u_0, v_0); s \varphi'(t_0)\right). \quad (5.34)$$

Folosind în (5.32) relațiile (5.34) și (5.30) și luând în calcul formula (5.17) deducem că tangenta (5.32) este inclusă în planul tangent (5.17) în punctul  $M_0$  la pânza netedă (5.3). Acest rezultat conduce la o altă definiție a planului tangent într-un punct al unei pânze parametrice netede.

**Definiția 5.1.3** *Se numește plan tangent în punctul  $M_0$  al unei pânze netede, locul geometric al tangentelor la respectiv toate drumurile netede care trec prin  $M_0$  ale căror imagini se află pe imaginea pânzei.*

### 5.1.5 Definiția suprafeței

**Definiția 5.1.4** Pânzele netede  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^3)$  și  $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathcal{F}(\tilde{A}, \mathbb{R}^3)$ , unde  $A, \tilde{A} \subset \mathbb{R}^2$ , se numesc **echivalente** dacă există un homeomorfism diferentiabil  $\psi : A \rightarrow \tilde{A}$ , cu jacobianul pozitiv în orice punct  $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$ , astfel încât  $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} \circ \psi$ .

**Definiția 5.1.5** Se numește **suprafață netedă** o clasă de echivalență în mulțimea pânzelor parametrice netede.

O suprafață netedă poate fi reprezentată prin oricare pânză parametrică netedă care aparține clasei de echivalență respective. În concluzie, într-o vecinătate a unui punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , o suprafață netedă care conține acest punct poate fi reprezentată fie vectorial prin ecuația vectorială (5.3), fie parametric prin ecuațiile parametrice (5.4), fie prin *ecuația carteziană explicită* (5.22). Reprezentarea (5.22) se obține din oricare reprezentare parametrică în baza teoremei de existență și unicitate a sistemelor de funcții reale de mai multe variabile reale definite implicit.

**Observația 5.1.4** Analizând (5.31) constatăm că orice funcție diferentiabilă, depinzând de parametrii  $u$  și  $v$  ai unei suprafețe netede  $(\mathcal{S})$ , asociată ecuației sale vectoriale (5.3), definește o **curbă situată (trasată) pe suprafață**. Curbele particulare  $u = \text{const.}$  și respectiv  $v = \text{const.}$  se numesc **curbe coordonate sau linii parametrice** ale suprafeței netede  $(\mathcal{S})$ . O curbă trasată pe o suprafață poate avea **ecuația explicită**  $v = f(u)$  sau **ecuația implicită**  $F(u, v) = 0$ .

De exemplu, drumurile (5.24), (5.26) care reprezintă clase de echivalență în mulțimea drumurilor echivalente numite curbe, sunt linii parametrice ale suprafeței  $(\mathcal{S})$  reprezentată cartezian explicit prin (5.22).

### 5.1.6 Ecuația carteziană implicită a unei suprafețe

Fie aplicația reală diferentiabilă  $F \in \mathcal{F}(A)$ ,  $A \subset \mathbb{R}^3$ , cu proprietatea că gradientul

$$(\nabla F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k}, \quad (5.35)$$

este vector nenul pe mulțimea deschisă  $\overset{\circ}{A}$ , adică

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)\right)^2 > 0, \quad (x, y, z) \in \overset{\circ}{A}. \quad (5.36)$$



**Definiția 5.1.6** Mulțimea  $(\mathcal{S})$  a punctelor  $M \in \mathcal{E}_3$  ale căror coordonate  $(x, y, z)$  verifică ecuația

$$(\mathcal{S}) : F(x, y, z) = 0, \quad (5.37)$$

unde funcția diferentiabilă  $F \in \mathcal{F}(A)$  satisface (5.36), se numește **varietate bidimensională scufundată în  $\mathbb{R}^3$  sau suprafață dată implicit**. Ecuația (5.37) este prin definiție **ecuația carteziană implicită a suprafeței  $(\mathcal{S})$** .

### 5.1.7 Vector normal unei suprafețe într-un punct regulat

Fie  $I$  un interval din  $\mathbb{R}$  și aplicația vectorială de o variabilă reală diferentiabilă  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{F}(I, A)$  cu proprietatea

$$F(\varphi(t)) = 0, \quad t \in I,$$

fapt ce exprimă că imaginea drumului parametrizat neted de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \varphi(t), \quad t \in I$$

se află pe varietatea bidimensională (5.37).

Datorită faptului că atât  $F$  cât și  $\varphi$  sunt funcții diferentiabile, rezultă că funcția compusă  $F \circ \varphi$  este diferentiabilă, deci derivabilă pe  $I$  și ca atare vom avea

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_2(t) + \frac{\partial F}{\partial z}(\varphi(t)) \cdot \varphi'_3(t) = 0, \quad t \in I. \quad (5.38)$$

Identitatea (5.38) arată că vectorul  $(\nabla F)(\varphi(t))$  este ortogonal vectorului tangent  $\varphi'(t)$  la drumul parametrizat  $\varphi$  în punctul  $M \in \mathcal{E}_3$  corespunzător valorii  $t$  a parametrului. Pe de altă parte, toate tangentele în punctul  $M$  corespunzător valorii  $t$  a parametrului la respectiv toate drumurile parametrizate ce trec prin  $M$  și sunt situate pe varietatea diferentiabilă  $(\mathcal{S})$  formează planul tangent în  $M$  la suprafață. Toate aceste rezultate conduc la următoarea definiție.

**Definiția 5.1.7** Fie suprafața netedă  $(\mathcal{S})$  de ecuație carteziană implicită (5.37) și  $M(x, y, z) \in (\mathcal{S})$ . Vectorul

$$\mathbf{N} = (\nabla F)(x, y, z), \quad (5.39)$$

se numește **vectorul normal la suprafață în punctul  $M$** .

Proprietatea de a fi ortogonal pe vectorul tangent la orice drum neted situat pe varietatea diferențiabilă  $(\mathcal{S})$  care conține punctul  $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$  o are și vectorul

$$-\mathbf{N} = -(\nabla F)(x, y, z), \quad (5.40)$$

deci și acesta poate fi numit *vector normal* în punctul  $M$  la suprafața netedă  $(\mathcal{S})$ .

**Observația 5.1.5** Dacă suprafața netedă  $(\mathcal{S})$  este reprezentată prin ecuația vectorială (5.3), atunci vectorul normal  $\mathbf{N}$  în punctul

$$M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in (\mathcal{S})$$

este, fie vectorul

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v), \quad (5.41)$$

fie opusul acestuia. Când suprafața netedă  $(\mathcal{S})$  este reprezentată cartezian explicit prin ecuația (5.22), din (5.29) deducem că vectorul normal în  $M(x, y, f(x, y))$  este, fie

$$\mathbf{N} = -p\mathbf{i} - q\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad (5.42)$$

fie opusul acestuia,  $p$  și  $q$  fiind notațiile lui Monge pentru derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  în punctul  $(x, y)$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v); \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

Putem defini *versorul normal* într-un punct al unei suprafețe netede ca fiind, după caz, versorul unuia din vectorii care apar în relațiile (5.39)–(5.42). Versorul normal poate fi, după caz:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm \frac{(\nabla F)(x, y, z)}{\|(\nabla F)(x, y, z)\|} = \\ &= \frac{\pm(F'_x(x, y, z)\mathbf{i} + F'_y(x, y, z)\mathbf{j} + F'_z(x, y, z)\mathbf{k})}{\sqrt{(F'_x(x, y, z))^2 + (F'_y(x, y, z))^2 + (F'_z(x, y, z))^2}}; \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|} = \\ &= \pm \frac{A(u, v)\mathbf{i} + B(u, v)\mathbf{j} + C(u, v)\mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}}; \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{n} = \pm \left( \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \mathbf{i} + \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \mathbf{k} \right). \quad (5.45)$$

Observăm că pentru fiecare caz de reprezentare a unei suprafețe netede se pot defini doi versori normali care sunt coliniari și de sens contrar.

**Definiția 5.1.8** *Coordonatele versorului normal la o suprafață netedă într-un punct al ei se numesc **cosini directori**.*

**Definiția 5.1.9** *Se numește **normala** în punctul  $M$  al unei suprafețe netede  $(\mathcal{S})$ , dreapta  $(N)$  determinată de punctul  $M$  și de unul din versorii normali ai suprafeței în acel punct.*

Corespunzător celor doi versori normali într-un punct al unei suprafețe vom avea două orientări ale normalei pe care le vom numi *orientarea pozitivă a normalei*, când vectorul ei director este  $\mathbf{n}$ , și *orientarea negativă a normalei* când se alege drept direcție a normalei vectorul  $-\mathbf{n}$ . În loc de orientare pozitivă și respectiv orientare negativă a normalei se pot folosi și termenii *sens pozitiv* și respectiv *sens negativ al normalei*.

**Definiția 5.1.10** *Fie funcția reală diferențiabilă  $F \in \mathcal{F}(A)$  care satisface (5.36) și punctul arbitrar  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in A$ . Varietatea bidimensională de ecuație carteziană explicită*

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) \quad (5.46)$$

*se numește **varietate de nivel sau suprafață de nivel a funcției  $F$  corespunzătoare nivelului  $F(x_0, y_0, z_0)$ .***

**Observația 5.1.6** *Vectorul normal în punctul  $M(x, y, z)$  la suprafața de nivel (5.46) care trece prin punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  este (5.35).*

**Observația 5.1.7** *Pentru fiecare punct  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  aparținând varietății de nivel (5.46) planul de ecuație*

$$(x - x_1) \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1) \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, y_1, z_1) + (z - z_1) \frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

*este **planul tangent** în punctul  $M_1$  la varietatea de nivel (5.46).*

**Definiția 5.1.11** *Dacă o suprafață  $\mathcal{S}$  nu este netedă, însă poate fi scrisă ca reuniunea unui număr finit de suprafețe netede, spunem că  $\mathcal{S}$  este **suprafață netedă pe porțiuni**.*

### 5.1.8 Element de arie al unei suprafețe netede

Să considerăm o suprafață netedă ( $\mathcal{S}$ ) reprezentată de pânza parametrică (5.3). Prin punctul  $M$  de vector de poziție  $\mathbf{r}(u, v)$  de pe  $\text{Im } \mathbf{r}$  trece o curbă parametrică  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $v = \text{const.}$ , al cărei vector tangent în  $M$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  și o curbă parametrică  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $u = \text{const.}$ , al cărei vector tangent în  $M$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ . Un vector de mărime infinitezimală, coliniar cu vectorul  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)$  este  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) du$ , iar un vector coliniar cu  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)$ , de mărime infinitezimală, are forma  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) dv$ . Acești doi vectori determină un paralelogram infinitezimal inclus în planul tangent în  $M$  la suprafața ( $\mathcal{S}$ ). Fie  $d\sigma$  aria acestui paralelogram.

Ne propunem să calculăm expresia lui  $d\sigma$  când suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este reprezentată fie prin ecuația vectorială (5.3), fie prin ecuațiile parametrice (5.4) sau prin ecuația carteziană explicită (5.22).

Pentru aceasta ne folosim de interpretarea geometrică a mărimii produsului vectorial a doi vectori necoliniari  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  și  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  care, se știe, este aria paralelogramului din  $\mathcal{E}_3$  ce are două din laturi reprezentanții celor doi vectori într-un punct oarecare al spațiului, adică

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \tau,$$

unde  $\tau \in [0, \pi]$  este unghiul dintre cei doi vectori. Aplicând această formulă de calcul pentru  $d\sigma$  găsim

$$\begin{aligned} (d\sigma)^2 &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 \sin^2 \tau (dudv)^2 = \\ &= \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\| \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| \cos \tau \right)^2 \right) (dudv)^2, \end{aligned}$$

în care am folosit identitatea  $\sin^2 \tau + \cos^2 \tau = 1$ . Dacă ținem cont că produsul scalar a doi vectori din  $\mathbb{R}^3$  este egal cu produsul dintre mărimile vectorilor și cosinusul unghiului dintre ei, iar pătratul normei (lungimii) unui vector este produsul scalar al acelui vector cu el însuși, egalitatea de mai sus se poate scrie sub forma

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v) G(u, v) - F^2(u, v)} dudv, \quad (5.47)$$

în care s-au făcut notațiile

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)^2 \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \right\| \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| \cos \tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right)^2. \end{aligned} \quad (5.50)$$

**Observația 5.1.8** Pentru suprafața netedă de ecuație vectorială  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ , mărimea  $E(u, v)$  este suma pătratelor elementelor primei coloane a matricei Jacobiene  $J_{\mathbf{r}}(u, v)$ ,  $F(u, v)$  este suma produselor elementelor corespunzătoare celor două coloane din  $J_{\mathbf{r}}(u, v)$ , iar  $G(u, v)$  este suma pătratelor elementelor coloanei a doua a matricei  $J_{\mathbf{r}}(u, v)$ .

**Observația 5.1.9** Dacă suprafața  $(\mathcal{S})$  este reprezentată printr-o pânză netedă dată cartezian explicit prin (5.22) și ținem cont de (5.23), deducem că matricea jacobiană  $J_{\mathbf{r}}(x, y)$  are elementele

$$J_{\mathbf{r}}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Din Observațiile 5.1.8 și 5.1.9 rezultă:

$$E(x, y) = 1 + p^2; \quad F(x, y) = p \cdot q; \quad G(x, y) = 1 + q^2. \quad (5.51)$$

Prin urmare, aria infinitezimală  $d\sigma$  a unei suprafețe netede reprezentată cartezian explicit de ecuația (5.22) este

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy. \quad (5.52)$$

**Definiția 5.1.12** Mărimea  $d\sigma$  din expresia (5.47), respectiv (5.52), se numește **element de arie** al suprafeței  $(\mathcal{S})$  calculat în punctul  $M$  al ei reprezentată parametric prin ecuațiile (5.4), respectiv cartezian explicit prin ecuația (5.22).

**Definiția 5.1.13** Funcțiile reale  $E$ ,  $F$ ,  $G$ , calculate după legea (5.48) când  $(\mathcal{S})$  este reprezentată parametric, sau după legea (5.51) dacă  $(\mathcal{S})$  este dată prin ecuația carteziană explicită, se numesc **coeficienții lui Gauss** sau **coeficienții primei forme fundamentale** a suprafeței netede  $(\mathcal{S})$ .

Pentru a vedea semnificația primei forme fundamentale a unei suprafețe netede, considerăm un drum oarecare (curbă)  $(\gamma)$  pe suprafață care trece prin punctul  $M(x, y, z)$  cu coordonatele date de (5.4), unde  $(u, v) \in \overset{\circ}{A}$ . Elementul de arc  $ds$  al acestei curbe în punctul  $M$  este

$$ds = \|d\mathbf{r}(u, v)\| = \sqrt{d\mathbf{r}(u, v) \cdot d\mathbf{r}(u, v)}.$$

Având în vedere expresia analitică a diferențialei

$$d\mathbf{r}(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v)dv,$$

calculând pătratul scalar al acesteia și ținând cont de notațiile (5.48)–(5.50), constatăm că

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2. \quad (5.53)$$

**Definiția 5.1.14** Relația (5.53) se numește **prima formă fundamentală** a unei suprafețe.

**Observația 5.1.10** Pătratul elementului de arc,  $ds^2$ , este formă pătratică în variabilele  $du$  și  $dv$ , iar determinantul matricei coeficienților este

$$E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v) = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\|^2. \quad (5.54)$$

**Observația 5.1.11** Relația (5.54) și condiția de regularitate (5.5) arată că  $ds^2$  este **formă pătratică pozitiv definită**.

**Definiția 5.1.15** Fie o suprafață netedă  $(\mathcal{S})$ ,  $M_0 \in \mathcal{S}$ ,  $(\gamma_1)$ ,  $(\gamma_2)$  două curbe situate pe suprafață și  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  versorii tangentelor în punctul comun  $M_0$  la respectiv curbele  $(\gamma_1)$  și  $(\gamma_2)$ . Se numește **unghiul dintre curbele  $(\gamma_1)$  și  $(\gamma_2)$** , unghiul  $\varphi \in [0, \pi]$  dintre  $\tau_1$  și  $\tau_2$ .

Cosinusul unghiului  $\varphi$  este dat de relația

$$\cos \varphi = \frac{d\mathbf{r}(u_0, v_0) \cdot \delta\mathbf{r}(u_0, v_0)}{\|d\mathbf{r}(u_0, v_0)\| \|\delta\mathbf{r}(u_0, v_0)\|}, \quad (5.55)$$

unde diferențialele vectorului de poziție a punctului  $M_0$  în lungul fiecăreia dintre cele două curbe sunt

$$\begin{cases} d\mathbf{r}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)dv, \\ \delta\mathbf{r}(u_0, v_0) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)\delta u + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)\delta v. \end{cases} \quad (5.56)$$

Înlocuind (5.56) în (5.55) și folosindu-ne de expresiile coeficienților lui Gauss în punctul  $M'_0(u_0, v_0)$ , deducem

$$\cos \varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}. \quad (5.57)$$

Presupunem că cele două curbe în discuție mai sus sunt liniile parametrice care trec prin  $M_0$ . Atunci, pe prima linie avem  $dv = 0$ , iar pe cea de a doua  $\delta v = 0$ , încât din (5.57) deducem că unghiul dintre liniile parametrice este astfel încât

$$\cos \varphi = \frac{F(u_0, v_0)}{\sqrt{E(u_0, v_0) G(u_0, v_0)}}. \quad (5.58)$$

Două curbe trasate pe suprafața  $(\mathcal{S})$  de ecuație vectorială (5.3), care trec prin punctul  $M_0 \in (\mathcal{S})$ , sunt ortogonale dacă

$$E(u_0, v_0)du\delta u + F(u_0, v_0)(du\delta v_0 + dv\delta u_0) + G(u_0, v_0)dv\delta v_0 = 0. \quad (5.59)$$

**Observația 5.1.12** Să considerăm pânza parametrică din Exemplul 5.1.1. Constatăm că

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = 0,$$

ceea ce înseamnă că cel de al doilea coeficient al lui Gauss este nul în orice punct  $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ . Folosind (5.58) și (5.59) deducem că liniile

parametrice ale sferei sunt ortogonale. Aceste linii parametrice sunt, pe de o parte, cercul paralel obținut când  $v = \text{const.}$  și, pe de altă parte, meridianul care se obține luând  $u = \text{const.}$

**Exercițiul 5.1.1** Fie suprafața  $(\mathcal{S})$  din  $\mathbb{R}^3$  de ecuație vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (u \cos v + \sin v) \mathbf{i} + (u \sin v - \cos v) \mathbf{j} + (u - v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Să se arate că în toate punctele suprafeței există un plan tangent unic și să se scrie ecuația vectorială, ecuațiile parametrice și ecuația carteziană implicită ale planului tangent la suprafață în punctul  $M_0 \in (\mathcal{S})$  corespunzătoare valorilor  $u = \frac{\pi}{3}$ ,  $v = 0$  ale parametrilor  $u$  și  $v$ . Să se determine coeficienții lui Gauss și prima formă fundamentală într-un punct curent  $M$  al suprafeței.

**Soluție.** Funcția  $\mathbf{r} \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$  care definește suprafața  $(\mathcal{S})$  este diferențibilă, prin urmare  $(\mathcal{S})$  este o suprafață netedă în  $\mathbb{R}^3$ . Apoi, matricea jacobiană a aplicației  $\mathbf{r}$  este

$$J_{\mathbf{r}}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v + \cos v \\ \sin v & u \cos v + \sin v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dacă se calculează funcțiile  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , se găsește:

$$A = -u \cos v - 2 \sin v; \quad B = -u \sin v - 2 \cos v; \quad C = u.$$

Observăm că  $A^2 + B^2 + C^2 = 2u^2 + 4 > 0$ ,  $(\forall) (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , deci în orice punct al suprafeței există un plan tangent unic determinat.

Ecuația vectorială a planului tangent în  $M_0$  este

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) + (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \left( J_{\mathbf{r}}\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \begin{pmatrix} t - \frac{\pi}{3} \\ s \end{pmatrix} \right).$$

Dacă se efectuează înlocuirile cerute se găsește

$$\mathbf{r} = \frac{\pi}{3} \mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{\pi}{3} \mathbf{k} + (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \begin{pmatrix} t - \frac{\pi}{3} + s \\ \frac{\pi}{3} s \\ t - s - \frac{\pi}{3} \end{pmatrix}.$$



Egalând coordonatele corespunzătoare ale vectorilor din cei doi membri ai ecuației vectoriale a planului tangent în punctul  $M_0$  găsim că ecuațiile parametrice ale acestuia sunt

$$\begin{cases} x = t + s \\ y = \frac{\pi}{3} - 1 \\ z = t - s, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Ecuația carteziană implicită a planului tangent în  $M_0$  se obține eliminând parametrii  $t$  și  $s$  din ecuațiile parametrice de mai sus. Se găsește că această ecuație este

$$\pi x - 6y - \pi z - 6 = 0.$$

Folosind Observația 5.1.8 constatăm că coeficienții lui Gauss sunt:

$$E(u, v) = 2; \quad F(u, v) = 0; \quad G(u, v) = 2 + u^2, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

iar forma întâia fundamentală a suprafeței este

$$ds^2 = 2 du^2 + (2 + u^2) dv^2.$$

■

**Exercițiul 5.1.2** *Să se arate că planul tangent într-un punct curent al suprafeței*

$$(\mathcal{S}) \quad z = f(x, y) = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

*unde  $\varphi$  este o funcție reală derivabilă pe un interval real, trece prin originea reperului din  $\mathcal{E}_3$ .*

**Soluție.** Dacă notăm coordonatele punctului curent al planului tangent cu  $X, Y, Z$ , atunci ecuația planului tangent în punctul  $M(x, y, x \varphi(\frac{y}{x}))$  al suprafeței date este

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - (Z - f(x, y)) = 0.$$

Trebuie să calculăm derivatele parțiale ale funcției  $f$  care definește suprafața. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Înlocuind aceste valori ale derivatelor parțiale în ecuația planului tangent găsim

$$\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)X + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)Y - Z = 0.$$

Oricare din aceste plane trece prin originea reperului deoarece coordonatele acesteia  $(0, 0, 0)$  verifică ecuația planului indiferent de punctul  $M(x, y, z)$  al suprafeței. ■

**Definiția 5.1.16** *O porțiune  $(\mathcal{S})$  de suprafață netedă se numește **suprafață orientabilă**, dacă în fiecare punct al ei normala este bine determinată și, pornind dintr-un punct al suprafeței pe o curbă închisă cu o anumită orientare a normalei, ajungem în acel punct cu aceeași orientare a normalei. Fața care corespunde sensului pozitiv al normalei se numește **fața pozitivă** a suprafeței. O suprafață orientabilă se numește și **suprafață cu două fețe** sau **suprafață bilateră**.*

Cea mai simplă suprafață cu două fețe este planul. *Cuadricele* (elipsoidul, hiperboloizii, parabolozii, cilindri pătratici, conurile pătratice, perechile de plane) sunt suprafețe orientabile. Când suprafața este închisă, deci când este frontiera unui domeniu spațial mărginit, ea este orientabilă cele două fețe ale sale numindu-se *fața exterioară* și *fața interioară*. Dacă suprafața  $(\mathcal{S})$  are reprezentarea carteziană explicită (5.22), prin definiție fața pozitivă a sa este aceea pentru care normala orientată într-un punct al ei face unghi ascuțit cu versorul  $\mathbf{k}$ . În acest caz fețele pozitive  $i$  se spune și *față superioară*.

Există suprafețe cu o singură față care se mai numesc *suprafețe neorientabile* sau *suprafețe unilaterale*; banda lui Möbius este un exemplu de suprafață cu o singură față.

## 5.2 Aria unei suprafețe netede

Din geometria elementară se cunosc ariile domeniilor plane cu frontiere poligoane, a cercului și ariile unor figuri geometrice de rotație (con, cilindru, sferă, zonă sferică, calotă sferică). Cu ajutorul calculului integral am extins această noțiune și am arătat cum se calculează aria oricărui domeniu determinat de curbe plane închise, care au arie. Pentru definirea ariei unei porțiuni de suprafață oarecare, pornind pe calea urmată la calculul lungimii unui arc regulat de curbă prin considerarea liniilor poligonale înscrise în curbă, ar trebui să considerăm suprafețe poliedrale înscrise în porțiunea de suprafață

dată. După cum a arătat Schwarz printr-un exemplu (cizma lui Schwarz), această cale nu duce întotdeauna la rezultat. De aceea, pentru introducerea noțiunii de arie a unei porțiuni de suprafață netedă procedăm după cum urmează.

Să considerăm o suprafață netedă pozitiv orientată  $(\mathcal{S})$  dată cartezian explicit de ecuația (5.22) și să notăm cu  $(\Gamma)$  curba care mărginește  $(\mathcal{S})$ . Fie  $D$  interiorul domeniului de definiție al funcției  $f$  din (5.22) și  $\gamma$  frontiera acestuia. Mulțimile  $D$  și  $\gamma$  sunt proiecțiile ortogonale ale lui  $(\mathcal{S})$  și respectiv  $\Gamma$  pe planul  $Oxy$ .

Să împărțim suprafața  $(\mathcal{S})$  în patrulater curbilinii  $(S_{ij})$  cu ajutorul unor curbe coordonate de forma  $x = x_i = \text{const.}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , și  $y = y_j = \text{const.}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Aceste curbe sunt intersecțiile suprafeței cu plane paralele la planele de coordonate  $Oyz$  și  $Oxz$ . Evident,

$$(S_{ij}) = \{(x, y, z) \in (\mathcal{S}) : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}, z = f(x, y)\}.$$

Proiecția  $D_{ij}$  a porțiunii  $(S_{ij})$  din suprafața  $(\mathcal{S})$  pe planul  $Oxy$  este

$$D_{ij} = \{(x, y) \in D : x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1},$$

unde  $1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1\}$ .

Fie  $M_{ij}(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))$  un punct arbitrar aparținând patrulaterului curbiliniu  $(S_{ij})$  și  $M'_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$  proiecția acestui punct pe planul  $Oxy$ . Notăm cu  $T_{ij}$  porțiunea din planul tangent la suprafață în punctul  $M_{ij}$  care se proiectează în planul  $Oxy$  pe dreptunghiul, eventual curbiliniu,  $D_{ij}$ . Din geometria elementară se cunoaște relația:

$$\text{aria } D_{ij} = \text{aria } T_{ij} \cos \gamma_{ij}, \quad (5.60)$$

unde  $\gamma_{ij} \in [0, \pi/2)$  este unghiul dintre normala la fața pozitivă a suprafeței  $(\mathcal{S})$  în punctul  $M_{ij}$  și versorul  $\mathbf{k}$  al axei  $Oz$ . Am arătat în paragraful precedent că

$$\cos \gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_j) + q^2(\xi_i, \eta_j)}} \quad (5.61)$$

unde, conform notațiilor lui Monge,

$$p(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_i, \eta_j); \quad q(\xi_i, \eta_j) = \frac{\partial f}{\partial y}(\xi_i, \eta_j).$$

O valoare aproximativă a ariei porțiunii netede ( $\mathcal{S}$ ) de suprafață este

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \text{aria } T_{ij}. \quad (5.62)$$

Folosind (5.60) în (5.62) constatăm că

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \gamma_{ij}} \text{aria } D_{ij}. \quad (5.63)$$

Având în vedere (5.61) rezultă că expresia lui  $\Omega_{mn}$  din (5.63) se poate scrie în forma

$$\Omega_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_j) + q^2(\xi_i, \eta_j)} \text{aria } D_{ij}. \quad (5.64)$$

**Observația 5.2.1** Membrul doi al relației (5.64) este o sumă integrală Riemann a funcției  $F(x, y) = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}$  corespunzătoare modului de divizare

$$\Delta_{mn} = \{D_{11}, D_{12}, \dots, D_{ij}, \dots, D_{mn}\} \quad (5.65)$$

și alegerii punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_j) \in D_{ij}$ .

**Definiția 5.2.1** Se numește **aria suprafeței netede** ( $\mathcal{S}$ ) numărul real

$$\text{aria } S = \lim_{\nu_{mn} \rightarrow 0} \Omega_{mn}. \quad (5.66)$$

**Teorema 5.2.1** Dacă suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este netedă și este reprezentată cartezian explicit prin ecuația (5.22), atunci ea are arie și aria sa este dată de formula

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} \, dx dy. \quad (5.67)$$

**Demonstrație.** Deoarece am considerat că suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este netedă, rezultă că funcția  $f$  din (5.22) este continuu diferențiabilă pe  $D$  ceea ce atrage că funcția

$$F(x, y) = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}$$

este continuă pe  $D$  și, drept urmare, limita din membrul al doilea al relației (5.66) este integrala dublă pe  $D$  din funcția  $F(x, y)$ , astfel că vom putea scrie (5.67) și teorema este demonstrată. ■

**Observația 5.2.2** Formula de calcul (5.67) a ariei suprafeței netede ( $\mathcal{S}$ ) poate fi scrisă și în forma

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_D \frac{dxdy}{\cos \gamma}. \quad (5.68)$$

**Exemplul 5.2.1** Să se determine aria suprafeței tăiată din **paraboloidul hiperbolic**  $z = xy$  de **cilindrul circular**  $x^2 + y^2 = R^2$ .

**Soluție.** Funcția  $f$  care definește cartezian explicit porțiunea de suprafață decupată de cilindru în paraboloidul hiperbolic dat este  $f(x, y) = xy$ , domeniul ei de definiție  $D$  fiind discul închis de rază  $R$  cu centrul în origine, situat în planul  $Oxy$ . Așadar,

$$f : D \subset \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in D,$$

unde domeniul  $D$  este definit de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

Constatăm că porțiunea ( $\mathcal{S}$ ) din paraboloidul hiperbolic aflat în interiorul cilindrului  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  este o suprafață netedă, prin urmare aria sa va fi calculată cu ajutorul formulei (5.67). Avem  $p = y$ ,  $q = y$  astfel că aria lui ( $\mathcal{S}$ ) este

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dxdy. \quad (5.69)$$

Pentru calculul acestei integrale duble, trecem la coordonate polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (5.70)$$

Perechea  $(x, y)$  aparține domeniului de integrare  $D$  dacă și numai dacă perechea  $(\rho, \theta)$  din (5.70) aparține intervalului bidimensional  $[0, R] \times [0, 2\pi)$ . Atunci, (5.70) stabilește o transformare punctuală regulată între intervalul bidimensional  $\Omega = [0, R] \times [0, 2\pi)$  și discul  $D$ . Știind că jacobianul transformării punctuale regulate (5.70) este egal cu  $\rho$ , prin aplicarea formulei schimbării de variabile în integrala dublă (5.69), găsim

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_{\Omega} \rho \sqrt{1 + \rho^2} \, d\rho d\theta.$$

Integrala dublă pe un interval bidimensional se calculează simplu, astfel că

$$\begin{aligned} \text{aria } \mathcal{S} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \pi \int_0^R (1 + \rho^2)^{1/2} (1 + \rho^2)' d\rho = \\ &= \frac{2\pi}{3} \left( (1 + R^2)^{3/2} - 1 \right), \end{aligned}$$

deoarece o primitivă a funcției  $(1 + \rho^2)^{1/2}(1 + \rho^2)'$  este  $\frac{2}{3}(1 + \rho^2)^{3/2}$ . ■

**Teorema 5.2.2** *Dacă  $(\mathcal{S})$  este o suprafață netedă reprezentată prin ecuația vectorială (5.3), sau prin ecuațiile parametrice (5.4), atunci  $(\mathcal{S})$  are arie și*

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_A \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv, \quad (5.71)$$

unde  $E$ ,  $F$  și  $G$  sunt coeficienții lui Gauss (5.48) – (5.50).

**Demonstrație.** Presupunem că normala la suprafața  $(\mathcal{S})$  este dată de (5.43), unde în membrul doi s-a luat semnul plus. Atunci,

$$\cos \gamma = \frac{C(u, v)}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}}. \quad (5.72)$$

Să considerăm sistemul format de primele două ecuații ale sistemului (5.4), adică

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in A. \quad (5.73)$$

Presupunând că parametrizarea suprafeței netede  $(\mathcal{S})$  este astfel încât

$$C(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0, \quad (u, v) \in \overset{\circ}{A}, \quad (5.74)$$

deducem că (5.73) este o transformare punctuală regulată între mulțimea  $A$  și o mulțime  $D \subset \mathbb{R}^2$  care este mulțimea perechilor  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , unde  $x$  și  $y$  sunt dați de (5.73). Atunci, (5.73) poate constitui o schimbare de variabile în integrala dublă.

În formula de calcul (5.68) a ariei suprafeței efectuăm schimbarea de variabile (5.73). Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă găsim

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_A \frac{1}{\cos \gamma} \left| \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)}(u, v) \right| dudv. \quad (5.75)$$

Din (5.74) și (5.72) în (5.75) rezultă că formula de calcul a ariei unei suprafețe netede date parametric este

$$\begin{aligned} \text{aria } \mathcal{S} &= \iint_A \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} dudv = \\ &= \iint_A \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Pe de altă parte,

$$\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}. \quad (5.77)$$

Concluzia (5.71) a teoremei rezultă acum din (5.76) și (5.77). ■

**Exemplul 5.2.2** *Să se determine aria suprafeței de rotație*

$$(\mathcal{S}) : \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(u), \quad (5.78)$$

unde  $(u, v) \in D = [u_1, u_2] \times [0, 2\pi)$  și  $f$  este o funcție derivabilă.

**Soluție.** Suprafața de rotație  $(\mathcal{S})$  este o suprafață netedă. Pentru a aplica formula (5.71), calculăm coeficienții lui Gauss. Pentru aceasta, efectuăm derivatele funcțiilor din (5.78). Avem:

$$\begin{cases} x'_u(u, v) = \cos v; & x'_v(u, v) = -u \sin v; \\ y'_u(u, v) = \sin v; & y'_v(u, v) = u \cos v; \\ z'_u(u, v) = f'(u); & z'_v(u, v) = 0. \end{cases} \quad (5.79)$$

Coeficienții  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  și  $G(u, v)$  se calculează cu ajutorul derivatelor parțiale din (5.79). Se găsește

$$\begin{cases} E(u, v) = (x'_u(u, v))^2 + (y'_u(u, v))^2 + (z'_u(u, v))^2 = \\ \quad = 1 + (f'(u))^2, \\ F(u, v) = x'_u(u, v)x'_v(u, v) + y'_u(u, v)y'_v(u, v) + \\ \quad + z'_u(u, v)z'_v(u, v) = 0, \\ G(u, v) = (x'_v(u, v))^2 + (y'_v(u, v))^2 + (z'_v(u, v))^2 = u^2. \end{cases} \quad (5.80)$$

Formula de calcul (5.71), în care folosim (5.80), conduce la

$$\text{aria } \mathcal{S} = \iint_D \sqrt{u^2(1 + f'^2(u))} \, dudv = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} |u| \sqrt{1 + f'^2(u)} \, du. \quad (5.81)$$

Presupunem că  $[u_1, u_2] \subset (0, +\infty)$  și că funcția  $f$  are derivata pozitivă. Folosind ca variabilă cota  $z$ , vom avea

$$u = \varphi(z), \quad z \in [z_1, z_2], \quad \varphi'(z) = \frac{1}{f'(u)},$$

astfel că formula de calcul (5.81) a ariei suprafeței de rotație (5.78) devine

$$\text{aria } \mathcal{S} = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z) \sqrt{1 + (\varphi'(z))^2} \, dz$$

și este aceeași cu cea dedusă la aplicațiile integralei definite. ■

**Teorema 5.2.3** *Aria unei suprafețe netede ( $\mathcal{S}$ ) nu depinde de reprezentarea sa parametrică.*

**Demonstrație.** Fie suprafața ( $\mathcal{S}$ ) dată parametric de (5.4) și transformarea punctuală regulată bijectivă

$$\begin{cases} u = \lambda(u', v'), \\ v = \mu(u', v'), \end{cases} \quad (u', v') \in D' \quad (5.82)$$

de la mulțimea  $D'$  la mulțimea  $A$ , unde frontiera lui  $D'$  este o curbă netedă pe porțiuni, funcțiile  $\lambda$  și  $\mu$  sunt continue și cu derivate parțiale continue, iar jacobianul

$$\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \neq 0, \quad \text{pe } D'.$$

Obținem în acest fel o nouă reprezentare parametrică a lui ( $\mathcal{S}$ ) și anume

$$\begin{cases} x = \varphi(u', v') = x(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ y = \psi(u', v') = y(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z = \chi(u', v') = z(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \end{cases} \quad (u', v') \in D'. \quad (5.83)$$



Dacă notăm:

$$A' = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u', v')}(u', v'); \quad B' = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u', v')}(u', v'); \quad C' = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u', v')}(u', v'),$$

atunci au loc următoarele egalități:

$$A' = A \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad B' = B \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad C' = C \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \quad (5.84)$$

și deci

$$\begin{aligned} & \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} = \\ &= \frac{\sqrt{A'^2(u', v') + B'^2(u', v') + C'^2(u', v')}}{\left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \right|}. \end{aligned}$$

Folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem

$$\begin{aligned} \text{aria } \mathcal{S} &= \iint_A \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, dudv = \\ &= \iint_{D'} \frac{\sqrt{A'^2(u', v') + B'^2(u', v') + C'^2(u', v')}}{\left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \right|} \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}(u', v') \right| du' dv' = \\ &= \iint_{D'} \sqrt{A'^2(u', v') + B'^2(u', v') + C'^2(u', v')} \, du' dv' \end{aligned} \quad (5.85)$$

și teorema este demonstrată. ■

### 5.3 Integrala de suprafață de primul tip

Fie  $(\mathcal{S})$  o suprafață netedă mărginită de o curbă netedă pe porțiuni  $L$ . Este posibil însă ca  $(\mathcal{S})$  să fie o suprafață închisă și deci nu are frontieră. Considerăm o funcție mărginită  $f(M)$  definită în punctele unui domeniu din spațiu care conține suprafața  $(\mathcal{S})$ . Fie

$$\Delta = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\} \quad (5.86)$$

o *partiție* sau *diviziune* a suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) obținută prin trasarea pe suprafață a anumitor curbe din două familii de curbe distincte. Întrucât suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este netedă pe porțiuni, ea are arie. Fiecare din suprafețele componente ale partiției are arie și deci se poate vorbi de numărul real pozitiv  $\nu(\Delta)$  sau  $\|\Delta\|$ , cel mai mare dintre numerele pozitive aria  $\mathcal{S}_i$  pe care îl vom numi *norma partiției*  $\Delta$ . În fiecare parte  $\mathcal{S}_i$  alegem un punct  $M_i$ , numit *punct intermediar*, și formăm *suma integrală*

$$\sigma_{\Delta}(f; M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i) \text{aria } \mathcal{S}_i \quad (5.87)$$

asociată funcției  $f$ , modului de divizare  $\Delta$  și alegerii punctelor intermediare  $M_i \in \mathcal{S}_i$ .

**Definiția 5.3.1** *Funcția  $f$  este integrabilă pe suprafața netedă  $\mathcal{S}$  dacă există un număr  $I \in \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $(\forall) \varepsilon > 0, (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât  $(\forall) \Delta$  cu  $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$  și  $M_i \in \mathcal{S}_i$ ,*

$$|\sigma_{\Delta}(f, M_i) - I| < \varepsilon. \quad (5.88)$$

Numărul  $I$  se numește **integrala de suprafață de primul tip** din funcția  $f$  pe suprafața netedă ( $\mathcal{S}$ ) și se notează

$$I = \iint_{\mathcal{S}} f(M) d\sigma, \quad (5.89)$$

unde  $d\sigma$  este **elementul de arie** al suprafeței  $\mathcal{S}$ .

Poziția punctului curent  $M \in \mathcal{S}$  poate fi determinată prin specificarea coordonatelor carteziane ale sale  $x, y$  și  $z$ . Atunci, valoarea  $f(M)$  a funcției  $f$  în punctul  $M \in \mathcal{S}$  poate fi notată în forma  $f(x, y, z)$  și ca urmare integrala de suprafață de tipul întâi a funcției  $f$  pe suprafața netedă ( $\mathcal{S}$ ) se poate scrie ca

$$I = \iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma. \quad (5.90)$$

De menționat că dacă folosim notația (5.90) pentru integrala de suprafață  $I$ , trebuie să avem în vedere că variabilele  $x, y$  și  $z$  sunt legate între ele prin condiția de apartenență la suprafața ( $\mathcal{S}$ ) a punctului  $M(x, y, z)$ . Integrala de suprafață de tipul întâi din funcția  $f$  pe suprafața netedă ( $\mathcal{S}$ ) poate fi numită simplu *integrala funcției  $f$  pe suprafața  $\mathcal{S}$* .

**Observația 5.3.1** *Presupunând că  $(\mathcal{S})$  este o suprafață materială de densitate  $f(x, y, z)$ , integrala funcției  $f$  pe suprafața  $(\mathcal{S})$ , dacă există, este egală cu masa suprafeței sau pânzei materiale  $\mathcal{S}$ . Dacă  $f$  reprezintă densitatea de repartiție a unei sarcini electrice, integrala lui  $f$  pe suprafața  $(\mathcal{S})$  este sarcina electrică totală distribuită pe  $\mathcal{S}$ .*

După definiția integralei de suprafață de tipul întâi se impune să studiem existența acestora precum și modalitățile de calcul ale ei.

La ambele aspecte se poate răspunde dacă reducem integrala de suprafață de tipul întâi la o integrală dublă.

Pentru început, considerăm cazul când suprafața  $(\mathcal{S})$  este reprezentată cartezian explicit, iar proiecția sa pe planul  $Oxy$  este un domeniu închis și mărginit.

**Teorema 5.3.1** *Dacă  $(\mathcal{S})$  este suprafața netedă*

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.91)$$

*și  $f(x, y, z)$  este o funcție mărginită definită în punctele unui domeniu tridimensional care conține suprafața  $\mathcal{S}$ , atunci are loc relația*

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy \quad (5.92)$$

*oride câte ori integralele care apar în aceasta există. Integrala de suprafață din relația (5.92) există dacă integrala dublă din membrul drept al egalității există.*

**Demonstrație.** Fie  $\Delta$  o partiție a suprafeței de forma (5.86). Proiectând această partiție în planul  $Oxy$  obținem o partiție  $\tilde{\Delta}$  a domeniului  $D$  în părțile carabile  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , fiecare din părțile  $D_i$  având o arie care nu o întrece pe cea a suprafeței  $\mathcal{S}_i$  corespunzătoare.

Considerăm suma integrală (5.87) în care punctul intermediar  $M_i \in \mathcal{S}_i$  va avea coordonatele  $M_i(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))$ . Corespunzător punctului  $M_i \in \mathcal{S}_i$  în planul  $Oxy$  vom avea punctul  $M'_i(\xi_i, \eta_i)$  care va aparține domeniului  $D_i$ .

Din paragraful precedent știm că aria porțiunii  $\mathcal{S}_i$  de suprafață este dată de integrala dublă

$$\text{aria } \mathcal{S}_i = \iint_{D_i} \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy, \quad (5.93)$$

unde  $p$  și  $q$  sunt notațiile lui Monge pentru derivatele de ordinul întâi în raport cu  $x$  și respectiv  $y$  ale funcției  $z = z(x, y)$  din (5.91). Aplicând teorema de medie integralei duble din (5.93), obținem

$$\text{aria } \mathcal{S}_i = \sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)} \text{ aria } D_i, \quad (5.94)$$

unde  $(\xi_i^*, \eta_i^*)$  este un punct aparținând domeniului  $D_i$ . În consecință, suma integrală (5.87) poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(f; M_i) &= \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + p^2(\xi_i^*, \eta_i^*) + q^2(\xi_i^*, \eta_i^*)} \text{ aria } D_i \end{aligned} \quad (5.95)$$

care nu diferă cu mult de suma integrală Riemann a funcției reale de două variabile reale

$$\begin{aligned} F : D &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \\ &= f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}, \end{aligned} \quad (5.96)$$

ceea ce o deosebește de o asemenea sumă integrală fiind faptul că în membrul doi din (5.95) nu apare peste tot aceleași puncte intermediare  $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ . Să punem în evidență suma integrală în care să apară aceleași puncte intermediare. Avem

$$\tilde{\sigma}_\Delta(f; M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + p^2(\xi_i, \eta_i) + q^2(\xi_i, \eta_i)} \text{ aria } D_i. \quad (5.97)$$

Să arătăm că această sumă integrală, notată simplu cu  $\tilde{T}$ , diferă foarte puțin de suma integrală (5.95) pe care o vom renota cu  $T$ .

Datorită faptului că suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este netedă, funcția reală de două variabile reale

$$(x, y) \mapsto \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}, \quad (x, y) \in D \quad (5.98)$$

este continuă pe mulțimea compactă  $D \subset \mathbb{R}^2$ , deci va fi uniform continuă. În consecință, dat orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta_1 > 0$  astfel încât

$$\left| \sqrt{1 + p^2(x_1, y_1) + q^2(x_1, y_1)} - \sqrt{1 + p^2(x_2, y_2) + q^2(x_2, y_2)} \right| < \varepsilon \quad (5.99)$$

dacă cel mai mare dintre diametrele subdomeniilor  $D_i$  este mai mic decât  $\delta_1$ . Prin ipoteză, funcția  $f(x, y, z)$  este mărginită, adică

$$|f(x, y, z)| \leq K = \text{constant} \quad (5.100)$$

și prin urmare relațiile (5.99) și (5.100) implică inegalitatea

$$|T - \tilde{T}| \leq K \varepsilon \sum_{i=1}^n \text{aria } S_i = K \varepsilon \text{aria } \mathcal{S}, \quad (5.101)$$

unde  $T = \sigma_{\Delta}(f; M_i)$ , iar  $\tilde{\sigma}_{\tilde{\Delta}}(f; M_i)$ .

Acum putem completa ușor demonstrația teoremei. Dacă integrala din membrul drept al relației (5.92) există, atunci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta_2 > 0$  astfel că pentru orice sumă integrală  $\tilde{T}$  corespunzătoare unei partiții  $\{D_i : i = \overline{1, n}\}$  a domeniului  $D$  ale cărei elemente au diametrele mai mici decât  $\delta_2$  avem egalitatea

$$\left| \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy - \tilde{T} \right| < \varepsilon. \quad (5.102)$$

Să luăm numărul  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  și să considerăm partițiile

$$\{\Sigma_i : i = 1, 2, \dots, n\}$$

ale suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) pentru care diametrele tuturor elementelor  $\Sigma_i$  sunt mai mici decât  $\delta$ . Notăm prin  $\{D_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  partițiile domeniului  $D$  corespunzătoare partițiilor  $\{\Sigma_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ . Atunci, diametrul fiecărui subdomeniu  $D_i$  este mai mic decât  $\delta$  și, în consecință, inegalitățile (5.101) și (5.102) sunt satisfăcute. Aceste inegalități implică

$$\begin{aligned} & \left| \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy - T \right| < \\ & < \varepsilon(1 + K \text{aria } \mathcal{S}) \end{aligned} \quad (5.103)$$

pentru orice partiție a suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) a cărei finețe este suficient de mică.

Rezultă că limita sumelor integrale  $T$  există și este egală cu integrala din relația (5.103). ■

**Corolarul 5.3.1** *Dacă suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este netedă și funcția  $f(x, y, z)$  este continuă, există integrala de suprafață din membrul stâng al relației (5.92).*

**Demonstrație.** Întradevăr, în ipotezele menționate, integrantul membrului drept al relației (5.92) este o funcție continuă, deci integrala dublă din acest membru există și astfel integrala de suprafață din membrul întâi există. ■

**Observația 5.3.2** *După cum se știe*

$$\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} = \frac{1}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})},$$

unde  $\mathbf{n}$  este normala la fața superioară a suprafeței  $\mathcal{S}$ . Această relație face ca formula de calcul a unei integrale de suprafață de tipul întâi când suprafața este dată cartezian explicit prin ecuația

$$z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (5.104)$$

să se scrie în forma

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})}. \quad (5.105)$$

Dacă suprafața netedă ( $\mathcal{S}$ ) este reprezentată cartezian explicit prin ecuația

$$x = x(y, z), \quad (y, z) \in D_1, \quad (5.106)$$

putem schimba rolurile variabilelor  $x, y$  și  $z$  și să scriem relația

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(y, z), y, z) \frac{dy dz}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})}, \quad (5.107)$$

unde  $D_1$  este proiecția suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) pe planul  $Oyz$ . Similar, în cazul că suprafața netedă ( $\mathcal{S}$ ) este dată prin ecuația

$$y = y(z, x), \quad (z, x) \in D_2, \quad (5.108)$$

are loc egalitatea

$$\iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y(z, x), z) \frac{dz dx}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})}, \quad (5.109)$$

unde  $D_2$  este proiecția suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) pe planul  $Ozx$ .

**Observația 5.3.3** *Presupunem că suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este reuniune finită de suprafețe netede de tipurile (5.104), (5.106) și (5.108). Atunci, integrala de suprafață de tipul întâi din funcția  $f$  pe suprafața ( $\mathcal{S}$ ) se va scrie ca o sumă de integrale de suprafață de tipul întâi din  $f$  ale căror formule de calcul vor fi, după caz, (5.105), (5.107) și (5.109).*

În cazul când suprafața ( $\mathcal{S}$ ) este reprezentată parametric printr-o ecuație vectorială, putem aplica raționamentul din paragraful precedent și, prin schimbări adecvate de variabile, oricare din integralele duble (5.105), (5.107), (5.109) se transformă într-o integrală dublă pe domeniul de variație al parametrilor curbilinii  $u$  și  $v$  ai suprafeței. Suntem conduși astfel la teorema care dă formula de calcul a integralei de suprafață dintr-o funcție continuă  $f$  pe o suprafață ( $\mathcal{S}$ ) reprezentată parametric.

**Teorema 5.3.2** *Dacă ( $\mathcal{S}$ ) este o suprafață netedă reprezentată prin ecuația vectorială*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta \subset \mathbb{R}^2, \quad (5.110)$$

*unde  $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ , și  $f$  o funcție mărginită și continuă pe un domeniu tridimensional care conține suprafața  $\mathcal{S}$ , atunci  $f$  este integrabilă pe  $S$  în raport cu elementul de arie al suprafeței și are loc relația*

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} f(x, y, z) d\sigma = \\ & = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv. \end{aligned} \quad (5.111)$$

În formula de calcul (5.111)  $\Delta$  este domeniul plan de variație al parametrilor curbilinii ai suprafeței, iar  $E, F, G$  sunt coeficienții lui Gauss calculați pentru suprafața ( $\mathcal{S}$ ) din (5.110). Știm că

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv \quad (5.112)$$

reprezintă elementul de arie al suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) dată parametric și deci pentru a scrie formula de calcul (5.111) a integralei de suprafață din membrul întâi înlocuim mai întâi variabilele  $x, y, z$  ale funcției de integrat  $f$  cu expresiile lor ca funcții de parametri curbilinii ai suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) așa cum rezultă ele din (5.110), înmulțim apoi rezultatul cu radicalul care apare în elementul de

suprafață  $d\sigma$ , calculat după legea (5.112), și integrăm pe domeniul plan  $\Delta$  funcția de variabilele  $u$  și  $v$  astfel obținută.

Formulele (5.92), (5.105), (5.107) și (5.109) sunt cazuri particulare ale formulei de calcul (5.111). Se poate arăta că aceste formule rămân valabile când suprafața nu este netedă dar este netedă pe porțiuni.

**Exemplul 5.3.1** Să se calculeze integrala de suprafață de tipul întâi

$$I = \iint_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} d\sigma,$$

unde  $(\mathcal{S})$  este elipsoidul

$$(\mathcal{S}) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

**Soluție.** Pentru suprafața  $(\mathcal{S})$  avem reprezentarea parametrică:

$$x = a \sin \theta \cos \varphi; \quad y = b \sin \theta \sin \varphi; \quad z = a \cos \theta,$$

unde parametrii curbilinii  $\theta$  și  $\varphi$  parcurg intervalele:

$$\theta \in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Dacă se calculează coeficienții lui Gauss pentru elipsoidul scris parametric și apoi elementul de arie al acestuia se găsește

$$d\sigma = abc \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Valoarea funcției de integrat în punctele suprafeței este

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}.$$

Aceste calcule, împreună cu (5.111), conduc la

$$I = 8abc \iint_{\Delta} \left( \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) \sin \theta d\theta d\varphi,$$



unde  $\Delta = [0, \pi] \times [0, 2\pi)$  adică  $\Delta$  este un interval bidimensional. Aplicând formula de calcul a integralei duble pe un interval bidimensional, găsim

$$I = \frac{4}{3} \pi abc \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Să observăm că dacă  $a = b = c = R$ , ceea ce este echivalent cu a spune că suprafața este acum sfera de rază  $R$  cu centrul în origine, valoarea integralei corespunzătoare devine  $4\pi R$  funcția de integrat fiind funcția constantă egală cu inversul razei. ■

**Exemplul 5.3.2** *Evaluați integrala de suprafață de tipul întâi*

$$I = \iint_S (x^2 + y^2 + z) d\sigma,$$

unde  $(\mathcal{S})$  este porțiunea din suprafața  $z = 4 - x^2 - y^2$  situată în semispațiul superior.

**Soluție.** Suprafața  $(\mathcal{S})$  este o porțiune din paraboloidul de revoluție obținut prin rotația în jurul axei  $Oz$  a parabolei de ecuații:

$$z = 4 - x^2; \quad y = 0$$

situată în planul  $Ozx$ , cu vârful  $V(0, 0, 4)$  punct de maxim. Cum textul problemei se referă la porțiunea din semispațiul superior a acestui paraboloid, deducem că ecuația suprafeței  $(\mathcal{S})$  este

$$(\mathcal{S}) : \quad z = 4 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D,$$

unde  $D$  este discul închis cu centrul în origine de rază  $R = 2$  situat în planul  $Oxy$ , prin urmare

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 \leq 0\}.$$

Elementul de arie  $d\sigma$  al suprafață date este

$$d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Urmează că integrala de suprafață se va calcula cu ajutorul formulei (5.92) astfel că avem:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\ &= 4 \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Pentru a calcula ultima integrală dublă folosim coordonatele polare  $\rho$  și  $\theta$ , unde  $x = \rho \cos \theta$  și  $y = \rho \sin \theta$ . Se constată că  $(x, y) \in D$  dacă și numai dacă  $(\rho, \theta)$  aparține intervalului bidimensional  $[0, 2] \times [0, 2\pi)$ . Știind că jacobianul transformării punctuale regulate folosite la schimbarea de variabile de acest tip este  $\rho$ , avem

$$I = 4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho.$$

Evaluând integralele de mai sus determinăm  $I$  și găsim că valoarea integralei de suprafață date este  $I = 2\pi(17\sqrt{17} - 1)/3$ . ■

## 5.4 Aplicații în inginerie ale integralelor de suprafață de primul tip

Integralele de suprafață de primul tip sunt frecvent întâlnite în probleme ale fizicii. De exemplu, întâlnim astfel de integrale când ne ocupăm cu determinarea masei unei *pânze materiale*. O pânză materială este ansamblu dintre o suprafață ( $\mathcal{S}$ ) netedă sau netedă pe porțiuni, numită *configurația pânzei*, și o funcție pozitivă  $\rho$  definită și continuă în punctele suprafeței ( $\mathcal{S}$ ), care se numește *densitatea de materie* sau *densitatea pânzei materiale*. Tot cu ajutorul integralelor de suprafață de tipul întâi se exprimă centrul de greutate al pânzei materiale ca și momentele de inerție ale acesteia în raport cu elementele reperului  $Oxyz$ . O pânză materială poate fi notată prin  $\{\mathcal{S}, \rho\}$  sau, atunci când densitatea materială se desprinde din context, se scrie doar configurația pânzei. O pânză materială se numește *omogenă* dacă densitatea sa este funcția constantă și *neomogenă* în caz contrar.

Întrucât procedeul care se aplică pentru a determina masa, centrul de greutate și momentele de inerție în raport cu elementele reperului ale pânzei materiale este asemănător cu cel aplicat firului material pentru determinarea acelorași mărimi, vom scrie direct rezultatele.

Masa  $\mathcal{M}(\mathcal{S})$  a pânzei materiale  $\{\mathcal{S}, \rho\}$  este

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (5.113)$$

Cantitatea infinitezimală

$$dm = \rho(x, y, z) d\sigma. \quad (5.114)$$

se numește *element de masă* al pânzei materiale  $\{\mathcal{S}, \rho\}$  în  $M(x, y, z) \in \mathcal{S}$ .

Folosind elementul de masă, masa pânzei materiale se scrie

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}) = \iint_{\mathcal{S}} dm.$$

Coordonatele centrului de greutate  $G$  sunt date de

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma}, \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma},$$

$$z_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) d\sigma}.$$

Expresiile coordonatelor centrului de greutate al pânzei se pot scrie simplificat dacă folosim elementul de masă introdus în (5.114). Avem

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x dm}{\iint_{\mathcal{S}} dm}; \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y dm}{\iint_{\mathcal{S}} dm}; \quad z_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z dm}{\iint_{\mathcal{S}} dm}. \quad (5.115)$$

În particular, pentru o pânză materială omogenă, vom avea

$$x_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad y_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} y d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} d\sigma}; \quad z_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} z d\sigma}{\iint_{\mathcal{S}} d\sigma}. \quad (5.116)$$

Momentele de inerție ale pânzei materiale  $\mathcal{S}$  în raport cu axele de coordonate  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  le vom nota respectiv prin  $I_x$ ,  $I_y$  și  $I_z$  și au expresiile:

$$I_x = \iint_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2) dm; \quad I_y = \iint_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2) dm; \quad I_z = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dm. \quad (5.117)$$

Când densitatea materială este constantă și egală cu  $\rho_0 > 0$ , formulele de mai sus devin

$$\begin{aligned} I_x &= \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2) d\sigma, \quad I_y = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2) d\sigma; \\ I_z &= \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Momentele de inerție ale pânzei materiale  $\mathcal{S}$  în raport cu planele de coordonate  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Ozx$ , notate corespunzător cu  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  și  $I_{zx}$ , au expresiile date de integralele de suprafață de tipul întâi

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iint_{\mathcal{S}} z^2 dm, \quad I_{yz} = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dm, \\ I_{xz} &= \iint_{\mathcal{S}} y^2 dm. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Dacă pânza materială are densitatea constantă  $\rho_0$ , în locul formulelor (5.119) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} z^2 d\sigma; \quad I_{yz} = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} x^2 d\sigma; \quad I_{xz} = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} y^2 d\sigma. \quad (5.120)$$

În fine, momentul de inerție în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) dm, \quad (5.121)$$

când pânza materială este neomogenă, iar în cazul că ar fi omogenă același moment de inerție al pânzei va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma. \quad (5.122)$$

În scopul de a prezenta încă o aplicație a integralelor de suprafață de primul tip să introducem noțiunea de *funcție vectorială integrabilă pe o suprafață*. Fie în acest sens

$$\mathbf{F}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k} \quad (5.123)$$

o funcție vectorială definită într-un domeniu tridimensional care conține suprafața  $\mathcal{S}$ . Prin definiție, vom spune că funcția  $\mathbf{F}$  este *integrabilă* pe  $\mathcal{S}$  dacă fiecare din componentele sale este funcție integrabilă pe  $\mathcal{S}$ . În această situație introducem *integrala de suprafață de tipul întâi a funcției vectoriale  $\mathbf{F}$  pe suprafața  $\mathcal{S}$*  prin

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(M) d\sigma = \mathbf{i} \iint_{\mathcal{S}} P(M) d\sigma + \mathbf{j} \iint_{\mathcal{S}} Q(M) d\sigma + \mathbf{k} \iint_{\mathcal{S}} R(M) d\sigma. \quad (5.124)$$

Valoarea unei astfel de integrale este un vector. Existența integralei de suprafață de primul tip a unei funcții vectoriale  $\mathbf{F}$ , reducerea ei la o integrală dublă dintr-o funcție vectorială precum și proprietățile unei integrale de tipul (5.124) sunt cercetate în strânsă legătură cu integralele de suprafață care apar în membrul al doilea al relației (5.124).

Ca aplicație a acestei noțiuni să găsim *forța de atracție gravitațională* cu care o pânză materială *atrage* un punct material.

Fie  $\rho(x, y, z)$  densitatea pânzei materiale  $\mathcal{S}$  și  $\mu_0$  o masă concentrată în punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  care nu aparține suprafeței. După legea atracției universale a lui Newton, forța elementară de atracție dintre elementul de masă  $dm$  al suprafeței  $\mathcal{S}$  și punctul material  $M_0$  cu ponderea  $\mu_0$  este

$$d\mathbf{F} = \gamma \mu_0 dm \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (5.125)$$

În formula (5.125)  $\gamma$  este constanta gravitațională a cărei valoare numerică depinde de alegerea sistemului de unități de măsură, iar  $\mathbf{r}$  este vectorul  $\overrightarrow{M_0M}$ , unde  $M(x, y, z)$  reprezintă punctul curent al suprafeței de pondere egală cu masa elementară  $dm$  dată de (5.114). Forța rezultantă  $\mathbf{F}$  de atracție a punctului material  $M_0$  de către întreaga suprafață  $\mathcal{S}$  este suma forțelor elementare (5.125), fapt care ne duce la concluzia că  $\mathbf{F}$  este integrala de suprafață

$$\mathbf{F} = \gamma \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{\mathbf{r}}{r^3} d\sigma. \quad (5.126)$$

Deoarece avem  $\vec{\mathbf{r}} = \vec{M_0 M} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ , expresia forței de atracție poate fi scrisă în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & \gamma \mu_0 \left( \mathbf{i} \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} d\sigma + \right. \\ & \left. + \mathbf{j} \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} d\sigma + \mathbf{k} \iint_{\mathcal{S}} \rho(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} d\sigma \right). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Integralele din (5.127) există dacă densitatea materială este funcție continuă, iar suprafața  $\mathcal{S}$  este netedă sau netedă pe porțiuni.

Analiza aplicațiilor de mai sus conduce la o concluzie importantă din care vom desprinde o proprietate specifică integralelor de suprafață de tipul întâi. Să pornim de la observația că elementul de integrare, înțelegând prin aceasta expresia

$$f(M) d\sigma,$$

depinde numai de mărimea elementului de arie  $d\sigma$  și de valoarea funcției  $f$  în punctul curent  $M$  al suprafeței  $\mathcal{S}$ , însă este independentă de orientarea elementului de suprafață în raport cu spațiul înconjurător. Această observație se desprinde foarte bine din toate aplicațiile prezentate mai sus căci masa unui element din suprafața materială  $\{\mathcal{S}, \rho\}$  sau forța cu care acest element de masă atrage un punct material nu se modifică dacă ne mutăm de pe o față a suprafeței pe cealaltă. În concluzie, putem afirma că integrala de suprafață de tipul întâi nu depinde de orientarea suprafeței fapt pe care îl putem exprima matematic prin

$$\iint_{\mathcal{S}^+} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\mathcal{S}^-} f(x, y, z) d\sigma. \quad (5.128)$$

Există probleme de alt gen în care orientarea suprafeței și deci a elementului său de arie  $d\sigma$  joacă un rol important. O astfel de problemă, pe care o vom analiza ulterior, este calculul debitului unui fluid printr-o suprafață dar, vom vedea că există și altele. Aceste probleme conduc la un alt gen de integrale de suprafață, așa numitele *integrale de suprafață de tipul al doilea* de care ne vom ocupa în paragraful următor.

**Exemplul 5.4.1** *Să se calculeze momentul de inerție față de axa  $Oz$  a pânzei materiale omogene având densitatea egală cu unitatea și configurația semisfera*

$$(\mathcal{S}) : \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

**Soluție.** Conform celor prezentate mai sus, avem

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) d\sigma.$$

Pentru calculul acestei integrale de suprafață de tipul întâi putem utiliza o reprezentare parametrică a semisferei  $\mathcal{S}$  și anume cea în care parametrii curbilinii ai suprafeței să fie colatitudinea  $\theta$  și longitudinea  $\varphi$  :

$$x = R \sin \theta \cos \varphi; \quad y = R \sin \theta \sin \varphi; \quad z = R \cos \theta,$$

unde parametrii  $(\theta, \varphi)$  variază în intervalul bidimensional  $[0, \pi/2] \times [0, 2\pi)$ .

Coefficienții lui Gauss pentru sfera reprezentată parametric ca mai sus sunt:

$$E(\theta, \varphi) = R^2; \quad F(\theta, \varphi) = 0; \quad G(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \theta.$$

Elementul de arie al suprafeței exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii  $\theta$  și  $\varphi$  este

$$d\sigma = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Valorile pe semisferă ale funcției de integrat sunt date de

$$x^2 + y^2 = (R \sin \theta \cos \varphi)^2 + (R \sin \theta \sin \varphi)^2 = R^2 \sin^2 \theta,$$

astfel că momentul de inerție de determinat este

$$I_z = R^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta) d\theta.$$

Ultima integrală se scrie ca diferență de alte două care se calculează simplu și se găsește  $I_z = 4\pi R^4/3$ . ■

## 5.5 Integrale de suprafață de al doilea tip

Să considerăm pentru început o problemă concretă care sugerează introducerea noțiunii de *integrală de suprafață de al doilea tip* și anume problema determinării cantității de fluid care străbate în unitatea de timp o suprafață orientată  $\mathcal{S}$  a cărei normală este

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + \mathbf{j} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{k} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}. \quad (5.129)$$

Fie că spațiul ambiant în care se află suprafața orientată  $\mathcal{S}$  este plin cu un fluid în mișcare. O particulă oarecare a fluidului, aflată la momentul  $t$  în poziția  $M(x, y, z)$ , are viteza

$$\mathbf{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}, \quad (5.130)$$

unde  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$  și  $R = R(x, y, z)$  sunt mărimile algebrice ale proiecțiilor vectorului  $\mathbf{V}$  pe respectiv versorii  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  și  $\mathbf{k}$ .

Considerăm un element infinitezimal de arie  $d\sigma$  de pe acea față a suprafeței  $\mathcal{S}$  care are normala  $\mathbf{n}$ . Cantitatea de fluid  $d\Phi$  care trece prin  $d\sigma$  în unitatea de timp, deci un flux, este egală cu  $V_n d\sigma$  unde  $V_n$  este mărimea algebrică a proiecției vectorului viteză pe direcția normalei  $\mathbf{n}$  la  $d\sigma$ . Cum vectorul pe care se proiectează viteza este versor, rezultă că  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$  astfel că fluxul elementar este

$$d\Phi = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = (P n_1 + Q n_2 + R n_3) d\sigma. \quad (5.131)$$

Formula (5.131) dă *fluxul elementar* de fluid prin elementul de suprafață de normală  $\mathbf{n}$ . Pentru a obține debitul total sau *fluxul total*, adică cantitatea de lichid care strabate suprafața  $\mathcal{S}$  în unitatea de timp, ar trebui să sumăm expresiile (5.131) relativ la toate elementele de suprafață  $d\sigma$ , fapt ce conduce la integrala

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} (P n_1 + Q n_2 + R n_3) d\sigma. \quad (5.132)$$

Dacă privim atent constatăm că ceea ce am obținut în (5.132) nu este altceva decât integrala de suprafață de primul tip a funcției

$$P(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \quad (5.133)$$

pe suprafața  $\mathcal{S}$ . Imediat însă trebuie să precizăm faptul că integrantul depinde de funcția vectorială  $\mathbf{V}$  din (5.130) și că, lucru foarte important, a fost implicată o anumită față a suprafeței, anume aceea care are normala  $\mathbf{n}$  dată în (5.129).

Putem trece acum să formulăm definiția generală a integralei de suprafață de tipul al doilea.

Fie în acest sens  $\mathcal{S}$  o suprafață netedă cu două fețe. Fixăm o anumită parte a suprafeței echivalent cu a spune că alegem una din cele două posibilități de alegere a normalei  $\mathbf{n}$  în punctul  $M$ . În același punct  $M$ , dar pe



cealaltă parte a suprafeței, normala este  $-\mathbf{n}$ . Considerăm o funcție vectorială  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  definită pe un domeniu tridimensional în care se află suprafața  $\mathcal{S}$  și continuă în punctele suprafeței. Notăm cu  $F_n$  mărimea algebrică a proiecției ortogonale a vectorului  $\mathbf{F}$  pe direcția normalei  $\mathbf{n}$  în punctul  $M$ . Avem

$$F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}), \quad (5.134)$$

unde  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})$ ,  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})$ ,  $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})$  sunt coordonatele versorului normalei  $\mathbf{n}$  în punctul  $M(x, y, z)$  de pe fața aleasă a suprafeței  $\mathcal{S}$ .

Integrala

$$\iint_{\mathcal{S}} (P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})) d\sigma \quad (5.135)$$

se va numi *integrala de suprafață de tipul al doilea a funcției vectoriale*  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  *pe fața suprafeței*  $\mathcal{S}$  *de normală*  $\mathbf{n}$  și va fi notată cu

$$\iint_{\mathcal{S}} P dydz + Q dzdx + R dxdy. \quad (5.136)$$

Astfel, prin definiție, avem relația

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \\ & = \iint_{\mathcal{S}} (P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Dacă notăm cu  $\mathcal{S}^+$  fața aleasă a suprafeței, evident cealaltă față a sa va avea normala  $-\mathbf{n}$  și o putem nota cu  $\mathcal{S}^-$ . Din modul cum a fost introdusă integrala de suprafață de tipul al doilea rezultă că ea depinde de orientarea suprafeței și ca atare putem scrie

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \\ & = - \iint_{\mathcal{S}^-} P dydz + Q dzdx + R dxdy. \end{aligned} \quad (5.138)$$

**Observația 5.5.1** Dacă  $d\sigma$  este elementul infinitesimal de arie al suprafeței  $\mathcal{S}^+$ , expresiile

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})d\sigma, \quad \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})d\sigma$$

sunt, respectiv, proiecțiile elementului de arie  $d\sigma$  pe planele de coordonate  $Oyz$ ,  $Ozx$ ,  $Oxy$ . Dacă considerăm că  $d\sigma$  se proiectează pe planele de coordonate în intervale bidimensionale cu laturi infinitesimale, ariile acestora sunt respectiv  $dydz$ ,  $dzdx$  și  $dx dy$ , astfel că putem scrie egalitățile

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i})d\sigma &= dydz, \quad \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j})d\sigma = dzdx, \\ \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k})d\sigma &= dx dy \end{aligned} \quad (5.139)$$

și totodată putem justifica notația (5.136) pentru integrala de suprafață de tipul întâi particulară (5.135).

**Observația 5.5.2** Am definit integrala de suprafață de speța a doua cu ajutorul integralei de primul tip. Însă integrala de suprafață de tipul al doilea, la fel ca celelalte integrale, poate fi definită direct cu ajutorul sumelor integrale.

În cele ce urmează prezentăm formula de calcul a integralei de suprafață de tipul al doilea când suprafața este reprezentată prin ecuația vectorială

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad (u, v) \in D, \quad (5.140)$$

unde  $D$  este un domeniu plan care are arie. Fie că fața aleasă a suprafeței este  $\mathcal{S}^+$  și că această față corespunde normalei

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} = \mathbf{i} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + \mathbf{j} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + \mathbf{k} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}). \quad (5.141)$$

Conform celor prezentate mai sus avem mai întâi că integrala de suprafață pe fața  $\mathcal{S}^+$  a suprafeței  $\mathcal{S}$  se calculează cu ajutorul integralei de suprafață de tipul întâi prin

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy = \\ &= \iint_{\mathcal{S}} \left( P \cos(\mathbf{n}, \mathbf{i}) + Q \cos(\mathbf{n}, \mathbf{j}) + R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.142)$$

Din expresia (5.141) rezultă că putem scrie versorul normalei  $\mathbf{n}$  și în forma

$$\mathbf{n} = \frac{A(u, v) \mathbf{i} + B(u, v) \mathbf{j} + C(u, v) \mathbf{k}}{\sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}}, \quad (5.143)$$

unde funcțiile  $A(u, v)$ ,  $B(u, v)$  și  $C(u, v)$  sunt jacobienii

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \frac{D(y, z)}{D(u, v)}(u, v), \quad B(u, v) = \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(u, v), \\ C(u, v) &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v). \end{aligned} \quad (5.144)$$

Dacă mai ținem cont și de faptul că elementul de arie are expresia

$$d\sigma = \|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\| dudv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv, \quad (5.145)$$

în final rezultă că integrala de suprafață de tipul doi se determină prin formula de calcul

$$\iint_{\mathcal{S}^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_D (P A + Q B + R C) dudv, \quad (5.146)$$

unde prin funcțiile  $P$ ,  $Q$  și  $R$  din membrul al doilea înțelegem

$$\begin{cases} P &= P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ Q &= Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ R &= R(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{cases} \quad (5.147)$$

iar  $A$ ,  $B$  și  $C$  sunt funcțiile din (5.144).

Dacă folosim relațiile (5.134) și (5.141), integrala de suprafață de tipul al doilea se poate scrie vectorial după cum urmează

$$\iint_{\mathcal{S}^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma, \quad (5.148)$$

unde în integrala a doua nu s-a mai scris  $\mathcal{S}^+$  acest fapt subînțelegându-se odată cu precizarea normalei  $\mathbf{n}$  a suprafeței.

Dacă dorim să scriem formula de calcul a integralei de suprafață de tipul al doilea, pornind de la scrierea sa ca în membrul doi din (5.148), trebuie evaluată valoarea funcției de integrat în punctele suprafeței. Găsim

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})|_{\mathcal{S}} = \frac{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|} = \frac{(\mathbf{F}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}. \quad (5.149)$$

În (5.149) intră produsul mixt al vectorilor  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ ,  $\mathbf{r}_u$  și  $\mathbf{r}_v$ , însă trebuie precizat că este vorba de valoarea pe  $\mathcal{S}$  a vectorului  $\mathbf{F}$ , ceea ce înseamnă că funcțiile  $P$ ,  $Q$  și  $R$  sunt cele din (5.147).

Luând acum în calcul (5.149) și expresia (5.145) a elementului de arie  $d\sigma$  al suprafeței  $\mathcal{S}$ , deducem că formula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip, scrisă în forma din membrul doi al relației (5.148), este

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \iint_D (\mathbf{F}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) dudv. \quad (5.150)$$

Dacă ținem cont de exprimarea analitică a unui produs mixt prin determinantul de ordinul trei care are pe linii coordonatele a respectiv celor trei vectori în ordinea în care apar în produs rezultă că formula de calcul (5.150) se poate scrie în forma finală

$$\iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv. \quad (5.151)$$

Pentru a scrie încă o formă a integralei de suprafață de al doilea tip, introducem noțiunea de *element orientat de arie* notat cu  $d\boldsymbol{\sigma}$  și exprimat prin

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} d\sigma. \quad (5.152)$$

Atunci, integrala de suprafață de tipul al doilea se poate scrie simplu

$$\iint_{\mathcal{S}^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (5.153)$$

În cazul în care suprafața netedă este reprezentată cartezian explicit prin ecuația

$$(\mathcal{S}) : z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset Oxy, \quad (5.154)$$

și considerăm că fața  $\mathcal{S}^+$  a sa este cea superioară, versorul normalei este

$$\mathbf{n} = \frac{-p\mathbf{i} - q\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad (5.155)$$

unde  $p$  și  $q$  sunt notațiile lui Monge pentru derivatele parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$  în punctul curent interior suprafeței ( $\mathcal{S}^+$ ).

În acest caz, abscisa  $x$  și ordonata  $y$  ale oricărui punct de pe suprafață pot fi considerate drept parametri curbilinii ai suprafeței  $\mathcal{S}^+$  astfel că se poate scrie ecuația sa vectorială

$$(\mathcal{S}^+) : \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D. \quad (5.156)$$

Atunci, formula de calcul a integralei de suprafață de tipul al doilea din câmpul vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  pe fața superioară a suprafeței (5.154) este ușor de obținut din cazul general (5.151) luând drept  $u$  pe  $x$  și drept  $v$  pe  $y$ . Avem în final

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \iint_{\mathcal{S}^+} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ &= \iint_D \left( -pP(x, y, f(x, y)) - qQ(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \right) dxdy. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Dacă fața suprafeței  $\mathcal{S}$  este cea inferioară  $\mathcal{S}^-$ , formula de calcul este

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}^-} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \\ \iint_{\mathcal{S}^-} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy &= \\ = \iint_D \left( pP(x, y, f(x, y)) + qQ(x, y, f(x, y)) - R(x, y, f(x, y)) \right) dxdy. \end{aligned} \quad (5.158)$$

**Observația 5.5.3** *Urmând un raționament asemănător celui care ne-a condus la formulele (5.157) și (5.158), se pot obține formulele de calcul ale integralei de suprafață de tipul al doilea din câmpul vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  când suprafața  $\mathcal{S}$  este reprezentată cartezian explicit fie prin ecuația  $x = g(y, z)$  fie prin ecuația  $y = h(z, x)$ .*

Spre exemplu, dacă  $\mathcal{S}$  are ecuația  $x = g(y, z)$  și  $\mathcal{S}^+$  este fața dinspre partea pozitivă a axei  $Ox$ , formula de calcul a integralei de suprafață de tipul al doilea din câmpul  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  pe suprafața  $\mathcal{S}^+$  este

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \\ &= \iint_{\mathcal{S}^+} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \\ &= \iint_{D_{yz}} \left( P(g(y, z), y, z) - \frac{\partial g}{\partial y}(y, z) Q(g(y, z), y, z) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) R(g(y, z), y, z) \right) dydz, \end{aligned}$$

unde  $D_{yz}$  reprezintă proiecția suprafeței  $\mathcal{S}^+$  pe planul  $Oyz$  fiind totodată și domeniul de definiție al funcției  $g$ .

**Exemplul 5.5.1** Să se calculeze valoarea integralei de suprafață de tipul al doilea

$$I = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dydz + y^2 dzdx + z dxdy,$$

unde  $\mathcal{S}$  este fața exterioară a sferei de rază  $R$  cu centrul în origine.

**Soluție.** Ecuația sferei de rază  $R$  cu centrul în origine este

$$(\mathcal{S}) : F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Utilizând cunoștințele din primul paragraf al acestui capitol găsim că versorul normalei exterioare în punctul  $M(x, y, z)$  al sferei  $\mathcal{S}$  este

$$\mathbf{n} = \frac{(\nabla F)(x, y, z)}{\|(\nabla F)(x, y, z)\|} = \frac{\mathbf{r}}{R} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R}.$$

Atunci, integrala de tipul al doilea de calculat se transformă în integrala de suprafață de tipul întâi

$$I = \frac{1}{R} \iint_{\mathcal{S}} (x^3 + y^3 + z^2) d\sigma$$

iar pentru a reduce pe aceasta la o integrală dublă folosim reprezentarea parametrică a sferei în care parametri curbilinii sunt colatitudinea  $\theta$  și longitudinea  $\varphi$

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta.$$

Punctul  $M(x, y, z)$  descrie sfera de rază  $R$  cu centru în origine dacă perechea  $(\theta, \varphi)$  aparține domeniului plan  $\Delta$  care este intervalul bidimensional  $[0, \pi] \times [0, 2\pi)$ . Coeficienții lui Gauss au fost calculați deja în alt exemplu și am găsit că aceștia sunt:

$$E(\theta, \varphi) = R^2; \quad F(\theta, \varphi) = 0; \quad G(\theta, \varphi) = R^2 \sin^2 \theta.$$

Elementul de arie al suprafeței exprimat cu ajutorul parametrilor curbilinii  $\theta$  și  $\varphi$  este

$$d\sigma = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

iar valorile pe sferă ale funcției de integrat sunt date de

$$(x^3 + y^3 + z^2) \Big|_S = R^2 (R \sin^3 \theta \cos^3 \varphi + R \sin^3 \theta \sin^3 \varphi + \cos^2 \theta).$$

Scriind formula de calcul a integralei de suprafață de tipul întâi și aplicând totodată formula de calcul a integralei duble pe intervalul bidimensional  $\Delta$ , vom avea

$$I = R^4 \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} (R \sin^3 \theta \cos^3 \varphi + R \sin^3 \theta \sin^3 \varphi + \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\varphi.$$

Integralele:

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \, d\varphi; \quad \int_0^{2\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi$$

sunt nule, după cum se constată simplu, iar

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{1}{3} \cos^3 \theta \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

astfel că integrala de suprafață dată are valoarea  $4\pi R^4/3$ . ■

**Exemplul 5.5.2** *Un fluid oarecare curge în spațiu cu viteza*

$$\mathbf{V}(x, y, z) = 3x \mathbf{i} + 3y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

*Să se găsească fluxul total  $\Phi$  al fluidului prin fața superioară a paraboloidului*

$$(\mathcal{S}^+) : \quad z = 9 - x^2 - y^2$$

*situată în semispațiul superior  $z \geq 0$ .*

**Soluție.** Am văzut că fluxul total al unui fluid cu viteza  $\mathbf{V}$  prin fața  $\mathcal{S}^+$  a suprafeței  $\mathcal{S}$  este dat de integrala de suprafață de tipul al doilea

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}^+} V_n d\sigma = \iint_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iint_{\mathcal{S}^+} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

unde  $\mathbf{n}$  este normala la fața superioară a paraboloidului

$$\mathbf{n} = \frac{2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Aplicând formula de calcul a integralei de suprafață de tipul al doilea dată în (5.157), obținem

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_D \frac{6x^2 + 6y^2 + 9 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\ &= \iint_D (5x^2 + 5y^2 + 9) dx dy, \end{aligned}$$

unde  $D$  este proiecția suprafeței pe planul  $Oxy$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}.$$

Integrala dublă o calculăm folosind trecerea la coordonatele polare  $\rho$  și  $\theta$  unde:

$$x = \rho \cos \theta; \quad y = \rho \sin \theta, \quad (\rho, \theta) \in \Delta = [0, 3] \times [0, 2\pi).$$

Având în vedere că jacobianul transformării care se utilizează la schimbarea de variabile de mai sus este egal cu  $\rho$ , folosind formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem

$$\Phi = \iint_{\Delta} \rho (5\rho^2 + 9) d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho (5\rho^2 + 9) d\rho = \frac{567\pi}{2}.$$

Valoarea pozitivă a rezultatului arată că fluidul iese din suprafață și aceasta se datorează faptului că în fiecare punct de pe fața  $\mathcal{S}^+$  a suprafeței vectorul viteza fluidului face unghi ascuțit cu versorul normalei la suprafață, ca atare particula de fluid aflată instantaneu oriunde pe suprafață iese din domeniul spațial limitat de planul  $Oxy$  și de suprafața  $\mathcal{S}$ . ■



## 5.6 Formula integrală a lui Stokes

Formula integrală a lui Stokes stabilește o legătură între integrala de suprafață în raport cu coordonatele și integrala curbilinie de speța a doua. Ea generalizează formula integrală Riemann–Green, ultima fiind un caz particular a celei dintâi când suprafața în chestiune este o parte a planului  $Oxy$ . Ca și formula integrală Riemann–Green, formula integrală a lui Stokes este întâlnită în multe aplicații ale analizei matematice în inginerie.

Fie  $\mathcal{S}$  o suprafață netedă, bilateră și orientată, dată de ecuația vectorială

$$(\mathcal{S}) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k}, \quad (5.159)$$

unde  $(u, v) \in D$ , iar  $D$  este un domeniu compact care are arie. Suprafața  $\mathcal{S}$  fiind orientată, rezultă că versorul normalei  $\mathbf{n}$  la suprafața  $\mathcal{S}$  în punctul curent  $(u, v) \in D$  este bine precizat. Fie că fața aleasă a suprafeței este cea care corespunde normalei (5.141). Mulțimea punctelor  $(u, v) \in D$  este mulțimea punctelor din interiorul unei curbe închise  $\gamma$  și de pe această curbă. Presupunem că frontiera  $\gamma$  a mulțimii  $D$  este reprezentată parametric prin ecuațiile

$$(\gamma) : u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (5.160)$$

Frontiera  $\Gamma$  a suprafeței  $\mathcal{S}$  dată prin (5.159) este tot o curbă închisă și are ecuația vectorială

$$(\Gamma) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (5.161)$$

Pe curba  $\Gamma$  introducem o orientare pe care o numim *compatibilă* cu orientarea suprafeței  $\mathcal{S}$ . În fiecare punct  $M \in \Gamma$  considerăm versorul normalei la suprafață  $\mathbf{n}$  și, în același punct, considerăm vectorul  $\boldsymbol{\nu}$  cu proprietatea că este perpendicular și pe  $\mathbf{n}$  și pe  $\Gamma$  și *intră* în  $\mathcal{S}$ .

Orientarea de pe curba  $\Gamma$  dată de vectorul  $\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}$  se numește *compatibilă* cu orientarea suprafeței  $\mathcal{S}$ . Într-un limbaj mai sugestiv, putem spune că orientarea pe  $\Gamma$  compatibilă cu orientarea suprafeței  $\mathcal{S}$  este dată de un observator care deplasându-se pe  $\Gamma$  are capul spre  $\mathbf{n}$  și lasă la stânga suprafața  $\mathcal{S}$ .

Fie funcția  $P(x, y, z)$  definită și continuă pe  $\mathcal{S}$  având derivate parțiale de ordinul întâi continue pe  $\mathcal{S}$ . În aceste condiții ne propunem să calculăm integrala curbilinie

$$I = \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx. \quad (5.162)$$

Având în vedere că  $\Gamma$  are ecuația vectorială (5.161), din formula de calcul a integralei curbilinii de tipul al doilea în spațiu, deducem că integrala  $I$  din (5.162) se scrie în forma

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(u(t), v(t)), \psi(u(t), v(t)), \chi(u(t), v(t))) \frac{d\varphi}{dt}(u(t), v(t)) dt. \quad (5.163)$$

Dacă se calculează derivata funcției compuse  $\varphi(u(t), v(t))$  și se înlocuiește în (5.163) constatăm că  $I$  este integrala curbilinie de tipul al doilea pe curba plană  $\gamma$

$$I = \int_{\gamma} \tilde{P}(u, v) du + \tilde{Q}(u, v) dv, \quad (5.164)$$

unde am folosit notațiile:

$$\begin{cases} \tilde{P}(u, v) = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v); \\ \tilde{Q}(u, v) = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v). \end{cases} \quad (5.165)$$

În planul  $O'uv$  aplicăm formula integrală Riemann–Green membrului al doilea al relației (5.164) și obținem

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}(u, v) \right) dudv. \quad (5.166)$$

Folosind (5.165) și regulile de derivare ale funcțiilor compuse constatăm că derivatele care intră în (5.166) au expresiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial u} \right) + P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}; \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \chi}{\partial v} \right) + P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}. \end{cases} \quad (5.167)$$

Diferența derivatelor din (5.167) conduce la expresia

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}(u, v) = B \frac{\partial P}{\partial z} - C \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (5.168)$$

unde  $B$  și  $C$  sunt jacobienii:

$$B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}(u, v); \quad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}(u, v), \quad (5.169)$$

iar funcția  $P$  care apare în (5.167) și în (5.168) trebuie înțeleasă ca

$$P = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)). \quad (5.170)$$

În acest fel integrala  $I$  din (5.162) devine

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \iint_D \left( B \frac{\partial P}{\partial z} - C \frac{\partial P}{\partial y} \right) dudv, \quad (5.171)$$

cu mențiunea că funcția  $P$  din membrul al doilea este cea dată în (5.170).

În mod analog se obțin:

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z) dy = \iint_D \left( C \frac{\partial Q}{\partial x} - A \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dudv; \quad (5.172)$$

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z) dz = \iint_D \left( A \frac{\partial R}{\partial y} - B \frac{\partial R}{\partial x} \right) dudv \quad (5.173)$$

în care funcțiile  $Q$  și  $R$  din membrul doi al relației (5.172) și respectiv (5.173) sunt

$$\begin{aligned} Q &= Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \\ R &= R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)), \end{aligned} \quad (5.174)$$

iar  $A$  este jacobianul

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}(u, v). \quad (5.175)$$

**Observația 5.6.1** *Jacobienii din relațiile (5.169) și (5.175) sunt cei care intră în expresia versorului normalei la suprafață care am convenit să fie*

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad (5.176)$$

unde funcțiile  $E, F, G$  sunt coeficienții lui Gauss.

Adunând rezultatele (5.171) – (5.173), deducem relația

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_D \left( A \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + B \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + C \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) dudv. \end{aligned} \quad (5.177)$$

Pe de altă parte, integrala dublă din membrul al doilea al relației (5.177) este o integrală de suprafață de tipul al doilea pe fața suprafeței  $\mathcal{S}$  de normală  $\mathbf{n}$  dată în (5.176), și anume

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \\ & = \iint_D \left( A \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + B \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + C \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) dudv. \end{aligned} \quad (5.178)$$

De notat că funcțiile  $P$ ,  $Q$  și  $R$ , din integralele duble de mai sus, sunt astfel cum au fost precizate prin relațiile (5.170) și (5.174).

Cuplând rezultatele din (5.177) și (5.178) deducem relația

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned} \quad (5.179)$$

care se numește *formula integrală a lui Stokes* sau simplu, *formula lui Stokes*.

Ținând cont că avem relațiile:

$$dydz = \cos \alpha d\sigma; \quad dzdx = \cos \beta d\sigma; \quad dxdy = \cos \gamma d\sigma, \quad (5.180)$$

unde  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  sunt cosinii directori ai normalei  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha)\mathbf{i} + (\cos \beta)\mathbf{j} + (\cos \gamma)\mathbf{k} \quad (5.181)$$

rezultă că formula integrală a lui Stokes (5.179) se scrie în forma echivalentă

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \iint_{\mathcal{S}} \left( \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma. \end{aligned} \quad (5.182)$$

Fie funcția vectorială  $\mathbf{F}$ , de trei variabile reale, definită pe domeniul  $V \subset \mathcal{E}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{F} : V &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = \\ &= P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}\end{aligned}\quad (5.183)$$

care are proprietatea că funcția vectorială

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (5.184)$$

există și este continuă cel puțin în punctele suprafeței  $\mathcal{S}$ .

Observând că diferențiala vectorului de poziție  $\mathbf{r}$  este

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (5.185)$$

și că produsul scalar al vectorilor  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  și  $d\mathbf{r}$  este dat de

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (5.186)$$

deducem că formula integrală a lui Stokes (5.182) se poate scrie sub forma vectorială

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{F} d\sigma. \quad (5.187)$$

Din punct de vedere fizic formula integrală a lui Stokes exprimată prin (5.187) arată că *circulația* câmpului vectorial  $\mathbf{F}$  pe frontiera  $\Gamma$  a unei suprafețe orientate  $\mathcal{S}$  este egală cu *fluxul rotorului* lui  $\mathbf{F}$  prin acea suprafață.

**Observația 5.6.2** În cazul în care  $\mathcal{S}$  este o porțiune  $D$  din planul  $Oxy$ , iar normala la  $\mathcal{S} = D$  este versorul  $\mathbf{k}$ , formula integrală a lui Stokes (5.177) devine formula integrală Riemann–Green.

**Observația 5.6.3** Dacă câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este irotational pe  $V$ , ceea ce înseamnă că  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ , din (5.187) deducem că integrala curbilinie de tipul al doilea din funcția vectorială  $\mathbf{F}$  pe orice curbă închisă din  $V$  este nulă și ca atare, expresia diferențială

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (5.188)$$

este o diferențială totală pe  $V$ , adică există funcția diferențiabilă  $U$  astfel încât

$$dU(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (5.189)$$

Funcția  $U$  din (5.189) se numește *primitivă* a expresiei diferențiale  $\omega$ . De asemenea, în acest caz integrala curbilinie de tipul al doilea din câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  nu depinde de drumul de integrare.

Formula integrală a lui Stokes se folosește în calculul integralei curbilinii pe curba închisă  $\Gamma$  din câmpul vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$  când fluxul rotorului lui  $\mathbf{F}$  pe o suprafață mărginită de acea curbă se calculează mai ușor.

**Exercițiul 5.6.1** *Să se calculeze integrala curbilinie*

$$I = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$$

de-a lungul curbei determinate de intersecția suprafețelor:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx; \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad R > r, \quad z \geq 0,$$

sensul de parcurs al curbei  $\Gamma$  fiind cel al acelor de ceasornic dacă privim dinspre partea pozitivă a axei  $Ox$ .

**Soluție.** Pentru că integrala curbilinie este complicată, folosim formula integrală a lui Stokes luând ca suprafață  $\mathcal{S}$  porțiunea din sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$$

situată în semispațiul superior  $z \geq 0$ , mărginită de curba  $\Gamma$  și care conține puncte  $M(x, y, z)$  cu abscisă cuprinsă între 0 și  $R$ .

Având în vedere orientarea curbei  $\Gamma$ , rezultă că normala  $\mathbf{n}$  la suprafața  $\mathcal{S}$  este cea exterioară sferei, această alegere a normalei  $\mathbf{n}$  fiind urmare a condiției ca  $\Gamma$  să fie orientată compatibil cu orientarea suprafeței  $\mathcal{S}$ . Suprafața  $\mathcal{S}$  fiind dată implicit rezultă că normala sa exterioară în punctul  $M \in \mathcal{S}$  este, cu plus sau minus, versorul gradientului funcției

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2.$$

Se constată că trebuie luat semnul plus astfel că normala  $\mathbf{n}$  în punctul  $M$  al porțiunii  $\mathcal{S}$  din sfera de rază  $R$  și centru în punctul  $C(R, 0, 0)$  are cosinii directori:

$$\cos \alpha = \frac{x - R}{R}; \quad \cos \beta = \frac{y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{R}.$$

Rotorul câmpului vectorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2 + z^2)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$  este

$$\nabla \times \mathbf{F} = 2(y - z)\mathbf{i} + 2(z - x)\mathbf{j} + 2(x - y)\mathbf{k}.$$

Aplicând acum formula integrală a lui Stokes, integrala curbilinie  $I$  devine

$$I = \frac{2}{R} \iint_S \left( (y-z)(x-R) + y(z-x) + z(x-y) \right) d\sigma = 2 \iint_S (z-y) d\sigma.$$

Porțiunea  $\mathcal{S}$  din sfera de rază  $R$  cu centrul în punctul  $C(R, 0, 0)$  are ecuația carteziană explicită  $z = \sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}$ , se proiectează în planul  $Oxy$  după mulțimea  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2Rx \leq 0\}$  și are elementul de arie în punctul ei curent  $M(x, y, z)$  dat de  $d\sigma = \frac{R}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}} dx dy$ .

Conform formulei de calcul a unei integrale de suprafață de tipul întâi, integrala de suprafață de mai sus se transformă în integrala dublă

$$\begin{aligned} I &= 2R \iint_D \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}} \right) dx dy \\ &= 2R \iint_D dx dy - 2R \iint_D \frac{y}{\sqrt{R^2 - (x-R)^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

A doua integrală dublă este egală cu zero deoarece funcția de integrat este impară în raport cu variabila  $y$ , iar doemniul  $D$  de integrare este simetric față de axa  $Ox$ . Prima integrală dublă este aria discului de rază  $R$ . Prin urmare, valoarea integralei  $I$  este  $I = 2R \iint_D dx dy = 2\pi R^2$ . ■

**Exercițiul 5.6.2** Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

$C$  fiind curba de intersecție a frontierei cubului  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$  cu planul  $2(x+y+z) - 3a = 0$  parcursă în sens direct dacă privim dinspre partea pozitivă a axei  $Oz$ .

**Soluție.** Se aplică formula lui Stokes și se găsește

$$I = -2 \iint_S (y+z) dy dz + (z+x) dz dx + (x+y) dx dy,$$

unde  $S$  este partea de pe fața superioară a planului  $z = 3a/2 - x - y$  care se proiectează pe planul  $Oxy$  în hexagonul de vârfuri  $M_1(a, 0, 0)$ ,  $M_2(a, a/2, 0)$ ,  $M_3(a/2, a, 0)$ ,  $M_4(0, a, 0)$ ,  $M_5(0, a/2, 0)$ ,  $M_6(a/2, 0, 0)$ .

Rezultă  $I = -9a^3/2$ . ■

# Capitolul 6

## Integrala triplă

În acest capitol vom defini noțiunea de integrabilitate a unei funcții reale de trei variabile reale independente și apoi, legat de aceasta, vom introduce conceptul de *integrala triplă* pe o anumită submulțime a spațiului aritmetic tridimensional a unei funcții reale de trei variabile reale definită pe acea mulțime.

Integralele triple sunt aplicate pe scară largă în diverse probleme de fizică, mecanică și inginerie. Câteva din aceste aplicații vor fi prezentate în ultimul paragraf al acestui capitol.

În multe privințe integralele triple sunt analoage integralelor duble și, ca urmare, vom omite acele demonstrații care nu diferă esențial de demonstrațiile corespunzătoare din capitolul în care s-a studiat integrala dublă.

### 6.1 Elemente de topologie în $\mathbb{R}^3$

Mulțimile care vor fi considerate în acest capitol vor fi submulțimi ale spațiului afin euclidian tri-dimensional  $\mathcal{E}_3$ , raportat la un reper Cartezian ortogonal  $Oxyz$  și asociat spațiului liniar  $\mathbb{R}^3$ . Definițiile unor noțiuni topologice legate de aceste submulțimi precum: punct interior al unei mulțimi; frontiera unei mulțimi; mulțime deschisă; mulțime închisă; mulțime conexă; domeniu; domeniu închis; diametru unei mulțimi pot fi transpuse ușor mulțimilor incluse în  $\mathcal{E}_3$ , pornind de la noțiunile topologice similare referitoare la submulțimi ale planului afin euclidian.

Când am introdus integrala dublă am folosit noțiunea de mulțime plană măsurabilă Jordan sau mulțime carabilă și de arie a acesteia. În mod simi-



lar, definiția integralei triple se bazează pe noțiunea de *mulțime cubabilă* sau *măsurabilă Jordan* și de *volumul* unei astfel de submulțimi a spațiului afin euclidian tridimensional. Pentru aceasta vom porni de la noțiunea de poliedru sau de mulțime poliedrală și de volum al acestuia, cunoscute din geometria elementară. Extinderea acestor noțiuni la clase mai largi de mulțimi poate fi efectuată în același mod în care, plecând de la figuri plane poligonale, au fost introduse noțiunile de mulțime carabilă și de arie a unei asemenea mulțimi. Vom prezenta pe scurt această extindere.

Un domeniu poliedral sau solid poliedral este o submulțime a lui  $\mathcal{E}_3$  a cărei frontieră este o reuniune finită de poligoane. Volumul  $V(P)$  a unui solid poliedral este un număr nenegativ care posedă următoarele proprietăți:

1. (*monotonia*). Dacă  $P$  și  $Q$  sunt două solide poliedrale, iar  $P$  este inclus în  $Q$ , atunci

$$V(P) \leq V(Q);$$

2. (*aditivitatea*). Dacă  $P$  și  $Q$  sunt două solide poliedrale fără puncte interioare comune, atunci

$$V(P \cup Q) = V(P) + V(Q);$$

3. (*invarianța*). Dacă solidele poliedrale  $P$  și  $Q$  sunt congruente, volumele lor sunt egale.

Aceste trei proprietăți se pot păstra când noțiunea de volum se extinde la o clasă mai largă de mulțimi din  $\mathcal{E}_3$ .

În acest sens, considerăm o mulțime mărginită arbitrară  $\Phi \subset \mathcal{E}_3$  și, totodată, toate corpurile poliedrale scufundate în  $\Phi$ . Marginea superioară a volumelor solidelor poliedrale scufundate se numește **măsura interioară Jordan** a mulțimii  $\Phi$ . În cazul în care nu există mulțimi poliedrale care să poată fi scufundate în  $\Phi$ , prin definiție, atribuim mulțimii  $\Phi$  măsură interioară Jordan nulă.

În mod similar, se introduce **măsura Jordan superioară** a mulțimii  $\Phi$  ca fiind marginea inferioară a tuturor solidelor poliedrale cu proprietatea că mulțimea  $\Phi$  este scufundată în oricare din ele.

**Definiția 6.1.1** *Spunem că o mulțime  $\Phi \subset \mathcal{E}_3$  este măsurabilă Jordan sau cubabilă dacă măsurile Jordan interioară și exterioară ale acesteia sunt egale. Valoarea comună a acestor măsuri se numește volumul lui  $\Phi$  și se notează cu  $V(\Phi)$  sau cu  $\text{vol}\Phi$ .*

Teorema următoare se demonstrează la fel cu cea similară pentru cazul mulțimilor plane prezentată în primul paragraf al capitolului în care s-a studiat integrala dublă.

**Teorema 6.1.1** *Condiția necesară și suficientă ca figura spațială  $\Phi$  să fie măsurabilă Jordan sau cubabilă este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe figurile poliedrale  $P \subset \Phi$  și  $Q \supset \Phi$  astfel încât*

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

**Definiția 6.1.2** *Spunem că o mulțime din spațiu are volumul egal cu zero dacă ea poate fi scufundată într-un corp poliedral de volum arbitrar de mic.*

Folosind noțiunea introdusă în definiția de mai sus, putem reformula Teorema 6.1.1 după cum urmează.

**Teorema 6.1.2** *Mulțimea  $\Phi \subset \mathcal{E}_3$  are volum dacă și numai dacă frontiera sa are volumul egal cu zero.*

Criteriul care rezultă din Teorema 6.1.2 stabilește existența unor clase largi de submulțimi ale spațiului  $\mathcal{E}_3$  care au volum. Spre exemplu, corpurile compuse dintr-un număr finit de cilindri, având interioare disjuncte două câte două, cu bazele inferioare mulțimi carabile din planul  $Oxy$  și bazele superioare suprafețe netede descrise de ecuații de forma  $z = f(x, y)$ , formează o astfel de clasă. Volumul fiecărui cilindru component este egal cu integrala dublă

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy,$$

unde  $D$  este baza acelui cilindru.

O altă clasă importantă de mulțimi tridimensionale care au volum este alcătuită din mulțimile spațiului care sunt mărginite de un număr finit de suprafețe netede. Altfel spus, o mulțime din spațiu mărginită de o suprafață închisă netedă sau netedă pe porțiuni este o mulțime cubabilă. Această afirmație se demonstrează asemănător cu afirmația că o curbă plană netedă pe porțiuni are aria egală cu zero, dar aplicarea demonstrației la cazul corpurilor presupune detalieri complicate care nu au fost prezentate în această lucrare.

Procedând asemănător ca în capitolul în care am studiat integrala dublă putem stabili ușor valabilitatea următoarelor afirmații:

1. Reuniunea  $\Phi$  a două mulțimi măsurabile Jordan  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  este o mulțime cubabilă și, dacă interioarele mulțimilor  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$  sunt disjuncte, volumul lui  $\Phi$  este suma volumelor mulțimilor  $\Phi_1$  și  $\Phi_2$ ;
2. Intersecția a două mulțimi măsurabile Jordan este o mulțime cubabilă.

## 6.2 Definiția integralei triple

Fie  $V$  un domeniu spațial mărginit de o suprafață netedă sau netedă pe porțiuni și  $f(P) = f(x, y, z)$  o funcție reală definită și mărginită pe închiderea mulțimii  $V$ . Descompunem domeniul  $V$  printr-o rețea de suprafețe netede pe porțiuni în subdomeniile

$$V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n \quad (6.1)$$

care nu au puncte interioare în comun și care satisfac condiția

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n. \quad (6.2)$$

**Definiția 6.2.1** Fie  $V_i$  mulțimile din (6.1) care satisfac (6.2). Atunci, mulțimea

$$\Delta = \{V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_n\} \quad (6.3)$$

se numește **diviziune** a domeniului  $V$ , iar mulțimile  $V_i$  se numesc **elementele diviziunii**.

**Definiția 6.2.2** Fie diviziunea  $\Delta$  din (6.3). Se numește **norma sau finețea** diviziunii  $\Delta$  numărul pozitiv  $\nu(\Delta)$ , sau  $\|\Delta\|$ , egal cu cel mai mare dintre diametrele elementelor diviziunii  $\Delta$ .

Frontiera unui element al diviziunii  $\Delta$  fiind o suprafață închisă netedă pe porțiuni este măsurabilă Jordan. Să notăm cu  $\tau_i$  volumul elementului  $V_i$  și cu  $\mathcal{V}$  volumul lui  $V$ . Avem

$$\mathcal{V} = \sum_{i=1}^n \tau_i.$$

În fiecare element  $V_i$  al diviziunii  $\Delta$  alegem câte un punct  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ , numit *punct intermediar*, apoi alcătuim *suma integrală a funcției  $f$*

$$\sigma_{\Delta}(f, P_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \tau_i \quad (6.4)$$

corespunzătoare diviziunii  $\Delta$  și punctelor intermediare  $P_i \in V_i$ .

**Definiția 6.2.3** Spunem că funcția  $f$  este **integrabilă** pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V$  dacă există și este finită limita  $I$  a sumelor integrale (6.4), iar  $I$  nu depinde de alegerea punctelor intermediare.

**Definiția 6.2.4** Dacă  $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $V \subset \mathcal{E}_3$ , numărul

$$I = \lim_{\nu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f, P_i)$$

se numește **integrala triplă pe domeniul  $V$  a funcției  $f$**  și se notează cu unul din simbolurile

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V f(P) dv.$$

Având în vedere definiția limitei rezultă că putem da o definiție echivalentă a integrabilității funcției  $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definiția 6.2.5** Funcția  $f : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **integrabilă** pe  $V \subset \mathcal{E}_3$  dacă există numărul real  $I$  cu proprietatea că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$  există  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât să avem

$$|\sigma_{\Delta}(f, P_i) - I| < \varepsilon$$

pentru orice diviziune  $\Delta$  cu  $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$  și pentru orice alegere a punctelor intermediare  $P_i \in V_i$ .

## 6.3 Condiții de existență a unei integrale triple

Ca și în cazul funcțiilor reale de una sau două variabile independente, o funcție  $f$  arbitrară dar mărginită, de trei variabilele independente  $x, y$  și  $z$ , nu este întotdeauna integrabilă pe mulțimea ei de definiție. Pentru a stabili condiții suficiente de existență a integralei triple pe mulțimea  $V$  din funcția reală  $f$  definită pe  $\bar{V}$ , vom folosi sumele Darboux inferioară și superioară corespunzătoare diviziunii  $\Delta$  din (6.3).

Fie  $f(x, y, z)$  o funcție mărginită definită pe o mulțime măsurabilă Jordan  $V$ . Notăm cu  $\mathcal{D}$  totalitatea diviziunilor mulțimii  $V$  și fie  $\Delta$  o diviziune a lui  $V$ . Funcția  $f$  fiind mărginită pe  $V$  va fi mărginită pe elementul  $V_i$  al diviziunii

$\Delta \in \mathcal{D}$  și deci există numerele reale  $M_i$  și  $m_i$  marginea superioară și respectiv marginea inferioară a valorilor funcției  $f$  pe elementul  $V_i$  a diviziunii  $\Delta$ , iar cu  $\tau_i$  volumul lui  $V_i$ . Expresiile:

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n M_i \tau_i; \quad s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n m_i \tau_i \quad (6.5)$$

se numesc *suma Darboux superioară* și respectiv *suma Darboux inferioară* pentru funcția  $f$  corespunzătoare partiției  $\Delta$ .

Proprietățile sumelor Darboux introduse în (6.5) sunt asemănătoare sumelor Darboux introduse la integrala dublă motiv pentru care ne vom limita doar la enumerarea acestora.

1. Pentru orice diviziune  $\Delta \in \mathcal{D}$  și pentru orice alegere a sistemului de puncte intermediare  $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$ , suma integrală asociată funcției  $f$  este cuprinsă între suma Darboux inferioară și suma Darboux superioară ale funcției  $f$  corespunzătoare diviziunii  $\Delta$

$$s_{\Delta}(f) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) S_i \leq S_{\Delta}(f).$$

2. În procesul de rafinare a divizării mulțimii  $V$  sumele Darboux inferioare cresc, iar sumele Darboux superioare descresc. Prin urmare, dacă  $s_{\Delta}(f)$  și  $S_{\Delta}(f)$  sunt sumele Darboux ale funcției  $f$  corespunzătoare modului de divizare  $\Delta \in \mathcal{D}$ , iar  $s_{\Delta'}(f)$  și  $S_{\Delta'}(f)$  sunt sumele Darboux ale funcției  $f$  corespunzătoare unei alte partiții  $\Delta' \in \mathcal{D}$ , mai fină decât diviziunea  $\Delta$ , avem

$$s_{\Delta}(f) \leq s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta}(f).$$

3. Fie  $\Delta'$  și  $\Delta''$  două diviziuni arbitrare ale mulțimii  $V$  și fie  $s_{\Delta'}(f)$ ,  $S_{\Delta'}(f)$  și  $s_{\Delta''}(f)$ ,  $S_{\Delta''}(f)$ , sumele Darboux asociate funcției  $f$  corespunzătoare acestor partiții. Atunci, avem

$$s_{\Delta'}(f) \leq S_{\Delta''}(f) \quad \text{și} \quad s_{\Delta''}(f) \leq S_{\Delta'}(f)$$

adică orice sumă Darboux inferioară a funcției  $f$  corespunzătoare unui mod arbitrar de divizare, nu poate întrece suma Darboux superioară asociată aceleiași funcții corespunzătoare oricărui alt mod de divizare a mulțimii  $V$ .

4. Mulțimea sumelor Darboux superioare ale funcției  $f$  definită pe mulțimea carabilă  $V \subset \mathcal{E}_3$  corespunzătoare modurilor de diviziune  $\Delta \in \mathcal{D}$  este mărginită inferior. Un minorant al acestei mulțimi este oricare sumă Darboux inferioară a funcției  $f$  corespunzătoare unui mod de divizare  $\Delta \in \mathcal{D}$ .
5. Mulțimea sumelor Darboux inferioare ale funcției  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  corespunzătoare mulțimii modurilor de divizare  $\mathcal{D}$  este mărginită superior. Un majorant al acestei mulțimi este desigur oricare sumă Darboux superioară a funcției  $f$  corespunzătoare oricărui mod de divizare a mulțimii  $V$ .
6. Dată funcția  $f : V \subset \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  există numerele reale:

$$\bar{J} = \inf\{S_{\Delta}(f) : \Delta \in \mathcal{D}\}; \quad \underline{J} = \sup\{s_{\Delta}(f) : \Delta \in \mathcal{D}\},$$

numite *integrala Darboux superioară* și *integrala Darboux inferioară* ale funcției  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Teorema 6.3.1** *Integralele Darboux inferioară și superioară ale funcției reale de trei variabile reale  $f$  definită pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V \subset \mathbb{R}^3$  satisfac inegalitatea*

$$\underline{J} \leq \bar{J}.$$

**Demonstrație.** Presupunem contrariul și anume că  $\underline{J} > \bar{J}$ . Atunci, există un număr  $\varepsilon > 0$  astfel încât

$$\underline{J} - \bar{J} > \varepsilon > 0. \quad (6.6)$$

Pe de altă parte, după teoremele de caracterizare ale marginilor inferioară și superioară, putem spune că pentru  $\varepsilon > 0$  de mai sus există o sumă Darboux superioară  $\Omega_1$  și o sumă Darboux inferioară  $\omega_2$  astfel încât

$$\Omega_1 - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{și} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

de unde deducem

$$\Omega_1 - \omega_2 + (\underline{J} - \bar{J}) < \varepsilon.$$

În consecință, în conformitate cu (6.6), avem

$$\Omega_1 - \omega_2 < 0$$

care contrazice una din proprietățile sumelor Darboux. ■

Următoarea teoremă de existență a unei integrale triple se demonstrează aplicând argumente similare celor din demonstrația teoremei de existență a unei integrale duble.

**Teorema 6.3.2** *Orice funcție continuă  $f$  definită pe mulțimea cubabilă compactă  $V \subset \mathbb{R}^3$  este integrabilă pe  $V$ .*

Ca și la integrala dublă, condiția de continuitate a integrantului este destul de restrictivă. De aceea, teorema următoare stabilește existența integralei triple pentru o clasă de funcții discontinue.

**Teorema 6.3.3** *Dacă funcția reală  $f(x, y, z)$ , mărginită pe mulțimea cubabilă compactă  $V$ , este continuă peste tot în  $V$  cu excepția unei mulțimi de volum egal cu zero, atunci ea este integrabilă pe  $V$ .*

## 6.4 Proprietățile integralei triple

Proprietățile integralei triple sunt analoage celor ale integralei duble și de aceea ne vom limita doar să le enumerăm.

1. (*liniaritate*). Dacă funcțiile reale de trei variabile reale  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V$ , iar  $\lambda$  și  $\mu$  sunt constante reale arbitrare, atunci funcția  $\lambda f + \mu g$  ale cărei valori se calculează după legea

$$(\lambda f + \mu g)(x, y, z) = \lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z), \quad (\forall) (x, y, z) \in V,$$

este integrabilă pe  $V$  și

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\lambda f + \mu g)(x, y, z) dv = \\ & = \lambda \iiint_V f(x, y, z) dv + \mu \iiint_V g(x, y, z) dv. \end{aligned}$$

2. (*aditivitate*). Dacă  $V = V_1 \cup V_2$ , unde  $V_1$  și  $V_2$  sunt mulțimi cubabile compacte, iar  $V_1 \subset \mathbb{R}^3$  și  $V_2 \subset \mathbb{R}^3$  nu au puncte interioare comune și

funcția  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă pe  $V$ , atunci  $f$  este integrabilă pe fiecare din mulțimile  $V_1$  și  $V_2$  și are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_{V_1} f(x, y, z) \, dx dy dz + \iiint_{V_2} f(x, y, z) \, dx dy dz. \end{aligned}$$

3. (*monotonie*). Dacă  $f$  este integrabilă pe  $V$  și

$$f(x, y, z) \geq 0, \quad (\forall) (x, y, z) \in V,$$

integrala triplă din funcția  $f$  satisface inegalitatea

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz \geq 0.$$

4. (*monotonie*). Dacă  $f$  și  $g$  sunt integrabile pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V$  și

$$f(x, y, z) \leq g(x, y, z), \quad (\forall) (x, y, z) \in V,$$

între integralele celor două funcții avem inegalitatea

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz \leq \iiint_V g(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Această proprietate a integralei triple implică următoarele două proprietăți.

5. (*evaluarea valorii absolute a integralei triple*). Dacă  $f$  este integrabilă pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V$ , atunci funcția valoarea absolută a lui  $f$  este integrabilă pe  $V$  și

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| \, dx dy dz.$$



6. (*teorema valorii medii*). Dacă funcția reală de trei variabile reale  $f$  este integrabilă pe mulțimea măsurabilă Jordan  $V$  și satisface inegalitatea

$$m \leq f(x, y, z) \leq M, \quad (\forall) (x, y, z) \in V,$$

iar  $\text{vol } V$  este volumul lui  $V$ , atunci

$$m \text{ vol } V \leq \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \leq M \text{ vol } V.$$

Dacă funcția  $f$  este în plus continuă pe  $V$ , teorema valorii medii devine

7. Dacă  $f$  este funcție continuă pe mulțimea cubabilă compactă  $V$ , există un punct  $(\xi, \eta, \zeta) \in V$ , astfel încât

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \text{ vol } V.$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iiint_V dx dy dz = \text{vol } V.$$

## 6.5 Evaluarea integralei triple

### 6.5.1 Integrala triplă pe intervale tridimensionale închise

**Teorema 6.5.1** *Dacă funcția reală mărginită, de trei variabile reale,*

$$f : [a, b] \times [c, d] \times [u, v] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$-\infty < a < b < +\infty, \quad -\infty < c < d < +\infty, \quad -\infty < u < v < +\infty$$

*este integrabilă pe intervalul tridimensional închis*

$$I_3 = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$$

*și pentru orice  $(x, y) \in I_2 = [a, b] \times [c, d]$  există numărul real  $F(x, y)$  definit de integrala depinzând de parametrii  $x$  și  $y$*

$$F(x, y) = \int_u^v f(x, y, z) dz, \quad (6.7)$$

atunci funcția

$$F : I_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \int_u^v f(x, y, z) dz, \quad (\forall) (x, y) \in I_2$$

este integrabilă pe intervalul bidimensional  $I_2$  și are loc egalitatea

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{I_2} F(x, y) dx dy = \iint_{I_2} \left( \int_u^v f(x, y, z) dz \right) dx dy. \quad (6.8)$$

**Demonstrație.** Fie  $d'$ ,  $d''$  și  $d'''$  diviziuni ale respectiv intervalelor reale compacte  $[a, b]$ ,  $[c, d]$  și  $[u, v]$  :

$$\begin{cases} d' &= \{x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m\}; \\ d'' &= \{y_0, y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n\}; \\ d''' &= \{z_0, z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_p\}, \end{cases} \quad (6.9)$$

unde

$$\begin{cases} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_m &= b, \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_i < y_{i+1} < \dots < y_n &= d, \\ u &= z_0 < z_1 < \dots < z_k < z_{k+1} < \dots < z_p &= v. \end{cases}$$

Cu ajutorul diviziunilor  $d', d'', d'''$  putem defini o diviziune  $\Delta$  a intervalului tridimensional închis  $I_3$

$$\Delta = \{I_{000}, I_{100}, \dots, I_{ijk}, \dots, I_{mnp}\}, \quad (6.10)$$

unde elemntele  $I_{ijk}$  ale acesteia sunt intervalele tridimensionale închise

$$I_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}], \\ i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots, p-1,$$

iar cu ajutorul diviziunilor  $d'$  și  $d''$  definim o diviziune  $\Delta'$  a lui  $I_2$ , unde elementele lui  $\Delta'$  sunt intervalele bidimensionale închise

$$I'_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \\ (i = 0, 1, \dots, m-1, \quad j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (6.11)$$

Notăm

$$m_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in I_{ijk}\},$$

$$M_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in I_{ijk}\}.$$

Aceste cantități sunt numere reale deoarece funcția  $f$  este mărginită pe fiecare din intervalele tridimensionale închise  $I_{ijk}$ .

Deoarece urmărim să demonstrăm că funcția  $F$  definită de (6.7) este integrabilă pe intervalul bidimensional închis  $I_2$  va trebui să considerăm sumele integrale ale funcției  $F$  corespunzătoare tuturor diviziunilor  $\Delta'$  ale intervalului bidimensional  $I_2$ , ale căror elemente au forma (6.11), pentru alegeri arbitrare ale punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_j) \in I'_{ij}$ . Aceste sume au forma

$$\sigma_{D'}(F, (\xi_i, \eta_j)) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^n F(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j). \quad (6.12)$$

Dacă ținem seama de modul cum a fost definită funcția  $F$  și de proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare a integralei Riemann, avem

$$F(\xi_i, \eta_j) = \int_u^v f(\xi_i, \eta_j, z) dz = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z) dz.$$

Aplicând formula de medie integralelor simple

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z) dz$$

deducem că există numerele reale  $\mu_{ijk}$  cu  $m_{ijk} \leq \mu_{ijk} < M_{ijk}$ , astfel încât

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z) dz = \mu_{ijk}(z_{k+1} - z_k).$$

Deci, pentru sumele integrale (6.12) asociate funcției  $F$  definită pe intervalul bidimensional  $I_2$ , corespunzătoare modului de divizare  $\Delta'$  și alegerii punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_j) \in I_{ij}$ , avem

$$\sigma_{\Delta'}(F, (\xi_i, \eta_j)) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} \mu_{ijk}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ijk} \leq \mu_{ijk} \leq M_{ijk},$$

$$(i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots, p-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk} v_{ijk} \leq \sigma_{\Delta'}(F, (\xi_i, \eta_j)) \leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk} v_{ijk}, \quad (6.13)$$

unde  $v_{ijk}$  este volumul intervalului tridimensional  $I_{ijk}$

$$v_{ijk} = \text{vol } I_{ijk} = (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k).$$

Prima sumă din inegalitățile (6.13) este suma Darboux inferioară a funcției  $f$  relativă la diviziunea  $\Delta$  a lui  $I_3$

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk} v_{ijk}.$$

Ultima sumă din inegalitățile (6.13) este suma Darboux superioară a funcției  $f$  relativă la aceeași diviziune  $\Delta$  a intervalului tridimensional  $I_3$

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk} v_{ijk}.$$

Avem deci inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta'}(F, (\xi_i, \eta_j)) \leq S_{\Delta}(f)$$

pentru orice diviziune  $\Delta$  de forma (6.10) a intervalului tridimensional  $I_3$  și pentru orice alegere a punctelor intermediare  $(\xi_i, \eta_j) \in I_2$ .

Fie acum  $(d'_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  un șir oarecare de diviziuni ale intervalului  $[a, b]$  cu proprietatea că șirul normelor acestor diviziuni  $(\|d'_r\|)_{r \in \mathbb{N}^*}$  este convergent la zero,  $(d''_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  un șir oarecare de diviziuni ale intervalului  $[c, d]$  cu proprietatea  $\|d''_r\| \rightarrow 0$  și  $(d'''_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  un șir oarecare de diviziuni ale lui  $[u, v]$  cu  $\|d'''_r\| \rightarrow 0$ . Notăm cu  $\Delta_r$  diviziunea intervalului tridimensional închis  $I_3 = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  definită de diviziunile  $d'_r, d''_r, d'''_r$  ale respectiv intervalelor închise  $[a, b], [c, d], [u, v]$  și cu  $\Delta'_r$  diviziunea intervalului bidimensional închis  $I_2 = [a, b] \times [c, d]$  definită de diviziunile  $d'_r$  și  $d''_r$ . Se vede că

$$\|d'_r\| \rightarrow 0, \|d''_r\| \rightarrow 0 \implies \|\Delta_r\| \rightarrow 0 \text{ și } \|\Delta'_r\| \rightarrow 0.$$

Pentru fiecare  $r$  avem inegalitățile

$$s_{\Delta_r}(f) \leq \sigma_{\Delta'_r}(F, (\xi_i, \eta_j)) \leq S_{\Delta_r}(f). \quad (6.14)$$

Funcția  $f$  fiind integrabilă pe  $I_3$ , aplicând criteriul de integrabilitate a lui Darboux, avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} S_{\Delta_r}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} s_{\Delta_r}(f) = \iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.15)$$

Trecând la limită în (6.14) și ținând cont de (6.15), obținem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta'_r}(F, (\xi_i, \eta_j)) = \iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.16)$$

Dacă ținem seama de definiția integralei duble a unei funcții reale de două variabile reale se vede imediat că

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta'_r}(F, (\xi_i, \eta_j)) = \iint_{I_2} F(x, y) dx dy. \quad (6.17)$$

Din egalitățile (6.16) și (6.17) obținem (6.8) și teorema este demonstrată. ■

De obicei se folosește notația

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{I_2} dx dy \int_u^v f(x, y, z) dz. \quad (6.18)$$

În cazul integralelor duble am utilizat notația

$$\iint_{I_2} F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy. \quad (6.19)$$

Ținând cont de faptul că avem egalitatea

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_c^d dy \int_u^v f(x, y, z) dz, \quad (6.20)$$

folosind (6.19) și (6.20) constatăm că (6.8) se scrie în forma

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_u^v f(x, y, z) dz. \quad (6.21)$$

Putem spune că (6.8), (6.18) și (6.21) reprezintă *formule de calcul a integralei triple pe un interval tridimensional închis*.

**Observația 6.5.1** *Integrala triplă pe un interval tridimensional închis este o iterație de integrale simple, deci un calcul succesiv a trei integrale Riemann ale unor funcții reale. Prima integrală din membrul doi a relației (6.21), efectuată în raport cu variabila  $z$  pe intervalul  $[u, v]$ , este o integrală depinzând de doi parametri, a doua integrală simplă, calculată în raport cu  $y$  pe compactul  $[c, d]$ , este o integrală depinzând de parametrul  $x$ . Ultima integrală, efectuată între limitele  $a$  și  $b$ , este tocmai integrala triplă a funcției  $f$  pe intervalul tridimensional  $I_3$ .*

**Observația 6.5.2** *Dacă presupunem că funcția  $f : I_3 \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și integralele:*

$$G(y, z) = \int_a^b f(x, y, z) dx; \quad H(z, x) = \int_c^d f(x, y, z) dy$$

*există pentru orice  $(y, z) \in [c, d] \times [u, v]$  și respectiv pentru orice  $(z, x) \in [u, v] \times [a, b]$ , atunci procedând ca în teorema de mai sus putem deduce următoarele două formule de calcul ale integralei triple pe intervalul tridimensional închis  $I_3 = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$ :*

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_u^v dz \int_a^b f(x, y, z) dx;$$

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_u^v dz \int_a^b dx \int_c^d f(x, y, z) dy.$$

**Observația 6.5.3** *Dacă  $f(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot k(z)$  și funcțiile reale de o variabilă reală  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k : [u, v] \rightarrow \mathbb{R}$  sunt integrabile Riemann, atunci  $f$  este integrabilă pe intervalul tridimensional închis  $I_3 = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$  și are loc egalitatea*

$$\iiint_{I_3} f(x, y, z) dx dy = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy \cdot \int_u^v k(z) dz,$$

*relație care arată că în acest caz particular integrala triplă este un produs de trei integrale simple.*

### 6.5.2 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Oz$

Pentru a da regula de calcul a unei integrale triple în cazul în care domeniul de integrare  $V$  nu mai este un interval tridimensional închis este necesară noțiunea de domeniu simplu în raport cu una din axele reperului cartezian rectangular  $Oxyz$ .

**Definiția 6.5.1** *Se numește domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$  submulțimea  $V_z$  a lui  $\mathbb{R}^3$*

$$V_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

unde  $\varphi_1, \varphi_2$  sunt funcții reale continue pe submulțimea  $D_{xy}$  a lui  $\mathbb{R}^2$ .

Analizând definiția domeniului simplu în raport cu axa  $Oz$ , constatăm că frontiera acestuia este alcătuită din suprafețele:

$$(S_1) : z = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}; \quad (S_2) : z = \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy},$$

pe care le putem numi *baza inferioară* și respectiv *baza superioară* a domeniului de integrare  $V_z$ , și din porțiunea de *suprafață cilindrică*

$$(S_\ell) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D_{xy}, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\},$$

unde  $\partial D_{xy}$  este frontiera mulțimii  $D_{xy}$ , curbă închisă netedă pe porțiuni.

Mulțimea plană  $D_{xy}$  din definiția domeniului simplu în raport cu axa  $Oz$  este proiecția ortogonală a mulțimii  $V_z$  pe planul  $Oxy$ . Suprafața cilindrică  $S_\ell$  are generatoarele paralele cu  $Oz$  și curba directoare frontiera domeniului  $D_{xy}$ .

Un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$  are proprietatea că orice paralelă la axa  $Oz$  printr-un punct  $(x, y)$  din interiorul domeniului  $D_{xy}$ , orientată la fel cu axa  $Oz$ , pătrunde în domeniul  $V_z$  prin punctul  $P(x, y, \varphi_1(x, y))$  pe care putem să-l numim *punct de intrare în domeniu* și iese din  $V_z$  prin punctul  $Q(x, y, \varphi_2(x, y))$  care poate fi denumit *punct de ieșire din domeniul  $V_z$* .

Procedând exact ca în cazul teoremei de la integrala dublă avem:

**Teorema 6.5.2** *Fie  $V_z$  un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$  și  $f$  o funcție reală mărginită definită și integrabilă pe mulțimea  $V_z$ . Dacă pentru orice  $(x, y) \in D_{xy}$ , fixat, există integrala depinzând de parametrii  $x$  și  $y$*

$$J(x, y) = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

atunci funcția  $J : D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$  este integrabilă și

$$\iint_{D_{xy}} J(x, y) dx dy = \iiint_{V_z} f(x, y, z) dx dy dz.$$

**Demonstrație.** Înainte de a începe demonstrația, să observăm că având în vedere expresia valorii în  $(x, y) \in D_{xy}$  a funcției  $J$ , integrala dublă pe  $D_{xy}$  a acesteia se poate scrie în una din următoarele forme

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} J(x, y) dx dy &= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Atunci, concluzia teoremei devine

$$\iiint_{V_z} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (6.22)$$

și reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$ .

Să procedăm acum la demonstrația teoremei.

Fie  $u = \min\{\varphi_1(x, y); (x, y) \in D_{xy}\}$  și  $v = \max\{\varphi_2(x, y); (x, y) \in D_{xy}\}$  care sunt numere reale în baza faptului că funcțiile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  sunt continue pe mulțimea compactă  $D_{xy}$  și, după teorema lui Weierstrass, sunt funcții mărginite și își ating efectiv marginile. Atunci, cilindrul  $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, u \leq z \leq v\}$  include domeniul simplu în raport cu axa  $Oz$  la care se referă enunțul teoremei.

Considerăm funcția reală auxiliară  $f^*$ , definită pe cilindrul  $\mathcal{C}$ ,

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{dacă } (x, y, z) \in V_z \\ 0, & \text{dacă } (x, y, z) \in \mathcal{C} \setminus V_z. \end{cases} \quad (6.23)$$

Această funcție satisface ipotezele Teoremei 6.3.3. Într-adevăr, deoarece valorile sale coincid cu cele ale funcției  $f$  pe mulțimea  $V_z$  putem afirma că  $f^*$  este integrabilă pe  $V_z$ . Restricția lui  $f^*$  la mulțimea  $\mathcal{C} \setminus V_z$  fiind funcția identic nulă rezultă că este integrabilă. Dacă la aceste două rezultate adăugăm



și proprietatea de aditivitate a integralei triple deducem că funcția  $f^*$  din (6.23) este integrabilă. Mai mult, avem evident:

$$\iiint_{V_z} f^*(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_z} f(x, y, z) dx dy dz; \quad (6.24)$$

$$\iiint_{\mathcal{C} \setminus V_z} f^*(x, y, z) dx dy dz = 0, \quad (6.25)$$

deci

$$\iiint_{\mathcal{C}} f^*(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_z} f(x, y, z) dx dy dz.$$

În afară de aceasta, pentru fiecare pereche  $(x, y)$  situată în  $D_{xy}$  are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_u^v f^*(x, y, z) dz = \\ \int_u^{\varphi_1(x, y)} f^*(x, y, z) dz + \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f^*(x, y, z) dz + \int_{\varphi_2(x, y)}^v f^*(x, y, z) dz \end{aligned} \quad (6.26)$$

din motiv că fiecare din integralele din membrul doi există. Apoi, dat fiind faptul că pe segmentele de dreaptă incluse în  $\mathcal{C}$  care unesc respectiv perechile de puncte

$$(x, y, u), \quad (x, y, \varphi_1(x, y)) \quad \text{și} \quad (x, y, \varphi_2(x, y)), \quad (x, y, v),$$

valorile funcției  $f^*$  sunt egale cu zero, deducem că prima și a treia integrală din membrul doi al relației (6.26) sunt nule, fapt care conduce la egalitatea

$$\int_u^v f^*(x, y, z) dz = \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Integrala triplă din funcția  $f^*$  pe mulțimea  $\mathcal{C}$  poate fi redusă la iterația de integrale

$$\iiint_{\mathcal{C}} f^*(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_u^v f^*(x, y, z) dz. \quad (6.27)$$

Relațiile stabilite mai sus conduc la concluzia teoremei. ■

**Exercițiul 6.5.1** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3},$$

unde  $\Omega$  este tetraedrul delimitat de planele de coordonate  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  și de planul  $x + y + z - 1 = 0$ .

**Soluție.** Proiecția domeniului de integrare pe planul  $Oxy$  este triunghiul dreptunghic isoscel cu unghiul drept în origine și unghiurile de  $45^\circ$  în punctele  $A(1, 0, 0)$  și  $B(0, 1, 0)$ .

Domeniul  $\Omega$  este simplu în raport cu axa  $Oz$  deoarece orice paralelă la axa  $Oz$  dusă printr-un punct din interiorul triunghiului mai sus menționat pătrunde în domeniul  $\Omega$  în punctul  $P(x, y, 0)$  și iese din domeniul în punctul  $Q(x, y, 1 - x - y)$ . Prin urmare avem că  $\varphi_1(x, y) = 0$  și  $\varphi_2(x, y) = 1 - x - y$ .

Proiecția domeniului  $\Omega$  pe planul  $Oxy$  este

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}. \quad (6.28)$$

Dacă aplicăm formula (6.22), avem

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dx dy. \quad (6.29)$$

Analizând (6.28) constatăm că domeniul  $D_{xy}$  este simplu în raport cu axa  $Oy$ . Prin urmare, pentru calculul integralei duble (6.29) se poate aplica formula (4.37). Avem

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[ \frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x+y} + \frac{y}{4} \right) \Big|_0^{1-x} dx.$$

După efectuarea diferenței valorilor primitive în cele două limite de integrare, găsim

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x} + \frac{x-3}{4} \right) dx.$$

Integralele definite la care s-a ajuns sunt imediate și prin urmare

$$I = \left( \ln \sqrt{1+x} + \frac{(x-3)^2}{16} \right) \Big|_0^1 = \ln \sqrt{2} - \frac{5}{16}.$$

■

### 6.5.3 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Ox$

**Definiția 6.5.2** *Se numește domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  submulțimea  $V_x$  a lui  $\mathbb{R}^3$*

$$V_x = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D_{yz}, \psi_1(y, z) \leq x \leq \psi_2(y, z)\},$$

unde funcțiile reale  $\psi_1$  și  $\psi_2$  sunt definite și continue pe submulțimea  $D_{yz}$  a lui  $\mathbb{R}^2$ , situată în planul  $Oyz$ , valorile acestora fiind astfel încât  $\psi_1(y, z) \leq \psi_2(y, z)$  oricare ar fi  $(y, z) \in D_{yz}$ .

Frontiera unui domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  este alcătuită din suprafețele:

$$(\Sigma_1) : x = \psi_1(y, z), (y, z) \in D_{yz}; \quad (\Sigma_2) : x = \psi_2(y, z), (y, z) \in D_{yz},$$

numite baze și suprafață cilindrică

$$(\Sigma_\ell) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in \partial D_{yz}, \psi_1(y, z) \leq z \leq \psi_2(y, z)\},$$

unde  $\partial D_{yz}$  este frontiera mulțimii  $D_{yz}$ , curbă închisă netedă pe porțiuni.

Mulțimea plană  $D_{yz}$  este proiecția ortogonală a mulțimii  $V_x$  pe planul  $Oyz$ . Suprafața cilindrică  $\Sigma_\ell$  are generatoarele paralele cu  $Ox$  și curba directoare frontiera domeniului  $D_{yz}$ .

Un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$  are proprietatea că orice paralelă la axa  $Ox$  printr-un punct  $(y, z)$  din interiorul domeniului  $D_{yz}$ , având orientarea axei  $Ox$ , pătrunde în domeniul  $V_x$  prin punctul  $P(\psi_1(y, z), y, z)$  și iese din  $V_x$  prin punctul  $Q(\psi_2(y, z), y, z)$ .

**Teorema 6.5.3** *Dacă funcția reală  $f$  este integrabilă pe domeniul  $V_x$ , simplu în raport cu axa absciselor și pentru orice  $(y, z) \in D_{yz}$ , fixat, există integrala depinzând de parametrii  $y$  și  $z$*

$$U(y, z) = \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx,$$

atunci funcția

$$U : D_{yz} \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(y, z) = \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx$$

este integrabilă și

$$\iint_{D_{yz}} U(y, z) dydz = \iiint_{V_x} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.30)$$

Integrala dublă pe domeniul  $D_{yz}$  din funcția  $U$  se mai poate scrie ca

$$\begin{aligned} \iint_{D_{yz}} U(y, z) dydz &= \iint_{D_{yz}} \left( \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dydz = \\ &= \iint_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

Ținând cont de ultimele egalități deducem că (6.30) poate fi scrisă în forma

$$\iiint_{V_x} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{yz}} dydz \int_{\psi_1(y, z)}^{\psi_2(y, z)} f(x, y, z) dx \quad (6.31)$$

care reprezintă *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$ .

#### 6.5.4 Integrala triplă pe un domeniu simplu în raport cu axa $Oy$

**Definiția 6.5.3** Submulțimea  $V_y$  a lui  $\mathbb{R}^3$

$$V_y = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : (x, z) \in D_{xz} \subset Oxz, \chi_1(x, z) \leq y \leq \chi_2(x, z)\},$$

unde funcțiile reale  $\chi_1$  și  $\chi_2$  sunt definite și continue pe submulțimea  $D_{xz}$  a lui  $\mathbb{R}^2$ , situată în planul  $Oxz$ , valorile acestora fiind astfel încât  $\chi_1(x, z) \leq \chi_2(x, z)$  oricare ar fi  $(x, z) \in D_{xz}$ , se numește **domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$** .

Suprafețele care mărginesc un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  sunt:

$$(\mathcal{S}_1) : y = \chi_1(x, z), \quad (x, z) \in D_{xz}; \quad (\mathcal{S}_2) : y = \chi_2(x, z), \quad (x, z) \in D_{xz},$$

numite *baze și suprafață cilindrică*  $\mathcal{S}_\ell$

$$(\mathcal{S}_\ell) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in \partial D_{xz}, \chi_1(x, y) \leq z \leq \chi_2(x, y)\},$$

unde  $\partial D_{xz}$  este frontiera mulțimi  $D_{xz}$ , curbă închisă netedă pe porțiuni.

Mulțimea plană  $D_{xz}$  este proiecția ortogonală a mulțimii  $V_y$  pe planul  $Oxz$ . Suprafața cilindrică  $(\mathcal{S}_\ell)$  are generatoarele paralele cu  $Oy$  și curba directoare frontiera domeniului  $D_{xz}$ .

Un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  are proprietatea că orice paralelă la axa  $Oy$  printr-un punct  $(x, z)$  din interiorul domeniului  $D_{xz}$ , având orientarea axei  $Oy$ , pătrunde în domeniul  $V_y$  prin punctul  $P(x, \chi_1(x, z), z)$  și iese din  $V_y$  prin punctul  $Q(x, \chi_2(x, z), z)$ .

**Teorema 6.5.4** *Dacă funcția reală mărginită  $f$  este integrabilă pe domeniul  $V_y$ , simplu în raport cu axa  $Oy$ , și pentru orice  $(x, z) \in D_{xz}$ , fixat, există integrala depinzând de parametrii  $x$  și  $z$*

$$W(x, z) = \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy,$$

atunci funcția

$$W : D_{xz} \rightarrow \mathbb{R}, \quad W(x, z) = \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy$$

este integrabilă și

$$\iint_{D_{xz}} W(x, z) dx dz = \iiint_{V_y} f(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.32)$$

Integrala dublă pe domeniul  $D_{xz}$  din funcția  $W$  se poate scrie în una din următoarele forme:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xz}} W(x, z) dx dz &= \iint_{D_{xz}} \left( \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dx dz; \\ \iint_{D_{xz}} W(x, z) dx dz &= \iint_{D_{xz}} dx dz \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

Ținând cont de aceste egalități deducem că *formula de calcul a integralei triple* pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  este

$$\iiint_{V_y} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xz}} dx dz \int_{\chi_1(x, z)}^{\chi_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \quad (6.33)$$

### 6.5.5 Integrala triplă pe un domeniu oarecare

Dacă domeniul de integrare  $V$  nu este simplu în raport cu nici una din axe, prin plane paralele la unul din planele de coordonate poate fi descompus într-un număr finit de subdomenii,

$$V_1, V_2, \dots, V_p \quad \text{cu} \quad V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$$

și fiecare din domeniile  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) să fie simplu în raport cu una din axe.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcție de domeniu, avem

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \sum_{i=1}^p \iiint_{V_i} f(x, y, z) \, dx dy dz,$$

unde pentru calculul integralelor din membrul drept se aplică una din formulele de calcul stabilite mai sus.

**Exercițiul 6.5.2** *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_{I_3} \frac{dx dy dz}{(x + y + z)^2},$$

unde  $I_3$  este intervalul tridimensional închis  $I_3 = [1, 3] \times [0, 1] \times [0, 2]$ .

**Soluție.** Avem

$$I = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{dz}{(x + y + z)^2} = \int_1^3 dx \int_0^1 \left( \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x + y + 2} \right) dy.$$

Calculând cele două integrale depinzând de parametrul  $x$ , obținem

$$I = \int_1^3 (\ln(x + 1) + \ln(x + 2) - \ln x - \ln(x + 3)) \, dx.$$

Integralele definite la care s-a ajuns sunt de forma integralei

$$J(a) = \int_1^3 \ln(x + a) \, dx$$

căreia i se poate afla valoarea dacă se integrează prin părți. Avem:

$$J(a) = x \ln(x + a) \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x}{x + a} \, dx;$$

$$J(a) = (x+a) \ln(x+a) \Big|_1^3 - x \Big|_1^3 = (3+a) \ln(3+a) - (1+a) \ln(1+a) - 2.$$

Atunci, valoarea integralei triple este

$$I = J(1) + J(2) - J(0) - J(3) = 5 \ln 5 + 8 \ln 2 - 12 \ln 3.$$

Funcția de integrat fiind pozitivă, valoarea lui  $I$  este un număr pozitiv căruia i se poate da o interpretare mecanică. ■

**Exercițiul 6.5.3** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V y \, dx \, dy \, dz,$$

unde  $V$  este tetraedrul din primul octant limitat de planele de coordonate și de planul  $x + y + z - 2 = 0$ .

**Soluție.** Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$  căci putem scrie

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq 2 - x - y\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Mulțimea  $D_{xy}$  este domeniu plan simplu în raport cu axa  $Oy$ . Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor și apoi formula de calcul a unei integrale duble când domeniul este simplu în raport cu axa ordonatelor, obținem

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{2-x-y} y \, dz = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} y(2-x-y) \, dy.$$

După calcularea integralei din interior, avem

$$I = \int_0^2 \left( y^2 - x \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{2-x} dx.$$

Luând expresia de sub semnul integrală între limitele indicate, găsim

$$I = \frac{1}{6} \int_0^2 (2-x)^3 dx = -\frac{1}{24} (x-2)^4 \Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

De observat că domeniul de integrare este simplu și în raport cu axa  $Ox$  sau axa  $Oy$  astfel că pentru calculul integralei triple s-ar fi putut utiliza fie formula (6.31) fie formula (6.33). ■

**Exercițiul 6.5.4** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dx dy dz,$$

unde domeniul  $V$  este mărginit de paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  și de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  și conține o parte din porțiunea nenegativă a axei  $Oz$ .

**Soluție.** La fel ca în exemplul precedent și aici domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$  căci el se poate scrie în forma

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Mulțimea  $D_{xy}$  este discul închis cu centrul în origine și raza  $\sqrt{2}$ , această afirmație deducându-se din faptul că intersecția sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  cu paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  este cercul de rază  $\sqrt{2}$  cu centrul în punctul  $(0, 0, 2)$  aflat în planul paralel cu planul  $Oxy$  de ecuație  $z = 2$ .

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor, obținem

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)z \, dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)z^2 \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dx dy.$$

Luând expresia de integrat între limitele de integrare precizate, găsim

$$I = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) (6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2) dx dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare, avem

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \rho \in [0, \sqrt{2}]$$

și deci

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 (6 - \rho^2 - \rho^4) d\rho = \frac{8\pi}{3}.$$



## 6.6 Formula integrală Gauss–Ostrogradski

Vom deduce o legătură între integrala de suprafață de tipul al doilea și integrala triplă. În acest sens, fie  $V \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu cubabil compact, având frontiera o suprafață  $\mathcal{S}$  simplă, închisă, bilateră, netedă sau netedă pe porțiuni, cu  $\mathcal{S}_e$  fața sa exterioară. Versorul  $\mathbf{n}$  al normalei exterioare într-un punct al suprafeței  $\mathcal{S}_e$  are expresia

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}, \quad (6.34)$$

unde  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  sunt unghiurile pe care acest versor îl face cu versorii  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  ai reperului  $Oxyz$ .

Considerăm că  $P, Q, R$  sunt funcții reale de trei variabile reale definite și continue pe domeniul  $V$ . Presupunem că aceste funcții sunt astfel încât divergența câmpului vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k} \quad (6.35)$$

există și este funcție continuă pe interiorul mulțimi  $V$ .

**Teorema 6.6.1** *În ipotezele de mai sus, are loc egalitatea*

$$\iint_{\mathcal{S}_e} P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz, \quad (6.36)$$

numită *formula integrală Gauss–Ostrogradski*.

**Demonstrație.** Presupunem că domeniul  $V$  este descompus într-un număr finit de subdomenii simple în raport cu axa  $Oz$ . Dacă aplicăm proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul de integrare pentru integrala de suprafață și pentru integrala triplă putem presupune că  $V$  este simplu în raport cu axa  $Oz$  și că proiecția sa pe planul  $Oxy$  este domeniul plan compact  $D_{xy}$  având frontiera  $\partial D_{xy}$  o curbă simplă închisă netedă sau netedă pe porțiuni. Atunci, frontiera  $\mathcal{S}$  a domeniului  $V$  este o reuniune de trei suprafețe netede sau netede pe porțiuni  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_\ell$ , unde:

$$(\mathcal{S}_1) : z = z_1(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy}; \quad (6.37)$$

$$(\mathcal{S}_2) : z = z_2(x, y), \quad (x, y) \in D_{xy};$$

$$\mathcal{S}_\ell = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \partial D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}. \quad (6.38)$$

Suprafața  $\mathcal{S}_1$ , baza inferioară a domeniului  $V$ , are normala

$$\mathbf{n}_1 = \cos \alpha_1 \mathbf{i} + \cos \beta_1 \mathbf{j} + \cos \gamma_1 \mathbf{k}. \quad (6.39)$$

Deoarece unghiul  $\gamma_1$  dintre această normală și versorul  $\mathbf{k}$  este obtuz, urmează că

$$\cos \gamma_1 = -\frac{1}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}},$$

unde  $p_1(x, y) = \frac{\partial z_1}{\partial x}(x, y)$ ,  $q_1(x, y) = \frac{\partial z_1}{\partial y}(x, y)$ .

Suprafața  $\mathcal{S}_2$ , baza superioară a domeniului  $V$ , are normala

$$\mathbf{n}_2 = \cos \alpha_2 \mathbf{i} + \cos \beta_2 \mathbf{j} + \cos \gamma_2 \mathbf{k} \quad (6.40)$$

și pentru că unghiul  $\gamma_2$  dintre  $\mathbf{n}_2$  și  $\mathbf{k}$  este ascuțit, avem

$$\cos \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}},$$

unde  $p_2(x, y) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(x, y)$ ,  $q_2(x, y) = \frac{\partial z_2}{\partial y}(x, y)$ .

În sfârșit,  $\mathcal{S}_\ell$  este suprafața laterală a domeniului  $V$  care, fiind o porțiune dintr-o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  și curba directoare frontieră  $\partial D_{xy}$  a domeniului  $D_{xy}$ , are normala  $\mathbf{n}_\ell$  de forma

$$\mathbf{n}_\ell = \cos \alpha_\ell \mathbf{i} + \cos \beta_\ell \mathbf{j} \quad (6.41)$$

întrucât unghiul  $\gamma_\ell$  dintre  $\mathbf{n}_\ell$  și  $\mathbf{k}$  este egal cu  $\pi/2$ .

După aceste precizări în privința domeniului  $V$  să procedăm la calculul integralei triple

$$I = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.42)$$

Aplicând formula de calcul a integralei triple pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$ , găsim

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy. \quad (6.43)$$

Luând valoarea primitivei în limitele indicate, obținem

$$I = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \quad (6.44)$$

Dar:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y)) dx dy &= \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy; \\ - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y)) dx dy &= \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy, \end{aligned} \quad (6.45)$$

unde pentru prima integrală de suprafață am luat fața superioară care coincide cu fața exterioară a lui  $\mathcal{S}$ , iar pentru cea de a doua integrală de suprafață am considerat fața inferioară care de asemenea coincide cu fața exterioară a lui  $\mathcal{S}$ , normalele la aceste fețe fiind precizate în relațiile (6.39) și (6.40). Pe suprafața laterală  $\mathcal{S}_\ell$  avem

$$\iint_{\mathcal{S}_\ell} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\mathcal{S}_\ell} R(x, y, z) \cos \gamma_\ell d\sigma = 0 \quad (6.46)$$

în baza legăturii dintre integrala de suprafață de al doilea tip și cea de primul tip și a relației (6.41).

Dacă ținem seama de relațiile (6.44) – (6.46), deducem

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}_e} R(x, y, z) dx dy, \quad (6.47)$$

unde integrala de suprafață de tipul al doilea din membrul doi este luată pe fața exterioară a lui  $\mathcal{S}$ . În baza observației făcută privitor la domeniu putem afirma că (6.47) este adevărată pentru orice domeniu cubabil compact  $V$ .

Pornind cu un domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$ , apoi cu unul simplu în raport cu axa  $Oy$ , și repetând raționamentele care ne-au condus la (6.47) se demonstrează egalitățile:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}_e} P(x, y, z) dy dz \quad (6.48)$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{S}_e} Q(x, y, z) dz dx \quad (6.49)$$

care și în aceste cazuri rămân adevărate oricare ar fi domeniul cubabil compact  $V$ .

Însumarea egalităților (6.47) – (6.49) conduce la (6.36) și teorema este complet demonstrată. ■

**Observația 6.6.1** *Având în vedere legătura între cele două tipuri de integrale de suprafață rezultă că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma echivalentă*

$$\iint_{S_e} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (6.50)$$

Folosind expresia divergenței  $\nabla \cdot \mathbf{F}$  a câmpului vectorial (6.35)

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$$

și expresia normalei exterioare (6.34), deducem că formula integrală Gauss–Ostrogradski se poate scrie în forma vectorială

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{S_e} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.51)$$

Datorită scrierii vectoriale a formulei integrale Gauss–Ostrogradski, Teoremei 6.6.1 i se mai spune *Teorema divergenței*.

Forma vectorială a formulei integrale Gauss–Ostrogradski sugerează și interpretarea fizică a acesteia: ea afirmă că fluxul câmpului vectorial  $V$  prin suprafața închisă  $\mathcal{S}$ , după normala sa exterioară  $\mathbf{n}$ , este egal cu integrala triplă a divergenței lui  $\mathbf{F}$  pe domeniul  $V$  limitat de  $\mathcal{S}$ .

**Observația 6.6.2** *Dacă în formula integrală Gauss–Ostrogradski se ia  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = z$ , se obține o evaluare a volumului domeniului  $V$  cu ajutorul unei integrale de suprafață de tipul al doilea*

$$\text{vol} V = \iint_{S_e} z dx dy. \quad (6.52)$$

**Exemplul 6.6.1** *Fie  $V$  regiunea mărginită de emisfera*

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 9 = 0, \quad 1 \leq z \leq 3$$

*și planul  $z = 1$ . Să se verifice teorema divergenței dacă*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - 1) \mathbf{k}.$$

**Soluție.** Calculăm mai întâi integrala triplă din divergența câmpului vectorial  $\mathbf{F}$ . Avem  $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 3$  și deci

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) \, dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 54\pi.$$

În ultimul calcul am folosit faptul că integrala triplă din membrul secund este volumul emisferei de rază  $R = 3$  care este egal cu  $2\pi R^3/3$ .

Să calculăm acum direct integrala de suprafață care intră în formula integrală a lui Gauss-Ostrogradski. Să observăm mai întâi că

$$\iint_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma + \iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma,$$

unde  $\mathcal{S}_1$  este fața superioară a emisferei de rază 3 situată deasupra planului  $z = 1$ , iar  $\mathcal{S}_2$  este fața inferioară a porțiunii din planul  $z = 1$  limitată de cercul de rază 3 cu centrul în punctul  $(0, 0, 1)$  aflat în acest plan.

Normala unitară la fața  $\mathcal{S}_1$  este

$$\mathbf{n}_1 = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z-1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z-1}{3}\mathbf{k}.$$

Produsul scalar dintre câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  și normala  $\mathbf{n}_1$  este

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z-1)^2}{3} = 3$$

și, prin urmare, prima integrală de suprafață devine

$$\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_1 \, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_1} 3 \, d\sigma = 3 \iint_{\mathcal{S}_1} d\sigma = 3 \text{ aria } \mathcal{S}_1 = 3 \cdot 2\pi R^2 = 54\pi.$$

Pe suprafața  $\mathcal{S}_2$ , avem  $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{k}$ , iar  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 = -z + 1$  și deci

$$\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}_2 \, d\sigma = \iint_{\mathcal{S}_2} (-z + 1) \, d\sigma = 0$$

deoarece pe suprafața pe care efectuăm integrarea  $z$  este egal cu 1 și deci integrantul este nul și ca atare și rezultatul integrării este nul. Prin urmare,

$$\iint_{\mathcal{S}_e} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 54\pi,$$

ceea ce arată că formula integrală Gauss-Ostrogradski se verifică. ■

**Exercițiul 6.6.1** Să se calculeze integrala de suprafață de tipul al doilea

$$I = \iint_S x^3 y^2 dy dz + x^2 y^3 dz dx + 3z dx dy,$$

unde  $S$  este fața exterioară a domeniului  $V$  mărginit de paraboloidii:

$$(\Sigma_1) : z = x^2 + y^2; \quad (\Sigma_2) : z = 6 - x^2 - y^2.$$

**Soluție.** Aplicând formula integrală Gauss–Ostrogradski, obținem

$$I = \iiint_V (3x^2 y^2 + 3x^2 y^2 + 3) dx dy dz = 3 \iiint_V (2x^2 y^2 + 1) dx dy dz.$$

Domeniul  $V$  este simplu în raport cu axa  $Oz$  căci se poate scrie ca

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, x^2 + y^2 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Se vede că  $D_{xy}$  este discul închis de rază  $\sqrt{3}$  cu centrul în origine situat în planul  $Oxy$ . Făcând uz de formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$ , găsim

$$I = 3 \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2 y^2 + 1) dz = 3 \iint_{D_{xy}} (2x^2 y^2 + 1) z \Big|_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dx dy.$$

După ce se ia  $z$  între limitele de integrare, deducem

$$I = 6 \iint_{D_{xy}} (2x^2 y^2 + 1)(3 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Această integrală dublă la care s-a ajuns o vom calcula folosind coordonatele polare

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Pentru ca  $(x, y) \in D_{xy}$  trebuia ca  $\rho \in [0, \sqrt{3}]$  și  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Aplicând formula schimbării de variabile în integrala dublă, obținem pe rând

$$I = 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1)(3 - \rho^2) \rho d\rho,$$

$$I = 12 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho^5 - \rho^7) d\rho + 12\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3) d\rho,$$

$$I = \frac{297\pi}{8}.$$

Rezultatul obținut reprezintă fluxul câmpului vectorial

$$\mathbf{F} = x^3 y^2 \mathbf{i} + x^2 y^3 \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$$

prin suprafața care delimitează  $V$  după normala exterioară. ■

## 6.7 Schimbarea de variabile în integrala triplă

Teorema de schimbare de variabile în integrala triplă se enunță asemănător cu teorema de schimbare de variabile în integrala dublă, de aceea nu vom da detalii de calcul care pot fi refăcute de cititor.

Considerăm două specimene de spații tridimensionale. Introducem sistemul de coordonate carteziane  $x, y, z$  în unul din ele și  $u, v, w$  în celălalt. Apoi, fie  $V$  și  $\Omega$  domenii aparținând la câte un spațiu, frontierele lor fiind respectiv suprafețele închise netede pe porțiuni  $\mathcal{S}$  și  $\Sigma$ . Presupunem că există o corespondență biunivocă între punctele celor două domenii care să fie continuă în ambele sensuri. Corespondența poate fi exprimată prin intermediul funcțiilor

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega, \quad (6.53)$$

sau prin intermediul funcțiilor

$$\begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z), \end{cases} \quad (x, y, z) \in V. \quad (6.54)$$

Vom considera că funcțiile din (6.53) și (6.54) sunt mai mult decât continue și anume vom presupune că ele posedă derivate parțiale de ordinul întâi continue pe interioarele mulțimilor de definiție. Atunci, Jacobienii:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}, \quad \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$$

există și sunt funcții continue pe interioarele celor două mulțimi de definiție. Vom presupune mai mult că fiecare jacobian este diferit de zero. Aceste condiții implică relația

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \cdot \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = 1. \quad (6.55)$$

Dacă toate condițiile de mai sus sunt îndeplinite, spunem că (6.53) este o *transformare punctuală regulată* între domeniile  $\Omega$  și  $V$ , iar (6.54) este *transformarea punctuală regulată inversă* a transformării punctuale regulate (6.54). Ca și în cazul bidimensional, se poate arăta că dată fiind transformarea punctuală regulată (6.53) sau (6.54), punctele interioare domeniului de definiție sunt duse în puncte interioare celui alt domeniu, iar punctele frontierei unuia din domenii sunt corespunzătoare punctelor de pe frontiera celui alt domeniu.

Transformarea punctuală regulată (6.53) transformă domeniul  $\Omega$  în domeniul  $V$ . În consecință, specificarea unui punct  $(u, v, w)$  aparținând lui  $\Omega$  determină în mod unic punctul corespunzător  $(x, y, z)$  a lui  $V$ . Cu alte cuvinte, cantitățile  $u, v$  și  $w$  pot fi privite drept coordonate, diferite de cele carteziane, ale punctelor domeniului  $V$ . Ele sunt numite *coordonate curbilinii*.

Considerăm, în domeniul  $\Omega$ , un plan determinat de relația  $u = u_0$ , adică un plan paralel cu planul de coordonate  $v, w$ . Prin transformarea punctuală regulată (6.53), planul considerat este dus într-o suprafață inclusă în domeniul  $V$ . Coordonatele carteziane ale punctelor acestei suprafețe sunt exprimate prin formulele

$$\begin{cases} x = x(u_0, v, w), \\ y = y(u_0, v, w), \\ z = z(u_0, v, w), \end{cases} \quad (v, w) \in \Delta, \quad (6.56)$$

unde  $\Delta$  este porțiunea din planul  $u = u_0$  situată în domeniul  $\Omega$ . Expresiile (6.56) sunt ecuațiile parametrice ale suprafeței. Presupunând că  $u_0$  ia toate



valorile posibile vom avea o familie uniparametrică de suprafețe de forma (6.56), parametrul familiei fiind  $u$ . Aceste suprafețe sunt corespondentele prin transformarea punctuală regulată (6.53) a tuturor porțiunilor de plane paralele cu planul  $v, w$  din domeniul  $\Omega$ .

Similar, planele  $v = \text{const}$  și  $w = \text{const}$  sunt transformate în două familii uniparametrice de suprafețe situate în domeniul  $V$ . Aceste trei familii de suprafețe formează așa zisa mulțime a *suprafețelor coordonate*.

Deoarece (6.53) este transformare punctuală regulată putem afirma că prin fiecare punct al domeniului  $V$  trece câte o singură suprafață de coordonate din respectiv fiecare familie. Cele trei suprafețe coordonate care trec printr-un punct se intersectează două câte două după trei curbe care se numesc *curbe coordonate*.

Vom considera două sisteme de coordonate curbilinii în spațiu care sunt utilizate cel mai frecvent, și anume, *coordonatele cilindrice* și *coordonatele sferice*.

### 6.7.1 Coordonatele cilindrice sau semi-polare în spațiu

Să specificăm poziția unui punct arbitrar  $M$  din spațiu prin intermediul coordonatei carteziene  $z$  și coordonatele polare  $r$  și  $\varphi$  ale proiecției  $M_1$  a punctului  $M$  pe planul  $Oxy$ . Cantitățile  $r$ ,  $\varphi$  și  $z$  se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului  $M$ . Legătura dintre coordonatele cilindrice și cele carteziene este ușor de stabilit și constatăm că este

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (6.57)$$

Avem următoarele trei familii de suprafețe coordonate corespunzătoare coordonatelor cilindrice:

- ( $\alpha$ ) cilindrii circulari coaxiali cu axa de rotație axa cotelor având ecuațiile de forma  $r = \text{const}$  ( $0 \leq r < +\infty$ ),
- ( $\beta$ ) semiplane verticale limitate de axa  $Oz$   $\varphi = \text{const}$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ),
- ( $\gamma$ ) plane orizontale  $z = \text{const}$  ( $-\infty < z < +\infty$ ).

Analizând suprafețele coordonate în acest caz constatăm că liniile coordonate în cazul coordonatelor cilindrice sunt: drepte paralele cu axa  $Oz$ ; semidrepte perpendiculare pe  $Oz$  având una din extremități pe această axă; cercuri cu centrele pe  $Oz$  situate în plane paralele cu planul  $Oxy$ .

Jacobianul transformării de la coordonate cilindrice la cele cilindrice este egal cu

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (6.58)$$

Formulele (6.57) care exprimă legătura dintre coordonatele carteziene și cele cilindrice determină o transformare a domeniului

$$0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty \quad (6.59)$$

situat în spațiul  $r, \varphi, z$  în întreg spațiul  $Oxyz$ . Prin această transformare, fiecare punct de coordonate carteziene  $(0, 0, z_0)$  corespunde unui întreg segment semi-deschis de forma

$$r = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z = z_0$$

care aparține domeniului (6.59). Prin urmare, transformarea (6.57) nu este biunivocă în punctele situate pe axa cotelor  $Oz$ . Exceptând punctele axei  $Oz$ , în toate celelalte puncte ale spațiului  $Oxyz$  corespondența (6.57) este biunivocă. În concluzie putem afirma că (6.57) stabilește o transformare punctuală regulată între domeniul

$$0 < r < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty \quad (6.60)$$

situat în spațiul  $r, \varphi, z$ , în mulțimea obținută prin scoaterea din spațiul  $Oxyz$  a punctelor situate pe axa cotelor. ■

### 6.7.2 Coordonatele sferice sau polare în spațiu

Să fixăm poziția unui punct oarecare  $M$  din spațiul raportat la reperul cartezian ortogonal  $Oxyz$  prin următoarele trei cantități:

- ( $\alpha$ ) distanța  $\rho$  de la origine la punctul  $M$ ,
- ( $\beta$ ) unghiul  $\theta$  dintre raza vectoare  $\overrightarrow{OM}$  și versorul  $\mathbf{k}$  al axei  $Oz$ ,
- ( $\gamma$ ) unghiul  $\varphi$  format de proiecția  $\overrightarrow{OM_1}$  a razei vectoare  $\overrightarrow{OM}$  pe planul  $Oxy$  și versorul  $\mathbf{i}$  al axei  $Ox$ .

Cantitățile  $\rho$ ,  $\theta$  și  $\varphi$  se numesc *coordonate sferice* ale punctului  $M$ . Încercând să determinăm legătura dintre coordonatele carteziene ale punctului  $M$  și cele sferice al aceluiași punct, găsim

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (6.61)$$

Cele trei familii de ale suprafețelor coordonate corespunzătoare coordonatelor sferice sunt:

- ( $\alpha$ ) sferele concentrice cu centrul în origine  $\rho = \text{const}$  ( $0 \leq \rho < +\infty$ ),
- ( $\beta$ ) semi-conuri circulare cu vârful în origine și axa de simetrie  $Oz$   $\theta = \text{const}$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ),
- ( $\gamma$ ) semiplane verticale  $\varphi = \text{const}$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

Analizând și aici suprafețele coordonate, se constată că liniile coordonate în cazul coordonatelor sferice sunt: cercuri cu centrele pe  $Oz$  situate în plane paralele cu planul  $Oxy$ , numite *cercuri paralele*; semidrepte cu una din extremități în originea  $O$  a reperului  $Oxyz$ , numite *raze vectoriale*; semicercuri cu centrele în originea  $O$  având diametrele segmente situate pe  $Oz$  care se numesc *meridiane*.

Jacobianul transformării coordonatelor carteziene în coordonate sferice este determinantul

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}, \quad (6.62)$$

a cărui valoare este  $\rho^2 \sin \theta$ .

Formulele (6.61) determină o transformare a domeniului

$$0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (6.63)$$

(o bandă paralelipipedică semi-infinită) din spațiul  $\rho, \theta, \varphi$  în întreg spațiul  $Oxyz$ . Ca și transformarea corespunzătoare coordonatelor cilindrice, relațiile (6.61) determină o transformare punctuală biunivocă în toate punctele spațiului cu excepția punctelor de pe axa cotelor  $Oz$ . Fiecare punct  $(0, 0, z_0)$  situat pe axa  $Oz$  este imaginea prin transformarea (6.61) a segmentului semi-deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru } z_0 > 0$$

și a segmentului semi-deschis

$$\rho = z_0, \quad \theta = \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru } z_0 < 0.$$

Originea  $(0, 0, 0)$  a reperului  $Oxyz$  este imaginea prin transformarea (6.61) a intervalului bidimensional

$$\rho = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \text{pentru } z_0 < 0.$$

Dacă exceptăm punctele axei  $Oz$ , relațiile (6.61) constituie o transformare punctuală regulată care transformă semi-banda paralelipipedică infinită

$$0 < r < +\infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (6.64)$$

în domeniul obținut prin scoaterea axei cotelor din spațiul  $Oxyz$ . ■

### 6.7.3 Coordonate polare (sferice) generalizate

Există și alte schimbări de variabile, expresiile acestora fiind dictate de contextul în care este formulată problema calculării unei integrale triple.

Alegerea schimbării de variabile într-o integrală triplă urmărește atât simplificarea domeniului de integrare  $V$  (dacă este posibil,  $\Omega$  să fie un interval tridimensional) cât și simplificarea funcției de integrat sau măcar unul din aceste două obiective. De exemplu, dacă domeniul  $V$  este legat în vreun fel de interiorul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

atunci se trece la *coordoanate polare generalizate* numite și *coordoanate sferice generalizate*

$$\begin{cases} x = a \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = b \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = c \rho \cos \theta. \end{cases} \quad (6.65)$$

Relațiile (6.65) constituie o transformare punctuală regulată de la submulțimea  $\Omega$  a intervalului tridimensional nemărginit (6.72) la o mulțime măsurabilă Jordan  $V$  din spațiul  $Oxyz$ . Jacobianul transformării punctuale regulate (6.65) are valoarea

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc \rho^2 \sin \theta,$$

astfel că formula schimbării de variabile într-o integrală triplă care folosește transformarea punctuală regulată (6.65) este

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = abc \iiint_{\Omega} f(a \rho \sin \theta \sin \varphi, b \rho \sin \theta \sin \varphi, c \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (6.66)$$

#### 6.7.4 Elementul de volum în coordonate curbilinii

Să găsim expresia elementului de volum în coordonate curbilinii. Considerăm iarăși mulțimea măsurabilă Jordan  $V$  în care am introdus un sistem de coordonate curbilinii prin relațiile (6.53). Fie  $\mathcal{S}$  frontiera lui  $V$ ,  $\Sigma$  frontiera domeniului  $\Omega$  și

$$\begin{cases} u = u(s, t), \\ v = v(s, t), \\ w = w(s, t), \end{cases} \quad (s, t) \in D, \quad (6.67)$$

o reprezentare parametrică a suprafeței  $\Sigma$ , mulțimea de variație a parametrilor curbilinii  $s$  și  $t$  fiind compactă în  $\mathbb{R}^2$ . Atunci, suprafața  $\mathcal{S}$  va fi dată parametric prin

$$\begin{cases} x = x(s, t) = \varphi(u(s, t), v(s, t), w(s, t)), \\ y = y(s, t) = \psi(u(s, t), v(s, t), w(s, t)), \\ z = z(s, t) = \chi(u(s, t), v(s, t), w(s, t)), \end{cases} \quad (s, t) \in D. \quad (6.68)$$

Dacă folosim expresia volumului mulțimii cubabile  $V$  cu ajutorul unei integrale de suprafață de al doilea tip și ținem cont de formula de calcul a acestei integrale de suprafață, avem

$$\text{vol } V = \iint_{\mathcal{S}} z dx dy = \pm \iint_D z(s, t) \frac{D(x, y)}{D(s, t)}(s, t) ds dt. \quad (6.69)$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse (6.68), se poate verifica prin calcul direct că

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)}$$

și deci expresia volumului mulțimii  $V$  devine

$$\begin{aligned} \text{vol } V = & \pm \iint_D z \left( \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \right. \\ & \left. + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)} \right) (s, t) ds dt. \end{aligned}$$

Dacă ținem cont de regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip obținem că

$$\text{vol } V = \pm \iint_{\Sigma} z \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv + z \frac{D(x, y)}{D(v, w)} dv dw + z \frac{D(x, y)}{D(w, u)} dw du.$$

Aplicând formula integrală a Gauss–Ostrogradski, se găsește că expresia volumului mulțimii  $V$  este integrala triplă

$$\text{vol } V = \pm \iiint_{\Omega} \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) du dv dw$$

sau, echivalent,

$$\text{vol } V = \iiint_{\Omega} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u, v, w) du dv dw$$

Folosind formula de medie pentru integrala triplă, obținem

$$\text{vol } V = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u_0, v_0, w_0) \text{vol } \Omega$$

Acest rezultat împreună cu procedeul utilizat la demonstrația formulei de schimbare de variabile în integrala dublă ne conduce la demonstrația teoremei care dă formula schimbării de variabile în integrala triplă.

### 6.7.5 Schimbarea de variabile în integrala triplă

**Teorema 6.7.1** *Fie domeniul compact  $\Omega$ , inclus în spațiul  $(u, v, w)$ , cu frontiera o suprafață închisă, netedă pe porțiuni și*

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w), \end{cases}$$

*o transformare punctuală regulată care transportă domeniul  $\Omega$  în domeniul  $V$ . Dacă  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă, are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| (u, v, w) \, du dv dw \end{aligned}$$

*numită formula schimbării de variabile în integrala triplă sau formula de transport.*

Dacă se folosesc coordonatele cilindrice, formula schimbării de variabile devine

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r \, dr d\varphi dz, \quad (6.70)$$

unde  $\Omega$  este o submulțime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty).$$

Dacă într-o integrală triplă implicăm schimbarea de variabile care utilizează coordonatele sferice, formula schimbării de variabile devine

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (6.71)$$

unde  $\Omega$  este o submulțime a intervalului tridimensional nemărginit

$$[0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]. \quad (6.72)$$

**Exercițiul 6.7.1** *Folosind metoda schimbării de variabile în integrala triplă să se calculeze*

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx dy dz,$$

*unde  $V$  este bila închisă de rază  $R$  cu centrul în origine.*

**Soluție.** Mulțimea punctelor aparținând domeniului de integrare au coordonatele carteziene  $x, y, z$  astfel încât

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

Forma domeniului cât și expresia integrantului sugerează folosirea coordonatelor sferice (6.61). Transformarea punctuală definită cu ajutorul coordonatelor sferice are jacobianul (6.62) astfel că , utilizând formula (6.71), integrala  $I$  devine

$$I = \iiint_{\Omega} \rho^4 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi,$$

unde noul domeniu de integrare se vede simplu că este intervalul tridimensional

$$\Omega = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un interval tridimensional, obținem

$$I = \int_0^R \rho^4 \, d\rho \cdot \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

De remarcat că, folosind schimbarea de variabile în integrala triplă, valoarea integralei  $I$  s-a determinat foarte ușor. ■

**Exercițiul 6.7.2** *Să se calculeze integrala triplă*

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde  $V$  este mulțimea situată în semispațiul superior  $z \geq 0$ , conține o porțiune din semiaxa pozitivă  $Oz$  și este delimitată de sferele  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  și de conul  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Soluție.** Utilizăm din nou coordonatele sferice. De data aceasta mulțimea  $V$  este intervalul tridimensional

$$\Omega = [1, 3] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi).$$



Aplicând formula schimbării de variabile în integrala triplă în cazul când se utilizează coordonatele sferice, găsim

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \rho \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi = \int_1^3 \rho \, d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{\rho^2}{2} \Big|_1^3 \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/4} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi}. \end{aligned}$$

Efectuând calculele finale, constatăm că  $I = 4\pi(2 - \sqrt{2})$ . ■

**Exercițiul 6.7.3** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) \, dx dy dz,$$

unde  $V$  este porțiunea din coroana cilindrică mărginită de cilindrii circulari coaxiali  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 9$  și de planele  $z = 0$  și  $z = 1$ .

**Soluție.** Atât expresia integrantului cât și forma domeniului  $V$  sugerează utilizarea coordonatelor cilindrice (6.57). Noul domeniu de integrare va fi

$$\Omega = [2, 3] \times [0, 2\pi) \times [0, 1].$$

Aplicând formula (6.70), obținem

$$I = \iiint_{\Omega} r^3 \, dr d\varphi dz = \int_2^3 r^3 \, dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 dz = 40\pi.$$

Și în acest exemplu valoarea integralei s-a determinat foarte ușor. ■

**Exercițiul 6.7.4** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \, dx dy dz,$$

unde mulțimea de integrare  $V$  este

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 4\}.$$

**Soluție.** În acest caz se folosesc coordonatele polare generalizate definite de (6.65). Mulțimea  $\Omega$  care, prin transformarea punctuală regulată (6.65), este dusă în mulțimea  $V$  din enunțul exemplului este intervalul tridimensional

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

din spațiul  $(\rho, \theta, \varphi)$ . Folosind formula (6.66) deducem că  $I$  se calculează cu ajutorul integralei triple

$$I = abc \iiint_{\Omega} \rho^4 \sin \theta \, d\rho d\theta d\varphi$$

a cărei valoare se constată simplu că este  $I = 4\pi abc/5$ . ■

**Exercițiul 6.7.5** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V x^2 \, dx dy dz,$$

unde  $V$  este domeniul mărginit de suprafețele:

$$\begin{aligned} z &= ay^2, \quad z = by^2, \quad (0 < a < b); \\ z &= \alpha x, \quad z = \beta x, \quad (0 < \alpha < \beta); \\ z &= 0, \quad z = h, \end{aligned}$$

situate în semispațiul  $y > 0$ .

**Soluție.** Analiza enunțului sugerează schimbarea de variabile

$$u = \frac{z}{y^2}, \quad v = \frac{z}{x}, \quad w = z,$$

domeniile de variație ale noilor coordonate fiind

$$u \in [a, b], \quad v \in [\alpha, \beta], \quad z \in [0, h].$$

Rezolvând pe  $x$ ,  $y$  și  $z$  în funcție de  $u$ ,  $v$  și  $w$ , găsim

$$x = \frac{w}{v}, \quad y = \sqrt{\frac{w}{u}}, \quad z = w.$$

Avem două posibilități de a calcula jacobianul care intră în formula schimbării de variabile în integrala triplă. Pe oricare cale se găsește

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) = -\frac{1}{2} \frac{w\sqrt{w}}{v^2 u \sqrt{u}}.$$

Teorema schimbării de variabile în integrala triplă și formula de evaluare a integralei triple pe un interval tridimensional închis conduc la concluzia că valoarea integralei  $I$  este egală cu produsul integralelor simple de mai jos

$$I = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{du}{u\sqrt{u}} \cdot \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v^4} \cdot \int_0^h w^3 \sqrt{w} dw.$$

Calculând integralele definite obținem în final că valoarea integralei triple  $I$  este

$$I = \frac{2}{27} \left( \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}.$$

Din nou se remarcă simplificarea evidentă a calculelor când se alege o schimbare de variabile adecvată. ■

## 6.8 Aplicații ale integralei triple

Considerăm acum unele probleme tipice care implică calculul unor integrale triple.

### 6.8.1 Calculul volumelor

Dacă o figură spațială  $V$  are volum, valoarea integralei triple

$$\iiint_V dx dy dz \tag{6.73}$$

se constată că este volumul lui  $V$ . Întrădevăr, această afirmație rezultă fie din proprietățile integralei triple fie analizând sumele integrale corespunzătoare unei diviziuni oarecare ocazie cu care se constată că oricare din aceste sume este egală cu volumul lui  $V$  și ca atare limita pentru norma diviziunii tinzând la zero a unui șir de sume integrale corespunzătoare este volumul lui  $V$ . Integrala triplă este mai convenabil de folosit decât integrala dublă,

când se pune problema calculării volumului unei figuri spațiale cubabile căci, după cum se vede din (6.73), cu ajutorul ei se poate determina volumul oricărei mulțimi cubabile, pe când, cu integrala dublă se poate determina doar volumul unui cilindroid.

### 6.8.2 Masa și centrul de greutate ale unui solid

În același mod cum am introdus unele corpuri materiale putem introduce și aici noțiunea de *solid*. Prin solid se înțelege ansamblul dintre o mulțime măsurabilă Jordan  $V$  numită *configurația solidului* și o funcție  $\rho$  reală, cu valori pozitive, continuă pe  $V$ , care se numește *densitatea de volum* a solidului.

Dacă funcția  $\rho$  este constantă, solidul se numește *omogen*. În cazul solidului omogen masa sa este dată de produsul dintre valoarea constantă  $\rho_0$  a densității și volumul lui  $V$ .

Produsul dintre valoarea densității într-un punct  $M(x, y, z) \in V$  și elementul de volum al lui  $V$  se numește *element de masă* și se notează cu  $dm$ . Deci

$$dm = \rho(x, y, z) dx dy dz. \quad (6.74)$$

Procedând asemănător ca la firul material, placa materială sau pâna materială constatăm că masa solidului definit mai sus este dată de egalitatea

$$\text{masa } V = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz \quad (6.75)$$

sau de egalitatea

$$\text{masa } V = \iiint_V dm. \quad (6.76)$$

Coordonatele  $x_G$ ,  $y_G$  și  $z_G$  ale centrului de greutate  $G$  al unui solid de configurație  $V$  și densitatea de volum  $\rho$  sunt date de egalitățile

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\text{masa } V} \iiint_V x dm, & y_G &= \frac{1}{\text{masa } V} \iiint_V y dm, \\ z_G &= \frac{1}{\text{masa } V} \iiint_V z dm. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Dacă notăm cu  $\mathbf{r}_G$  vectorul de poziție a centrului de greutate și cu  $\mathbf{r}$  vectorul de poziție al unui punct curent  $M(x, y, z) \in V$ , constatăm că relațiile (6.77) se pot scrie în forma vectorială

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\text{masa } V} \iiint_V \mathbf{r} \, dm. \quad (6.78)$$

În cazul solidului omogen expresiile coordonatelor centrului de greutate sunt mai simple căci fracțiile de mai sus se pot simplifica prin valoarea constantă  $\rho_0$  a densității. Avem

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\text{vol } V} \iiint_V x \, dv, & y_G &= \frac{1}{\text{vol } V} \iiint_V y \, dv, \\ z_G &= \frac{1}{\text{vol } V} \iiint_V z \, dv, \end{aligned} \quad (6.79)$$

unde  $dv = dx dy dz$  este elementul de volum al lui  $V$ . Forma vectorială a acestor egalităților (6.79) este

$$\mathbf{r}_G = \frac{1}{\text{vol } V} \iiint_V \mathbf{r} \, dv. \quad (6.80)$$

### 6.8.3 Momente de inerție ale unui solid

Momentele de inerție față de axele  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  ale solidului de configurație  $V$  și densitate de volum  $\rho$ , se vor nota cu aceleași simboluri ca la pânze materiale și sunt date de egalitățile:

$$\left\{ \begin{aligned} I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dv = \iiint_V (y^2 + z^2) dm; \\ I_y &= \iiint_V (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) \, dv = \iiint_V (z^2 + x^2) dm; \\ I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dv = \iiint_V (x^2 + y^2) dm. \end{aligned} \right. \quad (6.81)$$

Când densitatea de volum este constantă și egală cu  $\rho_0 > 0$ , formulele de

mai sus devin

$$I_x = \rho_0 \iiint_V (y^2 + z^2) dv; \quad I_y = \rho_0 \iiint_V (z^2 + x^2) dv;$$

$$I_z = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2) dv.$$

Momentele de inerție ale solidului neomogen de configurație  $V$  și densitate de volum în raport cu planele de coordonate  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Ozx$ , notate corespunzător cu  $I_{xy}$ ,  $I_{yz}$  și  $I_{zx}$ , au expresiile date de integralele triple:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 dv = \iiint_V z^2 dm; \\ I_{yz} = \iiint_V \rho x^2 dv = \iiint_V x^2 dm; \\ I_{xz} = \iiint_V \rho y^2 dv = \iiint_V y^2 dm. \end{array} \right. \quad (6.82)$$

Dacă solidul este omogen cu densitatea constantă  $\rho_0$ , în locul formulelor (6.82) avem

$$I_{xy} = \rho_0 \iiint_V z^2 dv; \quad I_{yz} = \rho_0 \iiint_V x^2 dv; \quad I_{xz} = \rho_0 \iiint_V y^2 dv.$$

În fine, momentul de inerție în raport cu originea reperului este

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dm, \quad (6.83)$$

când solidul este neomogen, iar în cazul că ar fi omogen același moment de inerție al solidului va fi dat de expresia

$$I_O = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

### 6.8.4 Potențialul newtonian al unui solid

Potențialul newtonian sau gravitațional al unui punct material de masă  $m$  se definește prin formula

$$U = \frac{m}{r},$$

unde  $r$  este distanța de la punctul material până la punctul din spațiu în care se consideră potențialul. În cazul unui solid de configurație  $V$  și densitate de volum  $\rho$ , potențialul newtonian în punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  va fi dat de formula:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_V \frac{\rho(x, y, z) dx dy dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

### 6.8.5 Atracția exercitată de către un solid

Se știe din fizică că fiind date două puncte materiale  $M_1$  și  $M_2$  de ponderi  $m_1$  și  $m_2$  și vectori de poziție  $\mathbf{r}_1$  și respectiv  $\mathbf{r}_2$ , mărimea forței de atracție dintre cele două puncte materiale este dată de formula

$$F = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2},$$

unde  $\lambda$  este o constantă, iar

$$\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

este distanța euclidiană dintre punctele  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  și  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

Forța  $\mathbf{F}_{12}$  cu care punctul material  $M_1$  este atras de către punctul material  $M_2$  este dată de formula

$$\mathbf{F}_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Dacă  $X_{12}$ ,  $Y_{12}$ ,  $Z_{12}$  sunt coordonatele forței de atracție, expresiile acestora sunt date de

$$X_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (x_2 - x_1), \quad Y_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (y_2 - y_1),$$

$$Z_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} (z_2 - z_1).$$

Să considerăm acum un punct material  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  de masă  $m$  și un solid de configurație  $V$  și densitate de volum  $\rho$ . Având la dispoziție cazul particular prezentat mai sus și cunoscând mecanismul introducerii noțiunii de integrală triplă ajungem la concluzia că forța  $\mathbf{F}$  cu care  $M_0$  este atras de către solid este dată de integrala triplă

$$\mathbf{F} = \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx dy dz,$$

unde

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k},$$

iar  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|$  este norma euclidiană a vectorului  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Coordonatele  $F_x$ ,  $F_y$  și  $F_z$  ale vectorului  $\mathbf{F}$  sunt

$$\begin{cases} F_x &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (x - x_0) dx dy dz, \\ F_y &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (y - y_0) dx dy dz, \\ F_z &= \lambda m \iiint_V \frac{\rho(x, y, z)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (z - z_0) dx dy dz. \end{cases}$$

**Exercițiul 6.8.1** Să se calculeze cu ajutorul integralei triple, volumul figurii spațiale  $V$  situată în semispațiul superior  $z \geq 0$  și mărginită de suprafețele:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad x^2 + y^2 = z^2,$$

unde  $0 < a < b$ .

**Soluție.** Cele trei suprafețe care mărginesc figura spațială  $V$  sunt: primele două, sfere concentrice cu centrul în origine, de raze  $a$  și  $b$ ; iar a treia, con circular cu vârful în origine și axa de rotație axa  $Oz$ , având generatoarele înclinate cu 45 de grade față de axa  $Oz$ . Corpul este porțiunea din coroana sferică limitată de cele două sfere conținută în pânza superioară a conului.

Volumul acestei figuri este  $\text{Vol } V = \iiint_V dx dy dz$ , iar pentru calculul integralei



triple folosim coordonatele sferice. Terna ordonată  $(\rho, \theta, \varphi)$  ia valori în intervalul tridimensional închis  $\Omega = [a, b] \times [0, \pi/4] \times [0, 2\pi]$ , iar jacobianul transformării este  $J = \rho^2 \sin \theta$ . Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} \text{Vol } V &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \int_a^b \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)}{3}. \end{aligned}$$

■

**Exercițiul 6.8.2** *Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui solid omogen mărginit de pânza unui con circular drept, având unghiul de la vârf egal cu  $2\alpha$  și de o sferă de rază  $R$  cu centrul în vârful conului.*

**Soluție.** Alegem originea sistemului de axe în vârful conului și axa  $Oz$  după axa de simetrie a conului.

Trebuie determinată mai întâi masa solidului  $V$ . Fiind omogen și considerând că densitatea este egală cu unitatea, masa solidului va fi egală cu volumul său. Pentru calculul volumului folosim coordonatele sferice în care terna  $(\rho, \theta, \varphi)$  ia valori în intervalul tridimensional închis  $\Omega = [0, R] \times [0, \alpha] \times [0, 2\pi]$ . Avem

$$\begin{aligned} \text{Vol } V &= \iiint_{\Omega} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Coordonatele  $x_G$ ,  $y_G$  și  $z_G$  ale centrului de greutate  $G$  al solidului sunt date de integralele triple:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\text{Vol } V} \iiint_V x dx dy dz, \quad y_G = \frac{1}{\text{Vol } V} \iiint_V y dx dy dz, \\ z_G &= \frac{1}{\text{Vol } V} \iiint_V z dx dy dz. \end{aligned}$$

Solidul fiind omogen și având planele de coordonate  $Oxz$  și  $Oyz$  ca plane de simetrie, rezultă că  $x_G = y_G = 0$ . Pentru calculul integralei triple de la

numărătorul cotei centrului de greutate trecem la coordonate sferice. Avem

$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi R^4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Prin urmare,  $z_G = \frac{3R}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . ■

**Exercițiul 6.8.3** *Să se găsească momentul de inerție în raport cu axa  $Oz$  a solidului de configurație bila de rază  $a$  cu centrul în origine  $V$  și densitatea de volum*

$$\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

**Soluție.** Momentul de inerție de determinat este în acest caz

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Pentru calculul integralei triple trecem la coordonate sferice și găsim

$$I_z = \iiint_\Omega \rho^6 \sin^3 \theta d\rho d\theta d\varphi,$$

unde  $\Omega$  este intervalul tridimensional  $[0, a] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ . Scriind ultima integrală triplă ca o iterație de integrale simple, obținem

$$I_z = \int_0^a \rho^6 d\rho \cdot \int_0^\pi \sin^3 \theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Efectuând integralele simple de mai sus găsim  $I_z = 8\pi a^7/21$ . ■

**Exercițiul 6.8.4** *Să se determine momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale solidului omogen având configurația domeniului  $V$  mărginit de suprafețele de ecuații  $z = c > 0$  și  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ , situat în semispațiul  $z \geq 0$ .*

**Soluție.** Considerând că  $\rho_0 = 1$ , cele trei momente de inerție cerute sunt:

$$I_{yz} = \iiint_V x^2 dx dy dz; \quad I_{zx} = \iiint_V y^2 dx dy dz; \quad I_{xy} = \iiint_V z^2 dx dy dz,$$

unde domeniul de integrare este porțiunea din interiorul pânzei superioare a conului de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ , situat sub planul  $z = c$ .

Pentru calculul fiecărei din cele trei integrale vom folosi faptul că domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$ , deoarece el se poate scrie ca

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c, (x, y) \in D_{xy} \right\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$ , care se poate reprezenta ca

$$D_{xy} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Cu alte cuvinte,  $D_{xy}$  este domeniul plan mărginit de elipsa din planul  $Oxy$ , cu centrul de simetrie în originea reperului  $Oxyz$  și semiaxe egale cu  $a$  și  $b$ . Vom scrie integralele triple care dau momentele de inerție față de planele de coordonate ca iterații de integrale, prima simplă, în raport cu  $z$ , între limitele  $c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$  și  $c$ , iar a doua, dublă, pe domeniul  $D_{xy}$ . Avem:

$$I_{yz} = \iint_{D_{xy}} x^2 dx dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^c dz = c \iint_{D_{xy}} x^2 \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dx dy;$$

$$I_{zx} = \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^c dz = c \iint_{D_{xy}} y^2 \left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dx dy;$$

$$I_{xy} = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}^c z^2 dz = \frac{c^3}{3} \iint_{D_{xy}} \left(1 - \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3}\right) dx dy.$$

Aceste integrale duble se calculează utilizând coordonatele polare generalizate în plan și găsim:

$$I_{yz} = \frac{\pi a^3 b c}{20}; \quad I_{zx} = \frac{\pi a b^3 c}{20}; \quad I_{xy} = \frac{\pi a b c^3}{5}.$$

■

# Capitolul 7

## Ecuatii diferențiale ordinare

### 7.1 Câteva generalități despre ecuații diferențiale ordinare

În cele ce urmează  $I$  este un interval din mulțimea  $\mathbb{R}$  a numerelor reale,  $Y$  este o mulțime oarecare a spațiului  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , și

$$F : I \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

este o funcție reală continuă, de  $n + 2$  variabile reale, având ca argumente variabila reală  $x \in I$ , funcția reală  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  și derivatele sale până la ordinul  $n$  inclusiv  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

**Definiția 7.1.1** *Relația*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7.1)$$

se numește **ecuație diferențială ordinară, de ordinul  $n$** , dacă se cere să se determine funcțiile

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

derivabile până la ordinul  $n$  inclusiv, astfel încât

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad (\forall) x \in I. \quad (7.3)$$

**Definiția 7.1.2** *Funcția reală de variabila reală (7.2), de  $n$  ori derivabilă, care satisface identitatea (7.3) se numește soluție a ecuației diferențiale (7.1).*

Presupunând că este posibilă rezolvarea în raport cu derivata de ordinul  $n$ , ecuația (7.1) se poate reduce la *forma explicită* sau *forma normală*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (7.4)$$

**Definiția 7.1.3** *Ecuația diferențială corespunzătoare cazului  $n = 1$  se numește ecuație diferențială ordinară de ordinul întâi.*

**Observația 7.1.1** *Forma implicită a unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi este*

$$F(x, y, y') = 0, \quad (7.5)$$

*iar forma normală sau forma explicită a sa este*

$$y' = f(x, y). \quad (7.6)$$

Deoarece ecuațiile diferențiale reprezintă în multe situații modelarea matematică a unor fenomene evolutive și că aceste fenomene sunt în general continue, vom presupune că funcția  $F$  din ecuațiile (7.1) și (7.5) precum și funcția  $f$  din (7.4) și (7.6) sunt continue pe domeniile lor de definiție.

**Exemplul 7.1.1** *Ecuația*

$$y' = \sin x$$

*are familia de soluții*

$$y = \varphi(x, C) = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

*unde  $C$  este o constantă arbitrară.* ■

**Exemplul 7.1.2** *Fie  $f$  o funcție reală de variabilă reală, definită și continuă pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$ . Toate soluțiile ecuației diferențiale ordinare de ordinul întâi*

$$y' = f(x) \quad (7.7)$$

*sunt de forma*

$$\varphi(\cdot, C) : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x, C) = C + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (7.8)$$

Într-adevăr,  $f$  fiind funcție continuă pe  $I$ , este integrabilă și admite primitive pe  $I$ . A determina primitivele funcției  $f$  înseamnă a găsi toate funcțiile  $y$ , definite și derivabile pe  $I$ , care satisfac egalitatea (7.7). Cu alte cuvinte, primitivele funcției  $f$  sunt soluțiile ecuației diferențiale (7.7).

Se știe că funcția

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad (\forall) x \in I, \quad x_0 \in I, \text{ fixat}, \quad (7.9)$$

este o primitivă pe  $I$  a funcției  $f$  și că orice două primitive ale lui  $f$  diferă printr-o constantă arbitrară  $C$ . De aici deducem că toate primitivele funcției  $f$  se pot scrie în forma

$$y = C + \int_{x_0}^x f(t)dt. \quad (7.10)$$

În acest caz, funcțiile (7.8), deduse din (7.10) pentru fiecare valoare a constantei arbitrare  $C$ , reprezintă toate soluțiile ecuației diferențiale (7.7). ■

### Exemplul 7.1.3 Ecuatia diferențială ordinară de ordinul întâi

$$y = xy' + y'^2 \quad (7.11)$$

are ca soluții funcțiile

$$y = Cx + C^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7.12)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară.

Într-adevăr, prin verificare directă se constată că, oricare ar fi valoarea constantei  $C$ , funcția din membrul al doilea al relației (7.12) verifică identic ecuația diferențială (7.11).

Din punct de vedere geometric, relația (7.12) reprezintă o familie de drepte cu panta variabilă  $C$  și ordonata la origine egală cu  $C^2$ . Pentru  $C = 1$ , din (7.12) obținem soluția

$$y = x + 1 \quad (7.13)$$

care în reperul  $Oxy$  este o dreaptă paralelă cu prima bisectoare. ■

Exemplele de mai sus conduc la introducerea unei alte noțiuni.

**Definiția 7.1.4** Dacă soluțiile ecuației (7.5) sau (7.6) se pot pune sub forma

$$y = \varphi(x, C), \quad x \in I, \quad (7.14)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară, atunci (7.14) se numește **soluția generală** a ecuației diferențiale corespunzătoare.

**Definiția 7.1.5** Se numește **soluție particulară** a ecuației diferențiale ordinare (7.5) sau (7.6) funcția

$$y = \varphi(x, C_0), \quad x \in I, \quad (7.15)$$

obținută din soluția generală (7.14) prin atribuirea valorii concrete  $C_0$  constantei arbitrare  $C$ .

**Observația 7.1.2** Ecuația (7.7) are soluția generală (7.10). Soluția generală a ecuației diferențiale (7.11) este (7.12), iar (7.13) reprezintă o soluție particulară a acesteia. Funcția

$$y = -\frac{1}{4}x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

este, de asemenea, soluție a ecuației diferențiale (7.11) care nu se poate obține din soluția generală.

**Definiția 7.1.6** O soluție a ecuației diferențiale (7.5) sau (7.6) care nu se poate obține din soluția generală a acesteia prin particularizarea constantei arbitrare se numește **soluție singulară**.

O soluție a unei ecuații diferențiale de ordinul întâi are drept grafic o curbă plană numită *curbă integrală*. Soluția generală a unei ecuații diferențiale este o familie uniparametrică de curbe integrale.

Este posibil ca soluția generală a ecuației diferențiale (7.5) să se scrie în forma

$$\Phi(x, y, C) = 0. \quad (7.16)$$

Relația (7.16) se numește *integrala generală* a ecuației diferențiale (7.5) sau (7.6).

Soluția generală a unei ecuații diferențiale poate fi dată și *parametric*, printr-un sistem de forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t, C), \\ y = \psi(t, C). \end{cases} \quad (7.17)$$

**Observația 7.1.3** Ecuația diferențială (7.5) poate avea mai multe soluții generale. De exemplu, ecuația diferențială

$$y'^2 = f(x),$$

unde  $f$  este continuă și nenegativă pe un interval real  $I$ , are două soluții generale

$$y = C_1 + \int_{x_0}^x \sqrt{f(t)} dt \quad \text{și} \quad y = C_2 - \int_{x_0}^x \sqrt{f(t)} dt.$$

Presupunem că  $Q : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  este o funcție continuă. Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației diferențiale (7.6) cu factorul nenul  $Q(x, y)$  găsim ecuația diferențială echivalentă

$$Q(x, y)y' - Q(x, y)f(x, y) = 0. \quad (7.18)$$

Notând

$$P(x, y) = -Q(x, y)f(x, y) \quad (7.19)$$

și utilizând pentru derivata unei funcții notația lui Leibniz

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (7.20)$$

ecuația diferențială se transcrie în forma

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad P, Q \in C^0(D). \quad (7.21)$$

Când expresia din membrul întâi a ecuației (7.21) este diferențiala unei funcții reale de două variabile, pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^2$ , aceștia i se spune *expresie diferențială exactă*. Se poate afirma că (7.21) este o alternativă de prezentare a ecuației diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6) care, cu notația (7.20), se poate prezenta sub forma echivalentă

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (7.22)$$

Alternativa mai sus prezentată are avantajul că, la nevoie, putem considera  $y$  ca variabila independentă, caz în care ecuația diferențială corespunzătoare se scrie

$$\frac{dx}{dy} = g(y, x), \quad \text{unde} \quad g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (7.23)$$

funcția necunoscută fiind  $x$ .

Fiecărui punct  $(x_0, y_0) \in D$  îi corespunde o direcție de coeficient unghiular

$$y'_0 = f(x_0, y_0);$$



fiecărei direcții îi corespunde o dreaptă

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0)$$

care trece prin punctul  $(x_0, y_0)$  și are panta  $m = y'_0$ ; prin urmare, ecuația (7.22) asociază fiecărui punct din  $D$  o direcție (dreaptă); avem astfel în  $D$  definit un câmp  $f$  de direcții.

Să presupunem că  $y = \varphi(x)$ ,  $(x, y) \in D$  este o soluție a ecuației (7.6). Graficul funcției  $\varphi$  este o curbă integrală în  $D$  care are proprietatea că, în fiecare punct al ei, tangenta are ca direcție valoarea câmpului  $f$  în punctul considerat.

**Definiția 7.1.7** Problema determinării soluției (7.2) a ecuației diferențiale (7.6) care pentru  $x = x_0$  ia valoarea dată  $y_0$ , se numește **problema Cauchy**, iar condiția

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad (7.24)$$

se numește **condiție inițială** sau **dată inițială**.

**Observația 7.1.4** Din punct de vedere geometric, problema Cauchy pentru ecuația diferențială (7.6), cu condiția inițială (7.24), înseamnă determinarea acelei curbe integrale a ecuației diferențiale (7.6) care trece prin punctul de coordonate  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplul 7.1.4** Soluția problemei Cauchy pentru ecuația diferențială (7.7) cu condiția inițială (7.24), este

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (7.25)$$

Într-adevăr, soluția generală a ecuației diferențiale (7.7) am văzut că este (7.10). Dacă vom căuta soluția care pentru  $x = x_0$  ia valoarea  $y_0$ , vom obține

$$y_0 = C + \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt = C, \quad (7.26)$$

deci  $C = y_0$ . ■

**Observația 7.1.5** Formula (7.25) arată că  $(\forall) (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$  există o soluție unică a ecuației (7.7) care satisface condiția inițială  $y(x_0) = y_0$ . Cu alte cuvinte, prin orice punct din intervalul nemărginit bidimensional  $I \times \mathbb{R}$  trece o curbă integrală și numai una.

Teorema de mai jos arată în ce condiții soluția problemei Cauchy pentru ecuația diferențială (7.6) cu condiția inițială (7.24) există și este unică.

**Teorema 7.1.1** *Presupunem verificate următoarele condiții:*

- funcția reală  $f$  este definită și continuă pe intervalul închis bidimensional

$$I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\};$$

- funcția  $f$  este lipschitziană ca funcție de  $y$  pe mulțimea  $I_2$ , adică există o constantă pozitivă  $L$  astfel încât

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad (\forall) (x, y_1), (x, y_2) \in I_2. \quad (7.27)$$

În aceste condiții, există o soluție unică  $y = y(x)$  a problemei Cauchy pentru ecuația diferențială (7.6) cu condiția inițială (7.24), definită pe intervalul  $|x - x_0| \leq \delta$ , unde

$$\delta = \inf \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}; \quad M = \sup \{|f(x, y)| : (x, y) \in I_2\}.$$

Desigur, soluția problemei Cauchy pentru ecuația (7.6), cu condiția inițială (7.24), este o soluție particulară a ecuației diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală (7.6).

Așadar, mulțimea soluțiilor tuturor problemelor Cauchy ale ecuației diferențiale (7.6) constituie soluția generală a ecuației (7.6) în domeniul  $D$ .

Totalitatea soluțiilor particulare ale unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi sub forma normală depinde de o constantă arbitrară. Putem arăta că, invers, orice familie de curbe plane

$$g(x, y, C) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (7.28)$$

cu  $g$  continuă și derivabilă parțial în  $D$ , verifică în  $D$  o ecuație diferențială ordinară de ordinul întâi. Într-adevăr, considerând că în (7.28)  $y$  este funcție care depinde de  $x$  și derivând în raport cu variabila  $x$ , avem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, C) + y' \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, C) = 0. \quad (7.29)$$

Eliminarea constantei  $C$  din relațiile (7.28) și (7.29) conduce la o ecuație diferențială de forma (7.5).

**Exercițiul 7.1.1** Să se determine ecuația diferențială a familiei de curbe

$$y = Cx + f(C). \quad (7.30)$$

**Soluție.** Derivând în raport cu  $x$  în (7.30), găsim  $y' = C$ . Eliminând constanta  $C$  între acest rezultat și (7.30) obținem ecuația diferențială de ordinul întâi

$$y = xy' + f(y'), \quad (7.31)$$

care se numește *ecuație diferențială de tip Clairaut*. ■

**Definiția 7.1.8** Prin **problemă Cauchy asociată ecuației diferențiale de ordinul  $n$**  (7.4) se înțelege determinarea unei funcții  $y = \varphi(x)$  care satisface ecuația

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), \quad (\forall) x \in I \subset \mathbb{R} \quad (7.32)$$

și verifică condițiile inițiale

$$\varphi(x_0) = y_1^0, \varphi'(x_0) = y_2^0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \quad (7.33)$$

unde  $x_0 \in I$  și  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  sunt fixate.

Să considerăm ecuația diferențială de ordinul  $n$  sub formă normală (7.4) și să presupunem că s-a obținut o soluție

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (7.34)$$

care depinde de  $n$  constante  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Definiția 7.1.9** Dacă funcția (7.34) are următoarele proprietăți:

1. este soluție a ecuației diferențiale (7.4) oricare ar fi punctul de coordonate  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  luat dintr-un anumit domeniu  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ;
2. există și este unică  $n$ -upla  $(C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0) \in \Delta$  astfel încât

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$$

să fie soluția problemei Cauchy a ecuației diferențiale (7.4), cu condițiile inițiale (7.33), unde

$$(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

este un punct oarecare din mulțimea  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , domeniul de definiție al funcției  $f$  din membrul doi a ecuației diferențiale (7.4),

atunci (7.34) se numește **soluția generală** a ecuației diferențiale (7.4) în domeniul  $D$ .

**Definiția 7.1.10** A integra o ecuație diferențială înseamnă a determina toate soluțiile sale.

## 7.2 Ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, integrabile prin cuadraturi

În cele ce urmează vom prezenta câteva tipuri de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi ale căror soluții generale se pot determina prin operații de integrare sau cuadrare.

### 7.2.1 Ecuații diferențiale cu variabile separate

**Definiția 7.2.1** O ecuație diferențială de tipul

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (7.35)$$

unde  $P : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$  și  $Q : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$  sunt funcții reale continue date pe intervalele reale  $I_1$  și  $I_2$ , se numește **ecuație diferențială ordinară, de ordinul întâi, cu variabile separate**.

**Teorema 7.2.1** Funcția  $F : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , cu valorile date de

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt, \quad (x_0, y_0) \in I_1 \times I_2, \quad (7.36)$$

este diferențiabilă pe interiorul mulțimii  $I_1 \times I_2$  și are proprietatea

$$dF(x, y) = P(x)dx + Q(y)dy. \quad (7.37)$$

**Demonstrație.** Existența lui  $F$  este asigurată de continuitatea funcțiilor  $P$  și  $Q$ . În plus,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x P(t)dt = P(x), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy} \int_{y_0}^y Q(t)dt = Q(y). \end{aligned} \quad (7.38)$$

Având în vedere că

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)dy, \quad (7.39)$$

din (7.38) și (7.39) rezultă (7.37). ■

**Teorema 7.2.2** *Fiecare soluție*

$$y = \varphi(x), \quad (7.40)$$

a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35), cu graficul cuprins în  $I_1 \times I_2$ , satisface relația

$$F(x, \varphi(x)) = C \quad (7.41)$$

pentru o anumită constantă  $C$ . Reciproc, dacă ecuația  $F(x, y) = C$  definește pe  $y$  ca funcție implicită diferențiabilă de variabila  $x$ , atunci această funcție este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35).

**Demonstrație.** Presupunem că

$$y = \varphi(x), \quad x \in (a, b) \subset I_1 \quad (7.42)$$

este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35) astfel încât să avem

$$(x, \varphi(x)) \in I_1 \times I_2, \quad (\forall) x \in (a, b). \quad (7.43)$$

Să arătăm că

$$F(x, \varphi(x)) = C, \quad (\forall) x \in (a, b). \quad (7.44)$$

Pentru aceasta considerăm funcția compusă

$$g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x, \varphi(x)) \quad (7.45)$$

și derivata ei

$$g'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))\varphi'(x). \quad (7.46)$$

Folosind acum în (7.46) rezultatul (7.38) precum și varianta

$$P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall) x \in (a, b) \quad (7.47)$$

a faptului că (7.42) este o soluție a ecuației (7.35), deducem

$$g'(x) = P(x) + Q(\varphi(x))\varphi'(x) = 0, \quad (\forall) x \in (a, b). \quad (7.48)$$

Relația (2.13) arată că funcția  $g$  este o constantă pe intervalul  $(a, b)$ . Astfel, orice soluție  $y$  a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35) satisface ecuația carteziană implicită (7.44).

Să presupunem acum că ecuația  $F(x, y) = C$  definește pe  $y$  ca funcție implicită diferențiabilă de  $x$  pe  $(a, b) \in I_1$ . Ecuația (7.44) implică faptul că funcția  $g$  din (7.45) este constantă pe  $(a, b)$ . Rezultă

$$0 = g'(x) = P(x) + Q(y)y'. \quad (7.49)$$

Dând deoparte pe  $g'(x)$  din (7.49) deducem că  $y$  este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35). ■

Teoremele precedente sugerează un procedeu practic de găsire a soluției generale a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35).

Familia de ecuații carteziane implicite

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt = C, \quad (\forall) (x, y) \in I_1 \times I_2, \quad (7.50)$$

unde  $(x_0, y_0)$  este un punct fixat din intervalul bidimensional  $I_1 \times I_2$ , descrie curbele integrale ale ecuației diferențiale cu variabile separate (7.35). Dacă impunem ca valorii  $x = x_0$  să-i corespundă  $y = y_0$ , din (7.50) rezultă  $C = 0$  și deci soluția problemei Cauchy a ecuației diferențiale (7.35), cu condiția inițială  $y(x_0) = y_0$ , există și este unică. Această soluție este funcția definită implicit de ecuația

$$\int_{x_0}^x P(t)dt + \int_{y_0}^y Q(t)dt = 0. \quad (7.51)$$

**Exercițiul 7.2.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{y+1} = 0, \quad (x, y) \in (-1, 1) \times (-1, +\infty). \quad (7.52)$$

**Soluție.** Aplicând rezultatele de mai sus avem că soluția generală a ecuației (7.52) este

$$\arcsin x + \ln(y+1) = C. \quad (7.53)$$

Să observăm că ecuația are și soluția  $y = -1$ ; ea se obține din integrala generală (7.53) pentru  $C \rightarrow -\infty$ . ■

### 7.2.2 Ecuația diferențială exactă

Fie  $D \subset \mathbb{R}^2$  un domeniu plan simplu conex, și  $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții continue derivabile parțial, prima în raport cu  $y$ , iar a doua în raport cu variabila  $x$ .

**Definiția 7.2.2** O ecuație diferențială de tipul

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (7.54)$$

se numește **ecuație diferențială exactă** dacă funcțiile  $P$  și  $Q$  satisfac în  $D$  condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (7.55)$$

**Teorema 7.2.3** Ecuația diferențială exactă (7.54) are soluția generală

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt = C. \quad (7.56)$$

**Demonstrație.** Fie  $A(x_0, y_0) \in D$ , fixat astfel încât luând un punct oarecare  $M(x, y)$  al domeniului și notând cu  $B$  punctul de coordonate  $(x, y_0)$ , segmentele de dreaptă  $AB$  și  $BM$  să fie incluse în  $D$ . Să considerăm funcția  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  ale cărei valori se calculează după regula

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt. \quad (7.57)$$

Folosind regula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru constatăm

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (7.58)$$

Deoarece funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt continue, deducem că  $F$  are derivate parțiale continue și deci este funcție diferențială pe  $D$ . Ținând cont de expresia diferențialei de ordinul întâi și de (7.58), deducem

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (7.59)$$

Așadar, membrul întâi al ecuației (7.55) este diferențiala funcției  $F$  din (7.57). Din acest motiv denumirea ecuației diferențiale (7.54) este cea de ecuație diferențială exactă.

Folosind acum (7.54) și (7.59), avem

$$dF(x, y) = 0, \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

de unde

$$F(x, y) = C, \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (7.60)$$

Ținând seama de (7.57) și (7.60) deducem că soluția generală a ecuației diferențiale exacte (7.54) este (7.56). ■

**Corolarul 7.2.1** *Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială exactă (7.54), cu condiția inițială  $y(x_0) = y_0$ , unde  $(x_0, y_0) \in D$ , este*

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = 0. \quad (7.61)$$

**Demonstrație.** Într-adevăr, alegând ca datele inițiale  $x_0$  și  $y_0$  să fie coordonatele punctului  $A$ , și impunând condiția ca pentru  $x = x_0$  să avem  $y = y_0$ , din (7.56) deducem  $C = 0$ . Ca urmare, soluția căutată este funcția  $y = \varphi(x)$  definită implicit de ecuația (7.61). ■

**Exercițiul 7.2.2** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0.$$

**Soluție.** Aici  $P(x, y) = 3x^2y + \sin x$ ,  $Q(x, y) = x^3 - \cos y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Aceste funcții sunt derivabile și

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2.$$

Derivatele parțiale de mai sus fiind egale, ecuația dată este ecuație diferențială exactă. Luând drept punct  $A(x_0, y_0)$  originea reperului cartezian  $Oxy$ , deci  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ , și aplicând (7.56), deducem că soluția generală a ecuației date este

$$\int_0^x \sin t \, dt + \int_0^y (x^3 - \cos t) \, dt = C.$$

Efectuând integrările care se impun mai sus, găsim că soluția generală a ecuației date este

$$\cos x + \sin y - x^3y + C - 1 = 0, \quad (\forall) (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$



Din punct de vedere geometric, soluția generală este o familie de curbe plane care umple tot planul. Prin fiecare punct al planului trece o curbă integrală și numai una. De exemplu, dacă dorim să rezolvăm problema Cauchy a ecuației date cu condițiinițială  $y(0) = 0$ , adică să determinăm curba integrală care trece prin origine, găsim  $C = 0$  și deci soluția căutată este

$$\cos x + \sin y - x^3 y - 1 = 0.$$

Funcția reală definită implicit, în vecinătatea originii, de această ecuație este o soluție particulară a ecuației diferențiale căci a fost obținută din cea generală luând pentru constanta  $C$  valoarea  $C = 0$ . ■

### 7.2.3 Ecuații diferențiale de ordinul întâi care admit factor integrant

Fie ecuația diferențială

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (7.62)$$

unde  $P : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  sunt două funcții reale diferențiabile pe un domeniu plan  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Dacă expresia diferențială  $Pdx + Qdy$  nu este o diferențială exactă, adică nu este îndeplinită condiția

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D, \quad (7.63)$$

atunci ne propunem să căutăm o funcție  $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  astfel încât expresia diferențială

$$\omega = \mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy$$

să fie o diferențială totală exactă a unei funcții reale de două variabile reale. Pentru aceasta, conform lui (7.63), ar trebui să fie îndeplinită condiția

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)Q(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)P(x, y)), \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (7.64)$$

**Definiția 7.2.3** Funcția  $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diferențiabilă pe  $D \subset \mathbb{R}^2$ , care verifică ecuația (7.64), se numește **factor integrant** al ecuației (7.62).

Prin înmulțirea ecuației (7.62) cu factorul integrant  $\mu$  care satisface (7.64), ecuația (7.62) devine

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0. \quad (7.65)$$

Pentru ca (7.65) să fie o ecuație diferențială cu diferențială totală exactă trebuie să fie îndeplinită relația (7.64), care, după efectuarea derivatelor parțiale, devine

$$Q(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial x} - P(x, y)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu(x, y) = 0. \quad (7.66)$$

Relația (7.66) este o *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniară și neomogenă*, căreia, în anumite cazuri, i se poate determina o soluție particulară.

De exemplu, dacă o să căutăm un factor integrant care să fie funcție numai de  $x$ , adică  $\mu = \mu(x)$ , deoarece  $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$ , ecuația (7.65) se reduce la

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (7.67)$$

și determinarea lui  $\mu$  este posibilă dacă  $\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$  este funcție numai de  $x$ . Într-adevăr, în (7.67) variabilele se separă și obținem pe  $\mu$  printr-o operație de integrare

$$\ln \mu(x) = \int \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx. \quad (7.68)$$

După determinarea factorului integrant  $\mu = \mu(x)$  (numai dacă acest lucru este posibil) se înmulțesc ambii membri ai ecuației (7.62) cu factorul integrant (7.68) și ecuația devine una cu diferențială exactă a cărei soluție generală știm că este

$$\int_{x_0}^x \mu(t)P(t, y_0)dt + \mu(x) \int_{y_0}^y Q(x, t)dt = C.$$

În mod asemănător, dacă se caută un factor integrant  $\mu = \mu(y)$  funcție numai de  $y$ , din (7.65) avem

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

și determinarea lui  $\mu = \mu(y)$  este posibilă dacă

$$\frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

este funcție numai de  $y$ . Dacă această condiție este îndeplinită obținem pe  $\mu = \mu(y)$  printr-o cuadratură

$$\ln \mu(y) = \int \frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy.$$

Este posibil să existe și alte situații în care ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi (7.65), care determină factorul integrant, să se poată rezolva și să se găsească o soluție particulară.

**Exercițiul 7.2.3** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

**Soluție.** Avem:

$$P(x, y) = x \sin y + y \cos y, \quad Q(x, y) = x \cos y - y \sin y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos y + \cos y - y \sin y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 1.$$

Așadar, ecuația dată nu este o ecuație cu diferențială totală exactă dar admite factor integrant funcție numai de  $x$ . Factorul integrant se găsește rezolvând ecuația cu variabile separate

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx = dx \implies \ln \mu = x \implies \mu(x) = e^x.$$

Înmulțind ecuația dată cu factorul  $e^x$ , obținem ecuația

$$e^x(x \sin y + y \cos y)dx + e^x(x \cos y - y \sin y)dy = 0.$$

Ecuația obținută are forma  $P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy = 0$ , unde

$$P_1(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y), \quad Q_1(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

Efectuând derivatele care se impun, avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial y} = e^x(x \cos y + \cos y - y \sin y), \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} = e^x(x \cos y + \cos y - y \sin y). \end{cases}$$

Aceste derivate parțiale sunt egale și, prin urmare, membrul stâng al ecuației diferențiale obținută după înmulțirea cu factorul integrant este o diferențială totală exactă.

Soluția generală a ecuației date este

$$e^x \int_0^y (x \cos t - t \sin t) dt = C \implies e^x(x \sin y + y \cos y - \sin y) = C$$

și este reprezentată în forma implicită. ■

**Exercițiul 7.2.4** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$2xy \, dx + (3y^2 - x^2 + 3) \, dy = 0.$$

**Soluție.** Deoarece  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , ecuația dată nu este o ecuație care provine din anularea unei diferențiale exactă. În schimb,

$$\frac{1}{P} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -\frac{2}{y},$$

ceea ce arată că ecuația diferențială considerată admite factor integrant care depinde numai de  $y$ .

Se găsește că factorul integrant este  $\mu(y) = 1/y^2$ .

Înmulțind ambii membri ai ecuației cu factorul integrant, obținem ecuația cu diferențială totală exactă

$$\frac{2x}{y} \, dx + \frac{3y^2 - x^2 + 3}{y^2} \, dy = 0,$$

care are soluția generală

$$\frac{x^2}{y} + 3y - \frac{3}{y} = C.$$

După eliminarea numitorului, din soluția generală obținem

$$x^2 + 3y^2 - 3 - Cy = 0,$$

căreia putem să-i spunem integrala generală a ecuației diferențiale considerate.

Curbele integrale ale acestei ecuații diferențiale constituie o familie de conice sau *curbe algebrice de ordinul al doilea*. ■

## 7.2.4 Ecuații diferențiale cu variabile separabile

**Definiția 7.2.4** O ecuație diferențială de tipul

$$P_1(x)Q_2(y)dx + P_2(x)Q_1(y)dy = 0, \quad (7.69)$$

unde  $P_1, P_2 \in C^0(I_1)$ ,  $Q_1, Q_2 \in C^0(I_2)$ , se numește **ecuație diferențială cu variabile separabile**.

**Observația 7.2.1** Dacă ne limităm numai la subintervalele lui  $I_1$  respectiv  $I_2$  pe care funcțiile  $P_2$  respectiv  $Q_2$  nu se anulează, ecuația diferențială cu variabile separabile (7.69) se reduce la o ecuația diferențială cu variabile separate

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = 0.$$

**Observația 7.2.2** Folosind observația precedentă precum și rezultatele stabilite la ecuații diferențiale cu variabile separate deducem că soluția generală a ecuației diferențiale cu variabile separabile (7.69) este

$$\int_a^x \frac{P_1(t)}{P_2(t)}dt + \int_b^y \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}dt = C, \quad (7.70)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară iar  $a \in I_1$ ,  $P_2(a) \neq 0$  și  $b \in I_2$ ,  $Q_2(b) \neq 0$ .

**Observația 7.2.3** Dacă  $x_0$  și  $y_0$  sunt astfel încât

$$P_2(x_0) = 0, \quad Q_2(y_0) = 0,$$

se constată că  $x = x_0$  și  $y = y_0$  sunt soluții ale ecuației diferențiale cu variabile separabile care nu se pot obține din soluția generală (7.70) și ca atare putem spune că

$$x = x_0 \quad \text{și} \quad y = y_0$$

sunt soluții singulare ale ecuației (7.69).

**Observația 7.2.4** *Soluțiile singulare ale unei ecuații diferențiale cu variabile separabile, dacă există, sunt drepte paralele cu axele de coordonate, sau segmente ale acestora.*

**Exercițiul 7.2.5** *Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații diferențiale cu variabile separabile:*

$$1^0. \quad (x^2 + a^2)(y^2 + b^2) dx + (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) dy = 0, \quad a > 0, b > 0;$$

$$2^0. \quad 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 + e^x) \sec^2 y dy = 0.$$

*Pentru cea de a doua ecuație să se determine acea soluție cu proprietatea că graficul ei trece prin punctul  $(0, \pi/4)$ .*

**Soluție.**  $1^0$ . Considerând că  $x \in I$ , unde  $I$  este un interval inclus în unul din intervalele  $(-\infty, -a)$ ,  $(-a, a)$  sau  $(a, +\infty)$ , constatăm că se pot separa variabilele, pe intervalul  $I$ , prin împărțirea ambilor membri ai ecuației cu  $(x^2 - a^2)(y^2 + b^2)$ . Obținem:

$$\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2} dx + \frac{y^2 - b^2}{y^2 + b^2} dy = 0$$

sau

$$\left(1 + \frac{2a^2}{x^2 - a^2}\right) dx + \left(1 - \frac{2b^2}{y^2 + b^2}\right) dy = 0.$$

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale cu variabile separate este

$$\frac{x + y}{a} + \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| - \frac{2b}{a} \operatorname{arctg} \frac{y}{b} = C.$$

Dreptele  $x = -a$  și  $x = a$ , paralele cu axa  $Oy$ , sunt soluții singulare ale ecuației date.

$2^0$ . După separarea variabilelor ecuația devine

$$\frac{3e^x}{1 + e^x} dx + \frac{\sec^2 y}{\operatorname{tg} y} dy = 0.$$

Separarea variabilelor a fost posibilă pentru  $x \in \mathbb{R}$  și  $y \in I$ , unde intervalul  $I$  nu conține puncte de forma  $y = k\pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Soluția generală se obține integrând primul termen între  $x_0$  și  $x$ , cel de al doilea termen între  $y_0 \in I$  și  $y \in I$ , adunând rezultatele și egalându-le apoi cu logaritmul natural al unei constante pozitive arbitrare. Luând  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = \frac{\pi}{4}$  și efectuând calculele, avem

$$(1 + e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8C.$$

Impunând condiția ca punctul de coordonate  $(0, \frac{\pi}{4})$  să aparțină unei curbe integrale găsim  $C = 1$  și prin urmare soluția problemei Cauchy este

$$(1 + e^x)^3 \cdot \operatorname{tg} y = 8.$$

Funcțiile  $y = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , sunt soluții singulare ale ecuației date; curbele integrale corespunzătoare soluțiilor singulare sunt paralele echidistante la axa  $Ox$ . ■

### 7.2.5 Ecuația diferențială omogenă

**Definiția 7.2.5** *Ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (7.71)$$

unde  $P$  și  $Q$  sunt funcții continue omogene de același grad  $m$ , se numește **ecuație diferențială omogenă**.

Exprimând că funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt omogene, avem

$$P(tx, ty) = t^m P(x, y), \quad Q(tx, ty) = t^m Q(x, y). \quad (7.72)$$

Dacă în (7.72) luăm  $t = \frac{1}{x}$ , deducem

$$P(x, y) = x^m P\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad Q(x, y) = x^m Q\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (7.73)$$

Pentru simplificarea formei ecuației diferențiale (7.71), efectuăm notația

$$\frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.74)$$

Folosind acum (7.73) și (7.74) în (7.71) constatăm că ecuațiile diferențiale omogene au forma generală

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.75)$$

**Teorema 7.2.4** *Schimbarea de funcție necunoscută*

$$y = z \cdot x \iff \frac{y}{x} = z \quad (7.76)$$

în ecuația diferențială omogenă (7.75) transformă ecuația într-o ecuație diferențială cu variabile separabile a cărei integrală generală este

$$\ln |x| + C = \Phi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (7.77)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară, iar  $\Phi$  este o primitivă a funcției  $\frac{1}{f(z) - z}$  pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$  cu proprietatea că ecuația

$$f(z) - z = 0 \quad (7.78)$$

nu are nici o soluție.

**Demonstrație.** Efectuând derivarea în cea de a doua relație din (7.76) și ținând cont că  $z = z(x)$ , obținem

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dz}{dx} + z. \quad (7.79)$$

Înlocuind (7.76) și (7.79) în (7.75), găsim

$$x \cdot \frac{dz}{dx} + z = f(z). \quad (7.80)$$

Pe intervalul  $I$ , după separarea variabilelor, obținem

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}. \quad (7.81)$$

Integrala generală a ecuației diferențiale cu variabile separate (7.81) este

$$\ln |x| + C = \Phi(z), \quad (7.82)$$

unde am notat prin  $\Phi(z)$  o primitivă a funcției  $\frac{1}{f(z) - z}$ . Revenind la funcția  $y$ , prin folosirea notației (7.76), din (7.82) obținem (7.77). ■



**Observația 7.2.5** Dacă  $z_0$  este o rădăcină a ecuației (7.78), atunci  $z = z_0$  (constant) este soluție și pentru ecuația (7.80), deoarece  $\frac{dz}{dx} = 0$ . De aici și din (7.76) rezultă că funcția

$$y = z_0 \cdot x \quad (7.83)$$

este o soluție a ecuației diferențiale (7.75), anume o soluție singulară. Curba integrală corespunzătoare soluției (7.83) este o dreaptă care trece prin origine și are panta  $z_0$ .

**Observația 7.2.6** Dacă în (7.77) înlocuim pe  $C$  cu  $-\ln C$ , integrala generală (7.77) se scrie

$$x = C\Psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad (7.84)$$

unde am notat

$$\Psi\left(\frac{y}{x}\right) = e^{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (7.85)$$

**Observația 7.2.7** O familie de curbe plane de ecuație (7.84) verifică o ecuație diferențială omogenă.

Într-adevăr, derivând în ambii membri în (7.84), obținem

$$1 = C\left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right)\Psi'\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.86)$$

Eliminând constanta  $C$  din ecuațiile (7.84) și (7.86), deducem

$$x \cdot \left(\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2}\right) = \frac{\Psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)}. \quad (7.87)$$

Rezolvând ecuația (7.87) în privința lui  $y'$ , găsim o ecuație diferențială omogenă de forma (7.75), în care membrul al doilea este

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\Psi\left(\frac{y}{x}\right)}{\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}. \quad (7.88)$$

Putem spune deci că o ecuație diferențială este omogenă dacă și numai dacă soluția sa generală este (7.84). ■

**Exercițiul 7.2.6** Să se integreze ecuațiile diferențiale omogene:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad y' &= \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}; \\ 2^0. \quad xyy' &= y^2 + 2x^2; \\ 3^0. \quad xy' + x \cos \frac{y}{x} - y + x &= 0; \\ 4^0. \quad xy' - y &= \frac{x}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}; \\ 5^0. \quad xy' \ln \frac{y}{x} &= x + y \ln \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

**Soluție.**  $1^0$ . După efectuarea schimbării de funcție (7.76), ecuația devine

$$x z' + z = z + e^z,$$

care este o ecuație diferențială cu variabile separabile. Separând variabilele, obținem

$$e^{-z} dz = \frac{dx}{x}.$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\ln |x| = -e^z + C.$$

Revenind la funcția inițială, găsim că soluția generală a ecuației este

$$\ln |x| = -e^{\frac{y}{x}} + C.$$

Această ecuație diferențială nu are soluții singulare.

$2^0$ . Împărțind ambii membri ai ecuației prin  $x^2$ , obținem

$$\frac{y}{x} y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2. \quad (7.89)$$

După efectuarea schimbării de funcție (7.76), ecuația (7.89) se scrie

$$z(x z' + z) = z^2 + 2.$$

Separarea variabilelor în această din urmă ecuație diferențială conduce la ecuația diferențială cu variabile separate

$$z \, dz = \frac{2 \, dx}{x}.$$

Integrând, obținem

$$z^2 = 4 \ln C|x|.$$

Revenind la funcția inițială deducem că soluția generală a ecuației date este

$$y^2 = 4 x^2 \ln C|x|.$$

Nici această ecuație diferențială nu are soluții singulare.

**3<sup>0</sup>.** Avem pe rând:

$$y' + \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x} + 1 = 0;$$

$$x \, z' + z + \cos z - z + 1 = 0;$$

$$\frac{dz}{1 + \cos z} = - \frac{dx}{x};$$

$$\frac{dz}{2 \cos^2 \frac{z}{2}} = - \frac{dx}{x};$$

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \ln \frac{C}{|x|};$$

$$z = 2 \operatorname{arctg} \ln \frac{C}{|x|}.$$

Revenind la variabila dependentă inițială, găsim că soluția generală a ecuației este

$$y = 2 x \operatorname{arctg} \ln \frac{C}{|x|}.$$

Această ecuație are o infinitate de soluții singulare de forma

$$y = (2k + 1)\pi x, \quad k \in \mathbf{Z}$$

deoarece ecuația  $f(z) - z = 0$ , adică ecuația  $1 + \cos z = 0$ , are o infinitate de soluții și anume  $z = (2k + 1)\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

4<sup>0</sup>. Procedând în mod analog ca la celelalte trei ecuații diferențiale găsim că soluția generală a ecuației este

$$y \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x \cdot \ln (C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Nu are soluții singulare.

5<sup>0</sup>. Urmând prezentarea teoretică, avem:

$$\begin{aligned} y' \ln \frac{y}{x} &= 1 + \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}; \\ (xz' + z) \ln z &= 1 + z \ln z; \\ \ln z \, dz &= \frac{dx}{x}; \\ z \ln z - z &= \ln C|x| \end{aligned}$$

după care, reîntorcându-ne la funcția  $y$ , găsim că soluția generală este

$$y \ln \left| \frac{y}{x} \right| = y + x \ln C|x|.$$

Nu are soluții singulare. ■

## 7.2.6 Ecuatii diferențiale reductibile la ecuații diferențiale omogene

O ecuație diferențială reductibilă la una omogenă este

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right), \quad (7.90)$$

unde  $a_1, b_1, a_2, b_2$  sunt constante reale care satisfac condiția

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

iar  $f$  este o funcție reală de variabilă reală definită pe un interval. Ea este evident o ecuație diferențială omogenă deoarece se poate scrie în forma

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}}\right).$$

Cu substituția

$$y = xz \iff z = \frac{y}{x} \quad (7.91)$$

se separă variabilele.

**Exercițiul 7.2.7** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0. \quad (7.92)$$

**Soluție.** Dacă punctul  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  este astfel încât nu este verificată ecuația

$$x - 2y = 0, \quad (7.93)$$

(7.92) se scrie în forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}. \quad (7.94)$$

Facând schimbarea de funcție  $y = xz$ , constatăm că (7.94), care este o ecuație de forma (7.90), devine:

$$xz' + z = \frac{z - 2}{2z - 1}.$$

Separând variabilele, obținem:

$$-\frac{2z - 1}{2(z^2 - z + 1)}dz = \frac{dx}{x}.$$

Integrând această ecuație, se găsește:

$$x^2(z^2 - z + 1) = C^2.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$x^2 - xy + y^2 = C^2$$

și, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de elipse cu centrul de simetrie în originea axelor din care se scot punctele de intersecție cu dreapta (7.93). ■

O altă ecuație diferențială reductibilă la o ecuație omogenă este

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (7.95)$$

unde  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  sunt constante care satisfac condițiile:

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0; \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \quad (7.96)$$

În situația (7.96) mulțimile  $(D_1)$  și  $(D_2)$  ale punctelor de coordonate  $(x, y)$  care satisfac respectiv ecuațiile:

$$(D_1): \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0; \quad (D_2): \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0,$$

reprezintă două drepte concurente în punctul  $(x_0, y_0)$ .

Efectuând schimbarea de variabilă independentă și de funcție (o translație)

$$\begin{cases} u = x - x_0, \\ v = y - y_0, \end{cases}$$

în ecuația (7.95), constatăm că aceasta devine

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right). \quad (7.97)$$

Ecuația (7.97) este de tipul (7.90), deci cu schimbarea de funcție

$$v = uz$$

se separă variabilele.

**Exercițiul 7.2.8** *Să se arate că prin schimbări de funcție și de variabilă convenabile, următoarele ecuații se reduc la ecuații diferențiale de tip omogen și apoi să se integreze:*

$$\text{a)} \quad (2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0;$$

$$\text{b)} \quad (2x + y - 1)dx + (x - 2y + 3)dy = 0;$$

$$\text{c)} \quad (x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0.$$

**Soluție.** Determinând raportul  $dy/dx$  constatăm că fiecare din cele trei ecuații aparține tipului de ecuație diferențială (7.95) prezentat mai sus.

a) Dreptele  $(D_1): 2x + y + 1 = 0$  și  $(D_2): x + 2y - 1 = 0$  se intersectează în punctul  $(-1, 1)$ . Efectuând schimbarea de variabilă și de funcție

$$\begin{cases} x = u - 1, \\ y = v + 1, \end{cases}$$

ecuația dată se transformă în:

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0.$$

În ecuația omogenă obținută punem  $v = uw$ ,  $w = w(u)$ , de unde  $dv = u dw + w du$  și ajungem la ecuația cu variabile separabile

$$2(w^2 + w + 1)u du + u^2(1 + 2w) dw = 0,$$

a cărei integrală generală este

$$u\sqrt{w^2 + w + 1} = C,$$

sau, după revenirea la funcția  $v$  prin înlocuirea lui  $w$  cu  $v/u$  și ridicarea la pătrat,

$$u^2 + uv + v^2 = C^2.$$

Trecând la variabilele inițiale prin  $u = x+1$  și  $v = y-1$ , după transformări elementare găsim că integrala generală a ecuației date este familia de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen eliptic cu centru în punctul de intersecție al celor drepte

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = C_1,$$

unde noua constantă  $C_1$  este  $C_1 = C^2 - 1$ .

**b)** Punctul de concurență al celor două drepte aici este  $(-1/5, 7/5)$ . Efectuând schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = u - 1/5, \\ y = v + 7/5, \end{cases}$$

ecuația devine

$$(2u + v) du + (u - 2v) dv = 0. \quad (7.98)$$

Această ecuație este omogenă, drept pentru care facem schimbarea de funcție

$$v = uw, \quad w = w(u)$$

și ajungem la ecuația diferențială cu variabile separabile

$$u w' = \frac{2(1 + w - w^2)}{2w - 1}$$

a cărei soluție generală este

$$2|w^2 - w - 1| = C^2.$$

Revenind la funcția  $v$ , obținem

$$2 - uv - u^2 = \pm C.$$

Înlocuind în acest ultim rezultat pe  $u$  cu  $x + 1/5$  și pe  $v$  cu  $y - 7/5$ , după calcule elementare, găsim că soluția generală a ecuației considerate la acest punct este

$$x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C_1.$$

Folosind teoria curbelor algebrice de ordinul al doilea se constată că această familie de curbe plane este formată fie din hiperbole, fie din perechi de drepte concurente reale, caz în care vom spune că aceste curbe integrale sunt curbe algebrice de ordinul al doilea (conice) de gen hiperbolic.

c) Se procedează în mod asemănător ca la celelalte două ecuații diferențiale și se găsește că soluția generală este

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$$

care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de curbe algebrice de ordinul al doilea de gen hiperbolic. ■

Cel de al treilea tip de ecuații diferențiale reductibile la ecuații omogene este acela de forma (7.95), în care constantele care apar la variabila funcției  $f$  satisfac relațiile

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0, \quad a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \quad (7.99)$$

În acest caz dreptele  $(D_1)$  și  $(D_2)$  din (7.96) sunt paralele. Din (7.99) rezultă

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k,$$

deci ecuația (7.95) devine

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right). \quad (7.100)$$

Cu schimbarea de funcție dată de relația

$$a_1x + b_1y = z, \quad z = z(x),$$



care implică

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1} \left( \frac{dz}{dx} - a_1 \right)$$

ecuația (7.100) capătă forma

$$\frac{1}{b_1} \left( \frac{dz}{dx} - a_1 \right) = f \left( \frac{z + c_1}{kz + c_2} \right). \quad (7.101)$$

Ecuația diferențială (7.101) este cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, găsim că pe intervalul real  $J$ , unde ecuația

$$b_1 f \left( \frac{z + c_1}{kz + c_2} \right) + a = 0$$

nu are nici o soluție, (7.101) se transformă în

$$\frac{dz}{b_1 f \left( \frac{z + c_1}{kz + c_2} \right) + a} = dx. \quad (7.102)$$

Soluția generală a ecuației (7.102) este

$$x + C = \Phi(z),$$

unde funcția  $\Phi$  este o primitivă pe  $J$  a funcției

$$\frac{1}{b_1 f \left( \frac{z + c_1}{kz + c_2} \right) + a}.$$

Revenind la variabilele inițiale, integrala generală a ecuației (7.100) este

$$x + C = \Phi(a_1x + b_1y).$$

**Exercițiul 7.2.9** Să se integreze ecuația diferențială

$$(x - 2y + 9) dx - (3x - 6y + 19) dy = 0.$$

**Soluție.** Dreptele  $(D_1) : x - 2y + 9 = 0$  și  $(D_2) : 3x - 6y + 19 = 0$  sunt paralele. În acest caz facem schimbarea de funcție

$$x - 2y = z \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{dz}{dx}.$$

Ecuația dată devine

$$z + 9 - (3z + 19)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{dz}{dx}\right) = 0.$$

Aceasta din urmă este o ecuație cu variabile separabile care, după separarea lor în cazul  $z + 1 \neq 0$ , devine

$$\frac{3z + 19}{z + 1} dz = dx.$$

Integrala generală este dată de

$$8 \ln |x - 2y + 1| + x - 3y = C.$$

Egalitatea  $z + 1 = 0$  ne dă soluția  $x - 2y + 1 = 0$ , care verifică ecuația dată inițial. Această ultimă soluție se obține din integrala generală pentru  $C \rightarrow -\infty$ . ■

### 7.2.7 Ecuația diferențială liniară de ordinul întâi

**Definiția 7.2.6** O ecuație diferențială de forma

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (7.103)$$

unde  $P$  și  $Q$  sunt funcții continue pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$ , se numește **ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, neomogenă**.

**Definiția 7.2.7** Ecuația diferențială

$$y' + P(x)y = 0 \quad (7.104)$$

se numește **ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, omogenă**.

**Observația 7.2.8** Cuvântul **omogenă** are aici altă semnificație decât cea întâlnită în unul din paragrafele anterioare. Aici, cuvântul omogenă semnifică faptul că membrul doi din (7.103) este nul. Dacă în (7.104) funcția  $P$  este aceeași ca cea din (7.103), atunci (7.104) este numită ecuația diferențială liniară de ordinul întâi **asociată** ecuației (7.103).

**Teorema 7.2.5** *Soluția generală a ecuației (7.103) este dată de*

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right], \quad x \in I. \quad (7.105)$$

**Demonstrație.** Presupunem că ecuația diferențială (7.103) are soluții pe intervalul  $I$  și fie  $y = y(x)$ ,  $x \in I$ , o soluție arbitrară a acesteia. Atunci, avem

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x), \quad (\forall) x \in I. \quad (7.106)$$

Înmulțind ambii membri ai identității (7.106) cu  $e^{\int P(x)dx}$ ,  $x \in I$ , aceasta devine

$$\frac{d}{dx} \left( y(x) e^{\int P(x)dx} \right) = Q(x) e^{\int P(x)dx}, \quad x \in I. \quad (7.107)$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.107), obținem

$$y(x) e^{\int P(x)dx} = C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx. \quad (7.108)$$

Prin înmulțirea în ambii membri ai lui (7.108) cu factorul  $e^{-\int P(x)dx}$ , se obține că soluția

$$y = y(x), \quad x \in I, \quad (7.109)$$

a ecuației diferențiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, are forma (7.105).

Reciproc, să considerăm o funcție de forma (7.105), în care  $C$  este o constantă arbitrară. Derivata acestei funcții este

$$\begin{aligned} y'(x) &= -P(x) e^{-\int P(x)dx} \left( C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx \right) + \\ &+ e^{-\int P(x)dx} Q(x) e^{\int P(x)dx}. \end{aligned} \quad (7.110)$$

Având în vedere că cel de-al doilea factor al primului termen din membrul doi al relației (7.110) este tocmai funcția  $y = y(x)$  din (7.105), deducem că (7.110) se scrie în forma

$$y'(x) = -P(x)y(x) + e^{-\int P(x)dx} Q(x) e^{\int P(x)dx}. \quad (7.111)$$

Cum cel de al doilea termen din membrul al doilea al relației (7.111) este  $Q(x)$ , rezultă că această relație se scrie în forma

$$y'(x) = -P(x)y(x) + Q(x). \quad (7.112)$$

Egalitatea (7.112) exprimă faptul că funcția  $y = y(x)$  din (7.105) este o soluție a ecuației (7.103). ■

**Teorema 7.2.6** *Ecuația diferențială liniară de ordinul întâi omogenă, de forma (7.104), are soluția generală*

$$y = C e^{-\int P(x)dx}, \quad (7.113)$$

unde  $C$  este o constantă arbitrară.

**Demonstrație.** Ecuația (7.104) este cu variabile separabile. Separând variabilele obținem

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx. \quad (7.114)$$

Integrând în ambii membri ai lui (7.114) se găsește (7.113). ■

**Teorema 7.2.7** *Fie  $x_0 \in I$ , arbitrar dar fixat și  $y_0 \in \mathbb{R}$ , oarecare. Soluția problemei Cauchy*

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (7.115)$$

este

$$y = e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} \left( y_0 + \int_{x_0}^x Q(t) e^{\int_{x_0}^t P(s)ds} dt \right), \quad x \in I. \quad (7.116)$$

**Demonstrație.** În ipoteza că soluția problemei Cauchy (7.115) există, fie aceasta de forma (7.109), în care variabila independentă se va nota cu  $t$ . Înmulțind ambii membri ai lui (7.103) cu  $e^{\int_{x_0}^t P(s)ds}$ , se obține

$$\frac{d}{dt} \left( y(t) e^{\int_{x_0}^t P(s)ds} \right) = Q(t) e^{\int_{x_0}^t P(s)ds}, \quad x \in I. \quad (7.117)$$

Integrarea lui (7.117) între limitele  $x_0$  și  $x$ , urmată de înmulțirea ambilor membri cu  $e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt}$ , conduce la afirmația că soluția problemei Cauchy (7.115) este (7.116).

Reciproc, funcția (7.116) are proprietatea a doua din (7.115). Prin calcul direct se constată că această funcție satisface prima ecuație din (7.115). ■

**Observația 7.2.9** *Soluția generală (7.105) a ecuației diferențiale liniară de ordinul întâi, neomogenă, (7.103), se scrie*

$$y = C e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx, \quad x \in I. \quad (7.118)$$

Scrisă astfel, se vede că este egală cu suma dintre integrala generală  $y_o$  a ecuației omogene asociate (7.104) și funcția

$$y_p : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx,$$

care este o soluție particulară a ecuației neomogene (7.103) deoarece se obține din (7.105) dând constantei arbitrare  $C$  valoarea zero. Așadar,

$$y = y_o + y_p.$$

**Teorema 7.2.8** *Soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul întâi este o funcție de forma*

$$y = \varphi(x) + C\psi(x), \quad x \in I. \quad (7.119)$$

Reciproc, orice familie de curbe plane care depinde liniar de o constantă arbitrară verifică o ecuație liniară de ordinul întâi.

**Demonstrație.** Prima parte a teoremei rezultă din (7.118).

Pentru a demonstra reciproca, să observăm mai întâi că

$$y' = \varphi'(x) + C\psi'(x), \quad x \in I. \quad (7.120)$$

Eliminând constanta  $C$  între (7.119) și (7.120), obținem ecuația

$$\frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)}, \quad (7.121)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi. ■

**Teorema 7.2.9** *Dacă  $y_1$  este o soluție particulară a ecuației liniare (7.103), soluția sa generală se obține printr-o cuadratură.*

**Demonstrație.** Efectuăm schimbarea de funcție  $y = z + y_1$  și obținem

$$z' + y_1' + P(x)z + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \quad (7.122)$$

Deoarece  $y_1$  este o soluție particulară a ecuației (7.103), avem

$$y_1' + P(x)y_1 - Q(x) = 0. \quad (7.123)$$

Folosind (7.123) în (7.122) găsim că  $z$  este soluția ecuației liniare omogene (7.104) care se obține doar printr-o operație de integrare și anume

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Din cele de mai sus rezultă că soluția generală a ecuației (7.103) este

$$y = y_1 + Ce^{-\int P(x)dx}$$

și pentru determinarea ei s-a efectuat doar o operație de integrare sau, cum se mai spune, o cuadratură. ■

**Corolarul 7.2.2** *Dacă  $y_1$  și  $y_2$  sunt două soluții particulare ale ecuației (7.103), soluția generală a sa este dată de*

$$y = y_2 + A(y_1 - y_2) \quad (A = \text{constantă arbitrară}). \quad (7.124)$$

**Demonstrație.** Fie soluția generală a ecuației (7.103) scrisă în forma (7.119) și  $y_1, y_2, y_3$ , trei soluții particulare corespunzătoare la trei valori  $C_1, C_2, C_3$ , ale constantei arbitrare  $C$

$$y_1 = \varphi(x) + C_1\psi(x), \quad y_2 = \varphi(x) + C_2\psi(x), \quad y_3 = \varphi(x) + C_3\psi(x). \quad (7.125)$$

Eliminând funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  din relațiile (7.125), obținem relația

$$\frac{y_3 - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} = A \quad (\text{constant}). \quad (7.126)$$

Dacă considerăm că cea de a treia soluție  $y_3$  este soluția generală, din relația (7.126) se obține (7.124). ■

**Observația 7.2.10** *Dacă se cunosc două soluții particulare ale ecuației diferențiale liniare de ordinul întâi, neomogenă, soluția generală a sa se obține fără nici o cuadratură.*

**Observația 7.2.11** *Fie  $\Gamma_1, \Gamma_2$  două curbe integrale date pe intervalul  $[a, b]$  și  $M_1, M'_1, M_2, M'_2$ , intersecțiile lor cu două paralele la axa  $Oy$ . Putem construi prin puncte orice altă curbă integrală  $\Gamma$ , definită pe  $[a, b]$ , deoarece, în baza*

egalității (7.126), punctele  $M, M'$  de intersecție ale curbei  $\Gamma$  cu cele două drepte verifică relația

$$\frac{MM_2}{M_1M_2} = \frac{M'M_2}{M'_1M_2},$$

relație care arată că dreptele  $M_1M'_1, M_2M'_2$  și  $MM'$  sunt concurente. Luând punctul  $M(a, y_0)$  fix, ceea ce înseamnă a rezolva problema Cauchy (7.115), unde în loc de  $x_0$  este  $a$ , prin procedeul descris mai sus obținem curba integrală ce trece prin acest punct.

**Exercițiul 7.2.10** Să se integreze ecuațiile diferențiale liniare de ordinul întâi

- 1<sup>0</sup>)  $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x;$
- 2<sup>0</sup>)  $tx' = 2x + t^3 \cos t, \quad x(\pi/2) = \pi^2/4;$
- 3<sup>0</sup>)  $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x;$
- 4<sup>0</sup>)  $y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \sin 6x, \quad y(0) = 1/3;$
- 5<sup>0</sup>)  $(\sin x + t \operatorname{ctg} x)x' = 1, \quad t(\pi/2) = 1;$
- 6<sup>0</sup>)  $(2e^y - x)y' = 1, \quad y(0) = -1,$

iar unde se specifică, să se rezolve problema Cauchy cu data inițială menționată alăturat.

**Soluție.** Ecuațiile diferențiale 1<sup>0</sup>)–4<sup>0</sup>) sunt liniare și neomogene, iar soluțiile lor generale se determină utilizând formula (7.105). Avem:

1<sup>0</sup>) Funcțiile  $P$  și  $Q$  din această ecuație sunt definite pe un interval  $I_k$  inclus în intervalul  $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$  și au valorile date de

$$P(x) = \operatorname{tg} x, \quad Q(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad x \in I_k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Soluția generală a ecuației este

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \left( C + \int \frac{1}{\cos x} e^{\int \operatorname{tg} x dx} dx \right), \quad x \in I_k.$$

Prin urmare, soluția generală este dată de

$$y = \sin x + C \cos x, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in I_k.$$

**2<sup>0</sup>)** Să observăm că variabila independentă a acestei ecuații diferențiale este  $t$ , iar funcția necunoscută este  $x = x(t)$ . Intervalul pe care sunt definite funcțiile  $P$  și  $Q$  este inclus sau în intervalul  $(-\infty, 0)$  sau în  $(0, +\infty)$ . Pentru că se cere rezolvarea ulterioară a unei probleme Cauchy în care  $t_0 = \pi/2 \in (0, +\infty)$ , vom considera de la început că  $I = (0, +\infty)$ . Avem

$$P(t) = -\frac{2}{t}, \quad Q(t) = t^2 \cos t, \quad t \in (0, +\infty).$$

Soluția generală este

$$x = e^{2 \int \frac{dt}{t}} \left( C + \int t^2 \cos t e^{-2 \int \frac{dt}{t}} \right), \quad t \in (0, +\infty).$$

După efectuarea cuadraturilor, se găsește

$$x = t^2(C + \sin t), \quad t \in (0, +\infty), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Impunând ca să fie satisfăcută condiția inițială  $x(\pi/2) = \pi^2/4$ , se ajunge la concluzia că  $C = 0$  și prin urmare soluția problemei Cauchy este  $x = t^2 \sin t$ .

**3<sup>0</sup>)** Integrăm această ecuație liniară utilizând Observația 7.2.9. Aici, funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt definite pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$  în care ecuația  $\cos x = 0$  nu are soluții, valorile lor fiind date de

$$P(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad Q(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad x \in I.$$

Trebuie să integrăm întâi ecuația omogenă asociată ecuației considerate

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x} y = 0.$$

Aceasta este o ecuație cu variabile separabile și are soluția generală

$$y_o = C e^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Vom arăta cum se poate determina o soluție particulară din soluția generală a ecuației omogene asociate folosind *metoda variației constantei de integrare*  $C$ , denumită și *metoda lui Lagrange*.



Se caută o soluție particulară în forma

$$y_p(x) = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}, \quad x \in I.$$

Punând condiția ca  $y_p$  să verifice ecuația inițială, obținem:

$$C'(x) \cos^2 x e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x, \quad x \in I,$$

de unde

$$C(x) = \int \frac{\operatorname{tg} x e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = (\operatorname{tg} x - 1)e^{\operatorname{tg} x}.$$

Prin urmare, soluția particulară este

$$y_p(x) = \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

Soluția generală a ecuației date va fi

$$y = y_o + y_p = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1, \quad x \in I.$$

4<sup>0</sup>) Avem  $P(x) = 3\operatorname{tg} 3x$ ,  $Q(x) = \sin 6x$  și le vom considera definite pe un interval  $I \in \mathbb{R}$  care conține originea.

Soluția generală este

$$\begin{aligned} y &= e^{-3 \int \operatorname{tg} 3x dx} \left( C + \int \sin 6x e^{3 \int \operatorname{tg} 3x dx} dx \right), \implies \\ \implies y &= e^{\ln \cos 3x} \left( C + \int \sin 6x e^{-\ln \cos 3x} dx \right) = \implies \\ \implies &= \cos 3x \left( C + \int \frac{\sin 6x}{\cos 3x} dx \right) \implies y = \cos 3x \left( C - \frac{2}{3} \cos 3x \right). \end{aligned}$$

Impunând condiția ca în  $x_0 = 0$  valoarea funcției  $y$  de mai sus să fie  $1/3$  găsim  $C = 1$  și deci soluția problemei Cauchy este

$$y = \cos 3x \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 3x \right), \quad x \in I.$$

5<sup>0</sup>) Ecuația este neliniară în funcția  $x = x(t)$ . Ea este însă liniară în  $t$  căci se poate scrie

$$\frac{dt}{dx} - t \operatorname{ctg} x = \sin x.$$

Aceasta din urmă are soluția generală

$$t = (C + x) \sin x, \quad x \in I_k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Pentru ecuația inițială, soluția generală este funcția  $x = \varphi(t, C)$  definită implicit de ecuația

$$(C + x) \sin x - t = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times I_k, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad I_k \subset (k\pi, (k+1)\pi).$$

Încercând rezolvarea problemei Cauchy considerate, se găsește  $C = 0$ .

Deci, soluția problemei Cauchy este funcția  $x = x(t)$  definită implicit de ecuația

$$t - x \sin x = 0, \tag{7.127}$$

într-o vecinătate a punctului  $t = \pi/2$ .

6<sup>0</sup>) Ecuația este liniară în  $x$ . Procedând ca la exercițiul precedent găsim că această ecuație diferențială admite integrala generală

$$x - e^y - Ce^{-y} = 0.$$

Soluția problemei Cauchy se determină din integrala generală luând  $C = -1$ . Avem

$$x = e^y - e^{-y} \implies \operatorname{sh} y = \frac{x}{2} \implies y = \operatorname{argsh} \frac{x}{2},$$

unde  $\operatorname{argsh}(\cdot)$  este funcția inversă a funcției  $\operatorname{sh}(\cdot)$ . ■

## 7.2.8 Ecuații diferențiale de ordinul întâi reducibile la ecuații liniare

### Ecuația diferențială de tip Bernoulli

**Definiția 7.2.8** Ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad P, Q \in C^0(I), \quad I \subset \mathbb{R}, \tag{7.128}$$

se numește **ecuație diferențială de tip Bernoulli**.

**Teorema 7.2.10** Cu schimbarea de funcție

$$y^{1-\alpha} = z, \tag{7.129}$$

ecuația Bernoulli (7.128) se transformă într-o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă.

**Demonstrație.** Dacă împărțim cu  $y^\alpha$  în (7.128) avem

$$\frac{y'}{y^\alpha} + P(x) y^{1-\alpha} = Q(x). \quad (7.130)$$

Folosind (7.129) și consecința acesteia

$$\frac{y'}{y^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} z'$$

în (7.130), ecuația (7.128) se transformă în

$$z' + (1-\alpha) P(x) z = (1-\alpha) Q(x), \quad (7.131)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă. ■

**Corolarul 7.2.3** *Soluția generală a ecuației Bernoulli (7.128) este*

$$y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (7.132)$$

unde funcția  $z = z(x, C)$  este dată de

$$z = e^{-(1-\alpha) \int P(x) dx} \left[ C + (1-\alpha) \int Q(x) e^{(1-\alpha) \int P(x) dx} \right]. \quad (7.133)$$

**Demonstrație.** Ecuația diferențială (7.131), fiind liniară, de ordinul întâi și neomogenă, are soluția generală (7.133). După determinarea funcției  $z$ , funcția  $y$ , soluția generală a ecuației Bernoulli, se găsește din (7.129), fiind astfel conduși la (7.132). ■

**Exercițiul 7.2.11** *Să se integreze ecuațiile diferențiale:*

- a)  $y' + \frac{1}{x} y = x^2 y^4;$
- b)  $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} y^{-2};$
- c)  $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 4 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} \sqrt{y}.$

**Soluție.** Toate ecuațiile diferențiale de mai sus sunt de tip Bernoulli.

a) Constanta  $\alpha$  are valoarea 4 și ecuația este echivalentă cu

$$\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{x} y^{-3} = x^2.$$

Facem schimbarea de funcție

$$z = y^{-3} \implies \frac{y'}{y^4} = -\frac{1}{3} z' \quad (7.134)$$

și ecuația inițială devine

$$z' - \frac{3}{x} z = -3x^2,$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă. Cu mențiunea că punând  $\ln C$  în loc de  $C$ , soluția generală a acestei ecuații liniare este

$$z = e^{3 \int \frac{dx}{x}} \left( \ln C - 3 \int x^2 e^{-3 \int \frac{1}{x} dx} dx \right) \implies z = |x|^3 \ln \frac{C}{|x|^3}.$$

Soluția ecuației Bernoulli este

$$z = \frac{1}{|x|^3 \sqrt[3]{\ln \frac{C}{|x|^3}}}.$$

b) Schimbarea de funcție  $z = y^3$  conduce la ecuația liniară

$$z' + \frac{3}{x} z = \frac{3}{x^2}$$

cu soluția generală

$$z = \frac{C}{|x|^3} + \frac{3}{2|x|}.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = \frac{1}{|x|} \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 2C}{2}}.$$

c) Procedând în mod asemănător ca la celelalte două exemple, găsim că soluția generală a ecuației este

$$y = (1 + x^2)(\arctg^2 x + C)^2.$$

■

### Ecuatia diferențială de tip Riccati

**Definiția 7.2.9** *Ecuatia diferențială ordinară de ordinul întâi*

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad P, Q, R \in C^0(I), \quad I \subset \mathbb{R} \quad (7.135)$$

*se numește ecuație diferențială de tip Riccati.*

În general ecuația Riccati nu poate fi integrată prin cuadraturi. Avem însă

**Teorema 7.2.11** *Dacă se cunoaște o soluție particulară  $y_1$  a ecuației Riccati, prin schimbarea de funcție*

$$y = y_1 + \frac{1}{z}, \quad (7.136)$$

*ecuația se transformă într-o ecuație liniară.*

**Demonstrație.** Fie  $y$  o soluție a ecuației (7.135) și  $z$  o funcție legată de  $y$  prin relația (7.136). Atunci, derivatele acestor funcții sunt în relația

$$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}. \quad (7.137)$$

Înlocuind (7.136) și (7.137) în (7.135), obținem

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + Q(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R(x). \quad (7.138)$$

După efectuarea operațiilor indicate și luarea în calcul a faptului că  $y_1$  este o soluție particulară a ecuației Riccati, din (7.138) obținem

$$z' + (2y_1P(x) + Q(x))z = -P(x), \quad (7.139)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă. ■

**Teorema 7.2.12** *Dacă  $y_1$  este o soluție particulară a ecuației Riccati și  $z$  este o soluție a ecuației liniare (7.139), funcția  $y$  definită de (7.136) este o soluție a ecuației (7.135).*

**Demonstrație.** Din (7.136) avem

$$z = \frac{1}{y - y_1}, \implies z' = \frac{y' - y_1'}{(y - y_1)^2}. \quad (7.140)$$

Înlocuind relațiile din (7.140) în (7.139) și ținând cont de faptul că  $y_1$  este soluție particulară a ecuației Riccati deducem că  $y$  este soluție a ecuației (7.135). ■

**Observația 7.2.12** *Integrala generală a unei ecuații Riccati este funcție omografică de constanta arbitrară.*

Într-adevăr,  $z$  fiind soluția unei ecuații liniare, ea este funcție liniară de o constantă arbitrară  $C$

$$z = \varphi(x) + C \psi(x),$$

deci,

$$y = y_1 + \frac{1}{\varphi(x) + C \psi(x)} = \frac{y_1 \varphi(x) + 1 + C y_1 \psi(x)}{\varphi(x) + C \psi(x)},$$

de unde rezultă că  $y$  este de forma

$$y = \frac{\varphi_1(x) + C \psi_1(x)}{\varphi(x) + C \psi(x)},$$

care este o transformare omografică de constanta arbitrară  $C$ .

Reciproc, o familie de curbe plane care depinde omografic de o constantă arbitrară verifică o ecuație de tip Riccati. ■

**Observația 7.2.13** *Dacă  $y_1, y_2, y_3, y_4$  sunt patru soluții particulare corespunzătoare la patru valori arbitrare  $C_1, C_2, C_3, C_4$  ale constantei arbitrare  $C$ , atunci are loc relația*

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2} : \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} = A \quad (\text{constant}).$$

Membrul întâi al ultimei relații se numește *raport anarmonic al funcțiilor*  $y_1, y_2, y_3$  și  $y_4$ . Proprietatea are loc datorită faptului că o transformare omografică păstrează raportul anarmonic. ■

**Observația 7.2.14** Dacă se cunosc trei soluții particulare  $y_1, y_2, y_3$  ale unei ecuații Riccati, din relația scrisă la observația precedentă, soluția generală rezultă din

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = C$$

fără a efectua nici o cuadratură.

**Exercițiul 7.2.12** Să se integreze ecuațiile diferențiale de tip Riccati de mai jos știind că admit soluțiile particulare indicate alăturat:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad y' &= -2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}, & y_1 &= \frac{1}{x}; \\ 2^0. \quad y' &= -\frac{1}{x}y^2 + \frac{4}{x}y + \frac{3}{x}, & y_1 &= 1. \end{aligned}$$

**Soluție.**  $1^0$ . Facem schimbarea de funcție

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

Folosind aceste rezultate în ecuație, găsim că funcția  $z$  satisface ecuația liniară

$$z' - 3z = 2x.$$

Aflăm mai întâi soluția generală a ecuației omogene asociate ecuației liniare de mai sus, adică a ecuației cu variabile separabile

$$z' - 3z = 0.$$

Soluția generală a ultimei ecuației este

$$z_o = C e^{3x}.$$

Pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației liniare neomogene utilizăm metoda lui Lagrange, luând deci pe  $z_p$  în forma

$$z_p(x) = C(x)e^{3x}.$$

Funcția necunoscută  $C(x)$  se va determina din condiția ca  $z_p$  să satisfacă ecuația

$$z'_p(x) - 3z_p(x) = 2x.$$

Se găsește că derivata funcției  $C(x)$  este

$$C'(x) = 2x e^{3x}.$$

Integrând ultima ecuație cu variabile separate, găsim

$$C(x) = -\frac{2(3x+1)}{9} e^{3x}.$$

Rezultă așadar că soluția particulară căutată este

$$z_p = -\frac{2(3x+1)}{9}.$$

Soluția generală a ecuației liniare în  $z$  este  $z = z_o + z_p$ . Înlocuind rezultatele determinate deducem în cele din urmă că

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{C e^{3x} - \frac{2(3x+1)}{9}}$$

este soluția generală a ecuației date.

**2<sup>0</sup>.** Facem substituția

$$y = 1 + \frac{1}{z} \implies y' = -\frac{z'}{z^2}$$

și ecuația se transformă în

$$-\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + \frac{4}{x} \left(1 + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{x}$$

sau

$$z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x}$$

cu soluția generală

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left( C + \int \frac{1}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = 0.$$

Soluția generală a ecuației date este deci

$$y = 1 + \frac{2x^2}{2C + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Dacă, de exemplu, se dorește determinarea acelei curbe integrale care să treacă prin punctul  $(1, 2)$ , avem

$$2 = 1 + \frac{2}{2C+1} \implies C = \frac{1}{2}$$

și ca urmare soluția căutată este  $y = 1 + \frac{2x^2}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . ■

**Exemplul 7.2.1** *Să se integreze ecuația diferențială Riccati*

$$y' = \frac{1}{1+x^3} y^2 + \frac{x^2}{1+x^3} y + \frac{2x}{1+x^3}$$

*știind că are soluțiile particulare*

$$y_1 = x^2, \quad y_2 = x - 1, \quad y_3 = -\frac{1}{x}$$

Soluție Conform ultimei observații, soluția generală este dată de

$$\frac{y - x^3}{y - x + 1} : \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} = C \quad \text{sau} \quad y = \frac{C(1 - x^2) + x^2}{1 - C(x + 1)},$$

de unde vedem că soluția generală este transformare omografică de constanta arbitrară  $C$ . ■

### 7.3 Ecuații diferențiale algebrice în $y'$ .

Fie ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi

$$A_0(x, y)(y')^n + A_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x, y)y' + A_n(x, y) = 0, \quad (7.141)$$

care provine din anularea unui polinom în  $y'$  cu coeficienții  $A_k(x, y)$  funcții continue de  $x$  și  $y$  într-un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$  și cu  $A_0(x, y) \neq 0$  în  $D$ .

Considerată ca o ecuație în  $y'$ , ecuația dată are  $n$  rădăcini de forma

$$f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

care sunt funcții de  $x$  și  $y$ . Fiecărei rădăcini reale îi corespunde ecuația diferențială ordinară de ordinul întâi

$$y' = f(x, y). \quad (7.142)$$

O soluție a ecuației (7.142) este soluție a ecuației (7.141).

**Exemplul 7.3.1** Să se afle soluțiile ecuației diferențiale

$$y y'^2 - (1 + 2xy)y' + 2x = 0.$$

Soluția Ecuația diferențială dată este o ecuație algebrică de gradul doi în variabila  $y'$ . Rezolvată în raport cu  $y'$  ne dă următoarele două ecuații:

$$y' = \frac{1}{y}; \quad y' = 2x,$$

care au respectiv soluțiile:

$$y^2 = 2x + C_1; \quad y = x^2 + C_2,$$

în care  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante arbitrare. ■

## 7.4 Ecuații diferențiale de ordinul întâi, nerezolvate în raport cu $y'$ , integrabile prin metode elementare

### 7.4.1 Ecuația diferențială de forma $y = f(y')$

**Teorema 7.4.1** Soluția generală a ecuației diferențiale

$$y = f(y') \tag{7.143}$$

este dată de

$$\begin{cases} x = \int \frac{1}{p} f'(p) dp + C, \\ y = f(p). \end{cases} \tag{7.144}$$

**Demonstrație.** Să punem

$$y' = p \tag{7.145}$$

și să luăm  $p$  drept variabilă independentă. Avem:

$$y = f(p) \implies dy = f'(p) dp; \tag{7.146}$$

$$\frac{dy}{dx} = p, \implies dx = \frac{1}{p} dy. \tag{7.147}$$

Din (7.146) și (7.147) deducem

$$dx = \frac{1}{p} f'(p) dp, \quad (7.148)$$

de unde printr-o cuadratură se obține prima din relațiile (7.144). Cea de a doua relație din (7.144) rezultă din (7.143) și (7.145).

Soluția generală a ecuației diferențiale este dată parametric prin relațiile (7.144) și, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie uniparametrică de curbe plane. ■

**Exercițiul 7.4.1** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y = y'^2 + \ln y', \quad y' > 0.$$

**Soluție.** Punem  $y' = p$  și ecuația devine

$$y = p^2 + \ln p \implies dy = \left(2p + \frac{1}{p}\right) dp.$$

Avem apoi

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dx = \frac{1}{p} dy \implies dx = \frac{1}{p} \left(2p + \frac{1}{p}\right) dp.$$

Integrând ultima egalitate, în care considerăm că  $p > 0$ , obținem

$$x = \int \left(2 + \frac{1}{p^2}\right) dp = 2p - \frac{1}{p} + C.$$

Din cele deduse constatăm că soluția generală este

$$\begin{cases} x &= 2p - \frac{1}{p} + C, \\ y &= p^2 + \ln p, \quad p > 0. \end{cases}$$

Prin urmare, prin această metodă soluția generală a ecuației diferențiale date se exprimă parametric. ■

### 7.4.2 Ecuația diferențială de tipul $F(y, y') = 0$

Integrarea acestui tip de ecuație diferențială se face cu o cuadratură dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei plane  $F(u, v) = 0$ . Să presupunem că o asemenea reprezentare este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

în care funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  le considerăm continue, iar  $\varphi$  să aibă derivata continuă. Având în vedere cine sunt variabilele  $u$  și  $v$ , avem

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t) \implies dx = \frac{1}{\psi(t)} \varphi'(t).$$

Din ultima relație, prin integrare în ambii membri, obținem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Prin urmare, soluția generală, reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t), \end{cases}$$

este definită pe orice interval real  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  pe care integrala  $\int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$  are sens.

**Exercițiul 7.4.2** Să se integreze ecuația diferențială

$$y^2 + y'^2 = 1.$$

**Soluție.** Reprezentarea parametrică despre care se vorbește în teorie este

$$\begin{cases} y = \sin t, \\ y' = \cos t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Din cea de a doua ecuație de mai sus se obține

$$\frac{dy}{dx} = \cos t \implies dx = \frac{1}{\cos t} dy = \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t dt = dt \implies x = t + C.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este

$$\begin{cases} x = t + C, \\ y = \sin t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases} \iff y = \sin(x - C), \quad x \in \mathbb{R}.$$

În acest exemplu, eliminarea parametrului s-a efectuat simplu. ■

### 7.4.3 Ecuația diferențială de forma $x = f(y')$

**Teorema 7.4.2** *Soluția generală a ecuației*

$$x = f(y'),$$

unde  $f$  este o funcție cu derivata continuă într-un interval  $[a, b]$ , este dată de

$$\begin{cases} x = f(p), \\ y = \int p f'(p) dp + C, \quad p \in [a, b]. \end{cases}$$

**Demonstrație.** Să punem  $y' = p$  și să luăm  $p$  ca variabilă independentă. Avem

$$x = f(p) \implies dx = f'(p) dp.$$

Pe de altă parte din  $y' = p$  avem pe rând

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p dx = p f'(p) dp,$$

de unde obținem pe  $y$  printr-o cuadratură

$$y = \int p f'(p) dp + C.$$

Reunind rezultatele de mai sus constatăm că soluția generală a ecuației  $x = f(y')$  este dată în forma parametrică din enunțul teoremei. ■

**Exercițiul 7.4.3** *Să se integreze ecuația diferențială  $x = y' + e^{y'}$ .*

**Soluție.** Dacă punem  $y' = p$ , din ecuație obținem

$$x = p + e^p \implies dx = (1 + e^p)dp.$$

Pornind din nou de la notația  $y' = p$  și utilizând rezultatul stabilit mai sus, avem

$$\frac{dy}{dx} = p \implies dy = p dx \implies dy = p(1 + e^p)dp.$$

Prin integrarea ultimei egalități, obținem

$$y = \int (p + pe^p)dp = \frac{1}{2}p^2 + (p - 1)e^p + C, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Soluția generală a ecuației date este dată parametric de

$$\begin{cases} x = p + e^p, \\ y = \frac{1}{2}p^2 + (p - 1)e^p + C, \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Eliminarea parametrului  $p$  presupune rezolvarea unei ecuații transcendente. ■

#### 7.4.4 Ecuația diferențială de tipul $F(x, y') = 0$

Integrarea acestei ecuații diferențiale se reduce la o cuadratură dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei plane  $F(u, v) = 0$ .

Să presupunem că o reprezenatre parametrică a curbei  $F(u, v) = 0$  este

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \end{cases}$$

în care funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt continue și  $\varphi$  are derivată continuă. Având în vedere semnificația variabilelor  $u$  și  $v$ , avem

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \implies dx = \varphi'(t)dt, \\ y' = \psi(t) \implies \frac{dy}{dx} = \psi(t) \implies dy = \psi(t)\varphi'(t)dt. \end{cases}$$

Din ultima egalitate, prin integrare, obținem

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale este dată de familia de curbe plane

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C, \quad t \in [a, b], \end{cases}$$

unde  $C$  este o constantă reală arbitrară.

Soluția generală este definită pe orice interval  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  pe care integrala

$$\int \psi(t)\varphi'(t)dt$$

are sens.

**Exercițiul 7.4.4** Să se integreze ecuația diferențială  $x^3 + y^3 - 3xy' = 0$ .

**Soluție.** Trebuie să determinăm o reprezentare parametrică a curbei definită implicit de ecuația

$$u^3 + v^3 - 3uv = 0.$$

Vom căuta o reprezentare parametrică  $u = u(t)$ ,  $v = v(t)$  cu proprietatea  $v = tu$ . Mergând cu această valoare a lui  $v$  în ecuație, după simplificare cu  $u^2$ , găsim  $u = \frac{3t}{1+t^3}$  și prin urmare  $v = \frac{3t^2}{1+t^3}$ .

Pentru aflarea soluției generale a ecuației diferențiale date pornim de la  $x = \frac{3t}{1+t^3}$  și  $y' = \frac{3t^2}{1+t^3}$ .

Penultima relație rămâne definitivă, în timp din cea de a doua obținem

$$dy = \frac{3t^2}{1+t^3}dx = \frac{3t^2}{1+t^3} \cdot \frac{3(1+t^3) - 9t^3}{(1+t^3)^2}dt = \frac{9(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2 dt.$$

Funcția  $y$  se determină prin integrare și obținem

$$y = \int \frac{9(1-t^3)}{(1+t^3)^3} \cdot t^2 dt = 9 \int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^3} - 6 \int \frac{d(t^3+1)}{(t^3+1)^2}.$$

Astfel, găsim că  $y$  are expresia

$$y = -\frac{9}{2} \frac{1}{(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C.$$

Prin urmare, soluția generală este dată parametric prin

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = -\frac{9}{2(1+t^3)^2} + \frac{6}{1+t^3} + C, \quad t \neq -1. \end{cases}$$

■

### 7.4.5 Ecuația diferențială de tip Lagrange

**Definiția 7.4.1** O ecuație diferențială de ordinul întâi de forma

$$y = x \varphi(y') + \psi(y'), \quad (7.149)$$

în care membrul al doilea este o funcție liniară de  $x$ , cu coeficienți funcții de clasă  $C^1(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , se numește **ecuație diferențială de tip Lagrange** sau **ecuație Lagrange**.

**Teorema 7.4.3** Integrarea unei ecuații Lagrange se reduce la integrarea unei ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi.

**Demonstrație.** În (7.149) efectuăm înlocuirea

$$y' = p, \quad p = p(x). \quad (7.150)$$

Cu notația (7.150), ecuația (7.149) devine

$$y = x \varphi(p) + \psi(p). \quad (7.151)$$

Derivând (7.97) în raport cu  $x$  și ținând seama de partea a doua a relației (7.97), avem

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x \varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}. \quad (7.152)$$

În ecuația (7.152) înlocuim membrul întâi cu  $p$  și avem

$$p = \varphi(p) + x \varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} \quad (7.153)$$

sau

$$(x \varphi'(p) + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} + \varphi(p) - p = 0. \quad (7.154)$$



Dacă considerăm  $p$  ca variabilă independentă și  $x$  ca funcție necunoscută, ecuația (7.154) se scrie în forma

$$(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + x \varphi'(p) + \psi'(p) = 0, \quad (7.155)$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi în  $x = x(p)$ .

Considerăm întâi că funcția  $\varphi$  este definită pe un subinterval al intervalului  $I$  în care ecuația

$$\varphi(p) - p = 0 \quad (7.156)$$

nu are nici o soluție. În acest caz ecuația (7.155) se scrie în forma

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \quad (7.157)$$

Folosind formula de integrare a unei ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi, vom avea

$$x = f(p, C). \quad (7.158)$$

Dacă ținem seama de ecuațiile (7.152) și (7.158) obținem soluția generală a ecuației Lagrange sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = f(p, C) \varphi(p) + \psi(p). \end{cases} \quad (7.159)$$

Să studiem acum cazul în care  $p_0$  este o rădăcină reală a ecuației (7.156). În acest caz, ecuația (7.154) admite soluția  $p = p_0$ . Dacă înlocuim în (7.97) pe  $p$  cu  $p_0$ , și ținem cont de (7.156), obținem

$$y = p_0 x + \psi(p_0), \quad (7.160)$$

care este o soluție a ecuației Lagrange (7.149) care nu este conținută în soluția generală (7.159) și deci este soluție singulară.

În legătură cu comportarea curbelor integrale ale ecuației diferențiale de tip Lagrange față de dreapta (7.160) putem avea două situații:

- dacă  $\lim_{p \rightarrow p_0} |x| = \lim_{p \rightarrow p_0} |f(p, C)| = +\infty$ , dreapta (7.160) este o direcție asimptotică a curbelor integrale (7.159).

- dacă  $\lim_{p \rightarrow p_0} |x| = \lim_{p \rightarrow p_0} |f(p, C)| = \text{finit}$ , (7.160) este soluție singulară a ecuației (7.149).

■

**Exercițiul 7.4.5** Să se integreze ecuația diferențială de tip Lagrange

$$y = x y'^2 + y'^3.$$

**Soluție.** Notăm  $y' = p$ , deci  $y = xp^2 + p^3$ ; derivăm în raport cu  $x$ ,

$$p = 2xp \frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2 \frac{dp}{dx}$$

și, în ipoteza  $p^2 - p \neq 0$ , obținem ecuația liniară

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = -\frac{3p}{p-1},$$

care are soluția generală

$$x = e^{-\int \frac{2}{p-1} dp} \left( C - \int \frac{3p}{p-1} e^{\int \frac{2}{p-1} dp} dp \right).$$

Efectuând integrările, găsim

$$x = \frac{1}{(p-1)^2} \left( C - p^3 + \frac{3}{2}p^2 \right).$$

Înlocuind expresia lui  $x$  ca funcție de  $p$  în  $y = xp^2 + p^3$  determinăm  $y$  ca funcție de  $p$ . După calcule elementare, găsim

$$y = \frac{p^2}{(p-1)^2} \left( C - \frac{1}{2}p^2 + p \right).$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației date, reprezentată parametric, este

$$\begin{cases} x = \frac{1}{(p-1)^2} \left( C - p^3 + \frac{3}{2}p^2 \right), \\ y = \frac{p^2}{(p-1)^2} \left( C - \frac{1}{2}p^2 + p \right). \end{cases}$$

Ecuția  $p^2 - p = 0$  are rădăcinile  $p = 0$  și  $p = 1$ , care conduc la soluțiile singulare  $y = 0$ , respectiv  $y = x + 1$ .

Deoarece pentru  $p \rightarrow 1$  și  $C \neq -\frac{1}{3}$  avem  $|x| \rightarrow +\infty$ , rezultă că dreapta  $y = x + 1$  este direcție asimptotică a curbelor integrale care au  $C \neq -\frac{1}{3}$ . Dacă  $C = -\frac{1}{3}$ , curba integrală corespunzătoare se descompune în dreapta  $y = x + 1$  și o curbă algebrică de ordinul al doilea (conică). ■

**Exercițiul 7.4.6** Să se integreze ecuația diferențială

$$y = x y'^2 + y'^2.$$

**Soluție.** Notând  $y' = p$ , ecuația devine  $y = x p^2 + p^2$ . Derivând în ambii membri în raport cu  $x$  și ținând seama că  $y' = p$ , obținem

$$p = p^2 + 2 x p \frac{dp}{dx} + 2 p \frac{dp}{dx}.$$

Pentru  $p \neq 0$ , ecuația diferențială corespunzătoare este cu variabile separabile. După separarea variabilelor, ecuația devine

$$\frac{dx}{x+1} = \frac{2dp}{1-p},$$

iar integrarea acesteia conduce la

$$x+1 = \frac{C}{(p-1)^2},$$

de unde rezultă  $x$  ca funcție de  $p$ .

Înlocuind această valoare a lui  $x$  în expresia lui  $y$  ca funcție de  $x$  și  $p$ , găsim

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Astfel, soluția generală a ecuației diferențiale date se reprezintă parametric în forma

$$\begin{cases} x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1, \\ y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}. \end{cases}$$

Dacă  $p = 0$ , din ecuația inițială deducem  $y = 0$  care este soluție singulară deoarece

$$\lim_{p \rightarrow 0} |x| = \lim_{p \rightarrow 0} |f(p, C)| = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{C}{(p-1)^2} - 1 = C - 1 = \text{finit}.$$

Curba integrală corespunzătoare soluției singulare este axa  $Ox$ . ■

### 7.4.6 Ecuația diferențială de tip Clairaut

**Definiția 7.4.2** O ecuație diferențială de ordinul întâi de forma

$$y = xy' + \psi(y'), \quad (7.161)$$

în care  $\psi$  este o funcție de variabilă reală  $y'$ , de clasă  $C^1(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , se numește **ecuație diferențială de tip Clairaut sau ecuație Clairaut**.

**Teorema 7.4.4** Ecuația Clairaut (7.161) are soluția generală

$$y = Cx + \psi(C) \quad (7.162)$$

și admite o soluție singulară reprezentată parametric de

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (7.163)$$

care, din punct de vedere geometric, este înfășurătoarea dreptelor din (7.162).

**Demonstrație.** După cum se vede o ecuație Clairaut este o ecuație Lagrange particulară, anume când  $\varphi(p) = p$ . Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuația diferențială de tip Lagrange. Înlocuim pe  $y'$  cu  $p$

$$y = xp + \psi(p),$$

apoi derivăm în raport cu  $x$  și ținem seama că  $p$  este funcție de  $x$ . Avem

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} \implies (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0.$$

Din ultima egalitate desprindem două posibilități:

- $\frac{dp}{dx} = 0$ , adică  $p = C$ . Înlocuind  $p = C$  în (7.161), obținem soluția generală (7.162). Așadar, soluția generală a ecuației Clairaut reprezintă geometric o familie de drepte a cărei ecuație se obține înlocuind în ecuația diferențială (7.161) pe  $y'$  cu o constantă  $C$ ;
- $x + \psi'(p) = 0$ , de unde  $x = -\psi'(p)$  și dacă înlocuim în (7.161) acest rezultat, obținem o curbă integrală a ecuației (7.161) reprezentată parametric de (7.163). Din punct de vedere geometric, curba integrală (7.163) este înfășurătoarea familiei de drepte (7.162) deoarece ecuațiile ei se obțin prin eliminarea constantei  $C$  între (7.162) și derivata în raport cu  $C$  a lui (7.162).

■

**Exercițiul 7.4.7** Să se integreze ecuația diferențială de tip Clairaut

$$y = xy' - e^{y'}.$$

SoluțiPunem  $y' = p$  și rescriem ecuația dată în forma  $y = xp - e^p$ . Diferențiind-o, obținem

$$dy = p dx + x dp - e^p dp.$$

Cum  $dy = p dx$ , din ultimul rezultat se deduce  $(x - e^p)dp = 0$ . În acest fel, sau  $dp = 0$ , sau  $x = e^p$ . Dacă luăm  $dp = 0$ , atunci  $p = C$ ; înlocuind această valoare a lui  $p$  în egalitatea  $y = xp - e^p$ , obținem soluția generală în forma

$$y = Cx - e^C.$$

Dacă luăm  $x = e^p$ , atunci  $y = p e^p - e^p = (p - 1)e^p$  și ajungem la soluția singulară

$$\begin{cases} x = e^p, \\ y = (p - 1)e^p, \quad p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Prin eliminarea parametrului  $p$  din soluția singulară, care are valoarea  $p = \ln x$ , găsim că ecuația carteziană explicită a soluției singulare este

$$y = x(\ln x - 1).$$

Să demonstrăm că soluția singulară este înfășurătoarea familiei de drepte ce reprezintă soluția generală a ecuației date, adică ar trebui să demonstrăm că tangenta la soluția singulară, într-un punct  $(x_0, y_0)$  al ei, are forma

unei drepte identice cu cea din soluția generală a ecuației diferențiale date. Ecuatia tangentei este

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0), \quad \text{sau} \quad y - x_0(\ln x_0 - 1) = (x - x_0) \ln x_0$$

care, după reducerea termenilor asemenea, devine  $y = x \ln x_0 - x_0$ . Dacă aici punem  $\ln x_0 = C$ , ecuația tangentei la curba integrală ce provine din soluția singulară, într-un punct  $(x_0, y_0)$  al ei, este  $y = Cx - e^C$ , adică tocmai curba integrală ce provine din soluția generală. ■

### 7.4.7 Ecuatia diferențială de forma $y = f(x, y')$

Ne propunem să arătăm cum se integrează ecuațiile diferențiale de forma

$$y = f(x, y'), \quad (7.164)$$

unde  $f$  este o funcție diferențiabilă pe un domeniu plan. Dacă notăm  $y' = p$  ecuația devine

$$y = f(x, p)$$

care, derivată în raport cu  $x$ , unde se ține cont de faptul că  $p = p(x)$ , conduce la

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} \quad (7.165)$$

adică la o ecuație rezolvată în raport cu  $\frac{dp}{dx}$ .

Dacă putem integra (7.165) avem

$$p = \varphi(x, C)$$

care, introdusă în (7.164), ne conduce la soluția generală căutată

$$y = f\left(x, \varphi(x, C)\right).$$

**Exercițiul 7.4.8** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}.$$

**Soluție.** Punem  $y' = p$ , deci  $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ , derivăm în raport cu  $x$  și ținem seama că  $p = p(x)$  :

$$p = 2p \frac{dp}{dx} - x \frac{dp}{dx} - p + x \implies (2p - x)(1 - \frac{dp}{dx}) = 0.$$

Dacă  $\frac{dp}{dx} = 1$ , atunci avem  $p = x + C$  care introdus în ecuația  $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$  conduce la soluția generală

$$y = C^2 + Cx + \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dacă  $x = 2p$ , din aceeași ecuație folosită mai sus deducem  $y = p^2$ . Prin urmare, obținem soluția reprezentată parametric

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2, \end{cases} \quad p \in \mathbb{R},$$

care, nefiind obținută din soluția generală de mai sus pentru nici o valoare a lui  $C$ , este soluție singulară. Se observă că soluția singulară, care este o parabolă, este înfășurătoarea familiei de curbe integrale din soluția generală care sunt tot parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa  $Oy$ . ■

**Exercițiul 7.4.9** Să se integreze ecuația diferențială

$$xy'^2 + (y - 3x)y' + y = 0.$$

**Soluție.** Ecuația diferențială dată se poate scrie în forma

$$y = x \cdot \frac{3y' - y'^2}{1 + y'}$$

și se încadrează în tipul studiat mai sus.

Înlocuind  $y' = p$ , obținem

$$y = x \cdot \frac{3p - p^2}{1 + p}. \quad (7.166)$$

Derivând (7.166) în raport cu  $x$ , obținem ecuația

$$(p+1)\left(\frac{2}{x} + \frac{p+3}{p(p+1)} \cdot \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

din care rezultă  $p = 1$  precum și ecuația

$$\frac{p+3}{p(p+1)}dp + \frac{2}{x}dx = 0, \quad (7.167)$$

care este o ecuație diferențială cu variabile separate.

Integrând, obținem

$$x^2 = C \frac{(p+1)^2}{p^3}. \quad (7.168)$$

Înlocuind (7.168) în ceea ce se obține din (7.166) prin ridicare la pătrat, găsim

$$y^2 = C \frac{(p-3)^2}{p}. \quad (7.169)$$

Eliminând pe  $p$  între (7.168) și (7.169), determinăm soluția generală sub formă implicită

$$(xy^2 + Cy + 3Cx)(y^3 + 15Cy - 27Cx) + C^2(y - 9x)^2 = 0. \quad (7.170)$$

Considerând acum  $p = 1$  și mergând cu această valoare a lui  $p$  în ecuația (7.166), găsim că  $y = x$  este soluție a ecuației diferențiale inițiale. Această soluție nu se poate obține din soluția generală și prin urmare este soluție singulară. ■

### 7.4.8 Ecuația diferențială de tipul $x = f(y, y')$

La fel ca la celelalte ecuații diferențiale studiate în acest paragraf, se face notația  $y' = p$ , deci ecuația dată devine

$$x = f(y, p). \quad (7.171)$$

Derivând, de data aceasta în raport cu  $y$ , în ambii membri ai lui (7.171) și ținând cont că  $x$  și  $p$  pot fi considerate funcții de  $y$ , găsim

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy}. \quad (7.172)$$



Dacă putem integra (7.172), care este o ecuație diferențială în funcția necunoscută  $p$ , cu variabila independentă  $y$ , obținem

$$p = \varphi(y, C). \quad (7.173)$$

Introducerea lui (7.173) în (7.171) conduce la soluția generală

$$x = f\left(y, \varphi(y, C)\right). \quad (7.174)$$

**Exercițiul 7.4.10** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0. \quad (7.175)$$

**Soluție.** Se observă că

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \quad (7.176)$$

și deci ecuația este de tipul celei studiată la acest punct.

Înlocuind  $y' = p$  și derivând în raport cu  $y$ , după reducerea termenilor asemenea și grupări convenabile se ajunge la

$$(p^3 - 4y^2)\left(2y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0. \quad (7.177)$$

Dacă considerăm cazul când se anulează cel de al doilea factor, adică  $2y\frac{dp}{dy} - p = 0$ , integrând ecuația corespunzătoare găsim

$$p = C\sqrt{y}. \quad (7.178)$$

Înlocuind această valoare a lui  $p$  în ecuația  $x = f(y, p)$ , deducem

$$C^3 - 4Cx + 8\sqrt{y} = 0 \implies y^2 = C_1(x - C_1)^2, \quad (4C_1 = C^2). \quad (7.179)$$

Celălalt factor egalat cu zero conduce în cele din urmă la parabola cubică  $y = \frac{4}{27}x^3$ , care este o soluție singulară. ■

## Capitolul 8

# Ecuatii diferențiale ordinare de ordin $n$ integrabile prin cuadraturi

În acest capitol vom prezenta tipuri de ecuații diferențiale ordinare de ordin superior cărora li se pot reduce ordinul și care apoi pot fi integrate prin operații de cuadrare.

### 8.1 Ecuatii diferențiale de tipul $y^{(n)} = f(x)$

Considerăm ecuație diferențială de ordinul  $n$  simplă

$$y^{(n)} = f(x), \quad (8.1)$$

unde  $f$  este o funcție continuă pe un interval  $I$ .

Ea se integrează ușor prin cuadraturi. Într-adevăr, din ecuația (8.1) obținem prin integrări succesive

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k!} (x-x_0)^k, \quad x \in I, \quad (8.2)$$

unde  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$  sunt constante arbitrare, iar  $x_0$  este un punct oarecare, însă fix din intervalul  $I$ .

**Exercițiul 8.1.1** *Să se afle soluția ecuației diferențiale  $y''' = 24x$  care satisface condițiile inițiale  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 2$ .*

**Soluție.** Prin integrări succesive, obținem soluția generală

$$y = x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \quad (8.3)$$

Impunând soluției (8.3) să satisfacă condițiile inițiale, găsim  $C_3 = 1$ ,  $C_2 = -1$  și  $C_1 = 1$ .

Prin urmare, soluția problemei Cauchy pentru ecuația diferențială dată este  $y = x^4 + x^2 - x + 1$ . ■

## 8.2 Ecuația diferențială $F(x, y^{(n)}) = 0$

**Teorema 8.2.1** *Fie ecuația diferențială*

$$F(x, y^{(n)}) = 0. \quad (8.4)$$

*Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei plane  $F(u, v) = 0$ ,*

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \quad (8.5)$$

*cu  $\varphi$  și  $\psi$  funcții continue cu derivate continue pe un interval  $I$ , integrala generală pe  $I$  a ecuației diferențiale (8.4) se obține prin  $n$  cuadraturi.*

**Demonstrație.** Din reprezentarea parametrică (8.5), deducem mai întâi

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), \end{cases} \quad (8.6)$$

și apoi

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)} dx = \varphi'(t) \psi(t) dt.$$

Din ultima relație, printr-o cuadratură, obținem

$$y^{(n-1)} = \int \varphi'(t) \psi(t) dt + C_0 = \Phi_1(t) + C_0. \quad (8.7)$$

Relația (8.7) poate fi scrisă în forma

$$d(y^{(n-2)}) = (\Phi_1(t) + C_0) \varphi'(t) dt \quad (8.8)$$

și după integrare aceasta ne dă

$$y^{(n-2)} = \int \Phi_1(t) \varphi'(t) dt + C_0 \varphi(t) + C_1.$$

Repetând operația de  $n$  ori obținem pe  $y$  ca funcție de  $t$

$$y = \Phi(t) + P_{n-1}(\varphi(t)), \quad t \in I, \quad (8.9)$$

unde  $P_{n-1}$  este un polinom de grad  $n-1$ , cu coeficienți reali arbitrari, având variabila funcția  $\varphi$ . Relația (8.9) împreună cu prima relație din (8.6) ne dă integrala generală sub formă parametrică. ■

**Observația 8.2.1** Dacă ecuația (8.4) definește implicit pe  $x$  prin relația

$$x = f(y^{(n)}), \quad (8.10)$$

atunci o reprezentare parametrică este dată de

$$\begin{cases} y^{(n)} = t, \\ x = f(t). \end{cases} \quad (8.11)$$

Din prima relație (8.11), găsim

$$y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + C_1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + C_{n-1}t + C_n. \quad (8.12)$$

Cea de a doua relație din (8.11) și cu (8.12) dau o reprezentare parametrică pentru soluția generală a ecuației diferențiale (8.4) în cazul particular când din ecuația  $F(u, v) = 0$  se poate explicita  $v$  ca funcție de  $u$ .

**Exercițiul 8.2.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$x = y'' + \ln y'', \quad y'' > 0. \quad (8.13)$$

**Soluție.** Ecuația dată se încadrează în Observația 8.2.1. Cu notația  $y'' = t$  avem că  $x = t + \ln t$ . Apoi:

$$\begin{aligned} y' &= \int y'' dx = \int t \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + t + C_1; \\ y &= \int y' dx = \int \left(\frac{1}{2}t^2 + t + C_1\right) \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt + C_2. \end{aligned}$$

Din cele deduse mai sus rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale (8.13) este dată parametric de

$$\begin{cases} x = t + \ln t, \\ y = \frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{4}t^2 + C_1(t + \ln t) + t + C_2, \quad t > 0, \end{cases}$$

de unde vedem că ea depinde de două constante arbitrare. Dacă din prima ecuație se poate determina în mod unic  $t$  ca funcție de  $x$ , înlocuind rezultatul în expresia lui  $y$  ca funcție de  $t$  se poate obține soluția generală în forma  $y = g(x, C_1, C_2)$ . ■

### 8.3 Ecuația diferențială $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$

**Teorema 8.3.1** *Fie ecuația diferențială*

$$F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0. \quad (8.14)$$

*Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei plane  $F(u, v) = 0$ ,*

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \quad (8.15)$$

*cu  $\varphi$ ,  $\psi$  și  $\varphi'$  funcții continue, iar  $\psi(t) \neq 0$  pe un interval  $I$ , integrala generală pe  $I$  a ecuației diferențiale (8.14) se obține prin  $n$  cuadraturi.*

**Demonstrație.** Din reprezentarea parametrică (8.15) putem scrie:

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t), \quad t \in I; \\ y^{(n-1)} &= \varphi(t), \quad d(y^{(n-1)}) = \psi(t)dx, \quad t \in I; \\ dx &= \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt. \end{aligned}$$

Din ultima relație, printr-o cuadratură, obținem

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_0 = \Phi(t) + C_0. \quad (8.16)$$

Avem așadar

$$\begin{cases} x &= \Phi(t) + C_0, \\ y^{(n-1)} &= \varphi(t), \end{cases}$$

și am redus problema integrării la cea rezolvată la punctul precedent. Mai precis, avem

$$d(y^{(n-2)}) = \varphi(t)dx = \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt,$$

de unde, printr-o cuadratură, găsim

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\varphi(t)\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C_1.$$

Procedeul continuă și după  $n - 2$  cuadraturi se obține integrala generală sub formă parametrică. ■

**Exercițiul 8.3.1** Să se integreze ecuația diferențială de ordinul trei

$$y'''^2 + y''^2 = 1.$$

**Soluție.** O reprezentare parametrică a ecuației  $u^2 + v^2 = 1$  este  $u = \sin t$ ,  $v = \cos t$ , de unde deducem  $y'' = \sin t$ ,  $y''' = \cos t$ . Avem  $d(y'') = y'''dx$ , sau  $\cos t dt = \cos t dx$ , deci  $dx = dt \implies x = t + C_1$ . Din  $y'' = \sin t$  și  $x = t + C_1$  obținem pe rând

$$\begin{aligned} y'' &= \sin(x - C_1), \\ y' &= -\cos(x - C_1) + C_2, \\ y &= -\sin(x - C_1) + C_2x + C_3, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ultima funcție de mai sus reprezintă soluția generală a ecuației date. ■

## 8.4 Ecuația diferențială $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$

**Teorema 8.4.1** Fie ecuația diferențială de ordinul  $n$  de forma particulară

$$F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0. \quad (8.17)$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei plane  $F(u, v) = 0$ ,

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ v = \psi(t), \end{cases} \quad (8.18)$$

unde  $\varphi$ ,  $\psi$  și  $\varphi'$  sunt funcții continue pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$ , atunci integrala generală a ecuației diferențiale (8.17) se obține prin  $n$  cuadraturi.

**Demonstrație.** Din ecuațiile parametrice (8.18) avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t) \quad (8.19)$$

sau

$$d(y^{(n-1)}) = y^{(n)} dx, \quad d(y^{(n-2)}) = y^{(n-1)} dx, \quad (8.20)$$

din care, evaluând pe  $dx$  și egalând rezultatele, deducem

$$\frac{d(y^{(n-1)})}{y^{(n)}} = \frac{d(y^{(n-2)})}{y^{(n-1)}}. \quad (8.21)$$

Folosind (8.19) în (8.21), avem  $y^{(n-1)} d(y^{(n-1)}) = \psi(t) \varphi'(t) dt$ . Integrând această ecuație diferențială, obținem  $[y^{(n-1)}]^2 = 2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1$ , din care, mai departe, găsim

$$y^{(n-1)} = \pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1}. \quad (8.22)$$

Relația (8.22) împreună cu prima relație din (8.19) arată că ecuația dată s-a redus la tipul studiat la punctul precedent. ■

**Exercițiul 8.4.1** Să se determine soluțiile ecuației diferențiale

$$y''' y' = y''^2.$$

**Soluție.** Se observă că ecuația dată se mai scrie în forma

$$\frac{y'''}{y''} = \frac{y''}{y'} \implies \ln y'' = \ln y' + \ln C_1 \implies y'' = C_1 y' \implies d(y') = d(C_1 y),$$

din care rezultă ecuația diferențială cu variabile separabile  $y' = C_1 y + C_2$ . După separarea variabilelor, obținem

$$\frac{dy}{C_1 y + C_2} = dx \implies \ln(C_1 y + C_2) = C_1(x + C_3) \implies C_1 y + C_2 = e^{C_1(x+C_3)}$$

și în acest mod s-a obținut soluția generală a ecuației date sub formă explicită în care intervin trei constante arbitrare. ■

## Capitolul 9

# Ecuatii diferențiale ordinare care admit micșorarea ordinului

### 9.1 Ecuația $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

**Teorema 9.1.1** *Ecuația diferențială ordinară de ordinul  $n$*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (9.1)$$

*în care lipsesc funcția necunoscută  $y$  și derivatele sale până la ordinul  $k - 1$ , prin schimbarea de funcție*

$$y^{(k)} = u \quad (9.2)$$

*se transformă în ecuația diferențială de ordinul  $n - k$*

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-k)}) = 0. \quad (9.3)$$

**Demonstrație.** Dacă punem  $y^{(k)} = u$ , obținem relațiile

$$y^{(k+1)} = u', \quad y^{(k+2)} = u'', \dots, \quad y^{(n)} = u^{(n-k)},$$

pe care dacă le înlocuim în (9.1) obținem (9.3). Dacă reușim să integrăm pe (9.3), deci să obținem soluția generală

$$u(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

integrarea ecuației (9.1) se reduce la integrarea ecuației de ordinul  $k$

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}),$$

care este de tipul uneia studiate anterior. ■



**Exercițiul 9.1.1** Să se găsească soluția generală a ecuației

$$x y^{(4)} - y^{(3)} = 2x^3 \quad (9.4)$$

și apoi să se determine acea soluție care satisface condițiile:

$$y(1) = 1; y'(1) = 1; y''(1) = 0; y^{(3)}(1) = 0.$$

**Soluție.** Dacă punem  $y^{(3)} = u$ , se obține ecuația în  $u$

$$x u' - u = 2x^3,$$

care este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi neomogenă cu soluția generală

$$u = C_1 x + x^3.$$

Revenind la funcția inițială, obținem ecuația diferențială de ordinul trei

$$y^{(3)} = C_1 x + x^3.$$

Integrând succesiv ultima ecuație, avem:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2}C_1 x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C_2; \\ y' &= \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{20}x^5 + C_2 x + C_3; \\ y &= \frac{1}{24}C_1 x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ultima relație este soluția generală a ecuației din enunț.

Impunând condițiile inițiale, obținem un sistem liniar, neomogen de 4 ecuații cu necunoscutele  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Rezolvând acest sistem, găsim

$$C_1 = -1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_3 = \frac{13}{15}, \quad C_4 = \frac{1}{24}.$$

Prin urmare, soluția care îndeplinește condițiile inițiale este

$$y(x) = \frac{1}{120}x^6 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{15}x + \frac{1}{24}.$$

■

## 9.2 Ecuația $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

**Teorema 9.2.1** Fie ecuația diferențială de ordinul  $n$  de forma

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (9.5)$$

Prin transformarea  $y' = p$  și luând pe  $y$  ca variabilă independentă, ecuației date i se poate reduce ordinul cu o unitate.

**Demonstrație.** Transformarea care urmează să o efectuăm se poate scrie  $\frac{dy}{dx} = p$ . Derivând această egalitate în raport cu  $x$  obținem succesiv:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \frac{dp}{dy}; \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{d}{dx} \left( p \cdot \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( p \cdot \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \\ &= p \cdot \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2p}{dy^2}. \end{aligned}$$

Derivatele de ordin 4 și mai mare se calculează în mod asemănător.

Analizând aceste derivate, constatăm că derivata de ordinul  $k$  a funcției  $y$  în raport cu  $x$  de  $k$ -ori se obține cu ajutorul funcției  $p$  și ale derivatelor acesteia în raport cu variabila  $y$  până la ordinul  $k - 1$ .

Înlocuirea în (9.5) a tuturor derivatelor astfel calculate conduce la o ecuație diferențială de ordin  $n - 1$  în funcția necunoscută  $p = p(y)$ . ■

**Exercițiul 9.2.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$y y'' + y'^2 + y^2 = 0.$$

**Soluție.** Procedăm conform demonstrației de mai sus. Avem  $y' = p$ ,  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . Înlocuind aceste derivate în ecuație, obținem

$$y p \frac{dp}{dy} + p^2 + y^2 = 0,$$

care este o ecuație diferențială omogenă pentru că se poate scrie în forma

$$\frac{dp}{dy} = - \frac{1 + \left(\frac{p}{y}\right)^2}{\frac{p}{y}}.$$

După efectuarea schimbării  $p = yz \implies \frac{dp}{dy} = y \frac{dz}{dy} + z$  în ultima ecuație diferențială, urmată de separarea variabilelor, aceasta devine

$$\frac{dy}{y} = - \frac{z dz}{1 + 2z^2}.$$

Soluția generală a ultimei ecuații diferențiale este

$$y^4 = \frac{C_1}{1 + 2z^2}.$$

Revenind la  $p$ , soluția de mai sus se poate scrie

$$y^2 = \frac{C_1}{1 + 2p^2}$$

din care deducem

$$p^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 - y^4}{y^2}$$

care mai departe implică

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{C_1 - y^4}}{y}.$$

Ultimele ecuații obținute sunt cu variabile separabile. Efectuând separarea variabilelor, obținem

$$\frac{y dy}{\sqrt{C_1 - y^4}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{2}},$$

care integrate dau soluțiile

$$\pm \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{y^2}{\sqrt{C_1}}.$$

Soluția generală depinde de două constante arbitrare deoarece ecuația diferențială ordinară dată este de ordinul al doilea. ■

### 9.3 Ecuația $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , omogenă în $y, y', \dots, y^{(n)}$

**Teorema 9.3.1** Fie ecuația diferențială de ordinul  $n$  de forma

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (9.6)$$

omogenă în variabilele  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Prin schimbarea de funcție  $\frac{y'}{y} = u$  ordinul ecuației se reduce cu o unitate.

**Demonstrație.** Din faptul că ecuația diferențială (9.6) este omogenă în variabilele  $y, y', \dots, y^{(n)}$  rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \quad (9.7)$$

Făcând substituția  $y' = yu$ , obținem succesiv:

$$y'' = (yu)' = y'u + yu' = y(u^2 + u');$$

$$y''' = (y(u^2 + u'))' = y'(u^2 + u') + y(2uu' + u'') = y(u^3 + 3uu' + u'').$$

Derivatele următoare ale funcției  $y$  se calculează asemănător.

Din aceste calcule deducem că raportul dintre derivata de ordinul  $k$  a funcției  $y$  și funcția  $y$  este o expresie în care apar funcția  $u$  și derivatele până la ordinul  $k-1$ , deci dacă înlocuim aceste rapoarte în (9.7) obținem o ecuație diferențială de ordinul  $n-1$  în funcția necunoscută  $u$  care depinde de aceeași variabilă  $x$ . ■

**Exercițiul 9.3.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$x^2 y y'' = (y - xy')^2.$$

**Soluție.** Tipul acestei ecuații se încadrează în cel studiat mai sus pentru că funcția  $x^2 y y'' - (y - xy')^2$  este un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele  $y, y'$  și  $y''$ . Dacă facem schimbarea de funcție  $y' = uy$  obținem  $y'' = y(u^2 + u')$  și ecuația se transformă în

$$x^2(u^2 + u') = (1 - xu)^2 \implies x^2 u' + 2xu = 1,$$

care este o ecuație liniară cu soluția generală

$$u = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Amintindu-ne cine este funcția  $u$ , din ultimul rezultat obținem ecuația diferențială

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2},$$

care este o ecuație cu variabile separate. Integrarea ei conduce la

$$\ln y = \ln x - \frac{C_1}{x} + C_2 \implies y = x e^{C_2 - C_1/x},$$

unde  $x$  aparține unui interval  $I$  cuprins în intervalul  $(0, +\infty)$ . ■

## 9.4 Ecuația $F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$ , omogenă în $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$

**Teorema 9.4.1** Fie ecuația diferențială de ordinul  $n$  de forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (9.8)$$

omogenă în variabilele  $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$ . Prin schimbarea de variabilă și de funcție

$$|x| = e^t, \quad \frac{y}{x} = u \quad (9.9)$$

ordinul ecuației se reduce cu o unitate.

**Demonstrație.** Din faptul că ecuația dată este omogenă rezultă că ea se poate scrie în forma

$$G\left(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \dots, x^{n-1}y^{(n)}\right) = 0. \quad (9.10)$$

În ipoteza că intervalul  $I$  pe care se caută soluțiile ecuației (9.8) este inclus în intervalul  $(0, +\infty)$ , facem schimbarea de variabilă și de funcție

$$x = e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad u = u(t). \quad (9.11)$$

Constatăm prin calcul că obținem succesiv:

$$\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = x \frac{du}{dx} + u = x \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} + u = \frac{du}{dt} + u; \\ xy'' = x \frac{d}{dx} \left( \frac{du}{dt} + u \right) = x \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dt} + u \right) \frac{dt}{dx} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt}; \\ x^2 y''' = \frac{d^3u}{dt^3} - \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (9.12)$$

Continuând calculele pentru a determina expresia  $x^k y^{(k+1)}$ ,  $k \geq 3$ , ajungem la concluzia că aceasta se exprimă în funcție numai de derivatele până la ordinul  $k+1$  ale funcției  $u$ . Folosind (9.11) și expresiile (9.12) ale termenilor de forma  $x^s y^{(s+1)}$ ,  $s \in \overline{1, n-1}$ , constatăm că (9.10) devine o ecuație de forma

$$H\left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \dots, \frac{d^nu}{dt^n}\right) = 0, \quad (9.13)$$

care este o ecuație de forma (9.6) despre care știm că, cu schimbarea  $\frac{du}{dt} = p$ , admite o reducere a ordinului cu o unitate.

Dacă intervalul  $I \subset (-\infty, 0)$ , se fac schimbările

$$x = -e^t, \quad \frac{y}{x} = u, \quad t \in J \subset \mathbb{R}, \quad u = u(t)$$

și raționamentul decurge asemănător, în final ajungând tot la o ecuație de forma (9.13). ■

**Exercițiul 9.4.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$x^3 y'' + x y y' - y^2 = 0$$

pe un interval  $I$  cuprins în intervalul  $(0, +\infty)$ .

**Soluție.** Dacă folosim notațiile lui Leibniz pentru derivatele unei funcții reale de o variabilă reală constatăm că ecuația dată se scrie sub forma echivalentă

$$x^3 d^2y + x y dx dy - y^2 dx^2 = 0,$$

de unde se observă că ecuația este polinom omogen de grad 4 în variabilele  $x$ ,  $y$ ,  $dx$ ,  $dy$  și  $d^2y$ . Conform teoriei prezentată la acest punct, efectuând înlocuirile

$$x = e^t, \quad y = x u, \quad u = u(t),$$

deducem că derivata  $y'$  și termenul  $x y''$  se exprimă prin

$$y = u + u', \quad x y'' = u' + u''.$$

Înlocuind în ecuație, obținem

$$e^{2t}(u' + u'') + e^{2t}u(u + u') - e^{2t}u^2 = 0,$$

de unde, după simplificarea cu  $e^{2t}$ , deducem ecuația diferențială

$$u'' + u' + uu' = 0.$$

Trecând la funcția  $p$  prin  $u' = p$  deducem că  $u'' = p p'$  și ecuația diferențială dată se transformă în

$$p(p' + 1 + u) = 0. \quad (9.14)$$

Considerând că  $p = 0$  obținem  $u' = 0$ , deci  $u = C_1$  și de aici rezultă că  $y = C_1 x$  este o primă familie de soluții ale ecuației.

Anularea celui de al doilea factor din (9.14) conduce la

$$p' + 1 + u = 0 \implies \frac{dp}{du} + 1 + u = 0 \implies p = -u^2 - u - A_1.$$

Punând în ultimul rezultat  $p = \frac{du}{dx}$ , constatăm că acesta devine

$$\frac{du}{dx} = -u^2 - u - A_1,$$

care este o ecuație diferențială de tip Riccati cu soluția particulară  $u = k$ , unde  $k$  este o constantă reală, rădăcină a ecuației algebrice  $k^2 + k + A_1 = 0$ .

În cazul  $1 - 4A_1 > 0$  ecuația Riccati admite două soluții reale  $u_1 = k_1$  și  $u_2 = k_2$ . Dacă efectuăm schimbarea de funcție

$$v = \frac{u - k_1}{u - k_2},$$

ecuația Riccati devine

$$(k_1 - k_2)v' = (4A_1 - 1)v,$$

care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția generală

$$v = A_2 e^{\frac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2} x}.$$

Dacă avem în vedere că  $\frac{4A_1 - 1}{k_1 - k_2} = -(k_1 - k_2)$  rezultă că putem scrie

$$v e^{(k_1 - k_2)x} = A_2 \implies \frac{u - k_1}{u - k_2} e^{(k_1 - k_2)x} = A_2 \implies \frac{ux - k_1 x}{ux - k_2 x} e^{(k_1 - k_2)x} = A_2.$$

Însă  $ux = y$ , astfel că ultima egalitate se scrie

$$\frac{y - k_1 x}{y - k_2 x} \cdot e^{(k_1 - k_2)x} = A_2$$

din care, după operații simple, se ajunge că soluția generală a ecuației diferențiale inițiale este

$$y = \frac{k_1 \cdot e^{(k_1 - k_2)x} - A_2 k_2}{e^{(k_1 - k_2)x} - A_2} x.$$

Dacă  $1 - 4A_1 = 0$  ecuația Riccati devine  $\frac{du}{dx} = -u^2 - u - \frac{1}{4}$  și are soluția particulară  $u = -\frac{1}{2}$ . Cu substituția  $u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z}$  ea se transformă în ecuația liniară  $z' - 1 = 0$ , cu soluția generală  $z = x + \tilde{C}_3$ , de unde găsim

$$u = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3} \implies y = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x + C_3}\right)x.$$

■

## 9.5 Ecuația $F(y, xy', x^2 y'', \dots, x^n y^{(n)}) = 0$

**Teorema 9.5.1** Fie ecuația diferențială ordinară, de ordinul  $n$ , de forma

$$F(y, xy', x^2 y'', \dots, x^n y^{(n)}) = 0. \quad (9.15)$$

Prin schimbarea de variabilă  $|x| = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  în (9.15), ordinul ecuației diferențiale se reduce cu o unitate.



**Demonstrație.** Dacă intervalul  $I$  pe care este definită funcția necunoscută  $y$  este inclus în semiaxa reală pozitivă, efectuăm schimbarea de variabilă independentă  $x = e^t$ ,  $t \in J \subset \mathbb{R}$  și constatăm că variabilele ecuației (9.15) se exprimă după cum urmează

$$\begin{cases} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \implies x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}; \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right); \\ y''' &= e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right), \\ \dots &. \end{cases} \quad (9.16)$$

Din relațiile (9.16), deducem:

$$\begin{cases} x \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}; \\ x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}; \\ x^3 y''' &= \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}, \dots \end{cases} \quad (9.17)$$

Se observă că  $x^k \frac{d^k y}{dx^k}$  se exprimă numai cu primele  $k$  derivate în raport cu  $t$  ale funcției necunoscute  $y$ , acum funcție de  $t$ . Prin urmare, utilizând (9.17), ecuația (9.15) se transformă într-o ecuație diferențială de forma

$$G\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}\right) = 0, \quad (9.18)$$

unde nu apare noua variabilă independentă  $t$ . Punând  $\frac{dy}{dt} = p$  și luând pe  $y$  drept variabilă independentă, ecuației (9.18) i se poate reduce ordinul cu o unitate. ■

**Exercițiul 9.5.1** Să se integreze ecuația diferențială

$$x^3 y''^2 + 2x^2 y' y'' + 2y y' = 0,$$

pe un interval  $I \subset (0, +\infty)$ .

**Soluție.** Prin înmulțirea cu  $x$ , ecuația devine

$$\left(x^2 y''\right)^2 + 2(xy')(x^2 y'') + 2y' + 2y(xy') = 0.$$

Noua ecuație diferențială fiind de forma studiată mai sus, facem schimbarea de variabilă independentă  $x = e^t$ . Pentru ca raționamentul să fie mai clar, vom nota rezultatul compunerii funcției  $y$  cu funcția  $x = e^t$  prin  $\eta$ , adică  $y(x(t)) = y(e^t) = \eta(t)$ . Derivatele funcției  $y$ , calculate în funcție de derivatele funcției  $\eta$ , sunt:

$$\begin{cases} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \cdot \frac{d\eta}{dt}; \\ y'' &= \frac{d}{dt}(e^{-t}\eta')e^{-t} = \left(e^{-t}\frac{d^2\eta}{dt^2} - e^{-t}\frac{d\eta}{dt}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d\eta}{dt}\right). \end{cases}$$

De aici deducem

$$\begin{cases} xy' &= \frac{d\eta}{dt}; \\ x^2 y'' &= \frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{d\eta}{dt}. \end{cases}$$

În acest fel ecuația inițială devine  $\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)^2 + 2\eta \frac{d^2\eta}{dt^2} - \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = 0$ .

Deoarece în ultima ecuație diferențială nu intră variabila independentă  $t$ , luăm pe  $\frac{d\eta}{dt}$  ca funcție necunoscută și pe  $\eta$  ca variabilă independentă. Avem:

$$\frac{d\eta}{dt} = p; \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = p \frac{dp}{d\eta}$$

și ultima formă a ecuației se poate scrie

$$\left(p \frac{dp}{d\eta}\right)^2 + 2\eta p \frac{dp}{d\eta} - p^2 = 0.$$

Cu schimbarea de funcție  $p^2 = u$ , ajungem la ecuația Clairaut

$$u = \eta u' + \frac{1}{4} u'^2$$

a cărei soluție generală este

$$u = C \eta + \frac{1}{4} C^2.$$

Luând  $C = 4C_1$  și  $u = p^2$ , constatăm că

$$p^2 = 4C_1\eta + 4C_1^2.$$

Pe de altă parte,

$$p = \frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y' \cdot x.$$

Prin urmare,

$$x \cdot y' = \pm 2\sqrt{C_1y + C_1^2}.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale date este

$$\pm 2\sqrt{C_1y + C_1^2} = C_1 \ln x + C_2 \implies 4(C_1y + C_1^2) = (C_1 \ln x + C_2)^2,$$

iar din ultima expresie se poate obține forma sa explicită. ■

# Bibliografie

- [1] Adams, Robert, A. *Calculus. A complete Course*, Forth ed., Addison–Wesley, 1999
- [2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G., *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986
- [3] Bucur, Gh. Câmpu, E., Găină, S. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. III*, Editura Tehnică, București 1967
- [4] Crstici, B. (coordonator) *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [5] Calistru, N., Ciobanu, Gh. *Curs de analiză matematică. Vol. I*, Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, 1988
- [6] Chiriță, S. *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, București 1989
- [7] Colojoară, I. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1983
- [8] Craiu, M., Tănase, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1980
- [9] Crăciun, I. *Calcul diferențial*, Editura Lumina, București, 1997
- [10] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, Al., Fetecău, C. *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială și programare liniară*. Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, 1984
- [11] Cruceanu, V. *Algebră liniară și geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1973

- [12] Dieudonné, J. *Fondements de l'analyse moderne*. Gauthier–Villars, Paris 1963
- [13] Dixon, C. *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester· New York· Brisbane· Toronto 1981
- [14] Donciu, N., Flondor, D., Simionescu, Gh. – *Algebră și analiză matematică*. Vol I, Vol II. Culegere de probleme. Editura Didactică și Pedagogică, București 1964
- [15] Evgrafov, M., Béjanov, K., Sidorov, Y., Fédoruk, M., Chabounine, M. *Recueil de problèmes sur la theorie des fonctions analytiques*, Deuxième édition, Éditions Mir, Moscou 1974
- [16] Flondor, P., Stănășilă, O. *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Ediția a II-a, Editura ALL, București 1996
- [17] Fulks, W. *Advanced Calculus. An introduction to analysis*, third edition, John Wiley & Sons, New York· Santa Barbara· Chichester· Brisbane· Toronto 1978
- [18] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. II*, Editura Tehnică, București 1966
- [19] Gheorghiu, N., Precupanu, T. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1979
- [20] Hewitt, E., Stromberg, K. *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York 1965
- [21] Marinescu, Gh. *Analiză matematică, vol. I, Ediția a V-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1980
- [22] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *Analiză matematică, vol I, ediția a patra*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1971
- [23] Olariu, V. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981
- [24] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1983

- [25] Precupanu, A. *Bazele analizei matematice*, Editura Universității Al. I. Cuza, Iași 1993
- [26] Sburlan, S. *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, București 1991
- [27] Sirețchi, G. *Calcul diferențial și integral. Vol. I, II*, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985
- [28] Radu, C., Drăgușin, C., Drăgușin, L. *Aplicații de algebră, geometrie și matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1991
- [29] Smirnov, V. *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxième édition, tome II, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou 1972
- [30] Stănășilă, O. *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981
- [31] Sykorski, R. *Advanced Calculus. Functions of several variables*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa 1969
- [32] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988
- [33] Zeldovitch, I., Mychkis, A. *Éléments de mathématiques appliquées*, Éditions Mir, Moscou 1974

# APLICAȚII ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL

Material pentru uzul  
studenților de la  
FACULTATEA DE  
MECANICĂ





# Contents

<b>1</b>	<b>Aplicații ale calculului diferențial</b>	<b>5</b>
1.1	Extreme ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale . . . .	5
1.1.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	5
1.1.2	Exemple și exerciții propuse . . . . .	21
1.2	Funcții definite implicit . . . . .	22
1.2.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	22
1.2.2	Exemple și exerciții propuse . . . . .	37
1.3	Extreme ale funcțiilor definite implicit . . . . .	41
1.3.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	41
1.3.2	Probleme propuse . . . . .	50
1.4	Extreme condiționate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange .	50
1.4.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	50
1.4.2	Probleme propuse . . . . .	81
1.5	Extremele funcțiilor reale definite pe mulțimi compacte în $\mathbb{R}^m$	84
1.5.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	84
1.5.2	Probleme propuse . . . . .	91
1.6	Transformări punctuale regulate . . . . .	93
1.6.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	93
1.6.2	Probleme propuse . . . . .	95
1.7	Dependență și independență funcțională . . . . .	97
1.7.1	Exemple și exerciții rezolvate . . . . .	97
1.7.2	Exemple și exerciții propuse . . . . .	100
1.8	Schimbări de variabile . . . . .	102
1.8.1	Schimbarea variabilei independente în ecuații diferențiale ordinare . . . . .	102
1.8.2	Schimbarea ambelor variabile într-o ecuație diferențială ordinară . . . . .	105

1.8.3	Schimbarea variabilelor independente în expresii diferențiale cu derivate parțiale . . . . .	107
1.8.4	Schimbarea tuturor variabilelor într-o ecuație diferențială . . . . .	114
1.8.5	Exemple și exerciții propuse . . . . .	119

# Chapter 1

## Aplicații ale calculului diferențial

### 1.1 Extreme ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

#### 1.1.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.1.1** Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y.$$

**Soluție.** Determinăm punctele critice (staționare) ale funcției  $f$ .

Întrucât funcția  $f$  este de clasă  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , pentru determinarea acestor puncte staționare, trebuie să calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ . Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 4xy^2 - 8, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 + 4x^2y + 8.$$

Soluțiile sistemului obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$

$$\begin{cases} x^4 + xy^2 &= 2 \\ y^3 + x^2y &= -2 \end{cases}$$

vor fi ppunctele staționare ale funcției  $f$ . Sistemul obținut este omogen. După adunarea ecuațiilor și împărțirea cu  $y^3$  se ajunge la ecuația

$$t^3 + t^2 + t + 1 = 0, \quad t = \frac{x}{y}.$$

Singura soluție reală a ecuației în  $t$  este  $t_0 = -1$  și pentru a determina punctele staționare avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 + xy^2 = 2. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim că singurul punct staționar este  $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$ .

Pentru a decide natura acestui punct staționar trebuie să calculăm valorile derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ . Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) = (12x^2 + 4y^2) \Big|_{(1,-1)} = 16; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) = (8xy) \Big|_{(1,-1)} = -8;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) = (12y^2 + 4x^2) \Big|_{(1,-1)} = 16.$$

Hessiana funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este matricea pătratică simetrică de ordinul al doilea

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei matrice sunt  $\Delta_1 = 16 > 0$  și  $\Delta_2 = \det H_f(\mathbf{x}_0) = 192 > 0$  și, după criteriul lui Sylvester, rezultă că  $\mathbf{x}_0 = (1, -1)$  este punct de minim local al funcției  $f$ , iar valoarea minimă este  $f_{\min} = f(1, -1) = -12$ . ■

**Exercițiul 1.1.2** Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right),$$

unde  $D$  este domeniul format din toate punctele primului cadran al reperului  $xOy$ .

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}y - \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + \frac{1}{3}(47 - x - y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}x - \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right) + \frac{1}{4}(47 - x - y). \end{cases}$$

Sistemul dedus după anularea acestor derivate are în final forma

$$\begin{cases} 8x + y = 4 \cdot 47 \\ x + 6y = 3 \cdot 47. \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este  $x_0 = 21$ ,  $y_0 = 20$  și deci singurul punct staționar al funcției este  $M_0(21, 20)$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{2}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{1}{12}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{1}{2}.$$

Diferențiala a doua a funcției  $f$  într-un punct arbitrar  $M(x, y) \in D$  este

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2.$$

În punctul staționar determinat rezultă că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0(x_0, y_0)$  este

$$d^2 f(x_0, y_0) = -\frac{2}{3}dx^2 - \frac{1}{6}dxdy - \frac{1}{2}dy^2.$$

Observăm că această formă pătratică se poate scrie ca

$$d^2 f(x_0, y_0) = -\frac{1}{6}\left[\left(2dx + \frac{1}{4}dy\right)^2 + \frac{47}{16}dy^2\right],$$

de unde deducem că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul staționar găsit este o formă pătratică negativ definită ceea ce atrage că  $M_0$  este punct de maxim. Valoarea maximă locală a funcției  $f$  este  $f_{\max} = f(M_0) = 220$ . ■

### Exemplul 1.1.1 Funcția reală de două variabile reale

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$$

are două puncte staționare. Unul dintre ele este punct de maxim iar celălalt este punct de tip șa.

**Soluție.** Sistemul ale cărui soluții sunt punctele staționare ale funcției  $f$  este

$$\begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ y^2 + 7x + 12 = 0. \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ (x - y)(x + y + 7) = 0. \end{cases}$$

Ultimul sistem este echivalent cu două sisteme dintre care doar

$$\begin{cases} x^2 + 7y + 12 = 0, \\ x + y + 7 = 0. \end{cases}$$

are soluții reale. Rezolvându-l, se găsesc două soluții,  $(-4, -4)$  și  $(-3, -3)$ . Prin urmare, funcția  $f$  are două puncte staționare  $M_1$  și  $M_2$ , unde  $M_1(-4, -4)$ ,  $M_2(-3, -3)$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  au expresiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 21, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y,$$

iar valorile acestora în punctele staționare sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_1) = -24, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_1) = 21, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_1) = -24, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_2) = -18, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_2) = 21, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_2) = -18. \end{cases}$$

Diferențialele de ordinul al doilea în punctele staționare au expresiile:

$$\begin{cases} d^2 f(M_1) = -24dx^2 + 42dxdy - 24dy^2, \\ d^2 f(M_2) = -18dx^2 + 42dxdy - 18dy^2, \end{cases}$$

Fiecare diferențială este o formă pătratică definită pe  $\mathbb{R}^2$ . Vom încerca să scriem aceste forme pătratice ca sume de pătrate, ceea ce înseamnă a le aduce la expresii canonice ale lor.

Vom folosi metoda lui Gauss de aducere a unei forme pătratice la o expresie canonică a sa. Aceasta constă în grupări ale termenilor după procedeul:

- dacă termenul care conține  $dx^2$  are coeficientul nenul, atunci se grupează toți termenii care au ca factor pe  $dx$ ;
- în cazul că nu există termen care să conțină  $dx^2$ , se aplică pasul precedent în care  $dx$  se înlocuiește cu  $dy$ ;
- se adună și se scade termenul care lipsește din dezvoltarea unui binom la pătrat;
- se reduc termenii asămănători după care se reia procedeul în care rolul lui  $dx$  (sau după caz  $dy$ ) îl are  $dy$  (respectiv  $dx$ );
- dacă nu există termeni care să conțină  $dx^2$  și  $dy^2$ , iar coeficientul termenului ce conține produsul  $dxdy$  este diferit de zero, atunci se efectuează schimbarea  $dx = d\xi + d\eta$ ,  $dy = d\xi - d\eta$ . În acest mod, expresia diferențială a doua a funcției  $f$  într-un punct va avea un termen care conține  $d\xi^2$  și se reia procedeul de la primul pas;

- în final, aplicarea repetată a acestui procedeu conduce la o expresie a diferențialei a doua a funcției  $f$  într-un punct ca o sumă de pătrate.

Procedeul de scriere a unei forme pătratice ca o sumă de pătrate se poate aplica și atunci când forma pătratică are mai mult de două variabile, după cum vom vedea într-un alt exemplu, în care funcția căreia îi cercetăm punctele de extrem are trei sau mai multe variabile. În cazul unei funcții de trei variabile, pasul al treilea se înlocuiește corespunzător cu pasul:

- se adună și se scad termenii care lipsesc din dezvoltarea unui trinom la pătrat.

Aplicând aici metoda descrisă, găsim:

$$d^2f(M_1) = -6\left(2dx - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{45}{8}dy^2; \quad d^2f(M_2) = -2\left(3dx - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{13}{2}dy^2.$$

Examinarea acestor expresii ale celor două diferențiale arată că prima este o formă pătratică negativ definită, iar a doua este formă pătratică nedefinită. Prin urmare,  $M_1$  este un punct de maxim în timp ce punctul  $M_2$  nu este punct de extrem, este punct șa. ■

### Exercițiul 1.1.3 Determinați punctele din $\mathbb{R}^2$ în care, local, funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 2$$

are valori extreme.

**Soluție.** Funcția dată este infinit diferențiabilă iar derivatele sale parțiale de primele două ordine sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 9y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 9x;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -9, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y.$$

Sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  are două soluții,  $O(0, 0)$  și  $M_1(3, 3)$  iar diferențialele corespunzătoare au expresiile

$$\begin{aligned} d^2f(0, 0) &= -18dxdy, \\ d^2f(3, 3) &= 18dx^2 - 18dxdy + 18dy^2. \end{aligned}$$

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în origine este formă pătratică nedefinită (are valori atât negative cât și nenegative pentru diverse valori ale lui  $dx$  și  $dy$ ), aceasta arătând că originea este un punct de tip  $\text{șa}$  a funcției.

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în cel de al doilea punct critic este formă pătratică pozitiv definită deoarece, folosind metoda lui Gauss, se poate scrie

$$d^2f(3, 3) = 18 \left[ \left( dx - \frac{1}{2}dy \right)^2 + \frac{3}{4}dy^2 \right]$$

și, prin urmare, punctul  $M_1(3, 3)$  este punct de minim local. Valoarea minimă locală a funcției este  $f_{\min} = f(3, 3) = 0$ .

Se constată că există o vecinătate  $V$  a punctului  $M_1$  cu proprietatea

$$f(x, y) > f(3, 3) = 0, \quad (\forall) \ M(x, y) \in V \setminus M_1,$$

fapt ce conduce la concluzia că punctul  $M_1$  este un punct de minim local strict al funcției  $f$ . ■

**Exercițiul 1.1.4** Să se determine punctele de extrem ale funcției  $z = xy^2e^{x-y}$  pe domeniul ei maxim de definiție.

**Soluție.** Domeniul maxim de definiție al funcției este  $\mathbb{R}^2$ .

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției sunt:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2(x+1)e^{x-y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xy(2-y)e^{x-y}.$$

Rezolvând sistemul care dă punctele staționare se găsesc:

$$M_1(0, 0); \quad M_2(-1, 0); \quad M_3(-1, 2).$$

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $z$  sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) &= y^2(x+2)e^{x-y}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= y(x+1)(2-y)e^{x-y}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) &= x(2-4y+y^2)e^{x-y}. \end{cases}$$



Diferențiala a doua a funcției  $z$  într-un punct oarecare  $M(x, y)$  este

$$d^2z(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y)dy^2.$$

Diferențiala a doua a funcției  $z$  în  $M_2$  este  $d^2z(M_2) = -\frac{2}{e}dy^2$  și se constată că este o formă pătratică negativă, deci  $M_2$  este punct de maxim local al funcției.

Diferențiala a doua a funcției în  $M_3$ ,  $d^2z(M_3) = \frac{2}{e^3}(2dx^2 + dy^2)$ , este formă pătratică pozitiv definită, ceea ce arată că  $M_3$  este punct de minim local al funcției.

Diferențiala a doua a funcției  $z$  în punctul  $M_1$  este identic nulă indiferent de valorile lui  $dx$  și  $dy$ .

Prin urmare, nu putem decide asupra naturii punctului staționar  $M_1(0, 0)$ .

În acest caz se poate aplica definiția punctului de extrem și pentru aceasta se studiază semnul creșterii  $f(x, y) - f(0, 0)$  în vecinătatea originii.

Creșterea

$$f(x, y) - f(0, 0) = xy^2e^{x-y}$$

nu păstrează semn constant în oricare din vecinătățile originii și deci punctul  $M_1(0, 0)$  nu este punct de extrem local al funcției  $z$ ; este punct de tip șa. ■

**Exercițiul 1.1.5** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale până la ordinul doi inclusiv ale funcției sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 15, & \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= 6xy - 12; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) &= 6x, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6y, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) &= 6x. \end{aligned}$$

Din anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi, efectuată pentru a se determina punctele staționare ale funcției, se obține

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y = \pm 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Rezolvarea ultimelor două sisteme conduce la patru puncte staționare

$$M_1(1, 2), \quad M_2(2, 1), \quad M_3(-1, -2), \quad M_4(-2, -1).$$

Matricele hessiene corespunzătoare celor patru puncte staționare au elementele

$$\begin{aligned} H_z(M_1) &= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, & H_z(M_2) &= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \\ H_z(M_3) &= \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, & H_z(M_4) &= \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru a stabili natura formelor pătratice  $d^2z(M_1)$ ,  $d^2z(M_2)$ ,  $d^2z(M_3)$ ,  $d^2z(M_4)$  care, cu ajutorul matricelor hessiene, se scriu în forma

$$\left\{ \begin{aligned} d^2z(M_1) &= (dx \, dy) \cdot H_z(M_1) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \\ d^2z(M_2) &= (dx \, dy) \cdot H_z(M_2) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \\ d^2z(M_3) &= (dx \, dy) \cdot H_z(M_3) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \\ d^2z(M_4) &= (dx \, dy) \cdot H_z(M_4) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \end{aligned} \right.$$

Valorile proprii ale oricărei din cele patru diferențiale sunt aceleași cu ale matricei hessiene corespunzătoare.

Valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrică  $A$ , cu elementele  $a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$  și  $a_{22}$ , sunt rădăcinile ecuației caracteristice  $P(\lambda) = 0$ , unde  $P(\lambda)$  este polinomul caracteristic al matricei

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A, \end{aligned}$$

iar  $I_2$  este matricea unitate de ordinul doi.

O rădăcină a ecuației caracteristice a unei matrice pătratice simetrică  $A$  se numește fie *valoare proprie* a acesteia, fie *valoare proprie* a formei pătratice  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  care în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are matricea  $A$ .

O formă pătratică  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , care în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are matricea  $A$ , are expresia analitică

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  este un vector arbitrar din  $\mathbb{R}^2$ .

Cele patru polinoame caracteristice  $P_1(\lambda)$ ,  $P_2(\lambda)$ ,  $P_3(\lambda)$ ,  $P_4(\lambda)$  ale respectiv celor patru diferențiale ale funcției  $z$  în punctele staționare  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$  sunt

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda - 18), & P_2(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda - 18), \\ P_3(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda + 18), & P_4(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda + 18). \end{aligned}$$

Criteriul pe care îl vom utiliza pentru a determina natura unei forme pătratice  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a cărei matrice  $A$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are rădăcinile caracteristice  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$ , constă în următoarele:

- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice  $f$  sunt pozitive, atunci forma pătratică este pozitiv definită;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice  $f$  sunt negative, atunci forma pătratică este negativ definită;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice  $f$  sunt nenegative, atunci forma pătratică este pozitivă;
- dacă toate valorile proprii ale formei pătratice  $f$  sunt nepozitive, atunci forma pătratică este negativă;
- dacă  $\lambda_1 > 0$ , iar  $\lambda_2 < 0$ , atunci forma pătratică este nedefinită.

Natura punctului staționar analizat depinde de natura diferențialei a doua a funcției în acel punct, aceeași cu natura formei pătratice cu care se exprimă această diferențială.

Aplicând funcției  $z$  criteriul descris, găsim:

- punctele  $M_1$  și  $M_3$  nu sunt puncte de extrem ale funcției  $z$ ; ele sunt puncte de tip șa;
- punctul  $M_2$  este un punct de minim local al funcției și  $f_{\min} = f(M_2) = -28$ ;
- punctul  $M_4$  este un punct de maxim local al funcției și  $f_{\max} = f(M_4) = 36$ .

■

**Exercițiul 1.1.6** Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y.$$

**Soluție.** Sistemul obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  are o singură soluție  $(1, 2)$ . Prin urmare, funcția  $f$  are un singur punct staționar  $M_0(1, 2)$ .

Hessiana funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este  $H_f(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Polinomialul caracteristic al acestei matrice este

$$P(\lambda) = \det H_f(M_0) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda),$$

iar valorile proprii sunt ambele pozitive. Aceasta arată că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$

$$d^2 f(M_0) = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2$$

este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage că  $M_0$  este punct de minim local.

Să observăm că expresia algebrică a funcției  $f$  se poate pune sub forma

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x - y)^2 + \frac{3}{4}(y - 2)^2 - 3,$$

de unde deducem  $f(x, y) \geq -3$ , oricare ar fi punctul  $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , egalitatea având loc dacă și numai dacă  $x = 1$  și  $y = 2$ . Aceasta arată că punctul  $M_0(1, 2)$  este punct de minim global strict iar  $f(M_0) = -3$  este valoare minimă globală strictă. ■

**Exercițiul 1.1.7** Arătați că funcția

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y},$$

definită pe mulțimea deschisă  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ , are o valoare minimă locală strictă.

**Soluție.** Funcția  $f$  fiind infinit diferențiabilă, determinăm valorile extreme ale sale stabilindu-i mai întâi punctele critice.

Anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  conduce la un sistem care are  $(5, 2)$  drept soluție unică. Prin urmare, funcția  $f$  are un singur punct critic,  $M_0(5, 2)$ . În acest punct derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  au valorile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(5, 2) = \frac{4}{5}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(5, 2) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(5, 2) = 5.$$

Ecuția caracteristică a matricei hessiene corespunzătoare  $H_f(M_0)$ ,

$$5\lambda^2 - 29\lambda + 15 = 0,$$

are ambele rădăcini pozitive și deci  $d^2f(M_0)$  este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage că  $M_0$  este punct de minim local strict. Valoarea minimă locală strictă a funcției  $f$  este  $f_{\min} = f(5, 2) = 30$ . ■

**Observația 1.1.1** Criteriul descris în ultimele două exerciții poate fi generalizat astfel încât să se poată aplica pentru determinarea punctelor de extrem local ale unei funcții reale de trei sau mai multe variabile reale.

**Exemplul 1.1.2** Funcția reală de trei variabile reale

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

are un singur punct staționar care nu este punct de extrem.

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  au expresiile:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + 32, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y - 2z.$$

Coordonatele punctelor staționare sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} xy + 16 = 0, \\ x^2 + z = 0, \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -8, \\ z_0 = -4. \end{cases}$$

Deci singurul punct staționar este  $M_0(2, -8, -4)$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  în punctul curent  $M(x, y, z)$ , sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) &= 2x; & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) &= 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) &= 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) &= 1; & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) &= -2. \end{aligned}$$

Hessiana asociată funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , unde  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , este

$$H_f(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei  $H_f(\mathbf{x}_0)$  este

$$P(\lambda) = \det H_f(\mathbf{x}_0) - \lambda I_3 = \begin{vmatrix} -16 - \lambda & 4 & 0 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 18\lambda^2 - 15\lambda + 18.$$

Ecuația caracteristică  $P(\lambda) = 0$  nu poate avea toate rădăcinile pozitive căci  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -18 < 0$ , dar nici toate negative deoarece produsul lor este pozitiv,  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 18$ . Mai precis, folosind șirul lui Rolle pentru determinarea pozițiilor celor trei rădăcini constatăm că  $\lambda_1 < 0$  și  $\lambda_2 < 0$  iar

$\lambda_3 > 0$ . Există atunci o bază în spațiul vectorial  $\mathbb{R}^3$  în care forma pătratică are expresia canonică

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1(dx')^2 + \lambda_2(dy')^2 + \lambda_3(dz')^2,$$

rezultat care arată că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este o formă pătratică nedefinită. Prin urmare  $\mathbf{x}_0$  nu este punct de extrem; este punct de tip șa. ■

**Exercițiul 1.1.8** *Determinați punctele de extrem local ale funcției*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  au expresiile

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2y + 2z \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6y - 2x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z + 2x. \end{cases}$$

Funcția  $f$  fiind diferențiabilă, eventualele puncte de extrem local ale sale se află printre punctele staționare ale lui  $f$ . Pentru a determina aceste puncte staționare trebuie să rezolvăm sistemul obținut din anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ . După simplificarea prin 2 a fiecăreia dintre ecuații se ajunge la sistemul

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - x = 0 \\ 2z + x = 0. \end{cases}$$

a cărui soluție unică este  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$ . Prin urmare, singurul punct staționar al funcției  $f$  este originea sistemului  $Oxyz$ .

Pentru a decide asupra naturii punctului staționar trebuie să determinăm matricea  $H_f(\mathbf{x}_0)$ , hessiana funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ .

Această hessiană este o matrice pătratică simetrică de ordinul al treilea care are pe linii componentele gradientilor derivatelor parțiale de ordinul întâi

calculate în  $\mathbf{x}_0$ . Efectuând aceste calcule, găsim

$$H_f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lanțul minorilor principali ai acestei matrice este

$$\Delta_1 = |2| = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta_3 = \det H_f(\mathbf{0}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8.$$

Deoarece toți minorii principali ai hessienei  $H_f(\mathbf{x}_0)$  sunt pozitivi, conform criteriului lui Sylvester, rezultă că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = 2dx^2 + 6dy^2 + 4dz^2 - 4dxdy + 4dxdz$$

este o formă pătratică pozitiv definită și deci punctul critic determinat este punct de minim relativ pentru funcția  $f$ . ■

**Exercițiul 1.1.9** *Determinați punctele de extrem local ale funcției*

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{1}{z},$$

unde  $D = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

**Soluție.** Vom calcula derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției. Avem:

$$f_{,1}(x, y, z) = 1 - \frac{y^2}{4x^2}, \quad f_{,2}(x, y, z) = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}, \quad f_{,3}(x, y, z) = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}.$$

Din sistemul obținut prin anularea acestor derivate se deduc

$$\begin{cases} f_{,1}(x, y, z) = 0 \\ f_{,2}(x, y, z) = 0 \\ f_{,3}(x, y, z) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \\ \frac{z}{y} - \frac{1}{z^2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2x, \\ z = y, \\ y = z^3. \end{cases}$$



Ultimul sistem are soluția

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{2}, \\ y &= 1, \\ z &= 1 \end{cases}$$

Prin urmare, singurul punct staționar al funcției este  $M_0(\frac{1}{2}, 1, 1)$ .

Determinăm diferențiala a doua a funcției în punctul  $M_0$

$$\begin{aligned} d^2 f(M_0) &= f_{,11}(M_0)dx^2 + f_{,22}(M_0)dy^2 + f_{,33}(M_0)dz^2 + \\ &+ 2(f_{,12}(M_0)dxdy + f_{,23}(M_0)dydz + f_{,31}(M_0))dzdx. \end{aligned}$$

Pentru aceasta avem nevoie de valorile derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  în punctul  $M_0$ . Avem:

$$\begin{cases} f_{,11}(x, y, z) = \frac{y^2}{2x^3}; & f_{,22}(x, y, z) = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}; & f_{,33}(x, y, z) = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}; \\ f_{,12}(x, y, z) = -\frac{y}{2x^2}; & f_{,23}(x, y, z) = -\frac{2z}{y^2}; & f_{,31}(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

De aici rezultă că valorile derivatelor parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  în punctul  $M_0$  sunt:

$$\begin{cases} f_{,11}(M_0) = 4; & f_{,22}(M_0) = 3; & f_{,33}(M_0) = 6; \\ f_{,12}(M_0) = -2; & f_{,23}(M_0) = -2; & f_{,31}(M_0) = 0. \end{cases}$$

Atunci diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este forma pătratică

$$d^2 f(M_0) = 4dx^2 + 6dy^2 + 3dz^2 - 4dxdy - 4dzdx.$$

Folosim metoda lui Gauss de aducere a unei forma pătratice la o sumă de pătrate.

În acest scop, pentru că există un termen ce îl conține pe  $dx^2$ , grupăm toți termenii ce au ca factor pe  $dx$  și alcătuim cu aceștia un pătrat perfect. Găsim

$$d^2 f(M_0) = 4(dx - \frac{1}{2}dy - \frac{1}{2}dz)^2 + 5dy^2 - 2dydz + 2dz^2.$$

Pentru că există termenul ce îl conține pe  $dy^2$ , procedăm similar cu termenii ce conțin factorul  $dy$ . În cele din urmă se obține

$$d^2f(M_0) = 4(dx - \frac{1}{2}dy - \frac{1}{2}dz)^2 + 5(dy - \frac{1}{5}dz)^2 + \frac{9}{5}dz^2,$$

de unde se vede că forma pătratică care exprimă diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este pozitiv definită și deci punctul staționar determinat este punct de minim pentru funcția  $f$ . ■

**Exercițiul 1.1.10** *Determinați punctele de extrem local ale funcției*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x + 2y - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2x + 2y - z - 3 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -y + 2z - 1. \end{cases}$$

Sistemul format prin anularea acestor derivate are soluția  $(1, 1, 1)$  și deci funcția are un singur punct staționar  $M_0(1, 1, 1)$ .

Hessiana funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este

$$H_f(M_0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru a stabili natura formei pătratice care reprezintă diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$ . Pentru aceasta calculăm polinomul caracteristic al matricei hessiene

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 1)$$

și apoi rezolvăm ecuația caracteristică  $P(\lambda) = 0$ . Constatăm că  $\lambda_1 = 2 > 0$ ,  $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$ ,  $\lambda_3 = 2 + \sqrt{5}$ . Rezultă că diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este o formă pătratică nedefinită ceea ce atrage că punctul  $M_0$  nu este punct de extrem, este un punct de tip șa. ■

### 1.1.2 Exemple și exerciții propuse

**Exercițiul 1.1.11** *Să se găsească punctele staționare (critice) și apoi să se selecționeze punctele de extrem pentru funcția*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 - 1. \quad (1.1)$$

**Răspuns.** Punctul critic  $(0, 0)$  nu este punct de extrem. Punctele critice  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  și  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  sunt puncte de minim local strict. Funcția  $f$  are aceeași valoare minimă în cele două puncte de minim  $f_{\min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -9$ . ■

**Exercițiul 1.1.12** *Să se determine punctele de extrem ale funcției*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 - 3x^2 - 3x + y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y.$$

**Răspuns.** Există șase puncte staționare:

$$\begin{aligned} M_1(1 + \sqrt{2}, 2); \quad M_2(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}); \quad M_3(1 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}); \\ M_4(1 - \sqrt{2}, 2); \quad M_5(1 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3}); \quad M_6(1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

$M_1$ ,  $M_5$  și  $M_6$  sunt puncte de tip șa;  $M_2$  și  $M_3$  sunt puncte de minim;  $M_4$  este punct de maxim.

**Exercițiul 1.1.13** *Să se studieze dacă funcția*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 6xy - 2x$$

*are puncte de extrem.*

**Răspuns.** Funcția  $f$  are punctul staționar  $M_0\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$  care nu este punct de extrem deoarece hessiana funcției în acest punct nu are valorile proprii de același semn:  $\lambda_1 = 5 - 3\sqrt{5} < 0$ ;  $\lambda_2 = 5 + 3\sqrt{5} > 0$ ;  $\lambda_3 = 18 > 0$ . Prin urmare  $d^2f(M_0)$  este formă pătratică nedefinită ceea ce înseamnă că  $M_0$  este punct de tip șa pentru funcția  $f$ . ■

**Exemplul 1.1.3** *Funcția reală de trei variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2(xy + yz + x + y + 3z)$$

are în punctul  $M_0(-3, 5, -8)$  un minim global strict.

## 1.2 Funcții definite implicit

### 1.2.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exemplul 1.2.1** *Dacă  $F \in C^2(D_0)$  și  $y = f(x)$  este funcția definită implicit de ecuația  $F(x, y) = 0$ , atunci*

$$f''(x) = -\frac{F_{,xx}(F_{,y})^2 - 2F_{,xy}F_{,x}F_{,y} + F_{,yy}(F_{,x})^2}{(F_{,y})^3}(x, f(x)).$$

**Soluție.** Într-adevăr, din teorema de existență și unicitate a unei funcții reale  $y = f(x)$ , de o variabilă reală, definită implicit de ecuația  $F(x, y) = 0$  rezultă mai întâi

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}.$$

Pentru a calcula derivata secundă a funcției  $f$ , aplicăm operația de derivare în această egalitate. Avem

$$f''(x) = (f')'(x) = -\left(\frac{F_{,x}(x, f(x))}{F_{,y}(x, f(x))}\right)'.$$

Calculăm această derivată folosind regula de derivare a câtului și regula de derivare a funcțiilor compuse după care înlocuim valoarea lui  $f'(x)$ . În acest mod constatăm că se obține rezultatul dorit. ■

**Exercițiul 1.2.1** *Să se arate că ecuația*

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^4 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - 3xy = 0,$$

definește implicit funcția reală de două variabile reale  $z = f(x, y)$  într-o vecinătate a punctului  $M_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  și apoi să se calculeze  $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

**Soluție.** Trebuie să verificăm că sunt îndeplinite ipotezele teoremei de existență și unicitate a unei funcții definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ . Aceste ipoteze sunt:

- funcția  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  trebuie să fie de clasă cel puțin  $C^3(\mathbb{R}^3)$ ;
- în punctul  $M_0$  trebuie ca  $F(M_0) = 0$ ;
- derivata parțială în raport cu variabila  $z$  a funcției  $F$  în punctul  $M_0$  trebuie să fie nenulă.

Funcția  $F$ , fiind o funcție polinom, este de clasă  $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , deci prima dintre ipoteze este verificată.

Constatăm că  $F(M_0) = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = 0$ , ceea ce arată că și a doua ipoteză este verificată.

Derivata parțială de ordinul întâi a funcției  $F$  într-un punct oarecare din  $\mathbb{R}^3$  este

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3 - 3z,$$

iar valoarea acesteia în punctul  $M_0$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \frac{3\sqrt{6}}{2},$$

este diferită de zero și prin urmare ultima ipoteză este satisfăcută.

Conform teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de două variabile reale definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , există un disc închis  $\overline{B}((x_0, y_0), h)$  cu centrul în punctul  $(x_0, y_0)$  și raza  $h > 0$ , un număr  $k > 0$  și o unică funcție

$$f : \overline{B}((x_0, y_0), h) \rightarrow [z_0 - k, z_0 + k],$$

de trei ori diferentiabilă, care satisface condiția  $f(x_0, y_0) = z_0$  și identitatea

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0 \quad \text{pe mulțimea } \overline{B}((x_0, y_0), h).$$

Pentru a obține derivata menționată în enunț, procedăm astfel:

- derivăm identitatea  $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$  în raport cu  $y$  și în raport cu  $x$  după care luăm  $x = x_0$  și  $y = y_0$ , de aici rezultând  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  și respectiv  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ;

- identităților obținute li se aplică operația de derivare în raport cu  $x$ , de aici calculându-se  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$  și respectiv  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ ;
- aplicând penultimei identități operația de derivare parțială în raport cu  $x$  se determina derivata parțială de ordinul al treilea a funcției  $f$  menționată în enunț.

Având în vedere expresia funcției  $F$  rezultă că identitatea care urmează a fi derivată parțial conform procedurii descris este

$$x^3 + y^3 + (f(x, y))^4 - \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + (f(x, y))^2) - 3xy \equiv 0.$$

Cele cinci identități obținute prin derivările specificate sunt:

$$\begin{cases} 3(y^2 - y - x) + (4f^3(x, y) - 3f(x, y))\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \equiv 0, \\ 3(x^2 - x - y) + (4f^3(x, y) - 3f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \equiv 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 + 3(4f^2(x, y) - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + (4f^3(x, y) - 3f(x, y))\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \equiv 0, \\ 3(2x - 1) + 3(4f^2(x, y) - 1)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + (4f^3(x, y) - 3f(x, y))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \equiv 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 24f(x, y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + (4f^3(x, y) - 3f(x, y))\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) + \\ & + 3(4f^2(x, y) - 1)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Din primele două seturi de identități se obțin derivatele:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{12}; & \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{19\sqrt{6}}{72}; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{6}}{72}, \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{12}; \end{cases}$$

iar din ultima identitate se obține

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{59\sqrt{6}}{144},$$

care este derivata parțială din enunț. ■

**Exercițiul 1.2.2** Funcția  $z = z(x, y)$  este definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \varphi(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$

$\alpha, \beta$  și  $\gamma$  fiind constante reale arbitrare, iar  $u \mapsto \varphi(u)$  o funcție reală diferențiabilă pe un interval  $I \subset \mathbb{R}$ .

Să se arate că derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$  satisface egalitatea

$$(\gamma y - \beta z) \frac{\partial z}{\partial x} + (\alpha z - \gamma x) \frac{\partial z}{\partial y} = \beta x - \alpha y.$$

**Soluție.** În ipotezele menționate, funcția  $F$  este derivabilă și

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \alpha \varphi'(u) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - \beta \varphi'(u) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z - \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 2z - \gamma \varphi'(u), \end{cases}$$

unde am făcut notația  $u = \alpha x + \beta y + \gamma z$ .

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , sunt

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Înlocuind aceste derivate parțiale de ordinul întâi ale funcției  $F$ , calculate în punctul  $(x, y, z(x, y))$ , găsim că derivatele parțiale ale funcției  $z = z(x, y)$  au expresiile

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{2x - \alpha \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}{2z - \gamma \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{2y - \beta \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}{2z - \gamma \varphi'(u(x, y, z(x, y)))}, \end{cases}$$

unde  $u(x, y, z(x, y)) = \alpha x + \beta y + \gamma z(x, y)$ .

Înmulțind derivata parțială a lui  $z$  în raport cu variabila  $x$  cu  $\gamma y - \beta z(x, y)$  și cealaltă derivată parțială a funcției  $z = z(x, y)$  cu  $\alpha z(x, y) - \gamma x$  și sumând rezultatele, găsim că

$$(\gamma y - \beta z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + (\alpha z(x, y) - \gamma x) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \beta x - \alpha y,$$

ceea ce arată că funcția  $z = z(x, y)$  satisface egalitatea din enunț. ■

**Exemplul 1.2.2** Funcția  $F(x, y, z) = \Phi\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right)$ , unde  $\Phi$  este o funcție diferențiabilă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$ , este astfel încât ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit funcția diferențiabilă  $z = z(x, y)$ .

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z$  satisfac egalitatea

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**Soluție.** Într-adevăr, știind că există derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , acestea se calculează după regula

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Pentru a determina derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $F$ , folosim regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse. Notând în prealabil cu  $u$  și  $v$  variabilele funcției  $\Phi$  și aplicând această regulă, obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v}; \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{z}{y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u}; \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{cases}$$



Atunci, derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z$  vor fi

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial \Phi}{\partial v}}{\frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial v}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{z}{y^2} \frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial v}}. \end{cases}$$

Înmulțind aceste expresii cu  $x$  și respectiv  $y$  și adunând membru cu membru rezultatele înmulțirii constatăm că egalitatea din enunț este satisfăcută.

■

**Exercițiul 1.2.3** Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{fixați}, \quad F \in C^1(D), \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

verifică relația

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + b \cdot zy(x, y) = 1.$$

**Soluție.** Vom nota  $F(x, y, z) = \Phi(x - az, y - bz)$  precum și  $u = x - az$ ,  $v = y - bz$ . În felul acesta funcția  $\Phi$  are variabilele  $u$  și  $v$ . Determinăm derivatele parțiale ale funcției  $F$  folosind regula lanțului de derivare a unei funcții compuse. Avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = -a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} - b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}. \end{cases}$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , se calculează după regula

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}.$$

Folosind rezultatele precedente găsim că

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}{a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}{a \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}}. \end{cases}$$

Examinând expresiile acestor derivate parțiale constatăm că

$$a \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + b \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = 1$$

și deci funcția  $z = z(x, y)$  satisface egalitatea din enunț. ■

**Exemplul 1.2.3** Ecuația  $\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$  definește implicit funcția reală diferențiabilă  $z = z(x, y)$ . Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acesteia satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

**Soluție.** Într-adevăr, notând  $F(x, y, z) = \Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$  și aplicând formulele de calcul ale derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{z(x, y) \cdot \Phi_{,1}(u, v)}{x \cdot \Phi_{,1}(u, v) + y \cdot \Phi_{,2}(u, v)} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{z(x, y) \cdot \Phi_{,2}(u, v)}{x \cdot \Phi_{,1}(u, v) + y \cdot \Phi_{,2}(u, v)}. \end{cases}$$

Variabilele intermediare  $u$  și  $v$  ale funcției  $\Phi$ , notate la un moment dat cu 1 și 2, sunt funcții de  $x, y$  și  $z$ , însă în relațiile de mai sus  $z$  se consideră că fiind înlocuit cu expresia sa rezultată din ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , adică

$$u(x, y, z(x, y)) = \frac{x}{z(x, y)}, \quad v(x, y, z(x, y)) = \frac{y}{z(x, y)}.$$

Se vede imediat că  $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \equiv z(x, y)$ , ceea ce arată că  $z = z(x, y)$  este o soluție a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi din enunț. ■

**Exemplul 1.2.4** Funcția reală  $F \in \mathcal{F}(D)$  de clasă  $C^1$  pe mulțimea deschisă  $D \subset \mathbb{R}^3$  este astfel încât:

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Dacă funcțiile reale:

$$x = f(y, z); \quad y = g(z, x); \quad z = h(x, y)$$

sunt soluțiile ecuației  $F(x, y, z) = 0$  care satisfac condițiile inițiale:

$$x_0 = f(y_0, z_0), \quad y_0 = g(z_0, x_0), \quad z_0 = h(x_0, y_0),$$

atunci

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(z_0, x_0) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -1.$$

Într-adevăr, deoarece

$$F \in C^1(D), \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

rezultă că ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit funcția  $z = h(x, y)$  într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$  și

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

În mod similar deducem:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(z_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(y_0, z_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste trei egalități se obține relația dorită. ■

**Exemplul 1.2.5** Fie  $\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ , unde

$$F_1(x, y, z, y_1, y_2) = x + yz - y_1y_2 - y_1^2, \quad F_2(x, y, z, y_1, y_2) = x - y + y_1^3 - y_2^3.$$

Să se arate că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \\ F_2(x, y, z, y_1, y_2) = 0, \end{cases}$$

definește implicit pe  $y_1$  și  $y_2$  ca funcții de variabilele  $x, y, z$  într-o vecinătate a punctului  $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$  și să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestor funcții în punctul  $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

**Soluție.** Într-adevăr, din expresiile algebrice ale componentelor funcției  $\mathbf{F}$  se vede că  $\mathbf{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^2)$ . Apoi, există punctul  $(1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ , cu proprietatea

$$\mathbf{F}(1, 1, 1, 1, 1) = 0.$$

Matricea jacobiană  $J_{\mathbf{F}}(x, y, z, y_1, y_2)$ , unde  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , este

$$J_{\mathbf{F}}(x, y, z, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 - 2y_1 & -y_1 \\ 3y_1^2 & -3y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Determinantul acestei matrice este jacobianul

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(x, y, z, y_1, y_2) = 3y_1^3 + 3y_2^3 + 6y_1y_2^2.$$

Se vede că

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y_1, y_2)}(1, 1, 1, 1, 1) \neq 0.$$

Prin urmare, într-o vecinătate  $V_0$  a punctului  $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$  există funcțiile  $f_1, f_2$  de clasă  $C^\infty$  cu proprietățile:

$$f_1(1, 1, 1) = 1, \quad f_2(1, 1, 1) = 1;$$

$$\begin{cases} F_1(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0, \\ F_2(x, y, z, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = 0, \quad (\forall) (x, y, z) \in V_0. \end{cases}$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor  $f_1$  și  $f_2$  se obțin din sistemele algebrice:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ 1 + 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial x} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0; \\ z - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \\ -1 + 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial y} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0; \\ y - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - f_1 \frac{\partial f_2}{\partial z} - 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0, \\ 3f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial z} - 3f_2^2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0. \end{cases},$$

care se deduc derivând succesiv în raport cu  $x, y$  și  $z$  egalitatea  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{0}$ , unde  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  iar  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ .

Rezolvând aceste sisteme și făcând apoi în soluțiile găsite  $x = y = z = 1$ , obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{1}{6}, & \frac{\partial f_2}{\partial x}(1, 1, 1) = \frac{1}{2}; \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1, 1) = \frac{1}{3}, & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1, 1, 1) = 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(1, 1, 1) = \frac{1}{4}, & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1, 1, 1) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

De remarcat că aceste rezultate se puteau obține și direct utilizând formulele de derivare parțială a unei funcții vectoriale de variabilă vectorială definită implicit de ecuația vectorială  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ . ■

**Exercițiul 1.2.4** Calculați derivatele parțiale  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$  și  $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ , unde  $z = z(x, y)$  este funcția definită implicit de ecuația  $\Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ , iar funcția  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$  admite derivate parțiale continue pe mulțimea  $D$  deschisă în  $\mathbb{R}^2$ .

**Soluție.** Introducem notațiile

$$F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2), \quad \begin{cases} u &= u(x, y, z) = x + y + z, \\ v &= v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2. \end{cases}$$

Cu aceste notații rezultă că funcția  $z = z(x, y)$  este definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$  și satisfac identitatea

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$$

pe o submulțime a spațiului  $\mathbb{R}^2$  care rezultă în urma aplicării teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de două variabile reale definită implicit de ecuația de mai sus.

Pentru a obține prima dintre derivatele menționate în enunț, derivăm identitatea de mai sus în raport cu  $x$  ținând cont că

$$F(x, y, z(x, y)) = \Phi(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$$

și folosind pentru aceasta regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse. Avem:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0 \implies \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv 0$$

Din ultima identitate determinăm expresia primei derivate

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))) + 2x \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))) + 2z \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}.$$

Schema de calcul de mai sus se poate aplica și în privința variabilei  $y$  obținând în acest mod

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))) + 2y \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y))) + 2z \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))}.$$

În expresiile acestor derivate trebuie avut în vedere că

$$u(x, y, z(x, y)) = x + y + z(x, y), \quad v(x, y, z(x, y)) = x^2 + y^2 + z^2(x, y)$$

aceste egalități rezultând din expresiile concrete ale variabilelor intermediare  $u$  și  $v$ . ■

### Exemplul 1.2.6 Sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{cases}$$

definește implicit, în anumite condiții, funcțiile  $x = x(z)$  și  $y = y(z)$ . Concluziile teoremei de existență și unicitate a unui sistem de funcții reale de o variabilă reală definit implicit de acest sistem de ecuații permit calculul derivatelor funcțiilor sistemului.

**Soluție.** Într-adevăr, funcțiile  $F_1(x, y, z) = x + y + z$  și  $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  sunt de clasă  $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ . În orice punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  care satisface sistemul din enunț și pentru care  $x_0 \neq y_0$ , determinantul funcțional

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$$

este diferit de zero. Ca urmare, într-o vecinătate a punctului  $M_0$  în care  $x \neq y$ , sistemul din enunț definește funcțiile infinit diferențiabile  $x = x(z)$  și  $y = y(z)$ . Aceste funcții satisfac sistemul

$$\begin{cases} x(z) + y(z) + z &= 0 \\ x^2(z) + y^2(z) + z^2 &= 1. \end{cases}$$

Să derivăm ambele ecuații ale acestui sistem. Obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz}(z) + \frac{dy}{dz}(z) &= -1 \\ x(z) \cdot \frac{dx}{dz}(z) + y(z) \cdot \frac{dy}{dz}(z) &= -z. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, găsim

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz}(z) = \frac{y(z) - z}{x(z) - y(z)}, \\ \frac{dy}{dz}(z) = \frac{z - x(z)}{x(z) - y(z)}. \end{cases}$$

Prin derivarea expresiilor acestor derivate se pot obține derivatele de orice ordin ale funcțiilor  $x = x(z)$  și  $y = y(z)$ . ■

**Exercițiul 1.2.5** Arătați că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$x\varphi(z) + \psi(z) - y = 0,$$

unde  $\varphi, \psi \in C^2(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea, neliniară

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0.$$

**Soluție.** Dacă  $z = z(x, y)$  este funcția definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x\varphi(z) + \psi(z) - y = 0,$$

atunci are loc identitatea  $F(x, y, z(x, y)) \equiv 0$ , adică

$$x\varphi(z(x, y)) + \psi(z(x, y)) - y \equiv 0,$$

pe care o vom deriva parțial în raport cu ambele variabile independente  $x$  și  $y$ , folosind de fiecare dată regula lanțului de derivare a unei funcții compuse de două variabile. Obținem:

$$\begin{cases} \varphi(z(x, y)) + x\varphi'(z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + \psi'(z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 0; \\ x\varphi'(z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + \psi'(z(x, y)) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) - 1 = 0. \end{cases}$$

Din aceste egalități rezultă derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\varphi(z(x, y))}{x\varphi'(z(x, y)) + \psi'(z(x, y))}; \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x\varphi'(z(x, y)) + \psi'(z(x, y))}. \end{cases}$$



Pentru a obține mai rapid derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $z = z(x, y)$ , derivăm expresiile derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției, prima în raport cu  $x$  și apoi cu  $y$ , iar a doua în raport cu  $y$ . Deoarece în expresiile astfel găsite vor apare derivatele parțiale de ordinul întâi, acestea se vor înlocui cu expresiile lor. În felul acesta se obțin derivatele parțiale de ordinul al doilea. De notat că peste tot unde apare variabila  $z$  ea trebuie considerată ca fiind  $z(x, y)$ . Expresiile acestor derivate secunde sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{2(x\varphi'(z) + \psi'(z))\varphi(z)\varphi'(z) - (x\varphi''(z) + \psi''(z))\varphi^2(z)}{(x\varphi'(z) + \psi'(z))^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{(x\varphi''(z) + \psi''(z))\varphi(z) - (x\varphi'(z) + \psi'(z))\varphi'(z)}{(x\varphi'(z) + \psi'(z))^3}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{x\varphi''(z) + \psi''(z)}{(x\varphi'(z) + \psi'(z))^3}. \end{cases}$$

Pentru a arăta că funcția  $z = z(x, y)$  este soluția ecuației diferențiale din enunț, să observăm în prealabil că

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) \left( \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) \left( \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{(x\varphi'(z) + \psi'(z))^2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) + 2\varphi(z(x, y)) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) + \varphi^2(z(x, y)) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) \right). \end{aligned}$$

Verificarea faptului că  $z = z(x, y)$  este o soluție a ecuației diferențiale este de acum o banalitate. ■

**Exercițiul 1.2.6** Să se găsească câțiva termeni a dezvoltării după puterile lui  $x - 1$  și  $y - 1$  a funcției  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0.$$

**Soluție.** Observăm că ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit funcția infinit diferențiabilă  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  într-o vecinătate a punctului  $(1, 1, 1)$  și aceasta pentru că  $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $F(1, 1, 1) = 0$ , iar derivata parțială a funcției  $F$  în raport cu  $z$  în punctul  $(1, 1, 1)$  este diferită de zero. Funcția  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  are proprietățile:  $z(1, 1) = 1$ ;  $F(x, y, z(x, y)) \cong 0$ ; este diferențiabilă de orice ordin; derivatele de diverse ordine se pot determina diferențiind de câte ori avem nevoie identitatea  $F(x, y, z(x, y)) \cong 0$ .

Dacă impunem ca dezvoltarea funcției  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  după puterile binoamelor  $x - 1$  și  $y - 1$  să conțină termeni de cel mult gradul al doilea, atunci aceasta poate rezulta din formula lui Taylor cu restul de ordinul doi

$$\begin{aligned} z(x, y) &= z(1, 1) + dz((1, 1); (x - 1, y - 1)) + \\ &+ \frac{1}{2} d^2 z((1, 1); ((x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1))) + \\ &+ \frac{1}{6} d^3 z((\xi, \eta); (x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1)), \end{aligned}$$

unde punctul  $(\xi, \eta)$  aparține segmentului deschis cu extremitățile în punctele  $(1, 1)$  și  $(x, y)$ .

După neglijarea restului, se obține formula aproximativă

$$z(x, y) \cong z(1, 1) + dz((1, 1); (x - 1, y - 1)) + \frac{1}{2} d^2 z((1, 1); ((x - 1, y - 1), (x - 1, y - 1))).$$

Pentru determinarea celor două diferențiale, diferențiem de două ori identitatea  $F(x, y, z(x, y)) \cong 0$ . Se obține:

$$\begin{aligned} (3z^2 + y)dz &= (3x^2 + y^2)dx + (2xy - z)dy; \\ (3z^2 + y)d^2z &= 6xdx^2 + 4ydx dy + 2xdy^2 - 2dydz - 6zdz^2. \end{aligned}$$

De aici se obțin diferențialele funcției  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  în punctul  $(1, 1)$

$$\begin{aligned} dz(1, 1) &= dx + \frac{1}{4}dy, \\ d^2z(1, 1) &= -\frac{1}{4}dxdy + \frac{9}{64}dy^2. \end{aligned}$$

Considerând că  $dx = x - 1$  și  $dy = y - 1$  obținem în final formula de aproximare

$$z(x, y) \cong 1 + (x - 1) + \frac{1}{4}(y - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)(y - 1) + \frac{9}{64}(y - 1)^2,$$

pentru valori mici ale lui  $|x - 1|$  și  $|y - 1|$ . ■

### 1.2.2 Exemple și exerciții propuse

**Exercițiul 1.2.7** Să se arate că funcția  $z = f(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$G\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0,$$

verifică relația

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y) - z_0.$$

**Exercițiul 1.2.8** Să se arate că funcția  $z = f(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$G(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0,$$

verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$(y-f(x, y))\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (f(x, y)-x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x-y.$$

**Exercițiul 1.2.9** Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = (z+y)\sin z - y(x+z) = 0,$$

satisfacă ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Răspuns.** Derivatele parțiale ale funcției  $z$  sunt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + (z+y)\cos z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z-\sin z}{\sin z + (z+y)\cos z - y}$$

iar pentru a demonstra că acestea verifică ecuația dată se ține cont de faptul că  $z = z(x, y)$  satisface identitatea  $F(x, y, z(x, y)) = 0$ . ■

**Exemplul 1.2.7** Funcția  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = y(x+z) - (y+z)f(z),$$

iar  $f$  este o funcție reală de variabilă reală, diferențiabilă, satisface identitatea

$$z(x+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Indicație.** Se calculează derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$  după formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

și în final se folosește faptul că funcția  $z$  satisface ecuația  $F(x, y, z) = 0$ . ■

**Exemplul 1.2.8** Funcția  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2xz - 2yf(z) = 0,$$

satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale

$$(y^2 - x^2 + 2xz)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y(z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

**Exercițiul 1.2.10** Se dă ecuația

$$F(x + 2y, y - 2x) = 1$$

care definește pe  $y$  ca funcție de  $x$ . În ipoteza că  $F$  admite derivate parțiale de ordinul doi continue în domeniul  $D \subset \mathbb{R}^2$ , să se calculeze  $y'$  și  $y''$ .

**Indicație.** Notăm  $x + 2y = u$ ,  $y - 2x = v$  și derivăm de două ori identitatea

$$F(u(x), v(x)) - 1 \equiv 0,$$

unde  $u(x) = x + 2y(x)$ ,  $v(x) = y(x) - 2x$ .

**Răspuns.**

$$y'(x) = \frac{2F_{,v}(u(x), v(x)) - F_{,u}(u(x), v(x))}{2F_{,u}(u(x), v(x)) + F_{,v}(u(x), v(x))},$$

$$y''(x) = -\frac{F_{,uu} \cdot (u'(x))^2 + 2F_{,uv} \cdot u'(x) \cdot v'(x) + F_{,vv} \cdot (v'(x))^2}{2F_{,u}(u(x), v(x)) + F_{,v}(u(x), v(x))},$$

în care  $u'(x) = 1 + 2y'(x)$ ,  $v'(x) = y'(x) - 2$ , urmând ca derivata  $y'(x)$  să fie înlocuită cu expresia sa de mai sus. ■

**Exercițiul 1.2.11** Funcția  $(u, v) \mapsto F(u, v)$  este astfel încât ecuația

$$F(y + \sin x, x + \cos y) = 0$$

definește implicit funcția  $x \mapsto y(x)$ , de două ori derivabilă. Să se calculeze derivatele  $y'(x)$  și  $y''(x)$ .

**Indicație.** Se derivează de două ori identitatea

$$F(y(x) + \sin x, x + \cos y(x)) \equiv 0$$

folosind regulile de derivare ale funcției compuse  $f(x) = F(u(x), v(x))$  în care:

$$u(x) = y(x) + \sin x; \quad v(x) = x + \cos y(x).$$

Prima derivată rezultă din

$$F_u(u(x), v(x)) \cdot (y'(x) + \cos x) + F_v(u(x), v(x)) \cdot (1 - y'(x) \sin x) \equiv 0,$$

iar cea de a doua din

$$F_{uu}(u(x), v(x)) \cdot (u'(x))^2 + 2F_{uv}(u(x), v(x)) \cdot u'(x) \cdot v'(x) + \\ + F_{vv}(u(x), v(x)) \cdot (v'(x))^2 + F_u(u(x), v(x)) \cdot u''(x) + F_v(u(x), v(x)) \cdot v''(x) \equiv 0.$$

**Răspuns.**

$$y'(x) = \frac{F_u(u(x), v(x)) \cos x + F_v}{F_v(u(x), v(x)) \sin y(x) - F_u(u(x), v(x))};$$

$$y'' = \frac{E(F_u, F_v, F_{uu}, F_{uv}, F_{vv})}{(F_v \sin y(x) - F_u)^3},$$

unde  $E(F_u, F_v, F_{uu}, F_{uv}, F_{vv})$  este un polinom de gradul al treilea cu coeficienți funcții de  $x$ . ■

**Exercițiul 1.2.12** Să se afle derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor

$$(x, y) \mapsto u(x, y), \quad (x, y) \mapsto v(x, y)$$

definite implicit de sistemul

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = x - u^2 - v = 0, \\ F_2(x, y, u, v) = y^2 - uv + v^2 = 0. \end{cases}$$

**Indicație.** Se poate proceda pe două căi: fie aplicând formulele care dau derivatele parțiale menționate în enunț, fie derivând sistemul dat întâi în raport cu variabila  $x$  și apoi cu  $y$  și rezolvând sistemele obținute în care necunoscute sunt derivatele parțiale ale funcțiilor  $u$  și  $v$ .

**Răspuns.**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u - 2v}{2u^2 - 4uv - v}, & \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{4uv + v - 2u^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{4uv + v - 2u^2}; & \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4uy}{2u^2 - 4uv - v}. \end{cases}$$

Variabilele  $u$  și  $v$  din membrul doi sunt funcții de  $x$  și  $y$ . ■

**Exercițiul 1.2.13** Să se calculeze diferențialele  $du$  și  $dv$  ale funcțiilor  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$ , definite implicit de sistemul:

$$e^u + u \sin v = x; \quad e^u - u \cos v = y.$$

**Indicație.** Se diferențiază în ambii membri ai ecuațiilor sistemului și se rezolvă sistemul obținut în care necunoscutele sunt diferențialele  $du$  și  $dv$ .

**Răspuns.**

$$\begin{aligned} du &= \frac{\sin v}{1 + (\sin v - \cos v)e^u} dx - \frac{\cos v}{1 + (\sin v - \cos v)e^u} dy, \\ dv &= \frac{e^u + \sin v}{u[1 + (\sin v - \cos v)e^u]} dx - \frac{e^u - \cos v}{u[1 + (\sin v - \cos v)e^u]} dy, \end{aligned}$$

în care se ține cont că  $u$  și  $v$  sunt funcții de  $x$  și  $y$ . ■

**Exercițiul 1.2.14** Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și doi ale funcției  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = \Phi(x + z, y + z),$$

iar  $(u, v) \rightarrow \Phi(u, v)$  este o funcție diferențiabilă de două ori pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

**Indicație.** Se notează  $u = x + z$ ,  $v = y + z$ , se diferențiază de două ori egalitatea  $\Phi(u, v) = 0$  și se ține cont că  $du = dx + dz$ ,  $dv = dy + dz$ ,  $d^2u = d^2v = d^2z$ .

**Răspuns.**

$$dz = -\frac{\Phi_{,u}}{\Phi_{,u} + \Phi_{,v}}dx - \frac{\Phi_{,v}}{\Phi_{,u} + \Phi_{,v}}dy;$$

$$d^2z = -\frac{(\Phi_{,v})^2\Phi_{,uu} - 2\Phi_{,u}\Phi_{,v}\Phi_{,uv} + (\Phi_{,u})^2\Phi_{,vv}}{(\Phi_{,u} + \Phi_{,v})^3}(dx - dy)^2.$$

■

**Exercițiul 1.2.15** Funcțiile  $F$  și  $G$ , definite pe mulțimi deschise în  $\mathbb{R}^2$ , sunt astfel încât sistemul

$$\begin{cases} F(x + y + z, xy + zu) - 1 = 0, \\ G(x + y + z, xz + y^2 + u^2) = 0 \end{cases}$$

definește implicit pe  $z$  și  $u$  ca funcții de  $x$  și  $y$ . Se cer:

$$dz; \quad du; \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

**Indicație.** Se diferențiază fiecare ecuație a sistemului și se obține sistemul

$$\begin{cases} (F_{,1} + uF_{,2})dz + zF_{,2}du = -(F_{,1} + yF_{,2})dx - (F_{,1} + xF_{,2})dy, \\ (G_{,1} + xG_{,2})dz + 2uG_{,2}du = -(G_{,1} + zG_{,2})dx - (G_{,1} + 2yG_{,2})dy, \end{cases}$$

din care se determină  $dz$  și  $du$ . Derivatele parțiale cerute sunt coeficienții lui  $dx$  și  $dy$  din expresiile diferențialelor  $dz$  și  $du$ . ■

## 1.3 Extreme ale funcțiilor definite implicit

### 1.3.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.3.1** Să se determine extremele locale ale funcției reale  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$$

și să se dea o interpretare geometrică rezultatelor.

**Soluție.** Funcția  $F$  este infinit diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^3$  iar derivata sa parțială în raport cu  $z$ ,  $F_{,z}(x, y, z) = 2z - 4$ , este diferită de zero într-o vecinătate a oricărui punct  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  pentru care  $F(\mathbf{x}_0) = 0$  și  $z_0 \neq 2$ .

Dacă  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  este un astfel de punct, atunci conform teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de două variabile reale definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , într-o vecinătate  $V_0 \in \mathcal{V}(\mathbf{x}_0)$  ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit funcția reală  $z = z(x, y)$ , infinit diferențiabilă pe discul închis

$$\overline{B}((x_0, y_0); h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq h\} \subset xOy.$$

Valorile funcției  $z = z(x, y)$  sunt în intervalul  $[z_0 - k, z_0 + k]$  iar mulțimea

$$\overline{B}((x_0, y_0); h) \times [z_0 - k, z_0 + k] \subset V_0$$

este o porțiune din cilindrul circular de rază  $h$  și înălțime  $2k$ , cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$ , ale cărei baze sunt două discuri de rază  $h$  situate în planele  $z = z_0 - k$  și  $z = z_0 + k$ . Ambele discuri sunt paralele cu planul  $xOy$ , centrele lor fiind în punctele  $(x_0, y_0, z_0 - k)$  și  $(x_0, y_0, z_0 + k)$ .

Funcția  $z = z(x, y)$  astfel definită are în plus proprietățile:

$$z_0 = z(x_0, y_0); \quad F(x, y, z(x, y)) = 0, \quad (\forall) (x, y) \in \overline{B}((x_0, y_0); h).$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$ , în punctele discului  $\overline{B}((x_0, y_0); h)$ , sunt date de:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}; \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Pentru a determina punctele de extrem ale funcției  $z = z(x, y)$  trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul 1 ale acesteia.

Dar, din (1.2) rezultă că anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$  implică anularea derivatelor de ordinul întâi ale funcției



$F$ . În plus, trebuie avut în vedere că interesează doar acele puncte  $(x, y, z)$  în care  $F(x, y, z) = 0$ . Rezultă că punctele staționare ale funcției  $z = z(x, y)$  sunt date de sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 2y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

cu soluțiile  $(1, -1, -2)$  și  $(1, -1, 6)$ , pentru care  $z \neq 2$ . Fiecare din punctele  $(1, -1, -2)$  și  $(1, -1, 6)$  poate fi interpretat ca punct de forma  $(x_0, y_0, z_0)$  din raționamentul descris la începutul exercițiului.

Corespunzător primului punct, avem funcția definită implicit  $z = z_1(x, y)$ , cu punctul staționar  $(1, -1)$  și în care valoarea ei este  $z_1(1, -1) = -2$ .

Același punct staționar îl are și funcția  $z = z_2(x, y)$ , definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$  în vecinătatea punctului  $(1, -1, 6)$ .

Pentru a decide natura punctului staționar pentru fiecare din cele două funcții trebuie să calculăm  $d^2 z_1(1, -1)$  și  $d^2 z_2(1, -1)$ .

Diferențiind de două ori ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , obținem:

$$\begin{cases} (x-1)dx + (y+1)dy + (z-2)dz = 0; \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 + (z-2)d^2 z = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dacă în a doua din relațiile (1.4) luăm drept  $z$ , pe rând, cele două funcții definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , găsim:

$$\begin{cases} dx^2 + dy^2 + (dz_1(x, y))^2 + d^2 z_1(x, y) = 0; \\ dx^2 + dy^2 + (dz_2(x, y))^2 + d^2 z_2(x, y) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Din aceste relații, considerând  $x = 1$  și  $y = -1$ ,  $z_1(1, -1) = -2$  și  $z_2(1, -1) = 6$ ,  $dz_1(1, -1) = 0$  și  $dz_2(1, -1) = 0$ , rezultă

$$d^2 z_1(1, -1) = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2), \quad d^2 z_2(1, -1) = -\frac{1}{4}(dx^2 + dy^2).$$

Aceste diferențiale sunt forme pătratice pe  $\mathbb{R}^2$ , prima pozitiv definită, a doua negativ definită. Așadar, funcția  $z = z_1(x, y)$  are în  $(1, -1)$  un punct

de minim, iar pentru funcția  $z = z_2(x, y)$ , același punct este un punct de maxim. Valoarea minimă a funcției  $z = z_1(x, y)$  este  $z_1(1, -1) = -2$  iar valoarea maximă a funcției  $z = z_2(x, y)$  este  $z_2(1, -1) = 6$ .

Pentru a interpreta geometric rezultatele, să scriem ecuația  $F(x, y, z) = 0$  în forma echivalentă

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 - 16 = 0 \quad (1.6)$$

ce, în  $\mathbb{R}^3$ , reprezintă sfera cu centrul în punctul  $C(1, -1, 2)$  și raza 4. Punctele sferei în care nu se poate aplica teorema de existență și unicitate sunt cele de pe cercul mare al sferei aflat în planul  $z = 2$ . În oricare alt punct  $\mathbf{x}_0$  al sferei nesituat pe acest cerc, ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit pe  $z$  ca funcție de  $x$  și  $y$ . Dacă acest punct este situat oriunde pe semisfera inferioară planului  $z = 2$ , din (1.6) rezultă că funcția  $z = z(x, y)$  are expresia

$$z(x, y) = 2 - \sqrt{16 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2},$$

iar dacă punctul  $\mathbf{x}_0$  se află pe cealaltă semisferă, funcția  $z = z(x, y)$  are expresia

$$z(x, y) = 2 + \sqrt{16 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2}.$$

Cele două puncte determinate prin rezolvarea sistemului (1.3) sunt, primul pe emisfera inferioară ( $z < 2$ ), iar cel de al doilea pe semisfera superioară.

Așadar, funcțiile  $z = z_1(x, y)$  și  $z = z_2(x, y)$  sunt

$$z_1(x, y) = 2 - \sqrt{16 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2},$$

$$z_2(x, y) = 2 + \sqrt{16 - (x - 1)^2 - (y + 1)^2}.$$

Cum punctele  $M_1(1, -1, -2)$  și  $M_2(1, -1, 6)$  au aceleași abscise și aceleași ordonate cu centrul sferei, rezultă că  $M_1$  este *polul sud* al sferei iar  $M_2$  *polul nord*, ele fiind și puncte sferei de cote extreme.

Punctele  $M_1$  și  $M_2$  sunt puncte de extrem global ale respectiv funcțiilor  $z_1$  și  $z_2$ . ■

**Exercițiul 1.3.2** Să se determine extremele locale ale funcției reale  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0.$$

**Soluție.** Funcția  $F$  satisface ipotezele teoremei de existență și unicitate a unei funcții definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , deoarece  $F$  este diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^3$ , există puncte, de exemplu  $M_1(1, 2, 2)$ , în care  $F(M_1) = 0$  iar  $F_{,z}(1, 2, 2) = (2z+1)|_{(1,2,2)} = 5 \neq 0$ . Prin urmare, în vecinătatea punctului  $M_1$ , există funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ .

Pentru determinarea punctelor de extrem ale funcției definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$  într-o vecinătate a unui punct din  $\mathbb{R}^3$ , calculăm

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = -2y + 4,$$

iar apoi rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \\ -2y + 4 = 0, \\ x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluțiile:

$$(1, 2, -3); \quad (1, 2, 2); \quad (-1, 2, -2); \quad (-1, 2, 1),$$

care pot fi interpretate ca puncte în  $\mathbb{R}^3$ . În toate aceste puncte,  $F_{,z}(x, y, z) = 2z + 1$  este diferită de zero.

Pentru funcțiile  $z = z_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$  în vecinătăți ale punctelor:

$$M_1(1, 2, 2); \quad M_2(1, 2, -3); \quad M_3(-1, 2, -2); \quad M_4(-1, 2, 1)$$

există punctele staționare

$$M'_1(1, 2); \quad M'_2(1, 2) \equiv M'_1; \quad M'_3(-1, 2); \quad M'_4(-1, 2) \equiv M'_3.$$

Pentru a determina natura acestor puncte staționare, calculăm diferențiala de ordinul doi pentru fiecare din funcțiile  $z = z_i(x, y)$

$$\begin{aligned} d^2 z_i(x, y) &= -\frac{1}{F_{,z}(x, y, z_i(x, y))} (F_{,xx}(x, y, z_i(x, y))dx^2 + \\ &+ 2F_{,xy}(x, y, z_i(x, y))dxdy + F_{,yy}(x, y, z_i(x, y))dy^2). \end{aligned}$$

Înlocuind derivatele parțiale secunde ale lui  $F$ , găsim:

$$d^2 z_i(x, y) = -\frac{2}{2z_i(x, y) + 1}(3xdx^2 - dy^2).$$

Corespunzător celor patru puncte și totodată celor patru funcții, avem:

$$\begin{cases} d^2 z_1(1, 2) &= \frac{2}{5}(3dx^2 - dy^2); \\ d^2 z_2(1, 2) &= -\frac{2}{5}(3dx^2 - dy^2); \\ d^2 z_3(-1, 2) &= -\frac{2}{3}(3dx^2 + dy^2); \\ d^2 z_4(-1, 2) &= \frac{2}{3}(3dx^2 + dy^2). \end{cases}$$

Primele două diferențiale sunt forme pătratice nedefinite pe  $\mathbb{R}^2$ , a treia este formă pătratică negativ definită în timp ce a patra este o formă pătratică pozitiv definită. În concluzie,

- punctul  $M'_1(1, 2)$  este punct de tip  $\text{șa}$  atât pentru funcția  $z = z_1(x, y)$  cât și pentru funcția  $z = z_2(x, y)$ ;
- $M'_3(-1, 2)$  este punct de maxim al funcției  $z = z_3(x, y)$ ;
- $M'_4(-1, 2)$  este punct de minim al funcției  $z = z_4(x, y)$ ;
- valoarea maximă a funcției  $z = z_3(x, y)$  este  $-2$ ;
- valoarea minimă a funcției  $z = z_4(x, y)$  este  $1$ .

Nu putem să ne pronunțăm dacă punctele de extrem ale funcțiilor  $z = z_3(x, y)$  și  $z = z_4(x, y)$  sunt globale. În mod cert însă ele sunt puncte de extrem local. ■

**Exercițiul 1.3.3** Să se determine extremele funcției  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2.$$

**Soluție.** Ecuația dată este echivalentă cu

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1.7)$$

unde

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2.$$

Funcția  $F$  satisface ipotezele teoremei de existență și unicitate a funcțiilor definite implicit de ecuația (1.7), deci există funcția  $z = z(x, y)$  care satisface identitatea

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0, \quad (1.8)$$

într-o vecinătate a unui punct  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , cu  $z_0 \neq 0$  și  $F(\mathbf{x}_0) = 0$ .

Funcția definită implicit pe o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0)$  este infinit diferențiabilă și în orice punct al acestei vecinătăți

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y))}, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z(x, y)) &\neq 0. \end{aligned}$$

Se pot indica cel puțin două puncte  $\mathbf{x}_0$  care se încadrează în ipotezele teoremei de existență și unicitate:

$$\mathbf{x}_0 = \left(0, 0, -\sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}\right); \quad \mathbf{x}_0 = \left(0, 0, \sqrt{\frac{\sqrt{1+4a^2}-1}{2}}\right), \quad (1.9)$$

în vecinătatea cărora există funcțiile  $z = z_1(x, y)$  și  $z = z_2(x, y)$  definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ .

Pentru a determina punctele de extrem ale funcției  $z = z(x, y)$  trebuie să determinăm mai întâi punctele sale critice, soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are două soluții și acestea sunt date în (1.9). Prin urmare, fiecare din funcțiile  $z = z_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ , are originea  $(0, 0)$  ca punct staționar.

Pentru determinarea naturii punctelor staționare ale celor două funcții, calculăm  $d^2 z_i(0, 0)$ ,  $i = 1, 2$ , fie după formula de calcul

$$d^2 z_i(0, 0) = -\frac{1}{F_{,z}(0, 0, z_i(0, 0))} \left( F_{,xx}(0, 0, z_i(0, 0)) dx^2 + \right. \\ \left. + 2F_{,xy}(0, 0, z_i(0, 0)) dx dy + F_{,yy}(0, 0, z_i(0, 0)) dy^2 \right),$$

fie diferențiind de două ori în egalitatea (1.7) după care se ia  $x = 0, y = 0$ ,  $z = z_i(0, 0)$ , cu  $i = 1, 2$ . Găsim:

$$d^2 z_i(0, 0) = -\frac{1}{z_i(0, 0)(1 + 2z_i^2(0, 0))} \left( (1 + 2z_i^2(0, 0)) dx^2 + 2z_i^2(0, 0) dy^2 \right).$$

Se observă că natura formei pătratice prin care se exprimă diferențialele de ordin doi în origine ale respectiv funcțiilor  $z = z_1(x, y)$  și  $z = z_2(x, y)$  depinde doar de semnul lui  $z_i(0, 0)$ ,  $i = 1, 2$ .

Cum  $z_1(0, 0) < 0$  și  $z_2(0, 0) > 0$ , rezultă că  $d^2 z_1(0, 0)$  și  $d^2 z_2(0, 0)$  sunt forme pătratice, prima pozitiv definită, iar a doua negativ definită.

În concluzie,  $z = z_1(x, y)$ ,  $z = z_2(x, y)$  au în origine un punct de minim, respectiv punct de maxim. ■

**Exercițiul 1.3.4** Să se determine extremele locale ale funcției  $z = f(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0.$$

**Soluție.** Domeniul de definiție al funcției reale  $F$  de mai sus poate fi considerat că este întreg spațiul  $\mathbb{R}^3$ , prin urmare  $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ . Funcția  $F$  este infinit diferențiabilă iar derivatele sale parțiale de ordinul întâi sunt:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - z + 2; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - z + 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -x - y + 2z + 2.$$

Putem afirma că ecuația  $F(x, y, z) = 0$  definește implicit pe  $z$  ca funcție reală  $f$  de variabilele reale  $x$  și  $y$  în vecinătatea oricărui punct  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{E}^3$  pentru care avem îndeplinite condițiile:  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ;  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Nu este dificil de constatat că astfel de puncte  $M_0$  există. Presupunând că

$M_0$  este un astfel de punct, atunci punctele critice ale lui  $f$  se determină rezolvând sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ F(x, y, z) = 0, \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y + 2 = 0, \\ 2y - z + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are soluțiile

$$\begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ y_1 = -3 + \sqrt{6}, \\ z_1 = -4 + 2\sqrt{6}, \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ y_2 = -3 - \sqrt{6}, \\ z_2 = -4 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Considerăm acum punctele  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  și  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Derivata parțială a lui  $F$  în raport cu  $z$  în aceste două puncte este diferită de zero.

În acest mod s-au obținut două puncte staționare ale funcției  $f$  și anume  $M'_1(-3 + \sqrt{6}, -3 + \sqrt{6})$  și  $M'_2(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6})$ , valorile corespunzătoare ale funcției  $f$  fiind  $f(M'_1) = -4 + 2\sqrt{6}$  respectiv  $f(M'_2) = -4 - 2\sqrt{6}$ . De asemenea, utilizând regulile de diferențiere și considerând variabila  $z$  drept o constantă găsim:

$$d^2_{(x,y)}F(x, y, z) = 2(dx^2 + dy^2); d^2_{(x,y)}F(M_1) = 2(dx^2 + dy^2); d^2_{(x,y)}F(M_2) = 2(dx^2 + dy^2).$$

Dacă precizăm că:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1) = 2\sqrt{6}; \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_2, y_2, z_2) = -2\sqrt{6},$$

atunci folosind formula de calcul a diferențialei de ordinul al doilea a unei funcții definite implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , obținem

$$d^2 f(x_1, y_1) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_1, y_1, z_1)} d^2_{(x,y)}F(x_1, y_1, z_1) = -\frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2 + dy^2),$$

din care tragem concluzia că diferențiala a doua a lui  $f$  în punctul  $M'_1$  este negativ definită și ca atare punctul  $M'_1$  este punct de maxim local pentru funcția  $f$  și valoarea maximă a lui  $f$  este  $z_{\max} = f(x_1, y_1) = z_1 = -4 + \sqrt{6}$ .

În mod similar găsim

$$d^2 f(x_2, y_2) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_2, y_2, z_2)} d_{(x,y)}^2 F(x_2, y_2, z_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}(dx^2 + dy^2),$$

de unde deducem că diferențiala a doua a lui  $f$  în punctul  $M'_2$  este pozitiv definită fapt care duce la afirmația că punctul  $M'_2$  este punct de minim local iar valoarea minimă a lui  $f$  este  $z_{\min} = f(x_2, y_2) = z_2 = -4 - \sqrt{6}$ . ■

### 1.3.2 Probleme propuse

**Exercițiul 1.3.5** Să se determine extremele locale ale funcției  $y = f(x)$ , definită implicit de ecuația

$$F(x, y) = y^3 + x^2 - xy - 3x - y + 4 = 0.$$

**Răspuns.** Punctul  $M_0(5/8, -7/4)$  este singurul punct critic al funcției  $y = f(x)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y) = 0$ , într-o vecinătate a lui  $M_0$ . Derivata secundă a funcției  $f$  într-un punct al acestei vecinătăți este

$$f''(x) = \frac{(f'(x) - 2)(3f^2(x) - x - 1) + (2x - f(x) - 3)(6f(x)f'(x) - 1)}{(3f^2(x) - x - 1)^2}.$$

Având în vedere că  $f'(5/8) = 0$  și că  $f(5/8) = -7/4$ , din expresia derivatei secunde a funcției  $f$  deducem  $f''(5/8) = -32/121 < 0$ .

Rezultă că  $x_0 = 5/8$  este punct de maxim pentru funcția  $y = f(x)$ , valoarea sa maximă fiind  $f_{\max} = -7/4$ . ■

## 1.4 Extreme condiționate. Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

### 1.4.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.4.1** Să se determine punctele de extrem condiționat ale funcției scop  $f(x, y) = x^2 + y^2$  știind că coordonatele sale sunt supuse legăturii

$$F(x, y) = (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9 = 0$$

și apoi să se dea o interpretare geometrică rezultatelor stabilite.



**Soluție.** Analiza enunțului arată că avem de rezolvat o problemă de extrem condiționat a unei funcții scop de două variabile  $x$  și  $y$ , supuse unei singure legături.

Pentru rezolvarea acestei probleme introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y)$$

și determinăm punctele staționare ale acesteia. În acest scop, anulăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ . Se obține în acest fel sistemul de trei ecuații

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda(x - \sqrt{2}) = 0, \\ 2y + 2\lambda(y - \sqrt{2}) = 0, \\ (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

care are soluțiile

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{3}\right); \quad \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5}{3}\right).$$

Prin urmare, funcția  $f$  are punctele staționare condiționate

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \quad M_2\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$$

corespunzătoare valorilor  $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$  și  $\lambda_2 = -\frac{5}{3}$  ale multiplicatorului  $\lambda$  a lui Lagrange.

Pentru a determina natura acestor puncte staționare condiționate ale funcției  $f$  cercetăm natura punctelor critice corespunzătoare ale funcției lui Lagrange. În acest sens, calculăm diferențiala a doua a funcției  $\mathcal{L}$  în cele două puncte. Avem:

$$d^2\mathcal{L}(x_1, y_1; \lambda_1) = 2(1 + \lambda_1)(dx^2 + dy^2) + 2[2(x_1 - \sqrt{2})dx + (y_1 - \sqrt{2})dy]d\lambda;$$

$$d^2\mathcal{L}(x_2, y_2; \lambda_2) = 2(1 + \lambda_2)(dx^2 + dy^2) + 2[2(x_2 - \sqrt{2})dx + (y_2 - \sqrt{2})dy]d\lambda.$$

Dar, din faptul că luăm în calcul numai puncte  $M(x, y)$  ale căror coordonate verifică legătura  $F(x, y) = 0$ , prin diferențierea acesteia și înlocuirea punctului  $M(x, y)$  cu punctele  $M_1(x_1, y_1)$  și  $M_2(x_2, y_2)$  obținem

$$2(x_1 - \sqrt{2})dx + 2(y_1 - \sqrt{2})dy = 0, \quad 2(x_2 - \sqrt{2})dx + 2(y_2 - \sqrt{2})dy = 0,$$

din fiecare egalitate rezultând în plus  $dy = -dx$ .

Astfel, diferențialele de ordinul al doilea a funcției lui Lagrange în punctele sale staționare devin

$$d^2\mathcal{L}(x_1, y_1; \lambda_1) = \frac{8}{3}dx^2; \quad d^2\mathcal{L}(x_2, y_2; \lambda_2) = -\frac{8}{3}dx^2,$$

constatând totodată că prima dintre aceste diferențiale este o formă pătratică pozitiv definită, iar cea de a doua este formă pătratică negativ definită.

Prin urmare,  $M_1$  este punct de minim condiționat al funcției  $f$ , iar  $M_2$  este punct de maxim condiționat. Valorile extreme ale funcției scop sunt  $f_{\min} = f(M_1) = 1$  și  $f_{\max} = f(M_2) = 25$ .

Pentru a interpreta geometric rezultatele găsite să observăm mai întâi că legătura reprezintă cercul de rază 3 cu centrul aflat pe prima bisectoare în punctul  $C(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ , apoi că funcția scop este pătratul distanței de la originea reperului  $xOy$  la punctul  $M(x, y)$ .

Atunci, problema de extrem condiționat poate fi reformulată astfel: *dintre toate punctele cercului să se determine punctul cel mai apropiat de origine și punctul cel mai îndepărtat de origine.*

Cum originea este punct interior cercului, rezultă că cele două puncte sunt extremitățile diametrului prin origine al cercului, diametru care se află pe prima bisectoare a reperului  $xOy$ . Valorile extreme ale funcției scop arată că originea se află la o unitate de punctul  $M_1$  și la  $\sqrt{25} = 5$  unități de lungime de punctul  $M_2$ . ■

**Exercițiul 1.4.2** *Determinați extremele condiționate ale funcției scop  $u = xy^2z^3$  cu legătura  $x + 2y + 3z = a$ , unde  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ , iar  $a$  este o constantă pozitivă dată.*

**Soluție.** Observăm că funcția scop  $u$  are aceleași extreme ca și funcția  $\ln u = v$ . Atunci, putem transfera problema dată la determinarea extremelor condiționate ale funcției scop

$$v = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z,$$

legătura fiind aceeași.

Introducem funcția lui Lagrange a acestei probleme

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z + \lambda(x + 2y + 3z - a)$$

și rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \lambda = 0, \\ \frac{2}{y} + \lambda = 0, \\ \frac{3}{z} + \lambda = 0, \\ x + 2y + 3z - a = 0. \end{cases}$$

obținut prin anularea celor patru derivate parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ . Acest sistem are soluția

$$\mathbf{w}_0 = \left( \frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}; -\frac{6}{a} \right),$$

care reprezintă punctul staționar a funcției  $\mathcal{L}$ .

Rezultă că funcția scop  $v$  are punctul staționar condiționat  $M_0\left(\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}\right)$  corespunzător multiplicatorului Lagrange  $\lambda_0 = -\frac{6}{a}$ .

Diferențiala a doua a funcției lui Lagrange într-un punct oarecare al domeniului ei de definiție este

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2 + 2d\lambda(dx + 2dy + 3dz).$$

Dar, din diferențierea legăturii rezultă  $dx + 2dy + 3dz = 0$ , care scrisă în forma echivalentă  $dx = -2dy - 3dz$  și introdusă în expresia diferențialei a doua în care  $x = -2y - 3z$ , conduce la

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = -\frac{1}{(2y + 3z)^2}(2dy + 3dz)^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2$$

care, calculată în punctul staționar dă

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0) = -\frac{36}{25a^2}(29dy^2 + 12dydz + 34dz^2).$$

Hessiana acestei diferențiale,

$$H_{\mathcal{L}}(\mathbf{w}_0) = \begin{pmatrix} -\frac{29 \cdot 36}{25a^2} & -\frac{6 \cdot 36}{25a^2} \\ -\frac{6 \cdot 36}{25a^2} & -\frac{34 \cdot 36}{25a^2} \end{pmatrix},$$

are minorii principali  $\Delta_1 = -\frac{29 \cdot 36}{25a^2} < 0$  și  $\Delta_2 = \det H_{\mathcal{L}}(\mathbf{w}_0) > 0$  și deci, conform criteriului lui Sylvester,  $d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0)$  este o formă pătratică negativ definită.

Rezultatele stabilite demonstrează că  $M_0$  este un punct de maxim condiționat pentru funcția  $v$ , prin urmare și pentru funcția  $u$ . Pentru că

$$u(x, y, z) = xy^2z^3 \leq u_{\max} = u(M_0) = \left(\frac{a}{6}\right)^6$$

rezultă că  $M_0$  este un punct de maxim condiționat global pentru funcția  $u$ . ■

**Exercițiul 1.4.3** Numerele pozitive  $x, y, z$  satisfac condiția  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ . Care sunt atunci valorile extreme ale funcției  $u = \sin x \sin y \sin z$ ?

**Soluție.** La fel ca în exercițiul precedent, vom determina extremele condiționate ale funcției scop

$$v = \ln u = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z,$$

cu legătura între variabilele sale dată de

$$F(x, y, z) = x + y + z - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Punctele astfel determinate vor fi identice cu punctele de extrem condiționat ale funcției  $u = u(x, y, z)$  cu legătura  $F(x, y, z) = 0$ .

Funcția lui Lagrange corespunzătoare funcției scop  $v$  și legăturii  $F(x, y, z) = 0$  are punctul staționar

$$\mathbf{w}_0 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}; -\sqrt{3}\right)$$

Dacă ținem cont de faptul că prin diferențierea legăturii rezultă  $dz = -dx - dy$ , diferențiala a doua a funcției lui Lagrange în punctul staționar  $\mathbf{w}_0$  are expresia

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{w}_0) = -8(dx^2 + dxdy + dz^2).$$

Pentru că această diferențială este o formă pătratică negativ definită, rezultă că în  $M_0\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ , punct staționar condiționat al funcției  $v$  corespunzător multiplicatorului lui Lagrange  $\lambda_0 = -\sqrt{3}$ , avem un punct de maxim condiționat al funcției  $v$  și la fel va avea și funcția dată  $u$ , valoarea maximă a celei din urmă fiind

$$u\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{8}.$$

Mai mult, putem afirma că în ipotezele:

$$x + y + z = \frac{\pi}{2}; \quad x > 0; \quad y > 0; \quad z > 0,$$

au loc inegalitățile

$$0 < \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \leq \frac{1}{8},$$

egalitatea realizându-se dacă și numai dacă  $x = y = z = \frac{\pi}{6}$ . ■

**Exercițiul 1.4.4** Utilizând un raționament geometric, să se determine formula de calcul a distanței euclidiene de la punctul  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  la planul  $(P)$  de ecuație carteziană

$$(P) : Ax + By + Cz + D = 0,$$

unde  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  și  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ .

Să se deducă apoi aceeași formulă folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**Soluție.** Fie  $M(x, y, z)$  un punct oarecare al planului  $(P)$ . Coordonatele sale trebuie să verifice ecuația planului, deci

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Distanța euclidiană între punctele  $M \in (P)$  și  $M_0$  este

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Distanța  $d(M_0, (P))$ , de la punctul  $M_0$  la planul  $(P)$ , este cea mai mică valoare a distanțelor  $d(M_0, M)$  când  $M$  descrie planul  $(P)$

$$d(M_0, (P)) = \min\{d(M_0, M) \mid M \in (P)\}.$$

Este evident că acest minim al distanțelor euclidiene  $d(M_0, M)$  se realizează când punctul  $M$  este proiecția ortogonală  $M'_0$  a punctului  $M_0$  pe planul  $(P)$ , prin urmare

$$d(M_0, (P)) = d(M'_0, M_0).$$

Punctul  $M'_0$  este intersecția dintre planul  $(P)$  și normala  $(N)$  la planul  $(P)$  care trece prin  $M_0$ . Vectorul director al normalei  $(N)$  la planul  $(P)$  este

coliniar cu vectorul normalei planului  $\mathbf{N} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ . Un punct oarecare al spațiului  $M(x, y, z)$  aparține dreptei  $(N)$  dacă și numai dacă vectorul

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

este coliniar cu vectorul  $\mathbf{N}$ . Acești vectori sunt coliniari dacă și numai dacă coordonatele lor sunt proporționale. Rezultă atunci că ecuațiile canonice ale normalei  $(N)$  sunt

$$(N) : \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Dacă egalăm rapoartele cu  $t \in \mathbb{R}$ , deducem ecuațiile parametrice ale normalei

$$(N) : \quad \begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct. \end{cases}$$

Coordonatele punctului  $M'_0$  sunt egale cu componentele corespunzătoare ale soluției sistemului format de ecuațiile parametrice ale dreptei  $(N)$  și ecuația planului  $(P)$

$$\begin{cases} x = x_0 + At, \\ y = y_0 + Bt, \\ z = z_0 + Ct, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Introducând valorile lui  $x, y, z$  din primele trei ecuații ale sistemului în cea de a patra deducem că

$$t = - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Revenind cu această valoare a lui  $t$  în primele trei ecuații ale sistemului rezultă coordonatele  $x'_0, y'_0, z'_0$  ale punctului  $M'_0$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} A \\ y'_0 = y_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} B \\ z'_0 = z_0 - \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2} C. \end{cases}$$

Acum putem determina  $d(M'_0, M_0)$  căci aceasta este distanța  $d(M_0, (P))$  de la punctul  $M_0$  la planul  $(P)$ . Avem

$$d(M'_0, M_0) = \sqrt{(x'_0 - x_0)^2 + (y'_0 - y_0)^2 + (z'_0 - z_0)^2}.$$

Dacă se efectuează calculele, se găsește că distanța de la punctul  $M_0$  la planul  $(P)$  este dată de formula

$$d(M_0, (P)) = \pm \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Semnul plus corespunde cazului în care vectorul  $\overrightarrow{M'_0 M_0}$  are același sens cu vectorul normalei  $\mathbf{N}$  a planului  $(P)$ , ceea ce este totuna cu a spune că acest semn se ia atunci când  $F(M_0) > 0$ .

Ne propunem să determinăm acest rezultat folosind însă metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

Dacă vom considera că funcția scop  $u = f(x, y, z)$  este pătratul distanței de la punctul  $M_0$  la un punct  $M \in (P)$

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

atunci avem o problemă tipică de extrem condiționat în care legătura este

$$F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z),$$

iar dacă avem în vedere expresiile funcțiilor  $f$  și  $F$

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D).$$

Sistemul care dă punctele staționare ale funcției lui Lagrange este

$$\begin{cases} 2(x - x_0) + A\lambda & = 0, \\ 2(y - y_0) + B\lambda & = 0, \\ 2(z - z_0) + C\lambda & = 0, \\ Ax + By + Cz + D & = 0. \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu  $A$ , a doua cu  $B$ , a treia cu  $C$ , adunăm rezultatele și ținem cont de ultima ecuație a sistemului. Obținem

$$\lambda_0 = 2 \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Înlocuind această valoare a lui  $\lambda$  în primele trei ecuații ale sistemului, deducem coordonatele punctului staționar condiționat al funcției  $f$ . Analizându-le, constatăm că sunt coordonatele lui  $M'_0$ .

Diferențiala a doua a funcției  $\mathcal{L}$  în punctul ei critic  $(x'_0, y'_0, z_0; \lambda_0)$  are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x'_0, y'_0, z_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2d\lambda(Adx + Bdy + Cdz).$$

Dacă se ține cont că  $M(x, y, z)$  verifică legătura, prin diferențierea acesteia găsim

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

astfel că diferențiala a doua a funcției lui Lagrange în punctul staționar  $(x'_0, y'_0, z_0; \lambda_0)$  devine

$$d^2\mathcal{L}(x'_0, y'_0, z_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

În această ultimă expresie a diferențialei a doua a funcției  $\mathcal{L}$  în punctul ei staționar ar trebui să înlocuim pe  $dz$ , în ipoteza că  $C \neq 0$ , cu expresia care rezultă din diferențiala legaturii, însă se vede că și fără această operație  $d^2\mathcal{L}(x'_0, y'_0, z_0; \lambda_0)$  este o formă pătratică pozitiv definită, ceea ce arată că punctul staționar condiționat  $M_0(x'_0, y'_0, z_0)$  este punct de minim condiționat pentru funcția  $f$  și

$$f_{\min} = f(x'_0, y'_0, z_0) = \frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

De aici, prin extragerea radicalului, se obține formula distanței de la punctul  $M_0$  la planul  $(P)$ , aceeași cu cea care a fost dedusă mai sus pe cale geometrică. ■

**Exercițiul 1.4.5** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$f(x, y, z) = x + 2y - 2z$$

știind că variabilele sale sunt supuse restricției

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0.$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatului.



**Soluție.** Analizând enunțul constatăm că avem de a face cu o problemă de extrem condiționat în care funcția scop este  $f$  iar legătura este  $F(x, y, z) = 0$ .

Pentru a determina extremele condiționate al funcției scop  $f$  cu legătura

$$F(x, y, z) = 0,$$

introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z).$$

Rezultă că această funcție este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = x + 2y - 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 16).$$

Punctele staționare condiționate se desprind din punctele critice ale funcției lui Lagrange, iar acestea din urmă se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 2 + 2\lambda y = 0 \\ -2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16, \end{cases}$$

obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției lui Lagrange. Soluțiile acestui sistem sunt:

$$\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}; \frac{3}{8}\right); \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}; -\frac{3}{8}\right).$$

Având în vedere legătura între punctele staționare condiționate ale funcției  $f$  și punctele critice ale funcției lui Lagrange, rezultă că  $f$  are două puncte staționare:

$$M_1\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right); \quad M_2\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right).$$

care corespund valorilor  $\lambda_1 = \frac{3}{8}$  și respectiv  $\lambda_2 = -\frac{3}{8}$  ale multiplicatorului lui Lagrange  $\lambda$ .

Pentru a stabili dacă aceste două puncte staționare condiționate sunt sau nu sunt puncte de extrem condiționat pentru funcția scop, calculăm diferențiala de ordinul al doilea a funcției lui Lagrange, întâi într-un punct arbitrar

$(x, y, z; \lambda)$  al domeniului ei de definiție și apoi în cele două puncte critice determinate. Constatăm că

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(2xdx + 2ydy + 2zdz)d\lambda.$$

Însă, din faptul că un punct oarecare  $M(x, y, z)$  trebuie să satisfacă legătura, prin diferențierea acesteia obținem  $2xdx + 2ydy + 2zdz = 0$  astfel că expresia diferențialei a doua a funcției lui Lagrange devine

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

cu mențiunea că între diferențialele  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$  există legătura obținută prin diferențierea egalității  $F(x, y, z) = 0$ .

Expresiile diferențialelor de ordinul al doilea ale funcției  $\mathcal{L}$  în cele două puncte critice ale sale sunt:

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; \lambda_1) &= 2 \cdot \frac{3}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2); \\ d^2\mathcal{L}(M_2; \lambda_2) &= -2 \cdot \frac{3}{8}(dx^2 + dy^2 + dz^2), \end{aligned}$$

între  $dx$ ,  $dy$  și  $dz$  existând relația

$$dx = 2(dz - dy).$$

Introducând  $dx$  în expresiile celor două diferențiale, obținem:

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; \lambda_1) &= \frac{3}{20}[(5dy - 4dz)^2 + 9dz^2]; \\ d^2\mathcal{L}(M_2; \lambda_2) &= -\frac{3}{20}[(5dy - 4dz)^2 + 9dz^2]. \end{aligned}$$

Examinându-le, constatăm că prima dintre aceste diferențiale este o formă pătratică pozitiv definită în timp ce a doua este formă pătratică negativ definită. Aceste rezultate arată că  $M_1$  este punct de minim condiționat al funcției scop  $f$ , iar  $M_2$  este punct de maxim condiționat pentru  $f$ . Evident:

$$f_{\min} = f(M_1) = -12; \quad f_{\max} = f(M_2) = 12.$$

Pentru a da o interpretare geometrică rezultatelor găsite să remarcăm întâi că toate punctele  $M(x, y, z)$  care satisfac legătura se află pe sfera  $(S)$  cu centrul în origine și raza 4, sferă care are ecuația  $(S) : X^2 + Y^2 + Z^2 - 16 = 0$ .

Funcția de optimizat este, până la un factor multiplicativ, distanța de la punctul  $M(x, y, z)$  de pe sferă la planul  $(P)$  :  $X + 2Y - 2Z = 0$ , care trece prin origine și are vectorul normalei  $\mathbf{N}$  de parametri directori  $\mathbf{N} = (1, 2, -2)$ .

Deoarece distanța de la punctul  $M(x, y, z)$  la planul  $(P)$  este

$$d(M, (P)) = \frac{x + 2y - 2z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{x + 2y - 2z}{3}$$

rezultă că  $f(x, y, z) = 3d(M, (P))$ . De aici rezultă că funcția scop  $f$  este maximă sau minimă când distanța de la un punct al sferei  $(S)$  la planul  $(P)$  este maximă, respectiv minimă.

Dintre toate punctele sferei  $(S)$ , există două care au distanțe extreme la planul  $(P)$ . Aceste puncte se găsesc evident la intersecția dintre dreapta  $(N)$ , normala la plan în origine, și sfera  $(S)$ .

Pentru a determina punctele de intersecție trebuie să rezolvăm sistemul format de ecuația sferei  $(S)$  și ecuațiile normalei  $(N)$ .

Ecuațiile canonice ale normalei sunt

$$(N) : \frac{X}{1} = \frac{Y}{2} = \frac{Z}{-2}.$$

Așadar, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 - 16 = 0 \\ Y = 2X \\ Z = -2X. \end{cases}$$

Acest sistem are soluțiile  $M_1$ ,  $M_2$  și  $d(M_1, (P)) = -4$ ,  $d(M_2, (P)) = 4$ . Urmează că  $f_{\min} = 3d(M_1, (P))$  iar  $f_{\max} = 3d(M_2, (P))$ , aceasta fiind interpretarea geometrică a rezultatelor stabilite. ■

**Exercițiul 1.4.6** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z$$

știind că variabilele sale sunt supuse restricției

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatelor stabilite.

**Soluție.** Această problemă de extrem condiționat cu o singură legătură a unei funcții scop de trei variabile este foarte asemănătoare cu cea din exercițiul precedent.

Dacă se fac calculele, se găsesc două puncte de extrem condiționat. Coordonatele acestor puncte sunt  $M_1(-1, 2, -2)$  și  $M_2(1, -2, 2)$ , primul fiind punct de minim iar cel de al doilea, punct de maxim. Valorile extreme ale funcției scop vor fi  $f_{\min} = f(M_1) = -9$  și  $f_{\max} = f(M_2) = 9$ .

Interpretarea geometrică a rezultatelor găsite este asemănătoare celei date la exercițiul precedent.

Funcția scop  $f(x, y, z)$  reprezintă de trei ori distanța de la punctul  $M(x, y, z)$ , situat pe sfera cu centrul în origine de rază 3, la planul  $(P) : X - 2Y + 2Z = 0$ , plan care trece prin centrul sferei. Atunci, este evident faptul că punctele aflate la distanță extremă de plan sunt extremitățile diametrului sferei care are direcția normalei  $\mathbf{N} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  a planului  $(P)$ . ■

**Exercițiul 1.4.7** Să se determine extremele locale ale funcției scop  $f(x, y, z) = z$  condiționate de legăturile

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x + y + z = 0, \\ F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Să se dea o interpretare geometrică rezultatelor găsite.

**Soluție.** Funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z).$$

Înlocuind expresiile funcției scop și ale legăturilor, obținem

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = z + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Să determinăm acum derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției lui Lagrange. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) &= \lambda + 2\mu x, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) &= \lambda + 2\mu y, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 1 + \lambda + 2\mu z, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) &= F_1(x, y, z) = x + y + z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu x &= 0 \\ \lambda + 2\mu y &= 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \end{cases}$$

obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției lui Lagrange.

Soluțiile acestui sistem sunt:

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -2\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right); \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}; -\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

Aceste rezultate arată că funcția scop are două puncte staționare condiționate:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -2\frac{\sqrt{6}}{6}\right); \quad M_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}\right),$$

corespunzătoare respectiv valorilor  $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $\mu_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}$  și  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $\mu_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ .

Diferențiala a doua a funcției Lagrange este

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2\mu(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2(dx + dy + dz)d\lambda + \\ &+ 2(xdx + ydy + zdz)d\mu. \end{aligned}$$

Dacă avem în vedere faptul că într-un punct oarecare al mulțimii soluțiilor sistemului format de legături au loc relațiile:

$$dx + dy + dz = 0; \quad 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0,$$

obținute prin diferențierea legăturilor, rezultă că expresia diferențialei a doua a funcției lui Lagrange devine

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = 4\mu(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Pentru cazul când considerăm primul punct staționar condiționat diferențiala a doua a funcției lui Lagrange

$$d^2\mathcal{L}(x_1, y_1, z_1; \lambda_1, \mu_1) = 2\frac{\sqrt{6}}{3}(dx^2 + dxdy + dy^2)$$

este o formă pătratică pozitiv definită, cea de a doua diferențială

$$d^2\mathcal{L}(x_2, y_2, z_2; \lambda_2, \mu_2) = -2\frac{\sqrt{6}}{3}(dx^2 + dxdy + dy^2)$$

fiind o formă pătratică negativ definită.

În concluzie,  $M_1$  este punct de minim condiționat în timp ce  $M_2$  este un punct de maxim condiționat al funcției scop  $f(x, y, z) = z$ .

Rezultatele pot fi interpretate geometric.

Sistemul format de legături reprezintă mulțimea punctelor aflate la intersecția sferei cu centrul în origine și raza 1, cu planul care trece prin centrul sferei și are normala de parametri directori  $(1, 1, 1)$ . Evident, planul specificat taie sfera după un cerc mare al ei. Atunci, funcția scop reprezintă cota unui punct aflat pe cerc. Este clar acum că dintre toate punctele cercului există unul de cea mai mică cotă, acesta fiind  $M_1$  și un altul,  $M_2$ , cu cea mai mare cotă. ■

**Exemplul 1.4.1** *Dintr-un fier cornier de lungime 20 de unități și o foaie de sticlă cu aria egală cu 16 unități, urmează să se construiască un acvariu. Cum trebuiesc croite materialele astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă?*

**Soluție.** Acvariul ce urmează a fi proiectat are forma unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea  $x$ , lățimea  $y$  și înălțimea  $z$ , capacitatea sa fiind atunci egală cu  $xyz$ .

Putem presupune că  $x \geq y \geq z > 0$ .

Laturile paralelipipedului provin din fierul cornier, deci însumarea lungimilor acestora trebuie să dea lungimea materialului. Cum din cele 12 muchii ale unui paralelipiped din fiecare dimensiune sunt câte patru, urmează că  $x + y + z = 5$ .

Oricare din cele șase fețe ale paralelipipedului este un dreptunghi de arie fie  $xy$ , fie  $yz$ , fie  $zx$ . Deoarece sunt câte două dreptunghiuri cu aceleași dimensiuni și pentru că provin din foaia de sticlă ce trebuie în întregime consumată, suma ariilor acestor fețe trebuie să fie 16. Prin urmare,  $xy + yz + zx = 8$ .

Constatăm că pentru a rezolva problema dată trebuie să soluționăm o problemă de extrem condiționat în care funcția scop, definită pe mulțimea deschisă  $D = \{M(x, y, z) \mid x \geq y \geq z > 0\}$ , este  $f(x, y, z) = xyz$ , iar legăturile sunt:

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Fie  $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu)$  funcția lui Lagrange corespunzătoare

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z).$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale ei sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) = yz + \lambda + \mu(y + z), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) = zx + \lambda + \mu(z + x), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) = xy + \lambda + \mu(x + y), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_1(x, y, z), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_2(x, y, z). \end{cases}$$

Sistemul de cinci ecuații cu cinci necunoscute format prin anularea acestor derivate parțiale este

$$\begin{cases} yz + \lambda + \mu(y + z) = 0, \\ zx + \lambda + \mu(z + x) = 0, \\ xy + \lambda + \mu(x + y) = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Pentru a rezolva mai simplu acest sistem, observăm că primele trei ecuații ale sale pot fi interpretate ca un sistem liniar și omogen în necunoscutele  $\lambda$ ,  $\mu$ . Fiindcă o soluție a acestui sistem este nebanală (prima sa componentă este egală cu 1), urmează că rangul matricii sistemului trebuie să fie mai mic decât 3 și deci

$$\begin{vmatrix} yz & 1 & y+z \\ zx & 1 & z+x \\ xy & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0 \implies (z-y)(3x^2 - 10x + 8) = 0.$$

Egalarea cu zero a fiecărui factor din ecuația rezultată, la care se adaugă ultimele două ecuații ale sistemului (1.10), conduce la două sisteme de trei ecuații cu necunoscutele  $x, y$  și  $z$

$$\begin{cases} z - y = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases}$$

Soluțiile acestor sisteme sunt:

$$(1, 2, 2); \quad \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1); \quad (2, 1, 2); \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

dar numai două se încadrează în datele problemei și anume:

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1).$$

Pentru a determina valorile parametrilor lui Lagrange  $\lambda$  și  $\mu$  corespunzătoare acestor soluții, vom înlocui pe rând componentele acestora în primele trei ecuații ale sistemului (1.10) și astfel găsim pentru perechea  $(\lambda, \mu)$  respectiv valorile:

$$\left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right); \quad (4, -2).$$

Prin urmare, funcția lui Lagrange are două puncte staționare:

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1; 4, -2)$$

și deci, funcția scop are două puncte staționare condiționate:

$$M_1\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad M_2(2, 2, 1),$$

corespunzătoare respectiv celor două perechi de valori ale lui  $\lambda$  și  $\mu$ .

Diferențierea legăturilor într-un punct arbitrar al mulțimii  $D$ , conduce la

$$dx + dy + dz = 0, \quad (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0,$$



care în cele două puncte staționare condiționate, devin

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 8dx + 11(dy + dz) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3(dx + dy) + 4dz = 0. \end{cases}$$

Din primul sistem obținem  $dx = 0$  și  $dz = -dy$ , iar din al doilea  $dy = -dx$  și  $dz = 0$ .

Diferențiala de ordinul al doilea a funcției lui Lagrange, într-un punct arbitrar al mulțimii  $D$ , are expresia

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2[(z + \mu)dxdy + (x + \mu)dydz + (y + \mu)dzdx] + \\ &+ 2(dx + dy + dz)d\lambda + 2[(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz]d\mu. \end{aligned}$$

care, în cele două puncte staționare ale funcției  $\mathcal{L}$ , devine:

$$d^2\mathcal{L}\left(M_1; \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right) = -2dy^2; \quad d^2\mathcal{L}(M_2; 4, -2) = 2dx^2.$$

Prima diferențială este o formă pătratică negativ definită și deci  $M_1$  este punct de maxim condiționat, iar cea de a doua este o formă pătratică pozitiv definită, fapt ce atrage că punctul  $M_2$  este punct de minim condiționat. Valorile extreme corespunzătoare ale funcției scop sunt:  $f_{\max} = f(M_1) = \frac{112}{27}$ ;  $f_{\min} = f(M_2) = 4$ .

În concluzie, problema dată revine la dimensionarea fierului cornier în patru bucăți a câte 5 unități lungime, fiecare din ele urmând a fi divizată în câte trei bucăți cu lungimile:

$$\frac{7}{3}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3}.$$

Cât privește foaia de sticlă, aceasta urmează a fi croită în două părți cu arii egale, fiecare parte la rândul-i urmând a fi divizată în trei bucăți având ariile:

$$\frac{28}{9}; \quad \frac{28}{9}; \quad \frac{16}{9}.$$

Pentru aceasta, se comandă foaia de sticlă cu lungimea de 6 unități și lățimea de  $\frac{8}{3}$  unități. Foaia astfel comandată se divizează apoi în două părți identice cu dimensiunile 6 și  $\frac{4}{3}$ . Din fiecare parte se extrage un pătrat cu latura  $\frac{4}{3}$ ,

iar din cele două bucăți rămase se croiesc câte două dreptunghiuri identice de dimensiuni  $\frac{7}{3}$  și  $\frac{4}{3}$ . ■

**Exemplul 1.4.2** Să se dimensioneze o cutie paralelipipedică de volum dat  $a^3$ , astfel ca aria acesteia, fără capac, să fie minimă.

**Soluție.** Fie  $x, y$  dimensiunile feței inferioare a cutiei și  $z$  înălțimea acesteia.

Dimensionarea cutiei, cu capacitatea prestabilită egală cu  $a^3$ , astfel încât aria acesteia, fără capac, să fie minimă, se realizează rezolvând o problemă de extrem cu legături, în care funcția scop este

$$S : D \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad S(x, y, z) = xy + 2(yz + zx),$$

unde  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ , iar legătura este

$$F(x, y, z) = xyz - a^3 = 0.$$

Ca și până acum, introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = xy + 2(yz + zx) + \lambda(xyz - a^3),$$

derivatele sale parțiale de ordinul întâi fiind

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda) = y + 2z + \lambda yz, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda) = x + 2z + \lambda zx, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda) = 2(x + y) + \lambda xy, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda) = xyz - a^3. \end{cases}$$

Egalând cu zero aceste derivate și împărțind respectiv cu  $yz$ ,  $zx$ ,  $xy$  primele trei ecuații ale sistemului, se obține sistemul

$$\begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{2}{y} + \lambda = 0, \\ \frac{1}{z} + \frac{2}{x} + \lambda = 0, \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \lambda = 0, \\ xyz - a^3 = 0, \end{cases}$$

echivalent cu sistemul ale cărui soluții sunt punctele staționare ale funcției lui Lagrange. Acest sistem are o singură soluție

$$\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{2}, \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}; -\frac{2\sqrt[3]{4}}{a}\right),$$

din care rezultă că funcția scop  $S = S(x, y, z)$  are punctul staționar condiționat

$$M_0\left(a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{2}, \frac{a\sqrt[3]{2}}{2}\right)$$

corespunzător valorii  $\lambda_0 = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{a}$  a multiplicatorului Lagrange  $\lambda$ .

Diferențierea legăturii în punctul staționar condiționat pune în evidență următoarea legătură între diferențialele variabilelor  $x$ ,  $y$  și  $z$

$$dz = -\frac{1}{2}(dx + dy).$$

Calculul diferențialei a doua a funcției lui Lagrange în punctul ei staționar, în care se ține cont de legătura dintre diferențialele variabilelor, conduce la expresia

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = 2(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Constatăm că  $d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0)$  este o formă pătratică pozitiv definită ceea ce atrage faptul că punctul  $M_0$  este punct de minim condiționat pentru funcția scop.

Prin urmare, capacul cutiei trebuie să fie un pătrat cu latura  $a\sqrt[3]{2}$  și dacă înălțimea sa este  $\frac{a\sqrt[3]{2}}{2}$ , atunci aria cutiei, fără capac, are valoarea minimă  $S_{\min} = 3a^2\sqrt[3]{4}$ . Capacitatea cutiei este evident egală cu  $a^3$ . ■

**Exemplul 1.4.3** Fie  $a_i \geq 0$ ,  $x_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $p > 1$  și  $q > 0$  astfel încât

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

În aceste ipoteze are loc inegalitatea

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

numită inegalitatea lui Hölder.

**Soluție.** Considerăm funcția reală de  $n$  variabile reale

$$u : D \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.11)$$

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

și egalitatea  $A = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ , în care  $A \in \mathbb{R}$  este o constantă.

Ne propunem să determinăm extremele condiționate ale funcției scop  $u$  cu legătura

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = A - \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0. \quad (1.12)$$

Pentru aceasta, considerăm funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} + \lambda(A - \sum_{i=1}^n a_i x_i),$$

derivatele parțiale de ordinul întâi ale acesteia

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{,j}(\mathbf{x}; \lambda) &= x_j^{q-1} \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-1} - \lambda a_j, \\ \mathcal{L}_{,\lambda}(\mathbf{x}; \lambda) &= A - \sum_{i=1}^n a_i x_i, \end{cases}$$

și sistemul de  $n + 1$  ecuații cu necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și  $\lambda$

$$\begin{cases} x_j^{q-1} \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-1} &= \lambda a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i &= A, \end{cases} \quad (1.13)$$

obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ .

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că  $x_i > 0$  și  $a_i > 0$ . Împărțind membru cu membru oricare două ecuații din primele  $n$  ale sistemului (1.13), de exemplu cele de indici  $j$  și  $m$ , avem

$$\left( \frac{x_j}{x_m} \right)^{q-1} = \frac{a_j}{a_m}.$$

Pentru un  $m$  fixat, rezultă

$$x_j = x_m \left( \frac{a_j}{a_m} \right)^{\frac{1}{q-1}}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{m\}. \quad (1.14)$$

Înlocuind (1.14) în (1.12), obținem

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n a_i x_m \left( \frac{a_i}{a_m} \right)^{\frac{1}{q-1}} + a_m x_m = A,$$

sau

$$\frac{x_m}{a_m^{\frac{1}{q-1}}} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^{\frac{q}{q-1}} = A. \quad (1.15)$$

Dacă ținem cont că  $\frac{q}{q-1} = p$  și  $\frac{1}{q-1} = \frac{p}{q}$ , din (1.15) deducem coordonatele  $x_m^0$  ale punctului staționar condiționat  $\mathbf{x}^0$  al funcției  $u$

$$x_m^0 = \frac{A}{\sum_{i=1}^n a_i^p} a_m^{\frac{p}{q}}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (1.16)$$

Diferențiala de ordinul 1 a funcției lui Lagrange într-un punct arbitrar al ei este

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^n x_j^{q-1} dx_j - \lambda \sum_{j=1}^n a_j dx_j. \quad (1.17)$$

Dar punctul  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$  verifică legătura (1.12) care, după diferențiere, devine

$$\sum_{j=1}^n a_j dx_j = 0. \quad (1.18)$$

Folosirea acesteia în (1.17) conduce la

$$d\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^n x_j^{q-1} dx_j.$$

Diferențiind în ambii membri această nouă expresie, obținem

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) &= \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left[ (q-1) \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^n x_j^{q-2} dx_j^2 + \right. \\ &\quad \left. + (1-q) \left( \sum_{i=1}^n x_i^q \right)^{\frac{1}{q}-2} \left( \sum_{j=1}^n x_j^{q-1} dx_j \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Să cercetăm ce devine diferențiala (1.19) în punctul staționar condiționat  $\mathbf{x}^0$  al funcției  $u$ .

Folosind (1.16) precum și relațiile între  $p$  și  $q$  constatăm mai întâi că

$$\sum_{m=1}^n (x_j^0)^{q-1} dx_j = \sum_{m=1}^n \left( \frac{A}{\sum_{i=1}^n a_i^p} a_j^{\frac{p}{q}} \right)^{q-1} dx_j = \left( \frac{A}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \right)^{q-1} \cdot \sum_{m=1}^n a_j dx_j = 0.$$

Cu acestea, diferențiala de ordinul 2 a funcției  $\mathcal{L}$  în punctul ei staționar este (de valoarea lui  $\lambda^0$  nu avem nevoie pentru că ea nu apare în expresia (1.19))

$$d^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^0; \lambda^0) = (q-1) \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n (x_i^0)^q \right)^{\frac{1}{q}-1} \sum_{j=1}^n (x_j^0)^{q-2} dx_j^2. \quad (1.20)$$

Fără a utiliza relația (1.18), constatăm că (1.20) este o formă pătratică pozitiv definită pe  $\mathbb{R}^n$ . Dacă însă utilizăm (1.18), diferențiala (1.20) este, de asemenea, o formă pătratică pozitiv definită, însă pe  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Așadar, funcția  $u$  are un punct de minim condiționat global, iar valoarea sa minimă este  $u_{\min} = u(\mathbf{x}^0) = A$  și ca atare se poate scrie

$$A \leq u(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D. \quad (1.21)$$

Din (1.12), (1.11) și (1.21) rezultă inegalitatea lui Hőlder. ■

**Exercițiul 1.4.8** Fie  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$  și  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se demonstreze că are loc inegalitatea

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left( \frac{x + y}{2} \right)^n, \quad (\forall) (x, y) \in D.$$

**Soluție.** Determinăm extremele condiționate ale funcției scop

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$$

cu legătura

$$F(x, y) = s - x - y = 0,$$

unde  $s$  este un număr nenegativ considerat ca un parametru. Funcția lui Lagrange corespunzătoare este

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2} + \lambda(s - x - y),$$

iar derivatele parțiale de ordinul 1 ale sale sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y; \lambda) = \frac{n}{2}x^{n-1} - \lambda; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y; \lambda) = \frac{n}{2}y^{n-1} - \lambda; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y; \lambda) = s - x - y. \end{cases}$$

Sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul 1 are soluția

$$x_0 = \frac{s}{2}, \quad y_0 = \frac{s}{2}; \quad \lambda_0 = \frac{n}{2} \left( \frac{s}{2} \right)^{n-1}$$

și deci  $(x_0, y_0; \lambda_0)$  este punct critic al funcției lui Lagrange, iar  $M_0(x_0, y_0)$  este punct staționar condiționat al funcției scop  $f$  corespunzător valorii  $\lambda_0$  a multiplicatorului Lagrange  $\lambda$ .

Natura punctului staționar condiționat al funcției scop  $f$  este aceeași cu natura punctului critic al funcției lui Lagrange, aceasta din urmă stabilindu-se în urma studierii diferențialei de ordinul al doilea al funcției  $\mathcal{L}$  în punctul  $(x_0, y_0; \lambda_0)$ .

Dacă avem în vedere că  $dy = -dx$ , fapt ce rezultă din diferențierea legăturii  $F(x, y) = 0$ , rezultă că

$$d^2 \mathcal{L}(x_0, y_0; \lambda_0) = n(n-1) \left( \frac{s}{2} \right)^{n-2} dx^2,$$

din care se vede că diferențiala de studiat este o formă pătratică pozitiv definită pe  $\mathbb{R}$ , fapt ce atrage că  $M_0$  este punct de minim global al funcției scop  $f$ . Prin urmare,

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \implies \frac{x^n + y^n}{2} \geq \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^n + \left(\frac{s}{2}\right)^n}{2} = \left(\frac{s}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

și cu acestea inegalitatea este demonstrată. ■

#### Exemplul 1.4.4 Dacă forma pătratică

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

este pozitiv definită, există  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$  astfel încât

$$\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq h(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1.22)$$

unde  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  este norma euclidiană a vectorului  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Soluție.** Vom determina întâi valorile extreme ale funcției  $h$  pe sfera din spațiul euclidian  $\mathbb{R}^n$  cu centrul în origine și raza unitate

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0.$$

Aceasta este o problemă de extrem condiționat a funcției  $h$  cu legătura

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 = 0.$$

Pentru a o rezolva, introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}; \lambda) = h(\mathbf{x}) + \lambda F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2),$$

determinăm derivatele parțiale de ordinul 1 ale sale

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\mathbf{x}; \lambda) = 2 \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - \lambda x_i \right), & i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\mathbf{x}; \lambda) = 1 - \|\mathbf{x}\|^2, \end{cases}$$

și apoi rezolvăm sistemul de  $n + 1$  ecuații în necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  și  $\lambda$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0, \\ 1 - \|\mathbf{x}\|^2 = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

obținut prin anularea derivatelor parțiale în care, folosind simbolul Kronecker  $\delta_{ij}$ , termenul  $-\lambda x_i$  al ecuației de rang  $i$  s-a scris ca  $-\lambda \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_j$ .

În calculul derivatelor parțiale ale funcției  $\mathcal{L}$  în raport cu variabilele  $x_i$  s-au aplicat regulile de derivare a sumei și produsului de funcții și s-a ținut



cont de faptul că matricea  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  a formei pătratice  $h$  este simetrică ( $a_{ij} = a_{ji}$ ).

Subsistemul format de primele  $n$  ecuații ale sistemului (1.23)

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

este un sistem liniar și omogen în necunocutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , necunoscuta  $\lambda$  fiind considerată un parametru real. Acesta are soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul matricei sale este nul,

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Ecuția  $P(\lambda) = 0$  este ecuația caracteristică a matricei  $A$ , iar rădăcinile sale sunt valorile proprii ale matricei  $A$ . Deoarece  $h$  este formă pătratică pozitiv definită, matricea acesteia  $A$  are valorile proprii reale, pozitive și distincte. Fie că acestea sunt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Prin urmare, pentru fiecare valoare a lui  $i$  între 1 și  $n$ , sistemul

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

are soluții nebanale. Fie  $\mathbf{y}^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_n^{(i)})$  o astfel de soluție. Sistemul (1.24) fiind liniar și omogen, rezultă că  $\mathbf{x}^{(i)} = k\mathbf{y}^{(i)}$  este, de asemenea, soluție nebanală dacă  $k$  este o constantă reală nenulă oarecare. În particular, pentru  $k = \frac{1}{\|\mathbf{y}^{(i)}\|}$  soluția corespunzătoare a sistemului (1.24) este de normă unitate.

Dacă  $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$  este o soluție nebanală a sistemului (1.24), cu

$$\|\mathbf{x}^{(i)}\| = 1 \implies (x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i)})^2 + \cdots + (x_n^{(i)})^2 = 1 \implies F(\mathbf{x}^{(i)}) = 0, \quad (1.25)$$

atunci

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}; \lambda_i) \quad (1.26)$$

este un punct staționar pentru funcția lui Lagrange, iar

$$M_i(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$$

este punct staționar condiționat pentru funcția  $h$  corespunzător valorii  $\lambda_i$  a multiplicatorului lui Lagrange.

Să determinăm valorile funcției  $h$  în punctele staționare condiționate  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Pentru aceasta, scriem relațiile

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda_i x_1^{(i)}, \\ a_{21}x_1^{(i)} + a_{22}x_2^{(i)} + \dots + a_{2n}x_n &= \lambda_i x_2^{(i)}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \\ a_{n1}x_1^{(i)} + a_{n2}x_2^{(i)} + \dots + a_{nn}x_n^{(i)} &= \lambda_i x_n^{(i)}, \end{cases} \quad (1.27)$$

care exprimă faptul că  $\mathbf{x}^{(i)}$  este o soluție a sistemului (1.24). Dacă înmulțim cele  $n$  egalități din (1.27) respectiv cu  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$ , adunăm rezultatele membru cu membru și ținem seama de (1.25), obținem

$$h(\mathbf{x}^{(i)}) = \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.28)$$

Diferențialele de ordinul 2 ale funcției lui Lagrange în punctele staționare (1.26) au expresiile

$$d^2\mathcal{L}(\mathbf{x}^{(i)}; \lambda_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j$$

și cum  $h$  este o formă pătratică pozitiv definită va rezulta că și acestea sunt forme pătratice pozitiv definite.

Așadar, toate cele  $n$  puncte staționare condiționate ale funcției  $h$  sunt puncte de minim condiționat, iar valorile sale în aceste puncte sunt  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Fie  $\alpha = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\beta = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ . Atunci,

$$\alpha \leq h(\mathbf{x}), \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathbf{x}\| = 1. \quad (1.29)$$

Pe de altă parte, funcția  $h$  fiind un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , deci o funcție continuă, iar sfera

$$(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

o mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$ , conform teoremei lui Weierstrass, funcția  $h$  este mărginită și își atinge efectiv marginile.

Din (1.29) rezultă că marginea inferioară a valorilor funcției  $h$  în punctele sferei  $(S)$  este  $\alpha$ .

Cât privește marginea superioară a valorilor funcției  $h$  pe sfera  $(S)$ , aceasta este  $\beta$ , deoarece, în caz contrar, din (1.28) și din faptul că oricare din punctele  $M_1, M_2, \dots, M_n$  este punct de minim condiționat al funcției  $h$  rezultă că există o vecinătate  $V$  în  $\mathbb{R}^n$  a punctului considerat cu proprietatea că valorile funcției  $h$  în punctele intersecției acestei vecinătăți cu sfera  $(S)$  sunt mai mari sau cel puțin egale cu  $\beta$ . Acest rezultat însă contrazice că  $\beta$  este marginea superioară a valorilor funcției  $h$  în punctele sferei  $(S)$ .

În concluzie, dacă ținem cont și de (1.29), putem afirma că

$$\alpha \leq h(\mathbf{x}) \leq \beta, \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \|\mathbf{x}\| = 1. \quad (1.30)$$

Forma pătratică  $h$  fiind o funcție omogenă de gradul doi, avem

$$h(t\mathbf{x}) = t^2 h(\mathbf{x}), \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\forall) t \in \mathbb{R}. \quad (1.31)$$

Să considerăm acum un element oarecare  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Dacă acest vector este versor, atunci (1.30) este echivalentă cu

$$\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq h(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall) \mathbf{x} \in (S). \quad (1.32)$$

Dacă vectorul  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  nu este versor, atunci vectorul

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \mathbf{x} \quad (1.33)$$

este versor și, conform (1.30),

$$\alpha \leq h(\mathbf{y}) \leq \beta. \quad (1.34)$$

Relațiile (1.31) – (1.34) conduc la

$$\alpha \|\mathbf{x}\|^2 \leq h(\mathbf{x}) \leq \beta \|\mathbf{x}\|^2, \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (1.35)$$

În sfârșit, considerând vectorul nul din  $\mathbb{R}^n$  și ținând cont că  $h(\mathbf{0}) = 0$ , avem

$$\alpha \|\mathbf{0}\|^2 = h(\mathbf{0}) = \beta \|\mathbf{0}\|^2. \quad (1.36)$$

Din (1.35) și (1.36) rezultă (1.22), ceea ce trebuia de demonstrat. ■

**Exercițiul 1.4.9** Să se găsească cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n},$$

știind că  $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$  satisfac condiția (legătura)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n - p = 0,$$

unde:  $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; p$  sunt numere pozitive cunoscute.

**Soluție.** Vom determina valorile extreme ale funcției  $f$  în condițiile impuse folosind metoda multiplicatorilor a lui Lagrange. Pentru aceasta introducem funcția

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} + \lambda(b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n - p).$$

Anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții conduce la punctul staționar condiționat  $M_0$  al funcției  $f$  ale cărui coordonate sunt

$$x_i^0 = \frac{p}{\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \dots + \sqrt{a_nb_n}} \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

punct ce corespunde valorii

$$\lambda_0 = \frac{(\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \dots + \sqrt{a_nb_n})^2}{p^2}$$

a multiplicatorului Lagrange  $\lambda$ .

Diferențiala a doua a funcției Lagrange în punctul ei staționar  $(M_0; \lambda_0)$  este

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = \frac{2a_1}{(x_1^0)^3}dx_1^2 + \frac{2a_2}{(x_2^0)^2}dx_2^2 + \dots + \frac{2a_n}{(x_n^0)^2}dx_n^2, \quad (1.37)$$

în care trebuie să se țină cont de faptul că diferențialele  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$  satisfac relația

$$b_1dx_1 + b_2dx_2 + \dots + b_ndx_n = 0, \quad (1.38)$$

obținută prin diferențierea legăturii.

Din (1.37) și (1.38) rezultă că diferențiala a doua a funcției  $\mathcal{L}$  în punctul ei staționar este o formă pătratică pozitiv definită și deci  $M_0$  este punct de minim condiționat al funcției  $f$ , valoarea minimă fiind

$$f(M_0) = \frac{1}{p} \left( \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \right)^2.$$

Punctul de extrem astfel determinat este global, ceea ce permite scrierea inegalității

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{1}{p} \left( \sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \cdots + \sqrt{a_n b_n} \right)^2,$$

oricare ar fi numerele pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_n$  care satisfac condiția  $b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n - p = 0$ . ■

**Exemplul 1.4.5** Fie  $A$  media aritmetică a numerelor nenegative  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Atunci au loc inegalitățile:

$$\begin{cases} x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^2; \\ x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^3; \\ x_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_5 + \cdots + x_{n-3} x_{n-2} x_{n-1} x_n \leq C_n^4 A^4; \\ \vdots \end{cases} \quad (1.39)$$

unde  $C_n^k$  înseamnă combinații de  $n$  elemente luate câte  $k$ .

**Soluție.** Pentru demonstrarea primei inegalități vom folosi metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru determinarea extremelor funcției scop

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n,$$

condiționate de legătura

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nA = 0.$$

Funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n + \lambda(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nA),$$

iar sistemul

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + \lambda &= 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + \lambda &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + \lambda &= 0, \\ \vdots & \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n - nA &= 0, \end{cases}$$

obținut prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ , are o singură soluție

$$\left(-\frac{1}{A}, -\frac{1}{A}, \dots, -\frac{1}{A}; \frac{n-1}{A}\right),$$

de unde deducem că funcția scop  $f$  are punctul staționar condiționat

$$M_0\left(-\frac{1}{A}, -\frac{1}{A}, \dots, -\frac{1}{A}\right)$$

ce corespunde valorii  $\lambda_0 = \frac{n-1}{A}$  a multiplicatorului lui Lagrange  $\lambda$ .

Pentru determinarea naturii punctului staționar condiționat găsit, calculăm diferențiala de ordin doi a funcției Lagrange în punctul ei staționar  $(M_0; \lambda_0)$ , în acest calcul având grijă să ținem cont de faptul că

$$dx_1 + dx_2 + \cdots + dx_n = 0,$$

relație obținută prin diferențierea legăturii. Într-o primă fază se găsește

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = 2(dx_1dx_2 + dx_1dx_3 + \cdots + dx_{n-1}dx_n).$$

Dacă în această expresie se folosește legătura între diferențialele variabilelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , atunci

$$d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0) = 2(-dx_1^2 - dx_2^2 - \cdots - dx_{n-1}^2 - dx_1dx_2 - dx_1dx_3 - \cdots - dx_{n-2}dx_{n-1}).$$

Noua expresie a diferențialei de ordinul doi a funcției Lagrange în punctul  $(M_0; \lambda_0)$  este o formă pătratică pe  $\mathbb{R}^{n-1}$  de matrice (pătratică de ordinul  $n-1$ )

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -2 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & -2 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -2 \end{pmatrix}.$$

Vom folosi metoda valorilor proprii pentru determinarea naturii acestei forme pătratice și în acest sens vom analiza rădăcinile polinomului caracteristic  $P(\lambda)$  al matricei  $H$  egal, după cum se știe, cu  $P(\lambda) = \det(H - \lambda I_{n-1})$ , unde  $I_{n-1}$  este matricea unitate de ordinul  $n - 1$ . Se obține

$$P(\lambda) = (-n - \lambda)(-1 - \lambda)^{n-2},$$

iar rădăcinile ecuației caracteristice  $P(\lambda) = 0$ , identice cu valorile proprii ale matricei  $H$ , sunt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-2} = -1$  și  $\lambda_{n-1} = -n$ .

Cum toate valorile proprii ale matricei  $H$  sunt negative rezultă că  $d^2\mathcal{L}(M_0; \lambda_0)$  este o formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că punctul staționar condiționat  $M_0$  al funcției scop  $f$  este un punct de maxim condiționat, valoarea sa fiind

$$f_{\max} = f(M_0) = A^2 + A^2 + \dots + A^2 = C_n^2 A^2 = \frac{n(n-1)}{2!} A^2.$$

Se vede că punctul de maxim condiționat determinat este global și ca atare

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A^2,$$

oricare ar fi numerele nenegative  $x_1, x_2, \dots, x_n$  a căror sumă este  $nA$ .

În mod analog se demonstrează și celelalte inegalități, schimbându-se de fiecare dată doar funcția scop. ■

### 1.4.2 Probleme propuse

**Exercițiul 1.4.10** *Să se găsească paralelipipedul de volum maxim, astfel ca suma dimensiunilor sale să fie constantă.*

**Indicație.** Notăm cele trei dimensiuni ale paralelipipedului cu  $x, y, z$ . Ele sunt legate prin relația

$$F(x, y, z) = x + y + z - a = 0.$$

Volumul paralelipipedului este  $V = xyz$ . Problema se reduce la a găsi extremele condiționate ale funcției  $f(x, y, z) = xyz$  cu legătura  $F(x, y, z) = 0$ . Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**Răspuns.**  $M_0(a/3, a/3, a/3)$  este punct de maxim condiționat corespunzător valorii  $\lambda_0 = -a^3/9$  a multiplicatorului Lagrange  $\lambda$ . Volumul maxim este  $V_{\max} = a^3/27$ . ■

**Exercițiul 1.4.11** Să se determine dimensiunile unei cisterne având forma unui paralelipiped dreptunghic astfel încât să aibă:

1. aria totală  $2a^2$  și capacitate maximă;
2. capacitate dată  $a^3$  și suprafață totală minimă

**Răspuns.**

1.  $V_{\max} = V\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3\sqrt{3}}{9};$
2.  $S_{\min} = S(a, a, a) = 6a^2.$

■

**Exercițiul 1.4.12** Să se determine punctele de extrem ale funcției scop

$$f : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y,$$

condiționate de legătura  $F(x, y) = x - y - \frac{\pi}{4} = 0.$

**Indicație.** Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange, funcția  $\mathcal{L}$  fiind

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(x - y - \frac{\pi}{4}\right).$$

**Răspuns.** Sistemul din care rezultă punctele staționare ale funcției  $\mathcal{L}$  are soluțiile:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{5\pi}{8}, y_1 = \frac{3\pi}{8}, \lambda_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = \frac{9\pi}{8}, y_2 = \frac{7\pi}{8}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ x_3 = \frac{13\pi}{8}, y_3 = \frac{11\pi}{8}, \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Se deduce că  $f$  are trei puncte staționare condiționate:  $M_1(x_1, y_1)$ ;  $M_2(x_2, y_2)$ ;  $M_3(x_3, y_3)$ , corespunzătoare valorilor  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  ale multiplicatorului Lagrange  $\lambda$ .

Punctele  $M_1$  și  $M_3$  sunt puncte de minim condiționat și  $f_{\min} = f(M_1) = f(M_3) = (2 - \sqrt{2})/2$ , iar  $M_2$  este punct de maxim condiționat și  $f_{\max} = f(M_2) = (2 + \sqrt{2})/2.$

■



**Exercițiul 1.4.13** Să se determine extremele funcției scop

$$f(x, y, z) = x + y + z$$

condiționate de legătura  $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0$ .

**Răspuns.**  $f_{\min} = f(3, 3, 3) = 9$ . ■

**Exercițiul 1.4.14** Să se determine extremele funcției scop

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

condiționate de legătura  $F(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$ .

**Răspuns.**  $M_0(1, 1, 1)$  este punct de minim condiționat corespunzător valorii  $\lambda_0 = -4$  a multiplicatorului lui Lagrange. ■

**Exercițiul 1.4.15** Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz, \quad D = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\},$$

condiționate de legăturile  $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  și  $F_2(x, y, z) = x + y - z = 0$ .

Ce interpretare geometrică poate fi dată rezultatului determinat?

**Indicație.** Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

**Răspuns.** Punctul  $M_0\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$  este punct de minim condiționat corespunzător valorilor  $\lambda_0 = \frac{\sqrt{6}}{12}$ ,  $\mu_0 = \frac{1}{6}$  ai multiplicatorilor lui Lagrange  $\lambda$ ,  $\mu$  și  $f_{\min} = f(M_0) = \frac{\sqrt{6}}{18}$ .

Rezultatul găsit poate fi interpretat geometric astfel: dintre toate paralelipede dreptunghice din primul octant cu trei dintre fețe coincidând cu planele de coordonate ale reperului  $Oxyz$  și vârful opus originii situat pe porțiunea din primul octant a cercului de intersecție dintre sfera cu centrul în origine și raza 1 cu planul  $x + y - z = 0$ , cel care are vârful opus originii în punctul  $M_0$  are volum minim, egal cu  $\frac{\sqrt{6}}{18}$ . ■

## 1.5 Extremele funcțiilor reale definite pe mulțimi compacte în $\mathbb{R}^m$

### 1.5.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exemplul 1.5.1** În planul raportat la reperul cartezian  $Oxy$  se consideră mulțimea

$$K = \{M(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\}.$$

Dintre toate punctele acestei mulțimi compacte limitată de segmentele  $OA$ ,  $OB$  și  $AB$ , unde  $A(1, 0)$  și  $B(0, 1)$ , există unul cu proprietatea că suma pătratelor distanțelor euclidiene la punctele  $O$ ,  $A$  și  $B$  este cea mai mică.

**Soluție.** Suma pătratelor distanțelor euclidiene de la un punct  $M(x, y) \in K$  la cele trei puncte este :

$$(5.1) \quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2.$$

Problema se reduce atunci la aflarea celei mai mici valori a funcției

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2, \quad (\forall) (x, y) \in K. \quad (1.40)$$

Căutăm punctele de extrem ale restricției funcției (1.40) la interiorul domeniului de definiție.

Pentru aceasta rezolvăm sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale lui  $f$ .

Se găsește punctul  $M_0(x_0, y_0)$ , unde  $x_0 = \frac{1}{3}$ , și  $y_0 = \frac{1}{3}$ .

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în punctul  $M_0$  este  $d^2f(x_0, y_0) = 6dx^2 + 6dy^2$ . Această diferențială este o formă pătratică pozitiv definită, deci  $M_0$  este punct de minim local al funcției  $f$  aflat în interiorul domeniului de definiție al funcției. Valoarea funcției  $f$  în acest punct este  $f(x_0, y_0) = \frac{4}{3}$ .

Examinăm acum valorile lui  $f$  pe segmentul  $OA$  care face parte din frontiera lui  $K$ . Pentru aceasta este suficient să punem  $y = 0$  în expresia lui  $f(x, y)$ . Obținem astfel valorile restricției funcției  $f$  la acest segment, pe care o notăm cu  $f_{/OA}$

$$f_{/OA} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{/OA}(x) = 2x^2 + (x - 1)^2 + 1, \quad x \in [0, 1]. \quad (1.41)$$

Funcția reală de variabilă reală din (1.41) are un singur punct staționar căci derivata acesteia se anulează într-un singur punct din intervalul  $(0, 1)$  și anume

$$x_0 = \frac{1}{3}.$$

Diferențiala a doua a funcției (1.41) în punctul  $x_0 = \frac{1}{3}$  este  $d^2 f_{/OA}(x_0) = 6dx^2$  care evident este formă pătratică pozitiv definită și ca atare punctul  $M_1(x_0, 0)$  este punct de minim pentru funcția  $f$  care are în acest punct valoarea  $\frac{5}{3}$ .

Să remarcăm că în extremitățile intervalului  $[0, 1]$  funcția din (1.41) are valori extreme de asemenea însă ambele sunt puncte de maxim.

Într-un mod similar se constată că cea mai mică valoare a restricției funcției  $f$  la segmentul  $OB$  este  $\frac{5}{3}$  și reprezintă valoarea lui  $f$  în punctul de minim  $M_2(0, \frac{1}{3})$ .

Pentru a examina valorile lui  $f$  pe segmentul deschis  $BA$  vom considera restricția sa la acest segment care se obține din  $f(x, y)$  prin înlocuirea lui  $y$  cu valoarea sa scoasă din ecuația segmentului  $BA$ , adică  $y = 1 - x$ ,  $x \in (0, 1)$ . Se obține

$$f_{/BA} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{/BA}(x) = 3x^2 + 3(x - 1)^2, \quad x \in (0, 1). \quad (1.42)$$

Aplicând funcției (1.42) algoritmul de determinare a extremelor libere care se desprinde din Secțiunea 8.1, găsim că pentru  $x_3 = \frac{1}{2}$  se realizează un minim al funcției (1.42) de valoare  $\frac{3}{2}$ . Aceasta atrage că în punctul  $M_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , aflat pe segmentul  $BA$ , funcția  $f$  are un minim local și valoarea funcției în acest punct este desigur  $\frac{3}{2}$ .

Analiza rezultatelor conduce la concluzia că valoarea cea mai mică a funcției  $f$  din (1.40) este  $\frac{4}{3}$  și este atinsă în punctul  $M_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  care este centrul de greutate al unei plăci plane omogene ce ocupă domeniul  $K$ . ■

### Exemplul 1.5.2 Cea mai mare valoare a funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(K), \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in K,$$

unde  $K$  este discul închis cu centrul în origine și rază 2, este atinsă într-un punct de pe frontiera mulțimii  $K$ .

**Soluție.** Deoarece  $K = \overline{B}(\mathbf{0}, 2)$  rezultă că această mulțime se poate scrie în forma

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Singurul punct staționar al restricției funcției  $f$  la mulțimea  $\overset{\circ}{K}$  este originea reperului  $Oxy$ , care se vede imediat că nu este punct de extrem al funcției deoarece diferențiala a doua a funcției  $f$  în acest punct este  $d^2f(\mathbf{0}) = 2dx^2 - 2dy^2$  care este formă pătratică nedefinită deci originea reperului este punct șa pentru funcția  $f$ .

Determinăm valorile extreme ale restricției funcției  $f$  la frontiera mulțimii  $K$ , deci la cercul de ecuație  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ . Pentru aceasta folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Funcția lui Lagrange este

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Sistemul care dă punctele staționare ale funcției  $\mathcal{L}$

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda y = 0, \\ -2y + 2\lambda x = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0, \end{cases}$$

are soluțiile:

$$(2, 0; -1); \quad (-2, 0; -1); \quad (0, 2; 1); \quad (0, -2; 1).$$

Rezultă atunci că funcția scop  $f$  are punctele staționare condiționate

$$M_1(2, 0), \quad M_2(-2, 0), \quad M_3(0, 2), \quad M_4(0, -2),$$

primele două corespunzătoare valorii  $\lambda = -1$ , ultimele fiind corespunzătoare valorii  $\lambda = 1$  a multiplicatorului lui Lagrange  $\lambda$ .

Diferențiala a doua într-un punct curent al funcției lui Lagrange este

$$d^2\mathcal{L}(x, y; \lambda) = 2(\lambda + 1)dx^2 + 2(\lambda - 1)dy^2.$$

Pentru primele două puncte se obține că diferențiala a doua a funcției lui Lagrange este  $-4dy^2$ , deci formă pătratică negativ definită, ceea ce atrage că  $M_1$  și  $M_2$  sunt puncte de maxim condiționat. În celelalte două puncte critice ale funcției lui Lagrange, diferențiala a doua este egală cu  $4dx^2$ . Cum aceasta

este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că  $M_3$  și  $M_4$  sunt puncte de minim condiționat ale funcției scop  $f$ .

În punctele de maxim condiționat, funcția  $f$  are valoarea 4.

Deci, cea mai mare valoare a funcției  $f$  este 4 și aceasta este valoarea funcției fie în punctul  $M_1$  fie în punctul  $M_2$ , ambele aflate pe frontiera domeniului de definiție al funcției  $f$ . ■

**Exemplul 1.5.3** Fie funcția

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

unde  $D = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$ .

Cea mai mică valoare a funcției  $f$  este atinsă în interiorul domeniului de definiție, iar cea mai mare, egală cu 300, este valoarea sa într-un punct de pe frontieră.

**Soluție.** Domeniul  $D$  de definiție al funcției  $f$  este o mulțime compactă și reprezintă bila închisă în  $\mathbb{R}^3$  de rază 10 cu centrul în origine.

Deoarece funcția  $f$  este diferențiabilă în interiorul mulțimii  $D$ , pentru a afla valorile sale extreme în puncte ale interiorului mulțimii  $D$  procedăm ca la determinarea punctelor de extrem local ale unei funcții reale de mai multe variabile reale.

Sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  are doar soluția  $(0, 0, 0)$  și deci singurul punct staționar al funcției  $f$  este originea reperului.

Diferențiala de ordinul al doilea a funcției  $f$  în origine este

$$d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2$$

și este evident că este o formă pătratică pe  $\mathbb{R}^3$ , pozitiv definită.

Prin urmare, în origine, funcția  $f$  are un punct de minim iar valoarea minimă este zero.

Să determinăm valorile extreme ale funcției  $f$  pe frontiera domeniului acesteia care este sfera de ecuație

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0.$$

Deci, trebuie să rezolvăm o problemă de extrem condiționat în care funcția scop este  $f$  iar legătura este ecuația de mai sus. Pentru aceasta, introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

căreia îi determinăm punctele critice ale căror coordonate sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} 2x(\lambda + 1) = 0 \\ 2y(\lambda + 1) = 0 \\ 2z(\lambda + 1) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0, \end{cases}$$

format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ .

Prin rezolvarea acestui sistem găsim trei puncte staționare ale funcției  $\mathcal{L}$

$$(10, 0, 0; -1), \quad (0, 10, 0; -1), \quad (0, 0, 10; -1)$$

din care deducem că funcția  $f$  are punctele staționare condiționate

$$M_1(10, 0, 0), \quad M_2(0, 10, 0), \quad M_3(0, 0, 10)$$

corespunzătoare respectiv valorilor  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$  ale multiplicatorului  $\lambda$  a lui Lagrange.

Diferențiala de ordinul 2 a funcției lui Lagrange  $\mathcal{L}$  într-un punct oarecare de pe sferă are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2(\lambda + 1)dx^2 + 2(\lambda + 2)dy^2 + 2(\lambda + 3)dz^2 + 4(xdx + ydy + zdz)d\lambda,$$

expresie ce se simplifică dacă ținem cont că între diferențialele variabilelor există legătura

$$xdx + ydy + zdz = 0.$$

Astfel, într-o primă fază, putem scrie

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2(\lambda + 1)dx^2 + (\lambda + 2)dy^2 + (\lambda + 3)dz^2.$$

Diferențialele de ordinul 2 ale funcției  $\mathcal{L}$  în punctele ei staționare au respectiv expresiile

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; -1) &= 2(dy^2 + dz^2), \quad d^2\mathcal{L}(M_2; -1) = 2(dz^2 - dx^2), \\ d^2\mathcal{L}(M_3; -1) &= -2(2dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

Prima diferențială este o formă pătratică pozitiv definită, a doua este formă pătratică nedefinită, în timp ce a treia diferențială este formă pătratică negativ definită.

Rezultatele găsite arată că, pentru funcția  $f$ ,  $M_1$  este punct de minim condiționat,  $M_2$  este un punct de tip șa, iar  $M_3$  este punct de maxim condiționat.

Prin urmare, în punctele sferei de rază 10 cu centrul în origine, funcția  $f$  are o valoare minimă, egală cu  $f(M_1) = 100$  și o valoare maximă  $f(M_3) = 300$ .

Luând în calcul și valorile pe care le ia funcția  $f$  în interiorul domeniului ei de definiție, rezultă că cea mai mică valoare a funcției este zero, atinsă în origine, iar cea mai mare valoare este 300, iar această valoare este luată într-un punct de pe frontiera domeniului  $D$ . ■

**Exercițiul 1.5.1** Să se găsească cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției

$$f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^2,$$

unde  $\mathbb{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$ .

**Soluție.** Determinăm întâi extremele locale ale funcției  $f$  în interiorul  $D$  al mulțimii compacte  $\mathbb{K}$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 < 0\}$ , ce reprezintă discul deschis de rază 1 cu centrul în origine.

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$ ,

$$f_{,x}(x, y) = 3x^2, \quad f_{,y}(x, y) = 2y,$$

se anulează doar în origine și deci  $O(0, 0)$  este singurul punct staționar al restricției funcției  $f$  la domeniul  $D$ .

Diferențiala a doua a funcției  $f$  în origine,  $d^2 f(0, 0) = 2dy^2$ , este formă pătratică pozitivă și deci nu putem preciza natura punctului staționar pe această cale. Se impune să cercetăm semnul diferenței  $f(x, y) - f(0, 0)$ . Această diferență poate avea valori atât pozitive cât și negative în orice vecinătate a originii și ca atare originea nu este punct de extrem al restricției funcției  $f$  la interiorul domeniului ei de definiție. Acest punct este de tip șa.

Cercetăm acum extremele restricției funcției  $f$  la mulțimea  $\mathbb{K} \setminus D$ . Cum coordonatele  $x, y$  ale punctelor acestei mulțimi satisfac ecuația  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , rezultă că trebuiesc determinate extremele condiționate ale funcției scop  $f$  cu legătura  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Pentru a le determina, introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y; \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y) = x^3 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

căreia îi calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi și apoi rezolvăm sistemul format prin anularea acestora. Se găsesc soluțiile:

$$\begin{cases} (0, -1, -1); & (0, 1, -1); & \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{5}, -1\right); \\ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{5}, -1\right); & \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right); & \left(1, 0, -\frac{3}{2}\right), \end{cases} \quad (1.43)$$

care vor fi punctele staționare ale funcției  $\mathcal{L}$ . Corespunzător,

$$\begin{cases} M_1(0, -1); & M_2(0, 1); & M_3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\sqrt{5}\right); \\ M_4\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{5}\right); & M_5(-1, 0); & M_6(1, 0) \end{cases} \quad (1.44)$$

vor fi puncte staționare condiționate ale funcției  $f$ . Punctelor  $M_1, M_2, M_3, M_4$  le corespunde valoarea  $\lambda = -1$  a multiplicatorului Lagrange,  $M_5$  corespunde lui  $\lambda = 3/2$ , iar pentru  $M_6$  valoarea multiplicatorului este  $\lambda = -3/2$ .

Diferențiala a doua a funcției lui Lagrange într-un punct oarecare  $(x, y; \lambda) \in \mathbb{R}^3$  are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x, y; \lambda) = 2(3x + \lambda)dx^2 + 2(1 + \lambda)dy^2, \quad (1.45)$$

în care trebuie avut în vedere că între diferențialele variabilelor independente există relația

$$2xdx + 2ydy = 0, \quad (1.46)$$

obținută prin diferențierea legăturii.

Înlocuind pe rând  $(x, y; \lambda)$  din (1.45) cu ternele din (1.43) și ținând cont de (1.46), găsim că diferențiala a doua a funcției lui Lagrange în punctele sale staționare are valorile:

$$\begin{cases} d^2\mathcal{L}(M_1; -1) = -2dx^2; & d^2\mathcal{L}(M_2; -1) = -2dx^2; \\ d^2\mathcal{L}(M_3; -1) = 10dy^2; & d^2\mathcal{L}(M_4; -1) = 10dy^2; \\ d^2\mathcal{L}\left(M_5; \frac{3}{2}\right) = 5dy^2; & d^2\mathcal{L}\left(M_6; -\frac{3}{2}\right) = -dy^2. \end{cases} \quad (1.47)$$

Din analiza formelor pătratice (1.47) putem spune că  $M_1, M_2, M_6$  sunt puncte de maxim condiționat și  $M_3, M_4, M_5$  sunt puncte de minim condiționat ale funcției  $f$ , valorile funcției  $f$  în aceste puncte fiind

$$f(M_1) = f(M_2) = f(M_6) = 1, \quad f(M_3) = f(M_4) = \frac{23}{27}, \quad f(M_5) = -1.$$



Așadar, valoarea maximă a funcției  $f$  este 1, această valoare fiind luată în oricare din punctele  $M_1, M_2, M_6$ , iar cea mai mică valoare a lui  $f$  este  $-1$  și reprezintă valoarea funcției în punctul  $M_5$ .

Să observăm că extremele condiționate ale funcției  $f(x, y) = x^3 + y^2$  cu legătura  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  se pot determina și pe altă cale, calculând extremele locale ale funcției  $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ale cărei valori,  $h(x) = x^3 - x^2 + 1$ , se obțin prin înlocuirea lui  $y^2$  din expresia lui  $f(x, y)$  cu  $y^2 = 1 - x^2$ , aceasta din urmă rezultând din legătură.

Tabloul de variație al funcției  $h$  arată că  $x = 0$  și  $x = 2/3$  sunt puncte de extrem din interiorul domeniului de definiție al funcției  $h$ , primul de maxim, al doilea de minim, cu valorile corespunzătoare 1 și  $23/27$ .

Luând în calcul și valorile lui  $h$  în extremitățile intervalului  $[-1, 1]$  deducem că cea mai mică valoare a funcției  $h$  este  $-1$  iar cea mai mare este 1. Valorile extreme ale funcției  $h$  coincid cu cele ale funcției  $f$ .

Pentru determinarea coordonatelor punctelor în care  $f$  ia valori extreme se folosește legătura  $y^2 = 1 - x^2$ .

Rezultatele stabilite arată că dacă perechile  $(x, y)$  sunt astfel încât  $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$ , atunci

$$-1 \leq x^3 + y^2 \leq 1.$$

Această dublă inegalitate a rezultat fie folosind metoda de determinare a extremelor locale ale funcțiilor definite pe mulțimi compacte, fie determinând extremele funcției  $h$ , restricția funcției  $f$  la mulțimea soluțiilor ecuației  $F(x, y) = 0$ . ■

## 1.5.2 Probleme propuse

**Exercițiul 1.5.2** *Dintre toate valorile funcției*

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y),$$

*să se determine cea mai mică și cea mai mare.*

**Răspuns.** În interiorul mulțimii de definiție, funcția  $f$  are o valoare maximă locală  $f_{\max} = 3\sqrt{3}/2$  în punctul  $M_0(\pi/3, \pi/3)$ . Pe frontiera mulțimii de definiție,  $f$  are un punct de minim în origine, valoarea minimă fiind  $f_{\min} = 0$ , două puncte de maxim  $M_1(\pi/2, \pi/4)$ ,  $M_2(\pi/4, \pi/2)$ , în ambele funcția  $f$  având valoarea  $f_{\max} = 1 + \sqrt{2}$  și un punct de minim  $M_3(\pi/2, \pi/2)$  cu  $f(M_3) = 2$ .

Rezultă că cea mai mică valoare a funcției  $f$  este egală cu zero, iar cea mai mare valoare a sa este  $3\sqrt{3}/2$ . ■

**Exercițiul 1.5.3** Să se determine extremele globale ale următoarelor funcții definite pe mulțimi compacte:

$$\begin{aligned} 1. f : K \rightarrow \mathbb{R}, & \quad \begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y, \\ K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\} \end{cases} ; \\ 2. f : K \rightarrow \mathbb{R}, & \quad \begin{cases} f(x, y) = x^2 - xy + y^2, \\ K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\} \end{cases} \end{aligned}$$

**Răspuns.** 1. Funcția  $f$  are pe mulțimea  $K$  două puncte de extrem, unul de maxim  $M_1(-3, 4)$  și altul de minim  $M_2(3, -4)$ , valorile sale fiind  $f_{\max} = f(M_1) = 125$  și  $f_{\min} = f(M_2) = -75$ . Ambele puncte sunt pe frontiera mulțimii compacte  $K$  și pentru determinarea lor se folosește metoda multiplicatorilor lui Lagrange, legătura fiind ecuația frontierei  $x^2 + y^2 - 25 = 0$ .

Conform teoremei lui Weierstrass, care spune că o funcție continuă pe o mulțime compactă este mărginită și își atinge marginile, rezultă că extremele găsite sunt globale, deci:

$$\sup_{x^2+y^2 \leq 25} f(x, y) = f(-3, 4) = 125, \quad \inf_{x^2+y^2 \leq 25} f(x, y) = f(3, -4) = -75.$$

2. Domeniul de definiție al funcției  $f$  este, în metrica  $\delta$ , bila închisă de rază 1 și centrul în originea reperului cartezian ortogonal  $Oxy$ . Această bilă reprezintă pătratul cu diagonalele de lungime 2 situate pe axele de coordonate. Funcția  $f$  are un punct de minim în origine, cu  $f_{\min} = 0$ , patru puncte de maxim, câte unul în interiorul fiecărei lature a frontierei mulțimii  $K$ :  $M_1(1/2, 1/2)$  cu  $f(M_1) = 1/4$ ;  $M_2(-1/2, 1/2)$  cu  $f(M_2) = 3/4$ ;  $M_3(-1/2, -1/2)$  cu  $f(M_3) = 1/4$ ;  $M_4(1/2, -1/2)$  cu  $f(M_4) = 3/4$  și încă patru puncte de maxim situate în extremitățile segmentelor de dreaptă care reunite dau frontiera:  $A(1, 0)$  cu  $f(A)=1$ ;  $B(0, 1)$  cu  $f(B) = 1$ ;  $C(-1, 0)$  cu  $f(C)=1$ ;  $D(0, -1)$  cu  $f(D) = 1$ .

Rezultă că valoarea maximă a funcției  $f$  pe mulțimea  $|x| + |y| \leq 1$  este 1, atinsă în oricare din punctele  $A, B, C, D$ , iar valoarea minimă este 0, punctul unde  $f$  ia această valoare fiind în origine, ce este punct din interiorul mulțimii  $K$ . ■

## 1.6 Transformări punctuale regulate

### 1.6.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.6.1** Să se arate că transformarea  $T$  dată prin

$$T : \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}, \quad (x, y) \in D,$$

unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x > y\}$ , este o transformare punctuală regulată, să se determine inversa acesteia și să se verifice că produsul jacobianilor celor două transformări este egal cu 1.

**Soluție.** Funcțiile  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$  sunt infinit diferentiabile pe mulțimea deschisă  $D$  care este mulțimea punctelor planului raportat la reperul cartezian  $xOy$  cuprinse între semiaxa pozitivă  $Ox$  și porțiunea din prima bisectoare  $y = x$  aflată în primul cadran.

Determinantul funcțional

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -8xy$$

nu se anulează în punctele domeniului  $D$ . Rezultă că transformarea  $T$  este o transformare punctuală regulată.

Inversa  $T^{-1}$

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u-v} \end{cases}, \quad (u, v) \in \Omega,$$

a transformării punctuale regulate  $T$  este, de asemenea, o transformare punctuală regulată pe domeniul  $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > v > 0\}$  și are jacobianul

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}.$$

Dacă ținem cont că  $\sqrt{u^2 - v^2} = 2xy$ , atunci

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}(x, y) \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) = 1,$$

constatând astfel că relația între cei doi jacobieni este verificată. ■

**Exercițiul 1.6.2** Se dau transformările

$$(T_1) \quad u_1 = x + y, \quad u_2 = y + z, \quad u_3 = z + x, \quad D \subset \mathbb{R}^3,$$

$$(T_2) \quad v_1 = u_2 u_3, \quad v_2 = u_3 u_1, \quad v_3 = u_1^2 + u_2^2, \quad D^* \subset \mathbb{R}^3.$$

Se cere să se determine domeniile maxime  $D$  și  $D^*$  în care  $(T_1)$  și  $(T_2)$  sunt transformări punctuale regulate. Să se determine transformarea compusă  $T_2(T_1)$  și să se verifice relația

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)}.$$

**Soluție.** Avem

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

deci  $D = \mathbb{R}^3$ ; avem și

$$\frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} 0 & u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & u_1 \\ 2u_1 & 2u_2 & 0 \end{vmatrix} = 2u_3(u_1^2 + u_2^2)$$

deci  $D^* = \mathbb{R}^3 \setminus A$ , unde  $A$  este reuniunea mulțimii punctelor din spațiu pentru care  $u_3 = 0$  (un plan) cu mulțimea punctelor din spațiu pentru care  $u_1 = u_2 = 0$  (dreaptă).

Transformarea compusă  $T_2(T_1)$  este dată de

$$T_2(T_1) \quad \begin{cases} v_1 = (y + z)(z + x), \\ v_2 = (z + x)(x + y), \\ v_3 = (x + y)^2 + (y + z)^2 \end{cases}$$

deci

$$\begin{aligned} \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)} &= \begin{vmatrix} y+z & z+x & 2z+x+y \\ 2x+y+z & z+x & x+y \\ 2(x+y) & 2(2y+x+z) & 2(y+z) \end{vmatrix} = \\ &= 4(z+x)[(y+z)^2 + (x+y)^2]. \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de forma transformării  $(T_1)$  rezultă că

$$\frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(x, y, z)} = 4u_3(u_1^2 + u_2^2) = \frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(x, y, z)} \cdot \frac{D(v_1, v_2, v_3)}{D(u_1, u_2, u_3)}$$

și egalitatea din enunț este verificată. ■

## 1.6.2 Probleme propuse

**Exercițiul 1.6.3** Să se stabilească dacă transformarea

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > x_3 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T} = (y_1, y_2, y_3),$$

unde

$$(T) \quad \begin{cases} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2), \\ y_3 &= x_2 x_3, \end{cases}$$

este transformare punctuală regulată (difeomorfism). În caz afirmativ, să se determine transformarea inversă transformării  $(T)$ .

**Răspuns.** Aplicația  $\mathbf{T}$  este difeomorfism. Mulțimea valorilor sale este  $\{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 \in \mathbb{R}, y_2 > y_3 > 0\}$  și

$$(T^{-1}) \quad \begin{cases} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= \sqrt{y_2 + \sqrt{y_2^2 + y_3^2}}, \\ x_3 &= \sqrt{-y_2 + \sqrt{y_2^2 + y_3^2}}. \end{cases}$$

■

**Exercițiul 1.6.4** Să se cerceteze dacă transformarea

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{T} = (y_1, y_2, y_3), \quad (T) \quad \begin{cases} y_1 &= e^{2x_2} + e^{2x_3}, \\ y_2 &= e^{2x_1} - e^{2x_3}, \\ y_3 &= x_1 - x_2 \end{cases}$$

este transformare punctuală regulată (difeomorfism). În caz afirmativ, să se determine transformarea inversă transformării (T).

**Răspuns.**  $\text{Im}\mathbf{T} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 > 0\}$ . Aplicația  $\mathbf{T}$  este difeomorfism de la  $\mathbb{R}^3$  la  $\text{Im}\mathbf{T}$ . ■

**Exemplul 1.6.1** Aplicația

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \quad \mathbf{T} = (x, y, z),$$

unde

$$(T) \quad \begin{cases} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \\ z &= z \end{cases}$$

este un difeomorfism de la mulțimea  $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  la mulțimea  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ . Să se determine inversa aplicației  $\mathbf{T}$ .

**Răspuns.**  $\mathbf{T}^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{T}^{-1} = (\rho, \theta, z)$ , unde

$$(T^{-1}) \quad \begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ z &= z. \end{cases}$$

Pentru determinarea funcției unghi polar  $\theta$  se precizează mai întâi cadranul și apoi se caută soluția ecuației  $\tan \theta = y/x$  din acel cadran. ■

## 1.7 Dependență și independență funcțională

### 1.7.1 Exemple și exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.7.1** Să se arate că funcțiile reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x + y + z, \quad g(x, y, z) = x - y + z, \quad h(x, y, z) = 4xy + 4yz,$$

definite pe  $\mathbb{R}^3$ , sunt dependente funcțional și să se găsească relația lor de dependență funcțională.

**Soluție.** Deoarece numărul funcțiilor este egal cu numărul variabilelor independente, vom calcula jacobianul acestora. Avem

$$\frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4x + 4z & 4y \end{vmatrix} = 0.$$

Acest rezultat demonstrează că funcțiile  $f$ ,  $g$  și  $h$  sunt dependente funcțional pe mulțimea  $\mathbb{R}^3$ .

Termenii care compun expresia funcției  $h$  pot apărea din ridicarea la pătrat a expresiilor funcțiilor  $f$  și  $g$ . Folosind această observație verificăm simplu că relația de dependență funcțională este

$$h(x, y, z) = f^2(x, y, z) - g^2(x, y, z)$$

și aceasta are loc în toate punctele spațiului  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Exemplul 1.7.1** Fie  $f, g, h$ , funcții reale de o variabilă reală derivabile și inversabile.

Funcțiile  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$  și  $w = w(x, y, z)$ , unde

$$u = f\left(\frac{y}{z}\right), \quad v = g\left(\frac{z}{x}\right), \quad w = h\left(\frac{x}{y}\right), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0,$$

sunt în dependență funcțională pe domeniul  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0, z > 0\}$ .

**Soluție.** Funcțiile  $u, v, w$  sunt funcții compuse, iar variabilele intermediare

$$s = s(x, y, z) = \frac{y}{z}, \quad t = t(x, y, z) = \frac{z}{x}, \quad \tau = \tau(x, y, z) = \frac{x}{y}$$

satisfac evident identitatea

$$s(x, y, z) \cdot t(x, y, z) \cdot \tau(x, y, z) \equiv 1.$$

Deoarece numărul funcțiilor este același cu numărul variabilelor independente, pentru a decide dacă  $u, v$  și  $w$  sunt sau nu sunt în dependență funcțională, este de ajuns să calculăm determinantul funcțional

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z) \end{vmatrix}.$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse constatăm că valoarea acestui determinant este

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}(x, y, z) = \frac{f'(s)g'(t)h'(\tau)}{(xyz)^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}.$$

Cum ultimul determinant este nul, rezultă că cele trei funcții sunt dependente funcțional. Relația de dependență între inversele acestor funcții este

$$f^{-1}(u) \cdot g^{-1}(v) \cdot h^{-1}(w) = 1,$$

aceasta rezultând din faptul că  $s \cdot t \cdot \tau = 1$ . ■

### Exemplul 1.7.2 Funcțiile

$$u = f\left(\frac{1}{(x-y)(x-z)}\right), \quad v = g\left(\frac{1}{(y-z)(y-x)}\right), \quad w = h\left(\frac{1}{(z-x)(z-y)}\right),$$

cu  $f, g$  și  $h$  funcții derivabile și injective pe un același interval  $I \subset \mathbb{R}$ , sunt dependente funcțional.



**Soluție.** Într-adevăr, deoarece numărul funcțiilor este același cu numărul variabilelor independente este de ajuns să calculăm determinantul funcțional

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial w}{\partial z}(x, y, z) \end{vmatrix}.$$

Pentru a calcula mai ușor derivatele parțiale din expresia acestui determinant, introducem variabilele intermediare

$$s = \frac{1}{(x-y)(x-z)}, \quad t = \frac{1}{(y-z)(y-x)}, \quad \tau = \frac{1}{(z-x)(z-y)}.$$

Acum, funcțiile  $u, v, w$  sunt funcții compuse și aplicând regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse, găsim

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}(x, y, z) = \lambda \cdot \begin{vmatrix} y+z-2x & x-z & x-y \\ y-z & z+x-2y & y-x \\ z-y & z-x & x+y-2z \end{vmatrix},$$

unde am folosit notația

$$\lambda = \frac{f'(s)g'(t)h'(\tau)}{[(x-y)(y-z)(z-x)]^4}.$$

Ultimul determinant este nul deoarece prima coloană  $C_1$  a sa este combinație liniară de celelalte două,  $C_2$  și  $C_3$ ; mai precis,  $C_1 = -C_2 - C_3$ .

Rezultatul stabilit demonstrează că cele trei funcții  $u, v, w$  sunt dependente funcțional.

Deoarece

$$s + t + \tau = \frac{z-y+x-z+y-x}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 0,$$

rezultă că relația de dependență funcțională ce se poate pune în evidență este

$$f^{-1}(u) + g^{-1}(v) + h^{-1}(w) = 0,$$

unde  $s = f^{-1}(u)$ ,  $t = g^{-1}(v)$  și  $\tau = h^{-1}(w)$  sunt funcțiile inverse corespunzătoare funcțiilor date. ■

**Exemplul 1.7.3** *Funcțiile reale de  $n$  variabile reale*

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, & f_2(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \\ f_3(\mathbf{x}) &= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , sunt în dependență funcțională pe  $\mathbb{R}^n$ .

**Soluție.** Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ . Matricea jacobiană  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{3 \times n}(\mathbb{R})$  are ca elemente pe cele trei linii componentele corespunzătoare ale gradientilor  $(\nabla f_1)(\mathbf{x})$ ,  $(\nabla f_2)(\mathbf{x})$  și  $(\nabla f_3)(\mathbf{x})$ . Prin urmare,

$$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_n & x_1 + x_3 + \cdots + x_n & \cdots & x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Această matrice are rangul 2 pentru că orice minor de ordinul trei al matricei este nul și există cel puțin un minor de ordinul al doilea diferit de zero. Prin urmare, două din cele trei funcții sunt independente funcțional, cea de a treia exprimându-se în funcție de aceste două. Se observă că are loc identitatea

$$f_2(\mathbf{x}) \equiv f_1^2(\mathbf{x}) - 2f_3(\mathbf{x}),$$

ceea ce arată că relația de dependență funcțională între cele trei funcții este  $f_2 = f_1^2 - 2f_3$ . ■

## 1.7.2 Exemple și exerciții propuse

**Exemplul 1.7.4** *Funcțiile reale de trei variabile reale*

$$\begin{cases} u &= xy - z, \\ v &= xz + y, \\ w &= (x^2 + 1)(y^2 + z^2) - yz(x^2 + 1) - x(y^2 - z^2), \end{cases}$$

definite pe  $\mathbb{R}^3$ , sunt în dependență funcțională pe  $\mathbb{R}^3$ .

**Indicație.** Se arată că determinantul funcțional al celor trei funcții în raport cu variabilele  $x, y, z$  este nul, deci funcțiile sunt în dependență funcțională.

**Răspuns.** Legătura dintre  $u, v$  și  $w$  este :  $w = u^2 - uv + v^2$ . ■

**Exercițiul 1.7.2** *Ce relație trebuie să satisfacă derivatele parțiale ale funcției  $z = f(x, y)$  astfel încât  $z$  să depindă de  $x$  și  $y$  prin intermediul funcției  $u = x^2 + y^2$ ?*

**Indicație.** Relația rezultă din condiția ca funcțiile  $z = f(x, y)$  și  $u = x^2 + y^2$  să fie dependente funcțional. Pentru aceasta trebuie ca  $\frac{D(z, u)}{D(x, y)} = 0$ .

**Răspuns.** Relația căutată este  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . ■

**Exercițiul 1.7.3** *Să se studieze dependența sau independența funcțiilor*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = \frac{z}{x}, \\ f_2(x, y, z) = -x + \frac{y}{x}, \\ f_3(x, y, z) = z - e^{-x} + \frac{y}{x}, \end{cases}$$

în punctele  $(1, 0, 0)$  și  $(1, 1, 0)$ .

**Răspuns.** Deoarece  $\det J_{\mathbf{f}}(1, 0, 0) \neq 0$  și  $\det J_{\mathbf{f}}(1, 1, 0) \neq 0$ , rezultă că în ambele puncte  $f_1, f_2, f_3$  sunt independente funcțional. Aici,  $J_{\mathbf{f}}(x, y, z)$  este matricea jacobiană a funcției vectoriale  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  calculată în punctul  $(x, y, z)$ . ■

**Exercițiul 1.7.4** *Să se studieze dependența sau independența funcțiilor reale de patru variabile reale*

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u) = \frac{y}{z}, \\ f_2(x, y, z, u) = \frac{u}{y}, \\ f_3(x, y, z, u) = x^2 + y^2 + z^2 - u, \end{cases}$$

definite pe mulțimea  $(0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty)$ . ■

**Indicație.** Matricea jacobiană a funcției vectoriale  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  are trei linii și patru coloane. Se determină rangul acesteia. Se găsește  $\text{rang } J_{\mathbf{f}}(x, y, z) = 3$  în toate punctele  $(x, y, z) \in ((0, \infty))^4$ .

**Răspuns.** Funcțiile date sunt independente funcțional. ■

**Exercițiul 1.7.5** Studiați dependența sau independența funcțională a funcțiilor

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) &= (x + y + z)^3 - 1, \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2, \\ f_3(x, y, z) &= (xy + yz + zx)^2 + 2, \end{cases}$$

definite pe  $\mathbb{R}^3$ .

**Răspuns.** Cele trei funcții sunt dependente funcțional. ■

## 1.8 Schimbări de variabile

### 1.8.1 Schimbarea variabilei independente în ecuații diferențiale ordinare

**Exercițiul 1.8.1** Ce devine ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea cu coeficienți variabili

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0,$$

dacă noua variabilă independentă este  $t$ , iar legătura cu vechea variabilă  $x$  este  $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$ ?

**Soluție.** Pentru  $x = \varphi(t)$ , obținem funcția compusă

$$z(t) = y(\varphi(t)) \Leftrightarrow y(x) = z(\varphi^{-1}(x)).$$

În cazul considerat  $y(x) = z\left(\frac{1}{x}\right)$ , deci:

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dz}{dt}(t) \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \frac{dz}{dt}(t) = -t^2 \frac{dz}{dt}(t);$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx} \left( -t^2 \frac{dz}{dt}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left( -t^2 \frac{dz}{dt}(t) \right) \frac{dt}{dx} = t^4 \frac{d^2 z}{dt^2}(t) + 2t^3 \frac{dz}{dt}(t).$$

Înlocuind expresiile acestor două derivate în ecuație constatăm că forma transformată a sa este ecuația diferențială a vibrațiilor armonice

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + a^2 z = 0.$$

Avantajul efectuării schimbării de variabilă indicată constă în aceea că ecuația transformată este una cunoscută, căreia i se cunosc toate soluțiile

$$z(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at,$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante reale arbitrare.

Revenind la variabila  $x$ , obținem

$$y(x) = C_1 \cos \frac{a}{x} + C_2 \sin \frac{a}{x}$$

ce reprezintă toate soluțiile ecuației diferențiale date. ■

**Exemplul 1.8.1** Ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea, liniară și cu coeficienți variabili

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + y = 0,$$

unde  $x > 0$ , este o **ecuație de tip Euler**.

Schimbarea de variabilă independentă  $x = e^t$  conduce la ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = 0,$$

căreia i se poate determina toate soluțiile.

**Soluție.** Deoarece funcțiile  $z$  și  $y$  sunt legate prin relația  $z = y(e^t)$ , avem  $y = z(\ln x)$ .

Derivând ultima relație după regula de derivare a funcțiilor compuse, avem:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{dz}{dt} = e^{-t} \cdot \frac{dz}{dt}; \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dz}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

Înlocuirea acestora în ecuația inițială conduce la ecuația diferențială liniară și omogenă, de ordinul al doilea, cu coeficienți constanți

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + z = 0.$$

Acestei ecuații îi putem afla soluțiile după următorul procedeu.

Se caută o soluție de forma  $z = e^{\lambda t}$ , unde  $\lambda$  este un parametru real sau complex. Impunând o astfel de soluție constatăm că parametrul  $\lambda$  trebuie să verifice așa numita ecuație caracteristică

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

și care are rădăcinile  $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Celor două rădăcini ale ecuației caracteristice le corespund soluțiile

$$\begin{cases} \tilde{z}_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \\ \tilde{z}_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{1}{2}t} \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \end{cases}$$

ce sunt funcții complexe, conjugate una celeilalte. Cum ecuația diferențială este liniară, putem să considerăm alte două soluții, combinații liniare ale acestora,

$$z_1(t) = \frac{\tilde{z}_1(t) + \tilde{z}_2(t)}{2} = e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t, \quad z_2(t) = \frac{\tilde{z}_1(t) - \tilde{z}_2(t)}{2i} = e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t$$

care, după cum se vede, sunt funcții reale.

Orice altă soluție a ecuației liniare cu coeficienți constanți este o combinație liniară a soluțiilor  $z_1(t)$  și  $z_2(t)$

$$z(t) = C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t),$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante reale arbitrare. Alte soluții nu mai există. Spunem că aceasta este soluția generală a ecuației diferențiale dată. Așadar,

$$z(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

Ținând cont de legătura dintre funcțiile  $t \mapsto z(t)$  și  $x \mapsto y(x)$  rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale dată este

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( C_1 \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + C_2 \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right).$$

Dacă se dorește o soluție anume, trebuie precizate valorile constantelor  $C_1$  și  $C_2$ . Aceste constante se pot determina din condiții inițiale care constau în precizarea valorilor funcțiilor  $x \mapsto y(x)$  și  $x \mapsto y'(x)$  într-un punct arbitrar dar fixat din intervalul  $(0, \infty)$ . De exemplu, dacă luăm drept condiții inițiale valorile

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

atunci  $C_1 = C_2 = 1$  și deci

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left( \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) + \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$$

este soluția ecuației date inițial care verifică și condițiile inițiale precizate. ■

### 1.8.2 Schimbarea ambelor variabile într-o ecuație diferențială ordinară

**Exercițiul 1.8.2** *Ce devine ecuația diferențială de ordinul al doilea*

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{dy}{dx} = 0$$

*dacă se schimbă între ele rolul variabilelor?*

**Soluție.** Variabilele ecuației diferențiale sunt  $x$  și  $y$ , prima fiind independentă iar a doua dependentă de prima,  $y = y(x)$ .

Variabila  $y$  este funcția necunoscută a ecuației diferențiale.

A schimba rolurile variabilelor înseamnă a considera că

$$x = \varphi(y) = y^{-1}(x).$$

Folosind legătura între derivata unei funcții cu derivata inversei sale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

și regulile de derivare a funcțiilor compuse, găsim

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Înlocuind expresiile acestor derivate în ecuația dată, obținem

$$x(y) \frac{d^2 x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{dx}{dy} = 0.$$

Schimbarea rolului variabilelor nu aduce simplificarea ecuației diferențiale date. ■

**Exercițiul 1.8.3** *Ce devine ecuația*

$$(1 - x^2)^2 y'' + y = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

*prin schimbarea*

$$x = \tanh t, \quad y = \frac{u}{\cosh t},$$

*unde  $u = u(t)$  este noua funcție necunoscută?*

**Soluție.** Diferențiem pe  $x$  și  $y$

$$dx = \frac{1}{\cosh^2 t} dt; \quad dy = \frac{1}{\cosh t} du - u \cdot \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} dt,$$

după care efectuăm raportul celor două diferențiale. Obținem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cosh t \frac{du}{dt} - u \sinh t.$$

Pentru calculul derivatei secunde a funcției  $x \mapsto y(x)$  derivăm ambii membri ai egalității de mai sus în raport cu  $x$ , în membrul al doilea aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left( \cosh t \frac{du}{dt} - u \sinh t \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \cosh^3 t \left( \frac{d^2 u}{dt^2} - u \right).$$



Cu acestea, ecuația inițială devine

$$(1 - \tanh^2 t)^2 \cosh^3 t \left( \frac{d^2 u}{dt^2} - u \right) + \frac{u}{\cosh t} = 0,$$

sau echivalent,

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = 0.$$

Soluția generală a ultimei ecuații este  $u(t) = 2C_1 t + C_2$ , unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante reale arbitrare.

Revenind la variabilele inițiale rezultă că soluția generală a ecuației diferențiale dată este

$$y(x; C_1, C_2) = \left( C_1 \ln \frac{1+x}{1-x} + C_2 \right) \sqrt{1-x^2}$$

la aceasta ajungându-se după ce se inversează funcția  $x = \tanh t$ . ■

### 1.8.3 Schimbarea variabilelor independente în expresii diferențiale cu derivate parțiale

**Exercițiul 1.8.4** *Să se transforme ecuația diferențială liniară, cu derivate parțiale de ordinul întâi*

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

dacă  $u = x$ ,  $v = x^2 + y^2$ ,  $u$  și  $v$  fiind noile variabile independente.

**Soluție.** Considerăm funcția

$$w(u, v) = z(x(u, v), y(u, v)) \Leftrightarrow z(x, y) = w(u(x, y), v(x, y)).$$

Folosind regulile de derivare ale funcțiilor compuse, de două variabile, obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) + 2x \frac{\partial w}{\partial v}(u, v), \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, v) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial w}{\partial v}(u, v) \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2y \frac{\partial w}{\partial v}(u, v). \end{cases}$$

Cu acestea, ecuația dată se transformă în ecuația diferențială

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u, v) = 0,$$

evident mult mai simplă, care poate fi integrată, adică i se poate determina toate soluțiile. Într-adevăr, avem că  $w = f(v)$ , unde  $f$  este o funcție arbitrară.

Așadar, soluția generală a ecuației inițiale este  $z = f(x^2 + y^2)$ .

Din punct de vedere geometric, soluția generală a acestei ecuații reprezintă o suprafață de rotație. ■

**Exercițiul 1.8.5** Să se transforme ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

(ecuația propagării undelor sau ecuația coardei vibrante) dacă  $\xi = x - at$ ,  $\eta = x + at$ ,  $\xi$  și  $\eta$  fiind noile variabile independente.

**Soluție.** Introducem noua funcție necunoscută  $w$  prin

$$z(x, t) = w(\xi(x, t), \eta(x, t)) = w(x - at, x + at),$$

ce va depinde de variabilele  $\xi$  și  $\eta$ .

Derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $w$ , necesare înlocuirii în ecuația diferențială dată, se determină pornind de la cele de ordinul unu

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) = a \left( -\frac{\partial w}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \frac{\partial w}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right). \end{cases}$$

Aplicând aici operatorii de derivare parțială care se impun și folosind derivarea funcțiilor compuse, găsim derivatele parțiale de ordinul doi nemixte ale funcției  $u$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\xi, \eta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) \right), \end{cases}$$

care înlocuite în ecuația inițială, conduce la forma transformată

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 0,$$

mult mai simplă, căreia putem să-i determinăm soluția generală. Într-adevăr, funcția

$$w(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

unde  $f$  și  $g$  sunt funcții arbitrare de două ori diferentiale, reprezintă soluția generală a ecuației transformate.

În consecință,

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

reprezintă soluția generală a ecuației propagării undelor. Primul termen din membrul al doilea al expresiei soluției generale corespunde unei unde regressive, cel de al doilea termen unei unde progresive. ■

**Exemplul 1.8.2** *Expresia operatorului lui Laplace din  $\mathbb{R}^2$  în coordonate polare este*

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}. \quad (1.48)$$

**Soluție.** Dacă polul reperului polar coincide cu originea reperului cartezian ortogonal  $Oxy$ , iar axa polară coincide cu axa  $Ox$ , atunci legătura dintre coordonatele carteziene  $x, y$  și coordonatele polare  $\rho, \theta$  este

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (1.49)$$

Să remarcăm că (1.49) reprezintă o transformare punctuală regulată între mulțimea  $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$  și mulțimea  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0, 0)\}$ .

Pentru a afla expresia laplacianului

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.50)$$

în coordonatele polare  $(\rho, \theta)$ , în (1.50) trebuie să efectuăm schimbarea de variabile independente (1.49). În acest scop trebuie să exprimăm operatorii de derivare parțială de ordinul întâi și pe cei de ordinul al doilea, nemixti, în funcție de operatorii

$$\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Folosind regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.51)$$

Examinând (1.51), constatăm că avem nevoie de expresiile derivatelor parțiale de ordinul întâi ale lui  $\rho$  și  $\theta$  în raport cu variabilele  $x$  și  $y$ . Acestea, le putem determina fie precizând mai întâi transformarea punctuală regulată inversă transformării (1.49) și apoi calculând efectiv ceea ce dorim, fie aplicând teoria sistemelor de funcții definite implicit, căci (1.49) poate fi interpretat și ca un sistem de funcții definite implicit de forma

$$\begin{cases} F_1(\rho, \theta, x, y) = \rho \cos \theta - x = 0, \\ F_2(\rho, \theta, x, y) = \rho \sin \theta - y = 0, \end{cases}$$

după care derivatele parțiale sunt rapoarte de determinanți funcționali. De exemplu,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = - \frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, \theta)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(\rho, \theta)}}.$$

Pe orice cale am proceda, obținem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} &= \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Înlocuind (1.52) în (1.51), găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \cos \theta - \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Pentru determinarea derivatelor parțiale de ordinul al doilea nemixte în raport cu coordonatele carteziane  $x$  și  $y$ , se folosește (1.53) și regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse. Concomitent, se ține cont de (1.52). Găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Adunând membru cu membru aceste relații, obținem

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \|\nabla \rho\|^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot (\nabla \rho \cdot \nabla \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \|\nabla \theta\|^2 + \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \nabla^2 \rho + \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \nabla^2 \theta, \quad (1.54)$$

unde factorul  $(\nabla \rho \cdot \nabla \theta)$  reprezintă produsul scalar al gradientilor funcțiilor  $\rho$  și  $\theta$

$$\nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \mathbf{j}, \quad \nabla \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathbf{j},$$

ale căror expresii concrete, după utilizarea relațiilor (1.52), sunt

$$\begin{cases} \nabla \rho = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \nabla \theta = -\frac{\sin \theta}{\rho} \mathbf{i} + \frac{\cos \theta}{\rho} \mathbf{j}. \end{cases}$$

De aici rezultă

$$\|\nabla \rho\| = 1, \quad \|\nabla \theta\| = \frac{1}{\rho}, \quad \nabla \rho \cdot \nabla \theta = 0. \quad (1.55)$$

Examinând expresia lui  $\nabla^2$  din (1.54), deducem că avem nevoie de derivatele parțiale de ordinul al doilea, nemixte, ale funcțiilor  $\rho$  și  $\theta$  în raport cu  $x$  și  $y$ . Pentru aceasta folosim (1.53), aplicând operația de derivare în raport cu  $x$  sau  $y$ , după caz, utilizând totodată regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse. Găsim

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho}; & \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\sin 2\theta}{\rho^2}; \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{\cos^2 \theta}{\rho}; & \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2\theta}{\rho^2}, \end{cases}$$

de unde deducem laplacienii funcțiilor  $\rho$  și  $\theta$

$$\nabla^2 \rho = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho}, \quad \nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0. \quad (1.56)$$

Din (1.54), (1.55) și (1.56) rezultă că  $\nabla^2$  are expresia (1.48). ■

**Exemplul 1.8.3** *Expresia laplacianului  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  în coordonatele sferice (coordonatele polare în spațiu)  $(\rho, \varphi, \theta)$ , legate de coordonatele carteziane prin*

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \varphi, \end{cases} \quad (1.57)$$

este

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (1.58)$$

**Soluție.** Mai întâi trebuie să determinăm operatorii de derivare parțială de ordinul unu. Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (1.59)$$

Apoi, calculăm operatorii de derivare parțială de ordinul al doilea, nemixti. Aceasta o vom putea realiza plecând de la (1.59) și aplicând din nou regula de derivare a funcțiilor compuse. Astfel, expresia operatorului de derivare parțială de ordinul al doilea în raport cu variabila  $x$  este

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \rho} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Celelalte două derivate parțiale de ordinul al doilea din expresia laplacianului se obțin din (1.60) trecând pe  $x$  în  $y$  și mai apoi în  $z$ . Sumând aceste trei derivate parțiale, obținem forma laplacianului în coordonate polare în spațiu

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \|\nabla\rho\|^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \|\nabla\varphi\|^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \|\nabla\theta\|^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \\ &+ 2\left((\nabla\rho \cdot \nabla\varphi) \cdot \frac{\partial^2}{\partial\rho\partial\varphi} + (\nabla\varphi \cdot \nabla\theta) \cdot \frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta} + (\nabla\theta \cdot \nabla\rho) \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\rho}\right) + \\ &+ \nabla^2\rho \cdot \frac{\partial}{\partial\rho} + \nabla^2\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} + \nabla^2\theta \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}.\end{aligned}\tag{1.61}$$

Pentru a determina expresia concretă a laplacianului, din (1.61) se constată că avem nevoie de gradientii și laplacienii funcțiilor  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  ce depind de variabilele  $x$ ,  $y$  și  $z$ . Aceste funcții există căci (1.57) constituie o transformare punctuală regulată  $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x} = (0, 0, z)\}$ , unde  $\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ .

Efectuând calculele, găsim că gradientii necesari în (1.61), exprimați în funcție de coordonatele sferice, sunt

$$\begin{cases} \nabla\rho &= \sin\varphi \cos\theta \mathbf{i} + \sin\varphi \sin\theta \mathbf{j} + \cos\varphi \mathbf{k}, \\ \nabla\varphi &= \frac{\cos\varphi \cos\theta}{\rho} \mathbf{i} + \frac{\cos\varphi \sin\theta}{\rho} \mathbf{j} - \frac{\sin\varphi}{\rho} \mathbf{k}, \\ \nabla\theta &= -\frac{\sin\theta}{\rho \sin\varphi} \mathbf{i} + \frac{\cos\theta}{\rho \sin\varphi} \mathbf{j}. \end{cases}$$

Deducem apoi:

$$\begin{aligned}\|\nabla\rho\| &= 1, \quad \|\nabla\varphi\| = \frac{1}{\rho}, \quad \|\nabla\theta\| = \frac{1}{\rho \sin\varphi}; \\ \nabla\rho \cdot \nabla\varphi &= 0, \quad \nabla\varphi \cdot \nabla\theta = 0, \quad \nabla\theta \cdot \nabla\rho = 0.\end{aligned}\tag{1.62}$$

Pentru calculul laplacienilor funcțiilor  $\rho$ ,  $\varphi$  și  $\theta$  se aplică din nou regula de derivare a funcțiilor compuse și se găsește

$$\nabla^2\rho = \frac{2}{\rho}, \quad \nabla^2\varphi = \frac{\cos\varphi}{\rho^2 \sin\varphi}, \quad \nabla^2\theta = 0.\tag{1.63}$$

Folosirea relațiilor (1.62) și (1.63) în (1.61) conduce la

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2 \sin\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi},$$

care este echivalentă cu (1.58). ■

### 1.8.4 Schimbarea tuturor variabilelor într-o ecuație diferențială

**Exercițiul 1.8.6** Să se transforme ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

luând drept noi variabile independente

$$u = x, \quad v = \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$$

și funcție necunoscută

$$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

**Soluție.** Vom determina derivatele parțiale de ordinul întâi  $\frac{\partial z}{\partial x}$  și  $\frac{\partial z}{\partial y}$  în funcție de derivatele parțiale  $\frac{\partial w}{\partial u}$  și  $\frac{\partial w}{\partial v}$  plecând de la diferențialele noilor variabile

$$du = dx, \quad dv = \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy^2, \quad dw = \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{z^2}dz^2.$$

Pe de altă parte avem

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Cum diferențiala unei funcții este unică, putem scrie

$$\frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{z^2}dz^2.$$

Dacă în această egalitate înlocuim diferențialele funcțiilor  $u$  și  $v$ , obținem

$$\frac{\partial w}{\partial u}dx + \frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy^2\right) = \frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{z^2}dz^2,$$



din care se poate determina diferențiala funcției  $z$

$$dz = \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) z^2 dx + \frac{z}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} dy.$$

Din această expresie, folosind unicitatea diferențialei unei funcții de două variabile, rezultă

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) z^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

Înlocuind acestea în ecuația inițială, se găsește

$$x^2 z^2 \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + z^2 \frac{\partial w}{\partial v} = z^2,$$

care, după reducerea termenilor asemenea, conduce la ecuația simplă

$$\frac{\partial w}{\partial u}(u, v) = 0$$

a cărei soluție generală este  $w = f(v)$ , unde  $f$  este o funcție reală diferențibilă, arbitrară.

Folosind legăturile dintre noile și vechile variabile, găsim că funcția

$$z = \frac{x}{1 + xf\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)}$$

este soluția generală a ecuației diferențiale inițiale. ■

### Exercițiul 1.8.7 Transformați ecuația

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$$

introducând noile variabile independente

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

și noua funcție necunoscută  $w = -x - y + \ln z$ .

**Soluție.** Diferențiind legăturile dintre variabile, obținem

$$\begin{cases} du &= 2xdx + 2ydy, \\ dv &= -\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy, \\ dw &= -dx - dy + \frac{1}{z}dz. \end{cases}$$

Pe de altă parte

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Egalând expresiile diferențialei funcției  $w$ , avem

$$-dx - dy + \frac{1}{z}dz = (2xdx + 2ydy)\frac{\partial w}{\partial u} - \left(\frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{y^2}dy\right)\frac{\partial w}{\partial v},$$

de unde rezultă

$$dz = z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dy.$$

Pe de altă parte,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Folosind aceste expresii ale diferențialei funcției  $z$  și unicitatea expresiei ei, deducem

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1. \end{cases}$$

Cu acestea, ecuația inițială ia forma mai simplă

$$\left(\frac{zx}{y^2} - \frac{zy}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \implies \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

ce se poate integra,

$$w = f(u)$$

fiind soluția sa generală, unde  $f$  este o funcție diferențiabilă arbitrară.

Ținând cont de legătura dintre variabile, găsim că

$$z(x, y) = e^{x+y+f(x^2+y^2)}$$

este soluția generală a ecuației inițiale. ■

**Exercițiul 1.8.8** Să se transforme ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul doi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (1.64)$$

dacă  $u = x + y$ ,  $v = y/x$ ,  $w = z/x$ ,  $u$  și  $v$  fiind noile variabile independente, iar  $w$  noua funcție necunoscută.

**Soluție.** Putem utiliza și aici metoda diferențierii legăturilor dintre vechile și noile variabile, cu precizarea că la a doua diferențiere a acestora trebuie să se aibă în vedere că diferențiala doua a unei funcții compuse nu mai este invariantă la o schimbare a variabilelor.

După prima diferențiere se obține

$$\begin{cases} du = dx + dy, \\ dv = \frac{1}{x^2}(ydx - xdy), \end{cases} \quad (1.65)$$

$$dw = \frac{1}{x^2}(xdz - zdx). \quad (1.66)$$

Din (1.66) avem  $x^2 dw = xdz - zdx$ , care, diferențiind-o încă o dată, conduce la

$$2xdxdw + x^2 dw = d^2 z. \quad (1.67)$$

În această egalitate ținem cont de următoarele:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}(dx + dy) + \frac{1}{x^2}(xdy - ydx)\frac{\partial w}{\partial v} = \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right)dy; \quad (1.68)$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2; \quad (1.69)$$

$$d^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial w}{\partial u}d^2 u + \frac{\partial w}{\partial v}d^2 v. \quad (1.70)$$

Diferențialele de ordinul al doilea ale funcțiilor  $u$  și  $v$  sunt

$$d^2 u = 0, \quad d^2 v = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy. \quad (1.71)$$

Înlocuind (1.65) și (1.71) în (1.70) și grupând după  $dx^2$ ,  $dx dy$  și  $dy^2$ , se obține

$$\begin{aligned} d^2w &= \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dx^2 + \\ &+ 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left( \frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dx dy + \\ &+ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right) dy^2. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Folosirea relațiilor (1.68), (1.72), (1.69) în egalitatea (1.67), urmată de egalarea coeficienților lui  $dx^2$ ,  $dx dy$  și  $dy^2$ , conduce la derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $z$ , exprimate în funcție de derivatele parțiale ale funcției  $w$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{y}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^3} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} + x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left( 1 - \frac{y}{x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x} \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Înlocuirea acestora în (1.64) conduce la o forma simplificată a ecuației date

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(u, v) = 0,$$

care are soluția generală

$$w(u, v) = v f(u) + g(u),$$

unde  $f$  și  $g$  sunt funcții arbitrare de două ori diferențiabile.

Cu legătura dintre variabile avem că

$$z(x, y) = y f(x + y) + x g(x + y)$$

este soluția generală a ecuației diferențiale (1.64). ■

### 1.8.5 Exemple și exerciții propuse

**Exercițiul 1.8.9** Ce devine ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0,$$

dacă variabilele independente  $x$  și  $y$  trec în variabilele  $u$  și  $v$ , unde  $u = x, v = y/x$ ?

**Indicație.** Fie  $(u, v) \mapsto w(u, v)$  funcția definită de

$$z(x, y) = w(u(x, y), v(x, y)).$$

Derivatele parțiale ale funcției  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  se calculează folosind regula lanțului de derivare a funcțiilor compuse.

**Răspuns.**  $u \frac{\partial w}{\partial u} - w = 0$ . ■

**Exercițiul 1.8.10** În ce se transformă ecuația diferențială cu derivate parțiale

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dacă noile variabile independente  $u$  și  $v$  sunt date prin

$$x = u^2 - v^2, \quad y = u^2 + v^2, \quad (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2?$$

**Indicație.** Se introduce funcția necunoscută  $(u, v) \mapsto w(u, v)$  legată de funcția  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  prin

$$z(x, y) = w(u(x, y), v(x, y))$$

și se calculează derivatele parțiale ale funcției  $z$ .

Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor  $(x, y) \mapsto u(x, y)$  și  $(x, y) \mapsto v(x, y)$  folosim teorema de existență și unicitate a sistemelor de funcții definite implicit, funcțiile  $F_1$  și  $F_2$  ale sistemului fiind

$$F_1(x, y, u, v) = u^2 - v^2 - x, \quad F_2(x, y, u, v) = u^2 + v^2 - y.$$

**Răspuns.** Derivatele funcțiilor  $u$  și  $v$  sunt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{4v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4v},$$

iar ecuația dată devine  $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$ . Aceasta are soluția sa generală  $w = f(v)$ , unde  $f$  este o funcție arbitrară diferențiabilă,  $z(x, y) = f\left(\sqrt{\frac{y-x}{2}}\right)$ . ■

**Exercițiul 1.8.11** *Ce devine ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea*

$$y'' + (x + y)(1 + y')^3 = 0,$$

*dacă  $x = u + t$  și  $y = u - t$ , iar  $u = u(t)$  este noua funcție necunoscută?*

**Indicație.** Dacă notăm  $y' = \frac{dy}{dx}$ ,  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ,  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ,  $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$  și utilizăm regula de derivare a funcțiilor compuse, găsim

$$y' = \frac{\dot{u} - 1}{\dot{u} + 1}, \quad y'' = \frac{2\ddot{u}}{(1 + \dot{u})^3}.$$

**Răspuns.** Ecuația devine  $\ddot{u} + 8u\dot{u}^3 = 0$ . ■

**Exemplul 1.8.4** *Ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

*nu își schimbă forma în urma schimbării de variabile*

$$u = x + z, \quad v = y + z.$$

**Exercițiul 1.8.12** *Să se transforme ecuația*

$$z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 = 0,$$

*punând în locul variabilelor independente  $x$  și  $y$  variabilele  $u$  și  $v$ , unde*

$$u = \frac{y}{x}, \quad v = x^2 + y^2,$$

*iar în locul funcției necunoscute, funcția  $(u, v) \mapsto w(u, v)$  unde  $w = z^2$ .*

**Indicație.** Se diferențiază toate legăturile dintre variabile, iar după identificarea coeficienților lui  $dx$  și  $dy$  se găsește

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{2x^2z} \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{x}{z} \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2xz} \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{y}{z} \frac{\partial w}{\partial v}. \end{cases}$$

**Răspuns.** Se ajunge la ecuația  $\frac{\partial w}{\partial v} + 1 = 0$  care are soluția  $w = -v + f(u)$ , cu  $f$  o funcție diferențiabilă arbitrară, din care se poate obține soluția generală a ecuației inițiale  $z^2 + x^2 + y^2 = f\left(\frac{y}{x}\right)$ . ■

**Exercițiul 1.8.13** Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad (1.73)$$

luând pe  $x$  ca funcție necunoscută de variabilele  $y$  și  $z$ .

**Indicație.** Considerând că  $x = x(y, z)$ , se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3}, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} - \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{-\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3}. \end{aligned}$$

**Răspuns.** Se găsește  $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$ , de unde  $x = y\varphi(z) + \psi(z)$ , cu  $\varphi$  și  $\psi$  funcții arbitrare de două ori diferențiabile, este soluția generală a ecuației inițiale.

**Observația 1.8.1** Problema de mai sus se poate formula în termenii funcțiilor definite implicit în modul următor:

Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$y\varphi(z) + \psi(z) - x = 0,$$

unde  $\varphi$  și  $\psi$  sunt funcții arbitrare de două ori diferențiabile, satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea (1.73).

■

**Exercițiul 1.8.14** Ce devine ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

dacă se face schimbarea  $u = x+y, v = x-y, w = xy-z$ , unde  $(u, v) \mapsto w(u, v)$  este noua funcție necunoscută.

**Răspuns.**  $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$ .

■

**Exercițiul 1.8.15** Să se găsească expresia laplacianului în coordonatele semipolare în spațiu (coordoanatele cilindrice)  $(\rho, \theta, z)$ , unde

$$\begin{cases} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta, \\ z &= z. \end{cases}$$

**Răspuns.**  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

■

**Exercițiul 1.8.16** Ce devine ecuația  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + kz = 0$  în coordonate polare dacă se presupune că noua funcție necunoscută  $\omega$  este funcție numai de mărimea razei vectoriale  $\rho$  și că  $\rho$  nu depinde de unghiul polar  $\theta$ .

**Răspuns.**  $\frac{d(\rho\omega)}{d\rho} + k\rho\omega = 0$ .



Această ecuație poate fi integrată. Se găsește că soluția sa generală este  $\omega(\rho) = \frac{C}{\rho} e^{-\frac{1}{2}k\rho^2}$ , unde  $C$  este o constantă pozitivă. De aici rezultă că

$$z(x, y) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-\frac{1}{2}k(x^2 + y^2)},$$

deoarece  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . ■

**Exercițiul 1.8.17** În ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$q(1+q)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+pq)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + p(1+p)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

în care  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  și  $\frac{\partial z}{\partial y} = q$  sunt notațiile lui Monge, să se schimbe variabilele după legea

$$u = x + z, \quad v = y + z, \quad w = x + y + z,$$

considerând că noua funcție necunoscută este  $w = w(u, v)$ .

**Răspuns.**  $\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0$ . ■

**Exercițiul 1.8.18** Arătați că forma ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

nu se schimbă dacă noua funcție necunoscută este  $x$ , iar variabilele independente sunt  $y$  și  $z$ .

**Indicație.** Se consideră că  $x = x(y, z)$  și se determină derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției  $(x, y) \mapsto z(x, y)$  în funcție de derivatele funcției  $(y, z) \mapsto x(y, z)$ . ■

Ion CRĂCIUN

CAPITOLE  
DE  
MATEMATICI SPECIALE

EDITURA PIM  
IAȘI 2007



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Ecuatii diferențiale liniare de ordin superior</b>	<b>7</b>
1.1	Ecuatii diferențiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienți variabili	7
1.2	Ecuatii diferențiale liniare omogene de ordinul $n$ cu coeficienți variabili . . . . .	9
1.3	Ecuatia diferențială liniară neomogenă de ordinul $n$ cu coeficienți variabili . . . . .	24
1.4	Ecuatii diferențiale de ordinul $n$ liniare omogene cu coeficienți constanți . . . . .	29
1.4.1	Identitățile lui Euler . . . . .	29
1.4.2	Cazul rădăcinilor caracteristice reale distincte . . . . .	31
1.4.3	Cazul rădăcinilor caracteristice complexe distincte . . . . .	32
1.4.4	Ecuatia caracteristică are rădăcini distincte . . . . .	33
1.4.5	Ecuatia caracteristică are o rădăcină multiplă . . . . .	34
1.4.6	Cazul rădăcinilor caracteristice reale multiple . . . . .	36
1.4.7	Rădăcini caracteristice complex conjugate multiple . . . . .	38
1.4.8	Rădăcini caracteristice reale și complexe multiple . . . . .	40
1.5	Ecuatii diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți	41
<b>2</b>	<b>Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi</b>	<b>47</b>
2.1	Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală . . . . .	47
2.1.1	Legătura cu ecuațiile diferențiale de ordinul $n$ . . . . .	48
2.1.2	Integrale prime. Soluție generală . . . . .	54
2.2	Sisteme diferențiale sub formă simetrică . . . . .	57
2.3	Sisteme de ecuații diferențiale liniare . . . . .	61
2.3.1	Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene . . . . .	62
2.3.2	Matrice fundamentală a unui sistem omogen . . . . .	65
2.3.3	Determinantul lui Wronski . . . . .	66

2.3.4	Soluția generală a sistemului omogen de ecuații diferențiale liniare . . . . .	69
2.4	Sisteme neomogene de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi . . . . .	70
2.5	Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Ecuații diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi</b>	<b>81</b>
3.1	Ecuații diferențiale liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi . . . . .	81
3.1.1	Definiții. Suprafețe integrale . . . . .	81
3.1.2	Sistem caracteristic. Curbe caracteristice . . . . .	82
3.1.3	Soluția generală . . . . .	83
3.1.4	Problema lui Cauchy . . . . .	90
3.2	Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, cuasiliniare . . . . .	92
3.2.1	Soluția generală . . . . .	93
3.2.2	Problema lui Cauchy . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Elemente de teoria câmpurilor</b>	<b>103</b>
4.1	Câmpuri scalare. Curbe și suprafețe de nivel . . . . .	103
4.2	Derivata după o direcție și gradientul unui câmp scalar . . . . .	105
4.3	Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp . . . . .	112
4.4	Integrale cu vectori și câmpuri scalare . . . . .	121
4.4.1	Integrale curbilinii . . . . .	121
4.4.2	Integrale de suprafață . . . . .	123
4.4.3	Integrale triple (de volum) . . . . .	126
4.4.4	Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecințe . . . . .	127
4.4.5	Câmp potențial . . . . .	129
4.5	Divergența unui câmp vectorial . . . . .	130
4.6	Rotorul unui câmp vectorial . . . . .	133
4.7	Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton . . . . .	135
4.8	Formule integrale . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Funcții de variabilă complexă</b>	<b>143</b>
5.1	Mulțimea numerelor complexe . . . . .	143
5.2	Funcții de o variabilă complexă . . . . .	148
5.3	Funcție monogenă într-un punct . . . . .	149
5.4	Condițiile Cauchy–Riemann . . . . .	150
5.5	Funcție olomorfă. Proprietăți . . . . .	154
5.6	Puncte ordinare și puncte singulare. Planul lui Gauss . . . . .	159
5.7	Funcții elementare de o variabilă complexă . . . . .	160

5.7.1	Funcția polinom în planul complex . . . . .	160
5.7.2	Funcția rațională . . . . .	162
5.7.3	Funcția exponențială . . . . .	163
5.7.4	Funcțiile circulare și funcțiile hiperbolice . . . . .	166
5.7.5	Funcția logaritmică . . . . .	169
5.7.6	Funcția radical . . . . .	172
5.7.7	Funcții trigonometrice inverse . . . . .	173
5.7.8	Funcții algebrice . . . . .	174
5.8	Exerciții rezolvate . . . . .	174
<b>6</b>	<b>Integrala curbilinie. Teoremele lui Cauchy</b>	<b>179</b>
6.1	Integrala curbilinie în planul complex și proprietățile ei fundamentale . . . . .	179
6.2	Teoremele lui Cauchy . . . . .	184
6.3	Integrala nedefinită . . . . .	188
6.4	Integrala Cauchy . . . . .	191
6.4.1	Deducerea formulei integrale a lui Cauchy . . . . .	191
6.4.2	Consecințe ale formulei lui Cauchy . . . . .	194
6.5	Integrale depinzând de parametru . . . . .	196
6.6	Expresia derivatelor unei funcții olomorfe . . . . .	198
<b>7</b>	<b>Serii de funcții analitice în complex</b>	<b>201</b>
7.1	Funcții analitice . . . . .	201
7.2	Serii de funcții de o variabilă complexă, uniform convergente	203
7.3	Serii de puteri în complex . . . . .	211
7.3.1	Teorema lui Abel . . . . .	211
7.3.2	Serii Taylor . . . . .	219
<b>8</b>	<b>Serii Laurent</b>	<b>225</b>
8.1	Domeniul de convergență al seriei Laurent . . . . .	225
8.2	Dezvoltarea unei funcții analitice într-o serie Laurent . . . . .	227
8.3	Clasificarea punctelor singulare izolate . . . . .	234
<b>9</b>	<b>Teoria reziduurilor și aplicațiile ei</b>	<b>245</b>
9.1	Reziduul funcției analitice într-un punct singular izolat . . . . .	245
9.2	Formule de calcul ale reziduurilor . . . . .	247
9.3	Teorema reziduurilor . . . . .	250
9.4	Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor . . . . .	254
9.4.1	Integrale de forma $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ . . . . .	255

9.4.2	Integrale de forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ . . . . .	259
9.4.3	Integrale de forma $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} \mathcal{R}(x) dx$ , $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ . . . . .	262
9.4.4	Integrale de forma $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$ . Lema lui Jordan . . . . .	266
9.4.5	Integrale de forma $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} \mathcal{R}(x) \ln x dx$ , cu $\alpha \in (-1, 1)$ . . . . .	272
<b>10</b>	<b>Serii trigonometrice și serii Fourier</b> . . . . .	<b>275</b>
10.1	Serii trigonometrice . . . . .	275
10.2	Seria Fourier a unei funcții periodice . . . . .	276
10.3	Seriile Fourier ale funcțiilor pare și impare . . . . .	283
10.4	Forma complexă a seriei Fourier . . . . .	287
<b>11</b>	<b>Integrala Fourier și transformate Fourier</b> . . . . .	<b>289</b>
11.1	Forma complexă a integralei Fourier . . . . .	289
11.2	Forma reală a integralei Fourier . . . . .	292
11.3	Integralele Fourier ale funcției pare respectiv impare . . . . .	293
11.4	Transformata Fourier . . . . .	295
11.5	Proprietăți ale transformatei Fourier . . . . .	301
	<b>Bibliografie</b> . . . . .	<b>307</b>

# Capitolul 1

## Ecuatii diferențiale liniare de ordin superior

### 1.1 Ecuatii diferențiale liniare de ordinul $n$ cu coeficienți variabili

Fie  $C^n([a, b])$  spațiul vectorial al funcțiilor reale continue, cu derivate continue până la ordinul  $n$  inclusiv pe intervalul real  $[a, b]$  și funcțiile

$$a_0, a_1, \dots, a_n, f \in C^0([a, b]).$$

Funcția  $a_0$  este considerată astfel încât să nu se anuleze pe intervalul  $[a, b]$ .

**Definiția 1.1.1** *O ecuație de forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1.1)$$

*se numește ecuație diferențială liniară de ordinul  $n$  neomogenă dacă se cere să se determine toate funcțiile  $y = \varphi(x)$ , unde  $\varphi \in C^n([a, b])$ , astfel încât să avem*

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x) + a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x) \equiv f(x) \quad (1.2)$$

**Definiția 1.1.2** *Funcția  $y$  din ecuația diferențială (1.1) se numește necunoscută,  $\varphi \in C^n([a, b])$  care satisface identitatea (1.2) este o soluție,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  se numesc coeficienți, iar  $f$  este termenul liber al ecuației.*



**Definiția 1.1.3** *O ecuație de forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (1.3)$$

*se numește ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul  $n$ .*

**Definiția 1.1.4** *Când coeficienții ecuației diferențiale (1.3) sunt aceiași cu cei ai ecuației (1.1), ecuația (1.3) se numește **ecuația diferențială omogenă asociată** ecuației neomogene (1.1).*

Pe spațiul vectorial  $C^n([a, b])$  definim aplicația  $L$  prin

$$L(y) = \left( \sum_{k=0}^n a_k(x) D^{n-k} \right) y, \quad (1.4)$$

unde  $D = \frac{d}{dx}$  este operatorul de derivare de ordinul întâi iar  $D^{n-k}$  este operatorul obținut prin aplicarea repetată de  $n - k$  ori a operatorului  $D$ , adică  $D^{n-k} = \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ . Evident,  $D^{n-k}y$  este derivata de ordinul  $n - k$  a funcției  $y \in C^n([a, b])$ .

**Teorema 1.1.1** *Aplicația  $L : C^n([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$  este operator liniar.*

**Demonstrație.** Operatorul de derivare  $D$  este liniar deoarece derivata unei combinații liniare de funcții derivabile este egală cu combinația liniară a derivatelor funcțiilor, adică are loc egalitatea

$$D(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 D y_1 + \alpha_2 D y_2, \quad (1.5)$$

oricare ar fi constantele  $\alpha_1, \alpha_2$  și oricare ar fi funcțiile derivabile  $y_1, y_2$ .

În baza relațiilor (1.4) și (1.5), egalitatea

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2), \quad (1.6)$$

este satisfăcută oricare ar fi constantele  $\alpha_1, \alpha_2$  și oricare ar fi funcțiile reale  $y_1, y_2$  aparținând spațiului vectorial  $C^n([a, b])$ . Rezultatul aplicării operatorului  $L$  unei funcții  $y \in C^n([a, b])$  este o funcție continuă.

Din (1.6) rezultă că  $L : C^n([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$  este operator liniar. ■

**Definiția 1.1.5** Fie  $x_0$  un punct arbitrar din intervalul  $[a, b]$ . Problema de determinării acelei soluții  $y \in C^n([a, b])$  a ecuației diferențiale (1.1) care să satisfacă **condițiile inițiale**

$$\begin{cases} y(x_0) &= (D^0 y)(x_0) &= y_{01}, \\ y'(x_0) &= (D^1 y)(x_0) &= y_{02}, \\ \cdots, \\ y^{(n-1)}(x_0) &= (D^{n-1} y)(x_0) &= y_{0n}, \end{cases} \quad (1.7)$$

unde  $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$  sunt numere reale arbitrare date, se numește **problema lui Cauchy** a ecuației diferențiale (1.1).

O definiție asemănătoare se poate formula și pentru ecuația diferențială liniară, de ordinul  $n$ , omogenă.

**Teorema 1.1.2 (Existența și unicitatea soluției problemei Cauchy)**

Dacă funcțiile reale  $a_0, a_1, \dots, a_n$  și  $f$  din ecuația diferențială (1.1) sunt funcții continue pe  $[a, b]$ , atunci soluția problema lui Cauchy a acestei ecuații diferențiale, cu condițiile inițiale (1.7), există și este unică, oricare ar fi condițiile inițiale (1.7).

**Observația 1.1.1** Rezultat similar are loc și pentru soluția problemei lui Cauchy a unei ecuații diferențiale liniară, cu coeficienți variabili, de ordinul  $n$ , omogenă de forma (1.3).

## 1.2 Ecuatii diferențiale liniare omogene de ordinul $n$ cu coeficienți variabili

Să considerăm ecuația

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (1.8)$$

numită, după cum s-a specificat, ecuație diferențială liniară de ordinul  $n$ , omogenă și cu coeficienți variabili.

Considerăm  $y \in C^n([a, b])$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in C^0([a, b])$  și  $a_0(x) \neq 0$ ,  $(\forall) x \in [a, b]$ .

**Teorema 1.2.1** Mulțimea soluțiilor ecuației diferențiale liniară, omogenă, de ordinul  $n$ , cu coeficienți variabili, este spațiu liniar real.

**Demonstrație.** Fie  $y_1, y_2$  soluții arbitrare ale ecuației (1.8). Aceasta înseamnă că

$$L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0. \quad (1.9)$$

Teorema este demonstrată dacă

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 0, \quad (\forall) \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Dar  $L : C^n([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$  este operator liniar, prin urmare avem

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2). \quad (1.11)$$

Din (1.9) și (1.11) rezultă (1.10), ceea ce arată că mulțimea soluțiilor ecuației (1.8) este subspațiu liniar al spațiului vectorial  $C^n([a, b])$ .

Dar, un subspațiu liniar al unui spațiu liniar este el însuși spațiu liniar și teorema este demonstrată. ■

De altfel, concluzia Teoremei 1.2.1 rezultă și din observația care urmează.

**Observația 1.2.1** *Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale liniară omogenă de ordinul  $n$  cu coeficienți variabili este nucleul  $\text{Ker}(L)$  al operatorului liniar  $L$*

$$\text{Ker}(L) = \{y \in C^n([a, b]) \mid L(y) = 0\}.$$

*Dar, nucleul unui operator liniar definit pe un spațiu liniar este un subspațiu liniar al acelui spațiu. Prin urmare,  $\text{Ker}(L)$  este subspațiu liniar al spațiului vectorial  $C^n([a, b])$ .*

**Observația 1.2.2** *Dacă  $y_1, y_2, \dots, y_p$  sunt  $p$  soluții arbitrare ale ecuației (1.8) și  $C_1, C_2, \dots, C_p$  sunt constante oarecare, atunci funcția*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p$$

*este de asemenea soluție a aceleiași ecuații.*

**Definiția 1.2.1** *Se numește **soluție generală** a ecuației diferențiale (1.8) un element  $y \in \text{Ker}(L)$  depinzând de  $n$  constante arbitrare, de forma*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

*cu proprietatea că, dând valori constantelor  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , se poate obține orice soluție particulară a ecuației diferențiale (1.8) care satisface condițiile inițiale (1.7), unde  $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n})$  este un vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ .*

Fie  $\mathcal{B}$  un sistem de  $n$  soluții arbitrare ale ecuației diferențiale (1.8),

$$\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad y_j \in \text{Ker}(L), \quad j = \overline{1, n}. \quad (1.12)$$

**Definiția 1.2.2** Se numește **wronskianul** sistemului  $\mathcal{B}$  de soluții ale ecuației diferențiale (1.8), funcția

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

ale cărei valori,  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x)$  sau  $W(x)$ , sunt date de valorile determinantului

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Pentru wronskianul sistemului  $\mathcal{B}$  de soluții ale ecuației diferențiale (1.8) se utilizează și denumirea *determinantul lui Wronski*, după numele matematicianului polonez Josef Hoené Wronski (1778–1853).

**Definiția 1.2.3** Sistemul de soluții  $\mathcal{B}$  din (1.12) se spune că formează un **sistem fundamental de soluții** al ecuației diferențiale (1.8) dacă

$$W(x) \neq 0, \quad (\forall) x \in (a, b).$$

**Teorema 1.2.2 (Liouville)** Wronskianul oricăror  $n$  soluții ale ecuației diferențiale liniară, de ordinul  $n$ , omogenă este, sau identic nul pe intervalul  $(a, b)$ , sau diferit de zero în orice punct din  $(a, b)$ .

**Demonstrație.** Utilizând regula de derivare a unui determinant și proprietățile determinantilor deducem că  $W(x)$  satisface ecuația diferențială ordinară, de ordinul întâi, cu variabile separate

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x), \quad x \in (a, b). \quad (1.13)$$

Dacă în locul variabilei  $x$  din egalitatea (1.13) punem  $t$  și scriem egalitatea corespunzătoare pe intervalul  $[x_0, x] \subset [a, b]$ , avem

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} W(t), \quad t \in [x_0, x]. \quad (1.14)$$

Integrând relația (1.14) pe intervalul indicat alăturat, obținem

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = - \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt,$$

de unde

$$W(x) = W(x_0) \exp \left( - \int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt \right), \quad x \in (a, b). \quad (1.15)$$

Relația (1.15) arată că  $W$  este, sau funcția identic nulă, sau nu are nici un zero, după cum  $W(x_0)$  este zero, respectiv, diferit de zero. ■

**Teorema 1.2.3 (Existența unui sistem fundamental de soluții)** *Pentru orice ecuație diferențială liniară și omogenă, de forma (1.8), există un sistem fundamental de soluții.*

**Demonstrație.** Considerăm  $n^2$  numere reale  $\alpha_{ij}$  cu proprietatea că matricea pătratică  $A$  de ordinul  $n$ , având elementele  $\alpha_{ij}$ , este nesaringulară. Fie  $y_1, y_2, \dots, y_n$  soluțiile a  $n$  probleme ale lui Cauchy pentru ecuația (1.8) care satisfac respectiv condițiile inițiale

$$y_i(x_0) = \alpha_{i1}, \quad y'_i(x_0) = \alpha_{i2}, \quad \dots, \quad y_i^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{in}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Existența și unicitatea acestor  $n$  soluții este asigurată de Teorema 1.1.2.

Valoarea în  $x_0$  a wronskianului acestor  $n$  soluții este

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = W(x_0) = \det A. \quad (1.16)$$

Deoarece  $A$  este matrice nesaringulară, determinantul ei este diferit de zero. Atunci, din (1.15) și (1.16) rezultă că valorile wronskianului celor  $n$  soluții ale ecuației (1.8) sunt nenule pe intervalul  $(a, b)$ .

Rezultatul stabilit și Definiția 1.2.2 demonstrează teorema. ■

**Observația 1.2.3** *Pentru o ecuație diferențială liniară de forma (1.8) se pot determina o infinitate de sisteme fundamentale de soluții.*

**Definiția 1.2.4** *Sistemul fundamental de soluții  $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  ale căror derivate au proprietatea că într-un punct  $x_0 \in (a, b)$*

$$y_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

unde  $\delta_{ij}$  sunt simbolii lui Kronecker, se numește **sistem fundamental normal**.

**Observația 1.2.4** Pentru un sistem fundamental normal, matricea  $A$  din demonstrația teoremei precedente este matricea unitate de ordinul  $n$ .

S-a arătat că  $\text{Ker}(L)$  este un spațiu vectorial (vezi Teorema 1.2.1). Reamintim următoarele definiții valabile pentru un spațiu vectorial real  $S$ , oarecare.

**Definiția 1.2.5** Elementele  $y_1, y_2, \dots, y_p \in S$  sunt **liniar dependente** dacă există  $p$  numere reale  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , nu toate nule, astfel încât să avem

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_p y_p = 0. \quad (1.17)$$

Dacă elementele  $y_1, y_2, \dots, y_p \in S$  sunt liniar dependente, se mai spune că sistemul de vectori  $S_p = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  este liniar dependent.

**Definiția 1.2.6** Elementele  $y_1, y_2, \dots, y_p \in S$  sunt **liniar independente**, dacă ele nu sunt liniar dependente.

**Observația 1.2.5** Sistemul de vectori  $S_p = \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \subset S$  este liniar independent dacă identitatea (1.17) are loc atunci și numai atunci când toate constantele  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sunt nule.

Elementele din definițiile precedente pot fi funcții reale definite pe un interval real.

Se poate demonstra fără dificultate că un sistem de  $p$  vectori din  $S$  este liniar dependent dacă și numai dacă cel puțin unul din vectori se scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori ai sistemului.

**Definiția 1.2.7** Dacă în spațiul liniar  $S$  avem un sistem de  $p$  elemente liniar independente  $S_p = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  și dacă orice  $y \in S$  se exprimă în mod unic prin

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_p y_p, \quad (1.18)$$

unde  $C_1, C_2, \dots, C_p$  sunt numere reale, atunci spunem că spațiul vectorial  $S$  are **dimensiunea**  $p$ , sau că este  **$p$ -dimensional** și că sistemul  $S_p$  de vectori formează o **bază** în  $S$ . Numerele reale  $C_1, C_2, \dots, C_p$  se numesc **coordonatele** vectorului  $y$  în baza  $S_p$ .

**Observația 1.2.6** Relația (1.18) se poate scrie în forma matriceală

$$y = \Gamma \cdot C, \quad (1.19)$$

unde  $\Gamma$  este o matrice de tipul  $1 \times p$ , de elemente  $y_1, y_2, \dots, y_p$ , iar  $C$  este matrice de tipul  $p \times 1$  având elementele  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . Putem spune că  $C$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $y$  în baza  $S_p$ .

**Teorema 1.2.4** *Baza într-un spațiu liniar  $p$ -dimensional  $S$ , dacă există, nu este unică.*

**Demonstrație.** Să considerăm un alt sistem de vectori din spațiul liniar  $S$ , de elemente  $z_1, z_2, \dots, z_p$ . Conform Observației 1.2.6 rezultă că elementele acestui sistem se pot scrie în formele

$$z_i = \Gamma \cdot C_i, \quad i = \overline{1, p},$$

unde  $C_i$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $z_i$  în baza  $S_p$ . Dacă elementele matricei  $C_i$  sunt  $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ip}$ , atunci matricea linie  $z$ , cu elementele  $z_1, z_2, \dots, z_p$ , se exprimă prin

$$z = \Gamma \cdot C, \quad (1.20)$$

unde  $C = (c_{ij})_{p \times p}$  este matricea pătratică cu coloanele  $C_i, i = \overline{1, p}$ .

Matricea  $C$  din (1.20) se numește *matricea de trecere* de la baza  $S_p$  la sistemul de vectori  $\widetilde{S}_p = \{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ .

Pentru ca sistemul de vectori  $\widetilde{S}_p$  să fie bază în  $S$  este necesar ca el să fie liniar independent.

Dependența sau independența unui sistem de vectori rezultă studiind combinația liniară

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_p z_p = 0,$$

care, conform (1.19), se scrie

$$z \cdot \Lambda = 0, \quad (1.21)$$

unde  $\Lambda$  este o matrice coloană de elemente  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , iar  $z$  este matricea linie de elemente  $z_1, z_2, \dots, z_p$ .

Din relațiile (1.20), (1.21) și din faptul că  $S_p$  este un sistem liniar independent rezultă

$$C \cdot \Lambda = O, \quad (1.22)$$

unde  $O$  este matricea pătratică nulă de ordinul  $n$ . Egalând elementele corespunzătoare din cei doi membri ai relației (1.22) suntem conduși la un sistem liniar și omogen de  $p$  ecuații cu  $p$  necunoscute  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ . Acest sistem are numai soluția banală dacă și numai dacă matricea sa  $C$  este nesingulară.

Astfel, am demonstrat că dacă matricea de trecere  $C$  de la baza  $S_p$  la sistemul de vectori  $\widetilde{S}_p$  este nesingulară, atunci  $\widetilde{S}_p$  este bază în  $S$ .

Cum numărul matricelor pătratice nesingulare de ordinul  $p$  este infinit, rezultă că dacă într-un spațiu vectorial  $p$ -dimensional există o bază, atunci el are o infinitate de baze.

Orice alt sistem format din  $p$  vectori ai spațiului formează bază dacă și numai dacă matricea de trecere de la o bază la acel sistem de vectori este nesară.

**Exemplul 1.2.1** Funcțiile  $1, x, e^x$  sunt liniar independente pe  $\mathbb{R}$  deoarece condiția

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot e^x = 0, \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

implică  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

**Teorema 1.2.5** Condiția necesară și suficientă ca  $n$  soluții  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ale ecuației diferențiale  $L(y) = 0$  să fie liniar independente este ca wronskianul  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  să nu fie identic nul pe  $[a, b]$ .

**Demonstrație.** Să arătăm că această condiție este *suficientă*, adică dacă funcțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \text{Ker}(L)$  sunt astfel încât  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ , atunci sistemul  $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este liniar independent.

Să admitem contrariul, ceea ce înseamnă că  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt liniar dependente pe  $[a, b]$ . Atunci, există constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , nu toate nule, astfel încât

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = 0. \quad (1.23)$$

În orice  $x \in [a, b]$  egalitatea (1.23) și cele obținute derivând de  $(n-1)$  ori sunt adevărate, astfel că putem scrie sistemul

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) & = 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \dots + C_n y_n'(x) & = 0, \\ \dots & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x) & = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

și, în particular

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) & + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) & + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \dots & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \quad (1.25)$$



Însă, determinantul sistemului (1.25) în necunoscutele  $C_1, C_2, \dots, C_n$  este  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ . Deci, sistemul nu are decât soluția banală

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0.$$

Acest rezultat vine să contrazică presupunerea că soluțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt liniar dependente, prin urmare ele sunt liniar independente.

Să arătăm acum necesitatea condiției din enunțul teoremei, adică dacă soluțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt liniar independente în  $\text{Ker}(L)$  atunci, în  $x_0 \in [a, b]$ , avem  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) \neq 0$ .

Deoarece funcțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt liniar independente, (1.23) are loc dacă și numai dacă toate constantele sunt nule. În particular, sistemul (1.25) are numai soluția banală, situație care se întâmplă dacă și numai dacă determinantul sistemului, adică  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0)$ , este diferit de zero. Din Teorema 1.2.2 rezultă că wronskianul celor  $n$  soluții este diferit de zero în orice punct din  $[a, b]$ . ■

**Teorema 1.2.6**  *$\text{Ker}(L)$  este un spațiu vectorial  $n$ -dimensional.*

**Demonstrație.** Să considerăm soluțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ale ecuației  $L(y) = 0$  care satisfac următoarele condiții inițiale

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1, & y_2(x_0) = 0, & \dots, & y_n(x_0) = 0, \\ y_1'(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \dots, & y_n'(x_0) = 0, \\ \dots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, & \dots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

și să demonstrăm că ele sunt liniar independente.

Dacă aceste soluții ar fi liniar dependente, atunci ar exista constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , nu toate nule, astfel încât să avem relația (1.23).

Însă, deoarece  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \text{Ker}(L)$ , din ecuația (1.23) deducem că într-un punct oarecare  $x \in [a, b]$  avem sistemul (1.24).

În particular, sistemul (1.24) este adevărat pentru  $x = x_0$  și, datorită condițiilor inițiale (1.26), acesta devine de forma (1.25)

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \dots + C_n \cdot 0 = 0, \\ \dots, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \dots + C_n \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Acest sistem are doar soluția banală  $C_1 = 0, C_2 = 0, \dots, C_n = 0$ , rezultat care contrazice ipoteza. Prin urmare, sistemul de soluții  $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este liniar independent.

Pentru ca acest sistem de soluții să fie o bază în  $\text{Ker}(L)$  trebuie să arătăm că orice element  $y \in \text{Ker}(L)$  este de forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n. \quad (1.27)$$

Putem afirma că  $\text{Ker}(L)$  cuprinde totalitatea soluțiilor problemelor lui Cauchy pentru ecuația  $L(y) = 0$ .

Existența și unicitatea soluției  $y$  a unei probleme Cauchy pentru ecuația diferențială  $L(y) = 0$  este asigurată de Teorema 1.1.1. Rămâne să arătăm că  $C_i, i = \overline{1, n}$ , din (1.27) există și sunt unice. Dar aceasta rezultă din condițiile inițiale (1.7) care conduc la un sistem liniar și neomogen. Datorită relațiilor (1.26), sistemul liniar și neomogen capătă forma foarte simplă

$$C_1 = y(x_0), \quad C_2 = y'(x_0), \quad \dots, \quad C_n = y^{(n-1)}(x_0).$$

Deci orice element  $y \in \text{Ker}(L)$  se exprimă în forma (1.27), ceea ce înseamnă că  $\text{Ker}(L)$  este  $n$ -dimensional și că sistemul  $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , ale cărui elemente satisfac condițiile inițiale (1.26), formează o bază în  $\text{Ker}(L)$ . ■

**Observația 1.2.7** *Un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1.8) este o bază în  $\text{Ker}(L)$ . Baza ale cărei elemente satisfac condițiile inițiale (1.26) este sistemul fundamental normal al ecuației  $L(y) = 0$ .*

**Observația 1.2.8** *Wronskianul oricărui  $n + 1$  soluții ale unei ecuații diferențiale liniare, de ordinul  $n$ , omogenă și cu coeficienți variabili este identic nul pe intervalul de definiție al coeficienților ecuației.*

Din această observație rezultă că dacă sistemul de funcții  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , definite pe un interval  $[a, b]$ , este liniar independent, el poate constitui sistemul fundamental de soluții pentru o ecuație diferențială liniară, de ordinul  $n$ , omogenă și cu coeficienți variabili. Dacă  $y$  este o soluție oarecare a acestei ecuații, atunci sistemul de funcții  $\{y, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este liniar dependent și aceasta se întâmplă dacă și numai dacă wronskianul asociat acestui sistem de funcții este nul. Prin urmare, ecuația diferențială căutată este

$$W(y, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

**Exercițiul 1.2.1** *Pe întreaga axă a numerelor reale se definesc funcțiile  $y_1, y_2, y_3$  ale căror valori se determină după legile*

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = e^{-x}.$$

*Să se arate că aceste funcții sunt liniar independente și să se determine ecuația diferențială de ordinul al treilea, liniară și omogenă care admite ca sistem fundamental de soluții sistemul  $\{y_1, y_2, y_3\}$ .*

**Soluție.** Se găsește că wronskianul celor trei funcții este  $W(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ , ceea ce arată că el este nenul pe mulțimea  $\mathbb{R}$ . Prin urmare, sistemul de funcții  $\{y_1, y_2, y_3\}$  poate fi un sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferențială liniară, de ordinul al treilea, omogenă și cu coeficienți variabili. Această ecuație este dată de anularea wronskianului  $W(y, y_1, y_2, y_3)$ ,

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & y_3 \\ y' & y_1' & y_2' & y_3' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y''' & y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & x^2 & e^{-x} \\ y' & 1 & 2x & -e^{-x} \\ y'' & 0 & 2 & e^{-x} \\ y''' & 0 & 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = 0.$$

Se găsește

$$(x^2 + 2x + 2)y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Această ecuație diferențială are ordinul trei, este omogenă și are coeficienți variabili definiți pe întreaga axă a numerelor reale. ■

**Teorema 1.2.7 (Soluția generală)** *Dacă  $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \text{Ker}(L)$  este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară de ordinul  $n$  omogenă  $L(y) = 0$ , atunci soluția generală a acesteia este*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n, \quad (1.28)$$

unde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante arbitrare.

**Demonstrație.** Din Observația 1.2.7 și din definiția unei baze într-un spațiu vectorial rezultă că orice alt element al spațiului liniar  $\text{Ker}(L)$  este de forma (1.28).

Să considerăm mulțimea soluțiilor de forma (1.28). Conform Definiției 1.2.1, aceasta constituie soluția generală a ecuației  $L(y) = 0$ , deoarece:

1. Orice element al mulțimii conține  $n$  constante;
2. Oricare ar fi constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , funcția (1.28) este o soluție a ecuației diferențiale  $L(y) = 0$  deoarece  $\text{Ker}(L)$  este un spațiu liniar  $n$ -dimensional;
3. Oricare ar fi  $x^* \in [a, b]$  și oricare ar fi numerele reale  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ , putem determina în mod unic constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$  din (1.28) astfel încât  $y$  corespunzător să fie soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială  $L(y) = 0$  cu condițiile inițiale

$$y(x^*) = y_1^*, \quad y'(x^*) = y_2^*, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x^*) = y_n^*,$$

căci aceasta revine la a rezolva sistemul liniar și neomogen

$$\begin{cases} C_1 y_1(x^*) + C_2 y_2(x^*) + \dots + C_n y_n(x^*) & = y_1^*, \\ C_1 y_1'(x^*) + C_2 y_2'(x^*) + \dots + C_n y_n'(x^*) & = y_2^*, \\ \dots & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x^*) + C_2 y_2^{(n-1)}(x^*) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x^*) & = y_n^*. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem,  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x^*)$ , este diferit de zero deoarece mulțimea  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ , fiind un sistem fundamental de soluții, are wronskianul  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$  nenul pe  $[a, b]$ . În consecință, sistemul are soluție unică.

Astfel, teorema este demonstrată. ■

**Observația 1.2.9** Pentru a scrie soluția generală (1.28) a ecuației diferențiale  $L(y) = 0$ , este necesară cunoașterea unui sistem fundamental de soluții al acesteia.

**Observația 1.2.10** Ecuația diferențială  $L(y) = 0$  are o infinitate de sisteme fundamentale de soluții. Este de ajuns să ne gândim că un sistem fundamental de soluții este o bază în  $\text{Ker}(L)$  și că un spațiu vectorial finit dimensional are o infinitate de baze. Oricare alt sistem fundamental de soluții se obține cu ajutorul unei matrice de trecere nesingulară.

**Definiția 1.2.8** Matricea cu o singură linie și  $n$  coloane  $\Gamma = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$ , unde  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială  $L(y) = 0$ , se numește **matrice fundamentală** a acestei ecuații.

**Observația 1.2.11** Pentru o ecuație diferențială liniară omogenă de ordinul  $n$  cu coeficienți variabili există o infinitate de matrici fundamentale, oricare două asemenea matrici,  $\Gamma$  și  $\tilde{\Gamma}$ , fiind legate prin

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot C,$$

unde  $C$  este o matrice pătratică de ordinul  $n$  nesingulară.

**Exercițiul 1.2.2** Fie  $y_1, y_2$  soluții ale ecuației diferențiale liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienți variabili

$$y'' + (2x - 1)y' + (\sin e^x)y = 0,$$

care satisfac respectiv condițiile inițiale:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Să se determine  $W[y_1, y_2]$  și să se scrie soluția generală a ecuației.

**Soluție.** Existența și unicitatea celor două soluții este asigurată în baza Observației 1.1.1. Valoarea în  $x = 0$  a wronskianului celor două soluții  $y_1$  și  $y_2$  este

$$W[y_1, y_2](0) = W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Din Teorema 1.2.2 rezultă că

$$W(x) = W(0) \cdot \exp\left(-\int_0^x (2t - 1)dt\right) = W(0) \cdot e^{-x^2+x}.$$

Prin urmare, wronskianul celor două soluții este nenul în toate punctele axei reale. Deoarece numărul celor două soluții este egal cu ordinul ecuației diferențiale, rezultă că sistemul de soluții  $\{y_1, y_2\}$  este un sistem fundamental de soluții. Așadar, soluția generală a ecuației date, definită pe întreaga axă a numerelor reale, este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante arbitrare. ■

**Teorema 1.2.8** Dacă se cunoaște o soluție particulară a ecuației (1.8), fie aceea  $y_1(x)$ , atunci prin schimbarea de funcție

$$y(x) = y_1 z(x), \quad (1.29)$$

$z(x)$  fiind noua funcție necunoscută, ordinul ei poate fi micșorat cu o unitate.

**Demonstrație.** Obținem succesiv:

$$\begin{aligned} y &= y_1 z, \\ y' &= y_1' z + y_1 z', \\ y'' &= y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\ &\dots \\ y^{(n)} &= y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + \dots + C_n^n y_1 z^{(n)}. \end{aligned}$$

Înlocuind acestea în (1.8) și ținând cont că  $L(y_1) = 0$ , deducem o ecuație diferențială de ordinul  $n$  având ca necunoscută funcția  $z = z(x)$ , care are coeficientul lui  $z$  nul. Această ecuație conține derivatele până la ordinul  $n$  ale funcției  $z$ .

Cu o nouă schimbare de variabilă dependentă  $z' = u$ , obținem o ecuație diferențială liniară și omogenă de ordinul  $n - 1$ , de forma

$$A_0(x)u^{(n-1)} + A_1(x)u^{(n-2)} + \dots + A_{n-1}(x)u = 0,$$

a cărei necunoscută este funcția  $u$ . ■

**Exercițiul 1.2.3** Se consideră ecuația diferențială

$$y'' + \left( \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} \right) y' + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} y = 0$$

căreia i se cunoaște soluția particulară  $y_1(x) = \sin x$ . Să se determine soluția generală a acestei ecuații și să se rezolve problema lui Cauchy cu condițiile inițiale

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

**Soluție.** Efectuând schimbarea de funcție necunoscută  $y = z \sin x$  și ținând cont de

$$y' = z' \sin x + z \cos x, \quad y'' = z'' \sin x + 2z' \cos x - z \cos x,$$

obținem

$$\frac{z''}{z'} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Soluția acestei ecuații este  $z' = C_1 \cos x$  și deci  $z = C_1 \sin x + C_2$ . Ținând cont că  $y = z \sin x$ , deducem că soluția generală a ecuației inițiale este

$$y = C_1 \sin^2 x + C_2 \sin x.$$

Impunându-i acestei soluții generale condițiile inițiale, suntem conduși la sistemul

$$\begin{cases} C_1 \sqrt{3} + 2C_2 = 0, \\ C_1 \sqrt{3} + C_2 = 2, \end{cases}$$

care are soluția  $C_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ ,  $C_2 = -2$ .

Deci soluția problemei lui Cauchy este  $y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin^2 x - 2 \sin x$ . ■

**Observația 1.2.12** Dacă  $a_0(x) + a_1(x) + \dots + a_n(x) = 0$ , atunci  $y = e^x$  este o soluție particulară a ecuației diferențiale (1.8), iar dacă  $a_{n-1}(x) + x a_n(x) = 0$ , ecuația (1.8) admite soluția particulară  $y = x$ .

**Exercițiul 1.2.4** Cunoscând o soluție  $y = y_1(x)$  a ecuației diferențiale liniară, omogenă, de ordinul al doilea

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (1.30)$$

să se determine soluția sa generală.

**Soluție.** Împărțind cu  $a_0(x)$  și folosind notația

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$

ecuația (1.30) devine

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Dacă cunoaștem o soluție  $y_1$  a acestei ecuații, atunci, cu schimbarea de funcție necunoscută  $y = y_1 z$ , putem micșora ordinul cu o unitate. Ecuația diferențială în  $z$  este

$$y_1(x)z'' + (2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x))z' = 0.$$

Această ecuație se scrie în forma echivalentă

$$\frac{z''}{z'} + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p_1(x) = 0.$$

Integrând, obținem

$$\ln z' + 2 \ln y_1(x) = \ln \left( C_2 \exp \left( - \int p_1(x) dx \right) \right),$$

de unde rezultă

$$z' = \frac{C_2 \exp \left( - \int p_1(x) dx \right)}{y_1^2(x)}.$$

Integrând și această ecuație, obținem

$$z = C_1 + C_2 \int \frac{\exp \left( - \int p_1(x) dx \right)}{y_1^2(x)} dx.$$

De aici rezultă că soluția generală a ecuației (1.30) este

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int \frac{\exp \left( - \int p_1(x) dx \right)}{y_1^2(x)} dx.$$

Din expresia soluției generale deducem că un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară de ordinul al doilea este format din funcția  $y_1$  și funcția

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{\exp \left( - \int p_1(x) dx \right)}{y_1^2(x)} dx \quad (1.31)$$

determinată cu ajutorul lui  $y_1(x)$  și a unuia din coeficienții ecuației. ■

**Exercițiul 1.2.5** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

*cunoscând că admite soluția particulară  $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ .*



**Soluție.** A integra o ecuație diferențială înseamnă a determina toate soluțiile sale. Pentru o ecuație diferențială liniară, aceasta revine la a determina soluția sa generală. Soluția generală se poate preciza dacă se cunoaște un sistem fundamental de soluții ale acelei ecuații.

Conform Exercițiului 1.2.4, un sistem fundamental de soluții pentru ecuația dată este format din  $y_1(x)$  și funcția  $y_2(x)$  dată de (1.31). Avem

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \exp\left(-\int \frac{2}{x} dx\right) dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}.$$

Având un sistem fundamental de soluții

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene de ordinul al doilea este

$$y(x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x},$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante arbitrare. ■

**Exercițiul 1.2.6** *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale*

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

**Soluție.** Suma coeficienților acestei ecuații diferențiale este zero, prin urmare ecuația admite soluția particulară  $y_1 = e^x$ . Pe de altă parte, coeficienții ecuației date sunt polinoame, fapt ce conduce la posibilitatea ca ea să admită ca soluții particulare polinoame, de exemplu de forma  $y_2(x) = ax + b$ . Impunând ca  $y_2$  să fie soluție, găsim  $b = a$ . Prin urmare,  $y_2 = a(x+1)$ , cu  $a \neq 0$ , poate constitui soluție particulară a ecuației date. Soluția generală este  $y = C_1 e^x + C_2(x+1)$ . ■

### 1.3 Ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul $n$ cu coeficienți variabili

Am văzut că o asemenea ecuație diferențială are forma

$$L(y) = f(x), \tag{1.32}$$

unde

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y. \tag{1.33}$$

În ecuația diferențială (1.32),  $y \in C^n([a, b])$  este funcția necunoscută,  $f \in C^0([a, b])$  este termenul liber al ecuației,  $a_0, a_2, \dots, a_n \in C^0([a, b])$  sunt coeficienții ecuației, iar  $a_0(x) \neq 0$  pe  $[a, b]$ .

Ecuația diferențială

$$L(y) = 0 \quad (1.34)$$

a fost denumită ecuația omogenă asociată ecuației (1.32).

În paragraful precedent am demonstrat că soluția generală  $y_o$  a ecuației omogene asociate este

$$y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (1.35)$$

unde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante arbitrare, iar  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este un sistem fundamental de soluții ale ecuației (1.34).

**Teorema 1.3.1 (Soluția generală a ecuației neomogene)** *Dacă  $y_o$  este soluția generală a ecuației omogene asociate (1.34) și  $y_p$  este o soluție particulară a ecuației neomogene (1.32), atunci*

$$y = y_o + y_p \quad (1.36)$$

*este soluția generală a ecuației (1.32).*

**Demonstrație.** Deoarece  $y_p$  este o soluție particulară a ecuației neomogene (1.32) rezultă

$$L(y_p) = f(x), \quad (\forall) x \in [a, b], \quad (1.37)$$

iar din faptul că  $y_o$  este soluția generală a ecuației omogene asociată ecuației (1.32), avem

$$L(y_o) = 0, \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (1.38)$$

Relațiile (1.37) și (1.38) demonstrează că (1.36) este o soluție a ecuației diferențiale neomogene (1.32).

Soluția (1.36) conține  $n$  constante arbitrare.

Pentru ca (1.36) să fie soluția generală a ecuației diferențiale (1.32), mai trebuie arătat că problema lui Cauchy pentru ecuația (1.32) cu condițiile inițiale oarecare

$$y(x_0) = y_1^0, \quad y'(x_0) = y_2^0, \quad \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \quad (1.39)$$

are soluție unică în mulțimea funcțiilor de forma (1.36), adică putem determina în mod unic constantele  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  astfel încât funcția

$$y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_p(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.40)$$

să satisfacă condițiile inițiale (1.39). Pentru aceasta ar trebui ca sistemul liniar și neomogen de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) &= y_1^0 - y_p(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) &= y_2^0 - y_p(x_0), \\ \cdots, \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= y_n^0 - y_p(x_0) \end{cases}$$

să aibă soluție unică.

Determinantul sistemului,  $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0)$ , este diferit de zero deoarece  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială omogenă (1.34). În consecință, sistemul are soluția unică  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$ . ■

**Teorema 1.3.2** *Dacă  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă asociată ecuației diferențiale liniare de ordinul  $n$  neomogenă cu coeficienți variabili (1.32) și funcțiile  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , derivabile pe intervalul real  $[a, b]$ , sunt astfel încât derivatele lor satisfac sistemul liniar și neomogen*

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) + \cdots + y_n(x)u_n'(x) = 0, \\ y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) + \cdots + y_n'(x)u_n'(x) = 0, \\ \cdots \\ y_1^{(n-2)}(x)u_1'(x) + y_2^{(n-2)}(x)u_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-2)}(x)u_n'(x) = 0, \\ y_1^{(n-1)}(x)u_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)u_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}(x)u_n'(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}, \end{cases} \quad (1.41)$$

atunci funcția

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.42)$$

este o soluție particulară a ecuației diferențiale neomogene (1.32).

**Demonstrație.** Trebuie să arătăm că avem

$$L(y_p) = f(x). \quad (1.43)$$

Pentru aceasta trebuie să determinăm expresiile derivatelor până la ordinul  $n$  ale funcției  $y_p$  din (1.42). Având în vedere (1.41), rezultă că

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x), \\ y_p''(x) &= u_1(x)y_1''(x) + u_2(x)y_2''(x) + \cdots + u_n(x)y_n''(x), \\ &\vdots, \\ y_p^{(n-1)}(x) &= u_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n-1)}(x), \\ y_p^{(n)}(x) &= u_1(x)y_1^{(n)}(x) + u_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)}. \end{aligned}$$

Din aceste derivate și (1.42) rezultă (1.43). ■

**Exercițiul 1.3.1** *Să se integreze ecuația diferențială liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienți variabili, neomogenă  $xy'' - y' = x^2$ , pe intervalul nemărginit  $(0, +\infty)$ .*

**Soluție.** Ecuația omogenă asociată ecuației date,  $xy'' - y' = 0$ , se scrie în forma echivalentă  $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$ , din care deducem  $d(\ln y') = d(\ln x)$ .

Diferențialele a două funcții sunt egale dacă și numai dacă funcțiile diferă printr-o constantă. Prin urmare,  $\ln y' = \ln x + \ln(2C_2)$ , unde  $C_2$  este o constantă reală pozitivă.

Ultima egalitate conduce la  $y' = 2C_2x$  și, de aici, putem afirma că orice soluție a ecuației omogene asociate este o funcție strict crescătoare pe  $[0, +\infty)$ .

Integrând ecuația liniară  $y' = 2C_2x$ , obținem  $y = C_1 + C_2x^2$ , unde  $C_1$  este o constantă reală arbitrară.

Din faptul că sistemul de funcții  $\{1, x^2\}$  este liniar independent în spațiul liniar  $C^2([0, +\infty))$  rezultă că  $y_1 = 1$  și  $y_2 = x^2$  constituie un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă asociată.

Căutând soluția particulară  $y_p(x)$  de forma  $y_p(x) = u_1(x) + x^2u_2(x)$ , rezultă că derivatele funcțiilor  $u_1$  și  $u_2$  trebuie să verifice sistemul

$$\begin{cases} u_1' + x^2u_2' = 0, \\ 2xu_2' = \frac{x^2}{x}. \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este  $u_1' = -\frac{1}{2}x^2$ ,  $u_2' = \frac{1}{2}$ .

Determinând câte o primitivă, găsim  $u_1(x) = -\frac{x^3}{6}$ ,  $u_2(x) = \frac{1}{2}x$ .

Prin urmare, o soluție particulară a ecuației neomogene este

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{3}.$$

Soluția generală a ecuației date este  $y = C_1 + C_2x^2 + \frac{x^3}{3}$ . ■

**Observația 1.3.1** Din (1.28) și (1.42) deducem că, formal, o soluție particulară a unei ecuații diferențiale liniară și neomogenă de ordinul  $n$  cu coeficienți variabili se obține din soluția generală a ecuației omogene asociate trecând constantele în funcții, adică prin variația constantelor. Ideea acestei treceri aparține lui Lagrange și din acest motiv metoda de determinare a unei soluții particulare este cunoscută ca **metoda variației constantelor a lui Lagrange**.

Dacă soluția sistemului (1.41) este

$$u'_1(x) = f_1(x), \quad u'_2(x) = f_2(x), \quad \dots, \quad u'_n(x) = f_n(x),$$

atunci determinarea funcțiilor  $u_1, u_2, \dots, u_n$  se reduce la cuadraturile

$$u_j(x) = K_j + \int_{x_0}^x f_j(t)dt, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.44)$$

unde  $K_1, K_2, \dots, K_n$  sunt constante oarecare.

Înlocuind pe  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  în egalitatea (1.42), obținem soluția generală a ecuației diferențiale neomogene (1.1)

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \dots + K_ny_n + Y, \quad (1.45)$$

unde

$$Y = y_1(x) \int_{x_0}^x f_1(t)dt + y_2(x) \int_{x_0}^x f_2(t)dt + \dots + y_n(x) \int_{x_0}^x f_n(t)dt, \quad (1.46)$$

care depinde de  $n$  constante oarecare  $K_1, K_2, \dots, K_n$ , cu ajutorul căreia se poate rezolva o problema a lui Cauchy a ecuației diferențiale (1.1) pentru orice  $x \in [a, b]$  și orice date inițiale  $(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$ .

Este important de reținut forma ecuației (1.45). În această ecuație,  $Y(x)$  este o soluție a ecuației neomogene (1.1) care se obține din ecuația (1.44) luând  $K_1 = 0, K_2 = 0, \dots, K_n = 0$ .

**Observația 1.3.2** Soluția generală a unei ecuații diferențiale liniare neomogenă se obține adăugând la soluția generală a ecuației omogene asociate o soluție particulară a ecuației neomogene.

## 1.4 Ecuatii diferențiale de ordinul $n$ liniare omogene cu coeficienți constanți

În acest paragraf ne vom ocupa de integrarea ecuației diferențiale liniare și omogene de ordinul  $n$

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1.47)$$

în care coeficienții  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sunt constante reale.

Coeficienții ecuației (1.47) pot fi însă și numere complexe.

Tipul de ecuație diferențială (1.47) constituie unul din exemplele cele mai interesante de ecuații diferențiale liniare de ordinul  $n$  deoarece se integrează ușor cu ajutorul unor funcții elementare.

Metoda de integrare a fost elaborată de Euler și se bazează pe două identități importante.

### 1.4.1 Identitățile lui Euler

**Teorema 1.4.1** *Operatorul liniar  $L$  din (1.47) verifică identitatea*

$$L(e^{rx}) = e^{rx} K(r), \quad (1.48)$$

unde

$$K(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = \sum_{k=0}^n a_k r^{n-k}. \quad (1.49)$$

**Demonstrație.** Pentru funcția  $y = e^{rx}$  avem

$$y'(x) = r e^{rx}, \quad y''(x) = r^2 e^{rx}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x) = r^{n-1} e^{rx}, \quad y^{(n)}(x) = r^n e^{rx}$$

și de aici rezultă că

$$L(e^{rx}) = e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n),$$

adică avem identitatea (1.48). ■

**Teorema 1.4.2** *Dacă în  $L(y)$  se înlocuiește  $y$  cu  $z e^{rx}$ , unde  $z$  este o funcție de  $x$ , de  $n$  ori derivabilă pe  $\mathbb{R}$ , se obține identitatea*

$$L(z e^{rx}) = \left[ K(r) z + \frac{K'(r)}{1!} z' + \frac{K''(r)}{2!} z'' + \cdots + \frac{K^{(n)}(r)}{n!} z^{(n)} \right] e^{rx}. \quad (1.50)$$

**Demonstrație.** Pentru a demonstra această identitate se observă că avem nevoie de derivata de ordinul  $k$ , unde  $k$  ia toate valorile întregi de la zero până la  $n$ , a funcției  $y = z e^{rx}$ . Aplicând formula de derivare de ordinul  $k$  a unui produs de două funcții, obținem

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= (r^k z + C_k^1 r^{k-1} z' + C_k^2 r^{k-2} z'' + \dots + C_k^k z^{(k)}) e^{rx} = \\ &= e^{rx} \sum_{s=0}^k C_k^s r^{k-s} z^{(s)}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Se observă că expresia lui  $L(y)$  se scrie

$$L(y) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} y^{(k)}. \quad (1.52)$$

Introducând (1.51) în (1.52), obținem

$$L(z e^{rx}) = e^{rx} \sum_{k=0}^n a_{n-k} \sum_{s=0}^k C_k^s r^{k-s} z^{(s)} = e^{rx} \sum_{k=0}^n \sum_{s=0}^k C_k^s a_{n-k} r^{k-s} z^{(s)}. \quad (1.53)$$

Coeficientul derivatei de ordinul  $p$  a funcției  $z$  este  $\frac{1}{p!} K^{(p)}(r) e^{rx}$ . Folosind acest rezultat, deducem identitatea (1.50). ■

**Definiția 1.4.1** Polinomul  $K(r)$  din (1.49) se numește **polinomul caracteristic** al ecuației diferențiale liniare omogene de ordin  $n$  cu coeficienți constanți, iar ecuația

$$K(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = \sum_{k=0}^n a_k r^{n-k} = 0 \quad (1.54)$$

se numește **ecuație caracteristică**. Rădăcinile ecuației (1.54) se numesc **rădăcini caracteristice**.

Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că ecuația caracteristică, având gradul  $n$ , are, în corpul comutativ al numerelor complexe,  $n$  rădăcini. Coeficienții ecuației caracteristice fiind numere reale, rezultă că dacă  $r = \alpha + i\beta$  este o rădăcină caracteristică, atunci conjugata acesteia  $\bar{r} = \alpha - i\beta$  este de asemenea o rădăcină caracteristică. Aceste rădăcini, reale sau complex conjugate în perechi, pot fi distincte sau multiple.

În continuare vom analiza diverse cazuri în care se pot plasa rădăcinile caracteristice și, de fiecare dată, vom arăta cum se determină un sistem fundamental de soluții a ecuației (1.47) și soluția sa generală.

### 1.4.2 Cazul rădăcinilor caracteristice reale distincte

**Teorema 1.4.3** *Dacă toate rădăcinile  $r_1, r_2, \dots, r_n$  ale ecuației caracteristice (1.54) sunt reale și distincte, atunci funcțiile*

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{r_n x}, \quad (1.55)$$

*sunt soluții liniar independente ale ecuației (1.47) și soluția generală a ecuației diferențiale (1.47) este*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}. \quad (1.56)$$

**Demonstrație.** Conform Teoremei 1.4.1, fiecare din funcțiile (1.55) verifică ecuația (1.47). Aceste funcții formează un sistem fundamental de soluții deoarece wronskianul lor este produsul dintre  $e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x} = e^{-\frac{a_1}{a_0}x}$  și determinantul Vandermonde al numerelor distincte  $r_1, r_2, \dots, r_n$  și este deci diferit de zero.

Dar un sistem fundamental de soluții al ecuației (1.47) este format din elemente liniar independente din spațiul vectorial  $C^n(\mathbb{R})$ .

În această situație, soluția generală a ecuației (1.1) este evident (1.56) și teorema este demonstrată. ■

**Exercițiul 1.4.1** *Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniare, omogenă, cu coeficienți constanți*

$$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$$

*și să se rezolve problema lui Cauchy a acestei ecuații cu condițiile inițiale*

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 7.$$

**Soluție.** Ecuația caracteristică,  $r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$ , are rădăcinile  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4$  și sistemul fundamental de soluții  $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{4x}$ . Soluția generală a ecuației diferențiale este  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{4x}$ .

Impunând soluției generale să satisfacă condițiile inițiale, găsim sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 &= 1, \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 &= -1, \\ C_1 + 4C_2 + 16C_3 &= 7, \end{cases}$$

care are soluția unică  $C_1 = 7, C_2 = -8, C_3 = 2$ .

Prin urmare, soluția problemei Cauchy este  $y = 7e^x - 8e^{2x} + 2e^{4x}$ . ■



### 1.4.3 Cazul rădăcinilor caracteristice complexe distincte

Dacă ecuația caracteristică are rădăcina complexă  $r = \alpha + i\beta$ , ea fiind una u coeficienți reali, admite ca rădăcină și conjugata complexă a acesteia, adică pe  $\bar{r} = \alpha - i\beta$ . În acest caz, ordinul  $n$  al ecuației diferențiale trebuie să fie un număr par,  $n = 2m$ .

Să presupunem că rădăcinile ecuației caracteristice sunt numerele complexe distincte

$$r_1, r_2, \dots, r_m, r_{m+1}, \dots, r_{2m}$$

și că  $r_{m+j}$  este conjugata lui  $r_j$ .

Prin urmare, expresiile acestor rădăcini sunt

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & r_2 &= \alpha_2 + i\beta_2, & \dots, & r_m &= \alpha_m + i\beta_m, \\ r_{m+1} &= \alpha_1 - i\beta_1, & r_{m+2} &= \alpha_2 - i\beta_2, & \dots, & r_{2m} &= \alpha_m - i\beta_m. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Conform celor prezentate, rădăcinilor caracteristice (1.57) le corespund soluțiile liniar independente

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}, & \tilde{y}_2 &= e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x}, & \dots, & \tilde{y}_m &= e^{(\alpha_m + i\beta_m)x}, \\ \tilde{y}_{m+1} &= e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x}, & \tilde{y}_{m+2} &= e^{(\alpha_2 - i\beta_2)x}, & \dots, & \tilde{y}_{2m} &= e^{(\alpha_m - i\beta_m)x}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

care sunt însă funcții cu valori numere complexe.

Relațiile

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), \quad e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \quad (1.59)$$

și faptul că ecuația diferențială (1.47) este liniară conduc la concluzia că funcțiile obținute din (1.58) prin anumite combinații liniare, care se vor vedea mai jos, sunt de asemeni soluții ale ecuației diferențiale (1.47), cu precizarea că de data aceasta, spre deosebire de (1.58), ele vor fi reale. Aceste combinații liniare sunt

$$y_j = \frac{\tilde{y}_j + \tilde{y}_{m+j}}{2}, \quad y_{m+j} = \frac{\tilde{y}_j - \tilde{y}_{m+j}}{2i}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.60)$$

Matricea de trecere de la sistemul fundamental de soluții (1.58) la sistemul de soluții (1.60) este nesingulară, prin urmare sistemul de soluții (1.60) este de asemeni un sistem fundamental de soluții.

Din (1.58), (1.59) și (1.60) rezultă că expresiile acestor soluții sunt

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, & y_{m+1} = e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \\ y_2 = e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, & y_{m+2} = e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x, \\ \dots & \dots \\ y_m = e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x, & y_{2m} = e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x. \end{array} \right. \quad (1.61)$$

În acest caz, soluția generală a ecuației (1.47) este

$$y = \sum_{k=1}^m e^{\alpha_k x} (C_k \cos \beta_k x + C_{j+k} \sin \beta_k x). \quad (1.62)$$

**Exercițiul 1.4.2** Să se integreze ecuația diferențială  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

**Soluție.** Ecuația caracteristică corespunzătoare,  $r^2 + 4r + 13 = 0$ , are rădăcinile complex conjugate

$$r_1 = -2 + 3i, \quad r_2 = -2 - 3i.$$

Conform celor prezentate, sistemul fundamental de soluții este format din funcțiile

$$y_1(x) = e^{-2x} \cos 3x, \quad y_2(x) = e^{-2x} \sin 3x.$$

Soluția generală a ecuației date este  $y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ . ■

#### 1.4.4 Ecuația caracteristică are rădăcini distincte

Să presupunem că rădăcinile ecuației caracteristice (1.54), reale și complex conjugate, sunt distincte. Primele  $2m$  dintre ele sunt complex conjugate în perechi, adică de forma

$$r_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad r_{m+j} = \alpha_j - i\beta_j, \quad j = \overline{1, m},$$

iar celelalte  $n - 2m$  sunt reale și notate cu  $r_{2m+s}$ , unde  $s \in \overline{1, n - 2m}$ .

Contribuția rădăcinilor complex conjugate la un sistem fundamental de soluții este format din funcțiile

$$y_k(x) = e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x, \quad y_{m+k}(x) = e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x, \quad k = \overline{1, m}, \quad (1.63)$$

iar aportul celor reale se constituie din funcțiile

$$y_{2m+s}(x) = e^{r_{2m+s} x}, \quad s \in \overline{1, n - 2m}. \quad (1.64)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (1.47) este în acest caz

$$y = \sum_{k=1}^m (C_k \cos \beta_k x + C_{m+k} \sin \beta_k x) e^{\alpha_k x} + \sum_{s=1}^{n-2m} C_{2m+s} e^{r_{2m+s} x}. \quad (1.65)$$

**Exercițiul 1.4.3** Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniare cu coeficienți constanți

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$$

**Soluție.** Ecuația caracteristică,  $r^3 + 3r^2 + 4r + 2 = 0$ , are toate rădăcinile simple:  $r_1 = -1 + i$ ;  $r_2 = -1 - i$ ;  $r_3 = -1$ . Contribuția la un sistem fundamental de soluții a rădăcinilor caracteristice complex conjugate este formată din funcțiile

$$y_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad y_2(x) = e^{-x} \sin x,$$

iar cea a rădăcinii reale este  $y_3(x) = e^{-x}$ . Aceste contribuții formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială dată și deci soluția generală a acesteia este  $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-x} + C_3 e^{-x}$ . ■

### 1.4.5 Ecuația caracteristică are o rădăcină multiplă

Să revenim la cazul general al ecuației diferențiale (1.47) în care coeficienții sunt constante reale și să presupunem că ecuația caracteristică (1.54) are rădăcina  $r = r_1$  multiplă de ordinul  $p$ , unde  $2 \leq p \leq n$ . Înlocuind în identitatea (1.50) pe  $r$  cu  $r_1$  și ținând seama că

$$K(r_1) = 0, \quad K'(r_1) = 0, \quad \dots, \quad K^{(p-1)}(r_1) = 0, \quad K^{(p)}(r_1) \neq 0,$$

obținem

$$L(z \cdot e^{r_1 x}) = e^{r_1 x} \left[ \frac{K^{(p)}(r_1)}{p!} z^{(p)} + \frac{K^{(p+1)}(r_1)}{(p+1)!} z^{(p+1)} + \dots + \frac{K^{(n)}(r_1)}{n!} z^{(n)} \right]. \quad (1.66)$$

Dacă  $z$  se înlocuiește cu oricare din funcțiile

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \dots, \quad x^{p-1},$$

paranteza din membrul al doilea al relației (1.66) este nulă și, prin urmare, avem

$$L(e^{r_1 x}) = 0, \quad L(x e^{r_1 x}) = 0, \quad L(x^2 e^{r_1 x}) = 0, \quad \dots, \quad L(x^{p-1} e^{r_1 x}) = 0,$$

ceea ce dovedește că funcțiile

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \quad \dots, x^{p-1} \cdot e^{r_1 x} \quad (1.67)$$

sunt soluții ale ecuației diferențiale (1.47).

Înmulțind aceste soluții cu constante oarecare și adunându-le deducem că la rădăcina caracteristică  $p$ -multiplă  $r = r_1$  corespunde soluția

$$y = e^{r_1 x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_p x^{p-1}) \quad (1.68)$$

care depinde de  $p$  constante arbitrare  $C_1, C_2, \dots, C_p$  și care se mai poate scrie sub forma

$$y = e^{r_1 x} Q_{p-1}(x), \quad (1.69)$$

unde  $Q_{p-1}(x)$  este un polinom oarecare de gradul  $p - 1$ .

**Observația 1.4.1** Dacă rădăcina caracteristică multiplă  $r_1$ , de multiplicitate  $p$ , este complexă, deci este de forma  $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ , atunci și conjugata complexă a acesteia,  $\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\beta_1$ , este rădăcină  $p$ -multiplă. Procedând ca în cazul rădăcinilor caracteristice complexe distincte și ținând cont de (1.68), rezultă că funcția

$$y = e^{\alpha_1 x} (Q_{p-1}(x) \cos \beta_1 x + R_{p-1}(x) \sin \beta_1 x), \quad (1.70)$$

unde  $Q_{p-1}(x)$  și  $R_{p-1}(x)$  sunt polinoame de grad  $p - 1$  cu coeficienți numere reale arbitrare, este o soluție a ecuației diferențiale (1.47).

**Exercițiul 1.4.4** Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniare, omogene, cu coeficienți constanți  $y^{(4)} + 2y'' + 3y' + 2y = 0$ .

**Soluție.** Ecuația caracteristică a ecuației date,  $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$ , este o ecuație reciprocă și se rezolvă utilizând substituția  $r + \frac{1}{r} = u$ . Se găsesc rădăcinile

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de multiplicități  $p_1 = 2$  respectiv  $p_2 = 2$ .

Primei rădăcini caracteristice duble îi corespunde soluțiile

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = x e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2},$$

iar cea de a doua conduce la soluțiile

$$y_3 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad y_4 = xe^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Deoarece numărul acestor soluții este egal cu ordinul ecuației diferențiale, rezultă că soluția sa generală este

$$y = \left[ (C_1 + C_2x) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_4x) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right] e^{-\frac{x}{2}}.$$

Folosind soluția generală determinată, se poate rezolva orice problemă a lui Cauchy pentru această ecuație diferențială dată. ■

#### 1.4.6 Cazul rădăcinilor caracteristice reale multiple

**Teorema 1.4.4** *Dacă ecuația caracteristică (1.54) are  $m$  rădăcini reale multiple  $r_1, r_2, \dots, r_m$ , de respectiv multiplicitățile  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , unde  $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$ , atunci funcțiile*

$$e^{r_j x}, \quad x e^{r_j x}, \quad x^2 e^{r_j x}, \quad \dots, \quad x^{p_j-1} e^{r_j x}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.71)$$

*formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială (1.47), iar funcția*

$$y = e^{r_1 x} Q_{p_1-1}(x) + e^{r_2 x} Q_{p_2-1}(x) + \dots + e^{r_m x} Q_{p_m-1}(x), \quad (1.72)$$

*unde  $Q_{p_1-1}(x), Q_{p_2-1}(x), \dots, Q_{p_m-1}(x)$  sunt polinoame cu coeficienți reali arbitrari de gradele indicate de indicele fiecăruia, este soluția generală a ecuației diferențiale (1.47).*

**Demonstrație.** Presupunem, prin absurd, că soluțiile (1.71) nu formează un sistem fundamental pentru (1.47). Atunci, există constantele reale

$$h_{j_1}, \quad h_{j_2}, \quad h_{j_3}, \quad \dots, \quad h_{j_{p_j}}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.73)$$

nu toate nule, astfel încât, înmulțind fiecare soluție din tabloul (1.71) cu constantele corespunzătoare din tabloul (1.73) și adunându-le, să obținem

$$\sum_{j=1}^m (h_{j_1} e^{r_j x} + h_{j_2} x e^{r_j x} + h_{j_3} x^2 e^{r_j x} + \dots + h_{j_{p_j}} x^{p_j-1} e^{r_j x}) = 0. \quad (1.74)$$

Dar (1.74) se poate scrie sub forma egalității

$$e^{r_1 x} H_1(x) + e^{r_2 x} H_2(x) + e^{r_3 x} H_3(x) + \dots + e^{r_m x} H_m(x) = 0, \quad (1.75)$$

unde

$$H_j(x) = h_{j_1} + h_{j_2}x + h_{j_3}x^2 + \cdots + h_{j_{p_j}}x^{p_j-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.76)$$

care are loc pe întreaga axă a numerelor reale.

Constantele din (1.73) nefiind toate nule, polinoamele (1.76) nu sunt toate identic nule. Să presupunem că notațiile au fost astfel alese încât ultimul polinom,  $H_m(x)$ , este neidentic nul.

Fie  $h_1, h_2, \dots, h_m$  gradele polinoamelor introduse în (1.76). Din demonstrația pe care o vom prezenta vom vedea că presupunerea ca  $H_m(x)$  să fie neidentic nul nu este posibilă.

Pentru aceasta, împărțim ambii membri ai egalității (1.75) cu  $e^{r_1x}$  și apoi derivăm de  $h_1$  ori.

Procedând astfel, polinomul  $H_1(x)$  dispare și obținem o ecuație de forma

$$e^{(r_2-r_1)x}H_{2,1}(x) + e^{(r_3-r_1)x}H_{3,1}(x) + \cdots + e^{(r_m-r_1)x}H_{m,1}(x) = 0, \quad (1.77)$$

în care polinoamele  $H_{2,1}(x), H_{3,1}(x), \dots, H_{m,1}(x)$  au aceleași grade cu respectiv polinoamele  $H_2(x), H_3(x), \dots, H_m(x)$ , polinomul  $H_{m,1}(x)$  nefiind identic nul.

Aplicând din nou procedeul care a condus la egalitatea (1.77), dar în care operatorul de derivare se aplică de  $h_2 + 1$  ori, se ajunge la egalitatea

$$e^{(r_3-r_2)x}H_{3,2}(x) + e^{(r_4-r_2)x}H_{4,2}(x) + \cdots + e^{(r_m-r_2)x}H_{m,2}(x) = 0, \quad (1.78)$$

în care polinoamele  $H_{3,2}(x), H_{4,2}(x), \dots, H_{m,2}(x)$  au respectiv aceleași grade ca și polinoamele  $H_3(x), H_4(x), \dots, H_m(x)$ , polinomul  $H_{m,2}(x)$  nefiind identic nul.

Procedeul continuă până se ajunge la egalitatea

$$e^{(r_m-r_{m-1})x}H_{m,n-1}(x) = 0,$$

care trebuie să fie adevărată pe toată axă a numerelor reale și în care polinomul  $H_{m,n-1}(x)$  are gradul  $m$  și nu este identic nul. Simplificând prin  $e^{(r_m-r_{m-1})x}$ , ajungem la concluzia că  $H_{m,n-1}(x) = 0$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ . Aceasta este însă imposibil.

Contradicția la care s-a ajuns demonstrează că toate constantele din (1.73) sunt nule și deci sistemul de funcții din tabloul (1.71) este liniar independent.

Prin urmare, sistemul de funcții (1.71) constituie un sistem fundamental de soluții pentru ecuația (1.47).

Înmulțirea soluțiilor fundamentale (1.71) cu constante reale oarecare, urmată de adunarea lor, conduce la concluzia că soluția generală a ecuației diferențiale (1.47) este de forma (1.72) și astfel teorema este complet demonstrată. ■

**Exercițiul 1.4.5** Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniare, omogene, cu coeficienți constanți  $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0$ .

**Soluție.** Ecuația caracteristică,  $r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 4r + 4 = 0$ , are rădăcinile duble  $r_1 = -1$  și  $r_2 = 2$ .

Un sistem fundamental de soluții este format din funcțiile

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}, \quad y_3(x) = e^{2x}, \quad y_4(x) = xe^{2x}.$$

Prin urmare, soluția generală este  $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^{2x}$ . ■

### 1.4.7 Rădăcini caracteristice complex conjugate multiple

**Teorema 1.4.5** Dacă ecuația caracteristică (1.54) are  $m$  rădăcini complexe

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \dots, r_m = \alpha_m + i\beta_m, \quad (1.79)$$

de multiplicități respectiv egale cu  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , atunci  $2(p_1 + p_2 + \dots + p_m) = n$ , tabloul de soluții ale ecuației diferențiale (1.47)

$$\begin{aligned} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \quad x e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \quad x^2 e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \quad \dots, \quad x^{p_j-1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\ e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad x e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad x^2 e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \quad \dots, \quad x^{p_j-1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \end{aligned} \quad (1.80)$$

unde  $j$  ia toate valorile întregi de la 1 până la  $m$ , formează un sistem fundamental de soluții și

$$y = \sum_{j=1}^m e^{\alpha_j x} [Q_{p_j-1}(x) \cos \beta_j x + R_{p_j-1}(x) \sin \beta_j x] \quad (1.81)$$

este soluția generală a acestei ecuații diferențiale.

**Demonstrație.** Ecuația caracteristică (1.54) fiind cu coeficienți reali, va admite ca rădăcini și conjugatele complexe ale acestora

$$\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \bar{r}_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \dots, \bar{r}_m = \alpha_m - i\beta_m,$$

cu respectiv aceleași multiplicități. Acestea, împreună cu cele din (1.79), sunt toate rădăcinile caracteristice, prin urmare ordinul ecuației diferențiale trebuie să fie astfel încât  $2(p_1 + p_2 + \dots + p_m) = n$ .

La aceste rădăcini corespund următoarele soluții ale ecuației (1.47)

$$\begin{aligned} e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, \quad xe^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, \quad x^2e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, \quad \dots, \quad x^{p_j-1}e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, \\ e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, \quad xe^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, \quad x^2e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, \quad \dots, \quad x^{p_j-1}e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

unde  $j$  ia toate valorile întregi de la 1 până la  $m$ . Toate acestea formează un sistem fundamental de soluții.

Se dorește însă ca sistemul fundamental de soluții să conțină funcții reale și nu complexe ca în (1.82).

Efectuând semisuma și semidiferența împărțită prin  $i$  ale soluțiilor aflate pe aceeași verticală în tabloul (1.82), obținem alte  $n$  soluții, de data aceasta reale, și anume cele din tabloul (1.80).

Tabloul de soluții astfel obținut formează de asemeni un sistem fundamental de soluții astfel că soluția generală a ecuației diferențiale (1.47) este o combinație liniară a celor din (1.82) care se poate scrie în cele din urmă în forma (1.81). ■

**Exercițiul 1.4.6** *Să se integreze ecuația diferențială liniară, omogenă, cu coeficienți constanți  $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$ .*

**Soluție.** Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este  $r^8 + 8r^4 + 16 = 0$ . Cu substituția  $r^4 = t$ , această ecuație devine  $t^2 + 8t + 16 = 0$ , care are rădăcina dublă  $t = -4$ . Pentru a afla rădăcinile caracteristice trebuie să rezolvăm ecuația  $r^4 = -4$ . Deoarece  $-4 = (2i)^2$ , rezultă că ultima ecuație este echivalentă cu ecuațiile  $r^2 = 2i$  și  $r^2 = -2i$ . Scriind că  $\pm 2i = (1 \pm i)^2$  deducem că rădăcinile caracteristice sunt  $r_{1,2} = \pm(1 + i)$  și  $r_{3,4} = \pm(1 - i)$ , fiecare având multiplicitatea 2.

Tabloul celor opt soluții liniar independente, corespunzător cazului general (1.80), este

$$\begin{aligned} e^x \cos x, \quad xe^x \cos x, \quad e^{-x} \cos x, \quad xe^{-x} \cos x, \\ e^x \sin x, \quad xe^x \sin x, \quad e^{-x} \sin x, \quad xe^{-x} \sin x. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Întrucât tabloul de funcții (1.83) formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială dată, rezultă că soluția sa generală este

$$\begin{aligned} y = & e^x [(C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x] + \\ & e^{-x} [(C_5 + C_6x) \cos x + (C_7 + C_8x) \sin x], \end{aligned}$$



unde  $C_1, C_2, \dots, C_8$  sunt constante reale arbitrare. ■

### 1.4.8 Rădăcini caracteristice reale și complexe multiple

Să considerăm acum cazul general în care ecuația caracteristică are atât rădăcini reale cât și complex conjugate, fiecare dintre ele putând fi și multiplă. De altfel, chiar și o rădăcină simplă poate fi considerată multiplă, multiplicitatea sa fiind egală cu 1.

**Teorema 1.4.6** *Dacă coeficienții ecuației diferențiale (1.47) sunt constante reale, iar ecuația caracteristică corespunzătoare are rădăcinile reale multiple  $r_1, r_2, \dots, r_k$  de multiplicități  $p_1, p_2, \dots, p_m$  și rădăcinile complexe multiple*

$$r_{m+1} = \alpha_1 + i\beta_1, \quad r_{m+2} = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \dots, \quad r_{m+k} = \alpha_k + i\beta_k,$$

*cu ordinele de multiplicitate  $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+k}$ , unde*

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m + 2(p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_{m+k}) = n,$$

*atunci soluția generală a ecuației diferențiale (1.47), în formă reală, este*

$$y = \sum_{j=1}^m e^{r_j x} Q_{p_j-1}(x) + \sum_{q=1}^k e^{\alpha_q x} \left[ R_{p_{m+q}-1}(x) \cos \beta_q x + S_{p_{m+q}-1}(x) \sin \beta_q x \right],$$

*unde  $Q_{p_j-1}(x)$ ,  $R_{p_{m+q}-1}(x)$  și  $S_{p_{m+q}-1}(x)$  sunt polinoame cu coeficienți numere reale arbitrare de grade  $p_j - 1$ ,  $p_{m+q} - 1$  și respectiv  $p_{m+q} - 1$ .*

**Demonstrație.** Analiza demonstrațiilor celorlalte teoreme ale acestui paragraf sugerează demonstrația acestei teoreme care poate fi efectuată fără dificultate. ■

**Exercițiul 1.4.7** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y^{(8)} - 2y^{(6)} + 16y^{(5)} + 25y^{(4)} + 32y''' + 60y'' + 16y' + 32y = 0.$$

**Soluție.** Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este

$$r^8 - 2r^6 + 16r^5 + 25r^4 + 32r^3 + 60r^2 + 16r + 32 = 0.$$

Căutând rădăcinile întregi, constatăm că singura rădăcină de acest tip este  $r_1 = -2$  de multiplicitate  $p_1 = 2$ .

Împărțind polinomul caracteristic prin  $(r + 2)^2 = r^2 + 4r + 4$ , găsim că celelalte șase rădăcini caracteristice sunt rădăcinile ecuației

$$r^6 - 4r^5 + 10r^4 - 8r^3 + 17r^2 - 4r + 8 = 0. \quad (1.84)$$

Studiem dacă ecuația (1.84) are rădăcini complexe pur imaginare. Impunând ca  $i\beta$  să satisfacă (1.84), după egalarea cu zero a părților reale și imaginare, deducem că  $\beta$  trebuie să fie rădăcina reală comună a ecuațiilor

$$\beta^6 - 10\beta^4 + 17\beta^2 - 8 = 0, \quad \beta^5 - 2\beta^3 + \beta = 0.$$

Aceste ecuații au rădăcinile duble comune  $\beta = -1$  și  $\beta = 1$ , ceea ce arată că  $r_2 = i$  și  $r_3 = -i$  sunt rădăcini caracteristice duble.

Împărțind polinomul din membrul întâi al ecuației (1.84) la polinomul  $r^4 + 2r^2 + 1$  se găsește câtul  $r^2 - 4r + 8$ . Prin urmare,

$$r^6 - 4r^5 + 10r^4 - 8r^3 + 17r^2 - 4r + 8 = (r^4 + 2r^2 + 1)(r^2 - 4r + 8). \quad (1.85)$$

Ultimele două rădăcini caracteristice se determină anulând cel de al doilea factor din membrul doi al relației (1.85). Se găsește că  $r_4 = 2 + 2i$  și  $r_5 = 2 - 2i$  sunt rădăcini caracteristice simple.

Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$\begin{aligned} y = & (C_1 + C_2x)e^{-2x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x + \\ & + (C_7\cos 2x + C_8\sin 2x)e^{2x}, \end{aligned}$$

unde  $C_1, C_2, \dots, C_8$  sunt constante reale arbitrare. ■

## 1.5 Ecuații diferențiale liniare neomogene cu coeficienți constanți

Să considerăm ecuația diferențială neomogenă

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \quad (1.86)$$

în care coeficienții  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sunt numere reale date,  $a_0 \neq 0$ , iar  $f$  este o funcție reală continuă cunoscută.

Deoarece în paragraful precedent s-a prezentat o metodă de integrare a ecuației omogene asociată ecuației (1.86), determinarea tuturor soluțiilor ecuației diferențiale (1.86) nu întâmpină dificultăți.

În cazul general, când  $f(x)$  este o funcție continuă oarecare, pentru a determina o soluție particulară a ecuației (1.86) se aplică metoda variației constantelor a lui Lagrange.

Soluția generală a ecuației (1.86) este atunci suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și acea soluție particulară. Determinarea unei soluții particulare presupune  $n$  cuadraturi.

Există însă situații când o soluție particulară se poate determina numai prin operații algebrice.

Prima dintre ele este atunci când membrul al doilea din (1.86) are forma unui *cvasipolinom*, adică forma

$$f(x) = e^{\gamma x} P(x) \quad (1.87)$$

unde  $P$  este un polinom algebric și  $\gamma$  un număr real. Să presupunem că  $\gamma$  este o rădăcină de multiplicitate  $s$  a ecuației caracteristice  $L(r) = 0$  ( $s = 0$  dacă  $\gamma$  nu este rădăcină caracteristică).

În acest caz, se caută o soluție particulară  $y_p(x)$  a ecuației (1.86) sub forma

$$y_p(x) = x^s e^{\gamma x} Q(x), \quad (1.88)$$

unde  $Q$  este un polinom cu coeficienți nedeterminați de același grad cu  $P$ .

Scriind că  $L(y_p)(x) \equiv f(x)$ , unde  $f(x)$  are expresia (1.87), simplificând apoi prin  $e^{\gamma x}$  și identificând puterile lui  $x$ , obținem coeficienții necunoscuți ai polinomului din (1.88).

**Exercițiul 1.5.1** Să se integreze ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul al doilea

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

**Soluție.** Termenul liber al acestei ecuații diferențiale este de forma (1.87).

Ecuația caracteristică a ecuației omogene asociate are rădăcinile  $r_1 = 1$  și  $r_2 = 2$ , astfel că soluția generală a acesteia, adică a ecuației diferențiale  $y'' - 3y' + 2y = 0$ , este  $y_o = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ . Pentru că  $r = 3$  nu este rădăcină a ecuației caracteristice (deci  $s = 0$ ), soluția particulară  $y_p(x)$  a ecuației date o căutăm în forma

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Calculăm  $L(y_p(x))$ , egalăm cu  $(x^2 + x)e^{3x}$ , simplificăm prin  $e^{3x}$  și dacă identificăm puterile lui  $x$  din cei doi membri, obținem sistemul

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 6A + 2B = 1, \\ 2A + 3B + 2C = 0, \end{cases}$$

care are soluția  $A = 1/2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 1$ . Prin urmare,  $y_p(x) = ((1/2)x^2 - x + 1)e^{3x}$ . Soluția generală va fi suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și soluția particulară determinată mai sus.

Așadar, soluția generală a ecuației este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x}.$$

Având soluția generală, putem aborda orice problemă Cauchy a ecuației diferențiale date. ■

O a doua situație când se poate determina o soluție particulară fără cuadraturi (integrări) este aceea în care membrul drept din (1.86) are forma

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x), \quad (1.89)$$

în care  $P_1$  și  $P_2$  sunt polinoame cu coeficienți reali, în general de grade diferite. În această situație, soluția particulară trebuie căutată în forma

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x), \quad (1.90)$$

unde  $Q_1$  și  $Q_2$  sunt polinoame de grad egal cu gradul maxim al polinoamelor  $P_1$  și  $P_2$ , iar  $s$  este ordinul de multiplicitate al lui  $\gamma = \alpha + i\beta$  ca rădăcină a ecuației caracteristice.

**Exercițiul 1.5.2** *Să se integreze ecuația diferențială*

$$y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12) \cos 3x + (11x^2 - 5x - 5) \sin 3x.$$

**Soluție.** Se determină întâi soluția generală a ecuației omogene asociată  $y'' + y' - 2y = 0$  și se găsește

$$y_o(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Deoarece  $K(3i) \neq 0$ , căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C) \cos 3x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 3x.$$

Din  $L(y_p(x)) \equiv (-3x^2 - 23x + 12) \cos 3x + (11x^2 - 5x - 5) \sin 3x$ , deducem

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = -1, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Deci  $y_p(x) = (x - 1) \cos 3x - x^2 \sin 3x$ , iar soluția generală a ecuației diferențiale neomogenă dată în enunț este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (x - 1) \cos 3x - x^2 \sin 3x$$

și are această expresie pentru că este suma lui  $y_o$  cu  $y_p$ . ■

**Exercițiul 1.5.3** Să se determine acea soluție a ecuației diferențiale

$$y'' - 2y' + 2y = e^x(2 \cos x - 4x \sin x)$$

care satisface condițiile inițiale  $y(0) = 0$  și  $y'(0) = 1$ .

**Soluție.** Ecuația caracteristică a ecuației omogene asociate are rădăcinile complex conjugate  $r_1 = 1 + i$  și  $r_2 = 1 - i$ . Prin urmare, soluția generală a ecuației omogene asociate  $y'' - 2y' + 2y = 0$  va fi

$$y_o = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x.$$

Având în vedere că  $L(1 + i) = 0$ , vom determina o soluție particulară a ecuației neomogene date de forma

$$y_p(x) = x[(Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x]e^x.$$

Înlocuind pe  $y_p(x)$ ,  $y'_p(x)$  și  $y''_p(x)$  în ecuația  $L(y_p) = e^x(2 \cos x - 4x \sin x)$  și identificând mai întâi factorii lui  $\cos x$  și  $\sin x$  din cei doi membri și apoi polinoamele factori, se obține un sistem pentru determinarea coeficienților  $A, B, C, D$ . Se găsește:

$$A = 1; \quad B = 0; \quad C = 0; \quad D = 0,$$

așa că  $y_p(x) = x^2 \cos x$ , iar soluția generală a ecuației date va fi

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x + x^2 \cos x$$

și este astfel pentru că este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară. ■

**Exercițiul 1.5.4** Să se determine soluția generală a fiecărei ecuații de mai jos și, acolo unde sunt indicate condiții inițiale, să se rezolve problema lui Cauchy corespunzătoare:

1.  $y'' - 4y' + 3y = e^{5x};$   $y(0) = 3, \quad y'(0) = 9;$
2.  $y'' - 8y' + 16y = e^{4x};$   $y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
3.  $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x};$   $y(0) = -1, \quad y'(0) = -3;$
4.  $y'' + 6y' + 8y = 2 \sin x + 3 \cos x;$
5.  $x'' - 3x' + 2x = (3t - 2) \cdot e^t,$
6.  $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = x^3.$

**Soluție.** Determinăm mai întâi câte un sistem fundamental de soluții pentru fiecare din ecuațiile diferențiale omogene asociate

$$1. \quad y'' - 4y' + 3y = 0; \quad 2. \quad y'' - 8y' + 16y = 0;$$

$$3. \quad y'' - 9y' + 20y = 0; \quad 4. \quad y'' + 6y' + 8y = 0;$$

$$5. \quad x'' - 3x' + 2x = 0; \quad 6. \quad y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0.$$

Ecuația caracteristică a fiecărei din aceste ecuații diferențiale, rădăcinile caracteristice ale sale și soluția generală corespunzătoare sunt:

$$1. \quad r^2 - 4r + 3 = 0; \quad r_1 = 1, r_2 = 3; \quad y_o = C_1 e^x + C_2 e^{3x};$$

$$2. \quad r^2 - 8r + 16 = 0; \quad r_1 = 4, r_2 = 4; \quad y_o = (C_1 + C_2 x) e^{4x};$$

$$3. \quad r^2 - 9r + 20 = 0; \quad r_1 = 4, r_2 = 5; \quad y_o = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x};$$

$$4. \quad r^2 + 6r + 8 = 0; \quad r_1 = -2, r_2 = -4; \quad y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x};$$

$$5. \quad r^2 - 3r + 2 = 0; \quad r_1 = 1, r_2 = 2; \quad x_o = C_1 e^t + C_2 e^{2t};$$

$$6. \quad r^4 - 2r^3 + r^2 = 0; \quad r_1 = 0, r_2 = 1; \quad y_o = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x.$$

Pentru fiecare din ecuațiile neomogene date în enunț, determinăm o soluție particulară  $y_p(x)$  de forma membrului drept, și anume

$$1. \quad y_p(x) = A e^{5x};$$

$$2. \quad y_p(x) = A x^2 e^{4x};$$

$$3. \quad y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C) e^{4x}; \quad 4. \quad y_p(x) = A \sin x + B \cos x;$$

$$5. \quad x_p(t) = t(At + B) e^t;$$

$$6. \quad y_p = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

Impunând acestor funcții să verifice ecuațiile diferențiale inițiale corespunzătoare, se determină constantele care intervin după cum urmează:

$$1. \quad A = \frac{1}{8}; \quad 2. \quad A = \frac{1}{2}; \quad 3. \quad A = -\frac{1}{3}, B = -1, C = -2; \quad 4. \quad A = \frac{32}{85}, B = \frac{9}{85};$$

$$5. \quad A = -\frac{3}{2}, B = -1; \quad 6. \quad A = \frac{1}{20}, B = \frac{1}{2}, C = 3, D = 12.$$

Se știe că soluția generală a unei ecuații diferențiale neomogene este suma dintre soluția generală a ecuației omogene asociate și o soluție particulară a ecuației neomogene.

Folosind acest rezultat, din cele deduse mai sus, rezultă corespunzător soluțiile:

1.  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x};$
2.  $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x};$
3.  $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{3} x(x^2 + 3x + 6) e^{4x};$
4.  $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{32}{85} \sin x + \frac{9}{85} \cos x;$
5.  $x(t) = x_0(t) + x_p(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} t(3t + 2) e^t;$
6.  $y(x) = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2.$

Pentru a rezolva problema lui Cauchy a fiecăreia din primele trei ecuații diferențiale, determinăm constantele  $C_1$  și  $C_2$  impunând condițiile inițiale corespunzătoare.

Soluțiile acestor probleme sunt:

1.  $y(x) = \frac{1}{8} e^x + \frac{11}{4} e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x};$
2.  $y(x) = \frac{1}{2} x(x + 2) e^{4x};$
3.  $y(x) = -4e^{4x} + 3e^{5x} - \frac{1}{3} x(x^2 + 3x + 6) e^{4x}.$

Pentru a rezolva o problemă de tip Cauchy pentru ultima ecuație diferențială trebuie specificate patru condiții inițiale.

Presupunând că  $x_0 = 0$  și

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 27, \quad y'''(0) = 22,$$

găsim pentru constante valorile  $C_1 = C_2 = 0$ ,  $C_3 = 1$ ,  $C_4 = 1$ .

Soluția problemei lui Cauchy corespunzătoare datelor inițiale specificate este  $y(x) = (x + 1)e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2$ . ■

## Capitolul 2

# Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi

### 2.1 Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală

Forma generală a unui sistem de  $n$  ecuații diferențiale ordinare, de ordinul întâi, sub formă normală este

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots & \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.1)$$

Necunoscutele sistemului (2.1) sunt funcțiile reale  $y_1, y_2, \dots, y_n$  care depind de variabila reală  $x$  și sunt definite pe un intervalul real închis  $I$ . Funcțiile date  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , sunt continue împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întâi în domeniul închis  $I \times D$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Dacă se introduc funcțiile vectoriale

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \mathbf{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n'),$$

atunci sistemul (2.1) se scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}).$$



### 2.1.1 Legătura cu ecuațiile diferențiale de ordinul $n$

**Teorema 2.1.1** *Un sistem de forma (2.1) este echivalent cu o ecuație diferențială ordinară de ordinul  $n$  sub formă normală.*

**Demonstrație.** Fie dată o ecuație diferențială ordinară de ordinul  $n$  sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.2)$$

Dacă introducem funcțiile necunoscute

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)} \quad (2.3)$$

și ținem cont de ecuația (2.2), obținem sistemul de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \dots, \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.4)$$

Din modul cum a fost obținut sistemul (2.4) se vede că dacă  $y$  este o soluție a ecuației (2.2), atunci  $y_1, y_2, \dots, y_n$  este o soluție a sistemului (2.4) și reciproc, dacă  $y_1, y_2, \dots, y_n$  este o soluție a sistemului (2.4), iar funcțiile  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt cele din (2.3), atunci  $y_1 = y$  este o soluție a ecuației (2.2).

Reciproc, să arătăm cum studiul unui sistem de ecuații diferențiale de forma (2.1) se reduce la studiul unei ecuații diferențiale de forma (2.2). Pentru simplificarea calculelor vom considera cazul  $n = 3$ . Fie deci sistemul diferențial

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y'_3 = f_3(x, y_1, y_2, y_3). \end{cases} \quad (2.5)$$

Derivând prima ecuație din (2.5) în raport cu  $x$ , obținem

$$y''_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y'_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y'_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot y'_3. \quad (2.6)$$

Înlocuind în (2.6) pe  $y'_1, y'_2, y'_3$  cu expresiile lor (2.5), găsim

$$y''_1 = F_2(x, y_1, y_2, y_3), \quad (2.7)$$

unde

$$F_2(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot f_3.$$

Dacă derivăm acum ecuația (2.7) în raport cu  $x$  și ținem cont de (2.5), obținem

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3), \quad (2.8)$$

$$\text{unde } F_3(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \cdot f_3.$$

Din prima ecuație a sistemului (2.5) și din ecuația (2.7) se pot afla, în general,  $y_2$  și  $y_3$  funcție de  $x$ ,  $y_1$ ,  $y_1'$  și  $y_1''$ , care înlocuite în (2.8), conduce la ecuația diferențială de ordinul trei sub formă normală

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

ceea ce trebuia de demonstrat. ■

**Exercițiul 2.1.1** *Să se afle soluția generală a sistemului*

$$\begin{cases} y' &= z, \\ z' &= -y. \end{cases}$$

**Soluție.** Dacă derivăm prima ecuație, obținem  $y'' = z'$ . Folosind a doua ecuație, găsim  $y'' + y = 0$ . Această ecuație este o ecuație diferențială liniară de ordinul al doilea cu coeficienți constanți omogenă, care are ecuația caracteristică  $r^2 + 1 = 0$  cu rădăcinile  $r_{1,2} = \pm i$ .

Ca atare, un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială  $y'' + y = 0$  este format din soluțiile  $y_1 = \cos x$  și  $y_2 = \sin x$ .

Soluția generală a ecuației diferențiale  $y'' + y = 0$  este o combinație liniară de cele două soluții fundamentale

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Din prima ecuație a sistemului găsim și expresia lui  $z$ ,

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

și astfel am obținut soluția generală a sistemului dat. ■

**Exercițiul 2.1.2** *Să se reducă sistemul*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = x \end{cases} \quad (2.9)$$

*la o ecuație de ordin superior și să se găsească apoi soluția sa generală.*

**Soluție.** Procedând ca în reciproca Teoremei 2.1.1 se ajunge la ecuația diferențială liniară de ordinul trei cu coeficienți constanți, omogenă

$$x''' - x = 0 \quad (2.10)$$

ce are ecuația caracteristică  $r^3 - 1 = 0$  și rădăcinile caracteristice

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aceste rădăcini caracteristice le corespund soluțiile fundamentale

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{t\sqrt{3}}{2}, \quad x_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2}.$$

Astfel, soluția generală a ecuației (2.10) este

$$x = C_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left( C_2 \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right). \quad (2.11)$$

Folosind sistemul, constatăm că necunoscuta  $y$  se obține derivând pe  $x$ , iar funcția  $z$  se obține derivându-l pe  $y$ . Se găsește

$$\begin{cases} y = C_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[ (C_2 - C_3 \sqrt{3}) \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_2 \sqrt{3}) \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right], \\ z = C_1 e^t - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left[ (C_2 + C_3 \sqrt{3}) \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 - C_2 \sqrt{3}) \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right]. \end{cases} \quad (2.12)$$

Soluția generală a sistemului (2.9) este dată de (2.11) și (2.12). ■

**Exercițiul 2.1.3** *Folosind metoda eliminării, să se determine ecuația diferențială liniară de ordinul trei cu care este echivalent sistemul de ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul întâi cu coeficienți constanți de mai jos și, folosind rezultatul stabilit, să se integreze sistemul*

$$\begin{cases} y'_1 + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 = 0, \\ y'_2 - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 = 0, \\ y'_3 - y_1 - 4y_2 - y_3 = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Soluție.** Derivăm prima egalitate și în rezultatul obținut

$$y_1'' = -9y_1' - 12y_2' - 5y_3'$$

înlocuim pe  $y_1'$ ,  $y_2'$  și  $y_3'$  cu valorile date în ecuațiile sistemului. Găsim

$$y_1'' = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3. \quad (2.14)$$

Procedând similar cu egalitatea (2.14), deducem

$$y_1''' = -60y_1 - 80y_2 - 28y_3. \quad (2.15)$$

Considerăm sistemul format din prima ecuație a sistemului inițial (2.13) și ecuația (2.14)

$$\begin{cases} 12y_2 + 5y_3 = -9y_1 - y_1', \\ 16y_2 + 4y_3 = -16y_1 + y_1'', \end{cases} \quad (2.16)$$

în care necunoscutele sunt  $y_2$  și  $y_3$ .

Rezolvând sistemul algebric (2.16), găsim

$$\begin{cases} y_2 = -\frac{11}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_1' + \frac{5}{32}y_1'', \\ y_3 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_1' - \frac{3}{8}y_1''. \end{cases} \quad (2.17)$$

Valorile lui  $y_2$  și  $y_3$  determinate în (2.17) le înlocuim în ecuația (2.15) și astfel găsim ecuația diferențială liniară de ordin trei omogenă, cu coeficienți constanți

$$y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0, \quad (2.18)$$

a cărei funcție necunoscută este  $y_1$ .

Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (2.18) este

$$r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0,$$

rădăcinile sale fiind  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = r_3 = -2$ . Rădăcinii caracteristice simple  $r_1 = 2$  îi corespunde soluția  $y_1^{(1)}(x) = e^{2x}$ , iar celei duble îi corespund două soluții, și anume

$$y_1^{(2)} = e^{-2x}, \quad y_1^{(3)} = x e^{-2x}.$$

Funcțiile astfel determinate formează un sistem fundamental de soluții al ecuației diferențiale (2.18), iar soluția sa generală este

$$y_1(x) = C_1 y_1^{(1)}(x) + C_2 y_1^{(2)}(x) + C_3 y_1^{(3)}(x),$$

unde  $C_1, C_2$  și  $C_3$  sunt constante reale arbitrare.

Prin urmare, expresia lui  $y_1$  este

$$y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) e^{-2x}. \quad (2.19)$$

Pentru determinarea funcțiilor necunoscute  $y_2$  și  $y_3$  folosim expresiile (2.17), unde înlocuim pe  $y_1, y_1'$  și  $y_1''$  așa cum rezultă din (2.19). Găsim

$$\begin{cases} y_2 &= -\frac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \frac{1}{2}C_3 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x) e^{-2x}. \end{cases}$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului (2.13) este

$$\begin{cases} y_1 &= C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \frac{1}{2}C_3 + C_3 x) e^{-2x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x) e^{-2x}. \end{cases}$$

■

**Exercițiul 2.1.4** *Să se integreze sistemul diferențial liniar de ordinul întâi, omogen și cu coeficienți constanți*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_2' &= -y_1 - 2y_3, \\ y_3' &= y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases} \quad (2.20)$$

**Soluție.** Aplicând demonstrația reciprocei Teoremei 2.1.1, suntem conduși la ecuația

$$y_1'' = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3. \quad (2.21)$$

Derivând această egalitate și înlocuind derivatele din membrul al doilea, obținem

$$y_1''' = 12y_1 + 11y_2 + 14y_3. \quad (2.22)$$

Cu prima ecuație a sistemului diferențial (2.20) și ecuația (2.21) alcătuim sistemul

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 &= y_1' - 2y_1, \\ 4y_2 + 6y_3 &= y_1'' - 5y_1, \end{cases}$$

din care se determină funcțiile necunoscute  $y_2$  și  $y_3$  în funcție de  $y_1$  și derivatele  $y_1', y_1''$

$$\begin{cases} y_2 &= y_1'' - 3y_1' + y_1, \\ y_3 &= -\frac{1}{2}y_1'' + 2y_1' - \frac{3}{2}y_1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Introducerea expresiilor lui  $y_2$  și  $y_3$  din (2.23) în egalitatea (2.22) conduce la ecuația diferențială liniară de ordinul al treilea, omogenă și cu coeficienți constanți

$$y_1''' - 4y_1'' + 5y_1' - 2y_1 = 0, \quad (2.24)$$

a cărei ecuație caracteristică,

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0,$$

are rădăcina dublă  $r_1 = r_2 = 1$  și rădăcina simplă  $r_3 = 2$ . Acestor rădăcini caracteristice le corespund sistemul fundamental de soluții:

$$y_1^{(1)} = e^x; \quad y_1^{(2)} = x e^x; \quad y_1^{(3)} = e^{2x}. \quad (2.25)$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (2.24) este combinația liniară de soluțiile sistemului fundamental de soluții (2.25)

$$y_1 = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3 e^{2x}. \quad (2.26)$$

Celelalte două necunoscute ale sistemului (2.20) se determină din (2.23)

$$\begin{cases} y_2 &= (-C_1 - C_2 - C_2 x)e^x - C_3 e^{2x}, \\ y_3 &= C_2 e^x + \frac{1}{2}C_3 e^{2x}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Prin urmare, soluția generală a sistemului (2.20) este reprezentată de funcțiile date în (2.26) și (2.27). ■

**Observația 2.1.1** *Rezultatele stabilite pot fi prelucrate într-un alt mod din care rezultă o nouă metodă de rezolvare a sistemelor diferențiale de tipul (2.20) și anume metoda valorilor și vectorilor proprii.*

### 2.1.2 Integrale prime. Soluție generală

În ipotezele menționate pentru funcțiile  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , se poate demonstra că există o soluție unică a sistemului (2.1) care, pentru  $x = x_0$  ia valorile prescrise

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.28)$$

unde  $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$  este un punct arbitrar din interiorul mulțimi  $I \times D$ .

Fie această soluție

$$\begin{cases} y_1 &= \varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ y_2 &= \varphi_2(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}), \\ \dots, \\ y_n &= \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}). \end{cases} \quad (2.29)$$

Această formă a soluției pune în evidență dependența ei de *datele inițiale*  $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ .

Geometric, (2.29) reprezintă ecuațiile parametrice ale unei curbe  $\Gamma$  în spațiul  $n$  dimensional  $\mathbb{R}^n$ , care trece prin punctul  $M_0(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ . Curba  $\Gamma$  se numește *curbă integrală* sau *traietorie* a sistemului (2.1). Punctul  $M_0$  se numește *punct inițial*.

Fie acum un punct oarecare  $M(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Gamma$ , diferit de  $M_0$ , corespunzător valorii  $x \in (a, b)$ . Valorile  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  și  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sunt legate prin relațiile (2.29).

Dacă schimbăm rolurile punctelor  $M_0$  și  $M$ , deci  $M$  devine punct inițial, atunci, în baza unicității soluției, curba integrală ce trece prin  $M$  va trece și prin  $M_0$  și avem

$$\begin{cases} y_1^{(0)} &= \varphi_1(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2^{(0)} &= \varphi_2(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots, \\ y_n^{(0)} &= \varphi_n(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (2.30)$$

Relațiile (2.30) arată că sistemul (2.29) s-a putut rezolva unic în raport cu valorile inițiale  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ , iar funcțiile din membrul drept admit derivate parțiale continue în raport cu  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ .

Cum datele inițiale se pot alege arbitrar în interiorul lui  $D$  și notându-le în (2.30) cu  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (constante arbitrare), obținem ansamblul de relații

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_2, \\ \dots, \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = C_n, \end{cases} \quad (2.31)$$

unde  $\psi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = \varphi_i(x_0; x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  și  $x_0$  dat.

Dar, relațiile (2.31) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu variabilele  $y_1, y_2, \dots, y_n$  și deci

$$\begin{cases} y_1 = \bar{\varphi}_1(x; C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \bar{\varphi}_2(x; C_1, C_2, \dots, C_n), \\ \dots, \\ y_n = \bar{\varphi}_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n). \end{cases} \quad (2.32)$$

Relațiile (2.31) reprezintă *soluția generală sub formă implicită* a sistemului (2.1). În loc de soluție generală se utilizează și termenul de *ansamblu de integrale prime* sau *integrală generală* a sistemului. Oricare din ecuațiile (2.31) se numește *integrală primă* a sistemului (2.1).

Soluția generală a sistemului (2.1), sub formă explicită, este dată de relațiile (2.32).

Din modul cum au fost deduse relațiile (2.31), constatăm că o funcție  $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  este integrală primă numai dacă  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  verifică sistemul (2.1).

Astfel, putem da două definiții echivalente pentru integrala primă a unui sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi.

**Definiția 2.1.1** *Se numește integrală primă a sistemului de ecuații diferențiale (2.1), orice relație obținută rezolvând în raport cu constantele arbitrare soluția lui generală (2.32).*

Așadar, oricare din relațiile (2.31) este o integrală primă a sistemului (2.1).

În baza existenței și unicității unei soluții a sistemului (2.1) care trece printr-un punct dat din interiorul mulțimi  $I \times D$ , rezolvarea în raport cu constantele arbitrare a relațiilor (2.32) este întotdeauna posibilă.

Definiția de mai sus poate fi dată numai după ce se cunoaște soluția generală a sistemului.



**Definiția 2.1.2** Se spune că funcția  $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}$  este o **integrală primă** a sistemului (2.1) pe o submulțime deschisă  $\Omega$  a mulțimii  $[a, b] \times D$ , dacă  $\psi$  este de clasă  $C^1(\Omega)$ , nu este identic constantă dar

$$\psi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \equiv \text{constant},$$

de-a lungul oricărei traiectorii  $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x)$  a sistemului (2.1).

**Observația 2.1.2** Cu Definiția 2.1.2 putem spune că un sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi admite o infinitate de integrale prime deoarece funcția

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, \psi_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)],$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de integralele prime  $\psi_i$  este la rândul ei o integrală primă a sistemului (2.1).

**Teorema 2.1.2** Rezolvarea sistemului (2.1) este echivalentă cu obținerea a  $n$  integrale prime independente.

**Demonstrație.** Fie  $n$  integrale prime (2.31) independente funcțional, deci pentru care determinantul funcțional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0.$$

Aplicând teorema de existență și unicitate a sistemelor de funcții definite implicit, din (2.31) deducem relațiile (2.32) care constituie soluția generală a sistemului. ■

**Observația 2.1.3** Cunoașterea unei singure integrale prime a sistemului (2.1) reduce rezolvarea sistemului la  $n-1$  ecuații cu  $n-1$  funcții necunoscute.

Într-adevăr, din  $\psi_1(x; y_1, y_2, \dots, y_n) = C$  se poate exprima una din funcțiile necunoscute, de exemplu  $y_n$ , în funcție de  $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  și  $C$

$$y_n = (x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, C).$$

Înlocuindu-l în primele  $n-1$  ecuații ale sistemului (2.1) obținem un sistem de  $n-1$  ecuații diferențiale cu  $n-1$  funcții necunoscute. ■

**Observația 2.1.4** *Sistemul (2.1) este echivalent cu sistemul*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n}. \quad (2.33)$$

Acest sistem este echivalent la rândul-i cu cel obținut prin înmulțirea rapoartelor cu un același factor, care poate fi funcție de  $n + 1$  variabile, și anume  $x, y_1, y_2, \dots, y_n$ .

În cele ce urmează considerăm că numărul variabilelor este  $n$  și că sunt notate cu  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , iar una dintre ele este dependentă de celelalte  $n - 1$ , ceea ce înseamnă că putem scrie sistemul de ecuații diferențiale în forma

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \quad (2.34)$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , care se numește *forma simetrică* a sistemului de  $n - 1$  ecuații diferențiale de ordinul întâi cu  $n - 1$  necunoscute.

## 2.2 Sisteme diferențiale sub formă simetrică

Să considerăm sistemul simetric (2.34) în care funcțiile  $X_i$  sunt continue și au derivate parțiale continue în raport cu toate variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Conform paragrafului precedent, soluția generală a sistemului simetric (2.34) este ansamblul

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_2, \\ \dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_{n-1}, \end{cases} \quad (2.35)$$

format din  $n - 1$  integrale prime oarecare independente funcțional, în sensul că rangul matricei jacobiene al funcțiilor  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  este egal cu  $n - 1$  în interiorul mulțimii de existență a funcțiilor  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Dacă dorim să trecem un sistem de la forma simetrică (2.34) la forma normală, este suficient să alegem una din variabile, de exemplu  $x_n$ , ca vari-

abilă independentă. În acest fel, din (2.34) avem

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \\ \dots, \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \end{cases} \quad (2.36)$$

**Observația 2.2.1** Pentru valorile inițiale  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ , valoarea funcției  $X_n$  nu trebuie să se anuleze. Dacă acest lucru nu este posibil, alegem altă variabilă independentă.

**Teorema 2.2.1** *Relația*

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (2.37)$$

este o integrală primă a sistemului simetric (2.34) dacă și numai dacă, de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (2.36), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \quad (2.38)$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Demonstrație.** Dacă funcția  $\psi$  din (2.37) este o integrală primă a sistemului (2.36) atunci, de-a lungul unei curbe integrale a sistemului (2.36),  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  are o valoare constantă, deci diferențiala ei totală, de-a lungul unei curbe integrale este nulă și deci

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0. \quad (2.39)$$

Deoarece de-a lungul unei curbe integrale diferențialele  $dx_i$  sunt proporționale cu valorile funcțiilor  $X_i$  (vezi (2.34)), avem (2.38).

Reciproc, din (2.38) rezultă (2.39) și deci  $d\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  de-a lungul unei curbe integrale, ceea ce este echivalent cu  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \text{const.}$  pentru orice soluție a sistemului (2.36).

Definiția 2.1.2 spune că  $\psi$  este o integrală primă a sistemului (2.36) sau a sistemului simetric (2.34). ■

**Observația 2.2.2** *Singurele funcții reale de  $n$  variabile reale care verifică relația (2.38) sunt integralele prime ale sistemului (2.34).*

Din punct de vedere geometric, soluția generală (2.35) reprezintă o familie de curbe obținută prin intersecția suprafețelor  $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ . Această familie de curbe este inclusă în intersecția domeniilor de definiție ale funcțiilor  $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  și depinde de  $n-1$  parametri  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ .

Aducerea unui sistem de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi la forma simetrică este indicată pentru aflarea integralelor prime și, în consecință, pentru aflarea soluției sale generale.

**Exercițiul 2.2.1** *Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale sub formă normală*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

**Soluție.** Forma simetrică a acestui sistem este

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Căutăm două combinații integrabile care să poată furniza cele două integrale prime independente.

O integrală primă se obține din ultimele două rapoarte scrise în forma  $ydy - zdz = 0$  care implică  $d(y^2 - z^2) = 0$  și deci  $y^2 - z^2 = C_1$  este prima integrală primă (o familie uniparametrică de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa  $Ox$ ).

Cea de a doua integrală primă se va obține după ce aplicăm o proprietate a șirului de rapoarte egale. Astfel, avem

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dz - dy}{y - z}.$$

După simplificarea prin  $y - z$  se obține

$$dx + (y - z)d(y - z) = 0,$$

care conduce la cea de a doua integrală primă  $2x + (y - z)^2 = C_2$  (familie uniparametrică de quadrice).

Soluția generală a sistemului, sub formă implicită, este dată de

$$\begin{cases} y^2 - z^2 &= C_1, \\ 2x + (y - z)^2 &= C_2 \end{cases}$$

și reprezintă o familie dublu parametrică de curbe în spațiu. ■

**Exercițiul 2.2.2** Să se determine soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{2y(2a - x)} = \frac{dy}{x^2 + z^2 - y^2 - 4ax} = \frac{dz}{-2yz}.$$

**Soluție.** Egalitatea rapoartelor extreme ne conduce la combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x - 2a} = \frac{dz}{z},$$

care dă integrala primă

$$\frac{x - 2a}{z} = C_1.$$

Dacă scriem această egalitate în forma  $x - C_1 z - 2a = 0$ , constatăm că integrala primă reprezintă o familie de plane paralele cu axa  $Oy$ .

O altă combinație integrabilă este

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{-y(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{-2yz} \implies \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z},$$

din care se obține cea de a doua integrală primă

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2.$$

Dacă scriem rezultatul găsit în forma  $x^2 + y^2 + z^2 - C_2 z = 0$ , constatăm că cea de a doua integrală primă reprezintă o familie de sfere cu centrele pe axa  $Oz$ , tangente în origine planului  $xOy$ .

Soluția generală a sistemului simetric este ansamblul celor două integrale prime

$$\begin{cases} \frac{x - 2a}{z} &= C_1, \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} &= C_2. \end{cases}$$

Așadar, curbele integrale sunt o familie dublu parametrică de cercuri în spațiu. ■

**Exercițiul 2.2.3** Să se găsească soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

**Soluție.** Din primele două rapoarte se obține integrala primă

$$xy = C_1. \quad (2.40)$$

Vom căuta acum a doua combinație integrabilă. Efectuând raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor primelor două rapoarte, vom obține un raport egal cu al treilea

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{-dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

După simplificarea cu  $x-y$ , se obține

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{-dz}{2x+2y+z}.$$

Efectuând diferența numărătorilor pe diferența numitorilor, obținem un raport egal cu primul

$$\frac{dx+dy}{x+y} = -\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$$

din care deducem  $\frac{dx+dy}{x+y} + \frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = 0$ . Integrând, obținem

$$(x+y)(x+y+z) = C_2. \quad (2.41)$$

Soluția generală a sistemului este ansamblul integralelor prime (2.40) și (2.41). ■

## 2.3 Sisteme de ecuații diferențiale liniare

În acest paragraf vom determina soluțiile sistemelor de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi. Forma generală a unui astfel de sistem este

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n &= f_1(x), \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n &= f_2(x), \\ \cdots, \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n &= f_n(x). \end{cases} \quad (2.42)$$

Presupunem că funcțiile  $a_{ij}$  și  $f_i$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ , sunt continue pe intervalul  $[a, b]$ .

Dacă toți  $f_i(x) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , spunem că sistemul este *omogen*. În caz contrar sistemul este *neomogen*.

Sistemul (2.42) se poate scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \quad (2.43)$$

unde  $\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este o funcția vectorială necunoscută de variabilă reală, derivabilă, care în baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1),$$

are coordonatele  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)^n$ ,  $A(x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  este o matrice cu elementele  $a_{ij}(x)$ ,  $Y$  este matricea cu o singură coloană și elemente coordonatele vectorului  $\mathbf{y}$ , adică  $\mathbf{y} = \mathbf{e}Y$ , iar  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este funcție vectorială de o variabilă reală, cunoscută.

**Definiția 2.3.1** Fie  $q$  un număr natural. Spunem că funcția vectorială de variabilă reală  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  este de clasă  $C^q([a, b])$  dacă funcțiile coordonate  $g_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , sunt continue și au derivate continue până la ordinul  $q$  inclusiv.

Mulțimea  $C^q([a, b])$  este spațiu liniar real infinit dimensional. Pentru  $C^{(0)}([a, b])$  vom folosi notația  $C([a, b])$ .

**Definiția 2.3.2** Se numește **soluție** a sistemului (2.43) funcția vectorială de variabilă reală  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de clasă  $C^1([a, b])$ , care satisface egalitatea

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) + \mathbf{e}(A(x)\Phi(x)) = \mathbf{f}(x), \quad (\forall) x \in [a, b],$$

unde  $\Phi$  este matricea coloană cu elementele  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

### 2.3.1 Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene

Fie sistemul (2.43) și să notăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y). \quad (2.44)$$

Atunci sistemul (2.43), în forma omogenă, se scrie

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad (2.45)$$

unde  $\mathbf{0}$  este funcția vectorială identic nulă  $\mathbf{0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3.1** *Aplicația vectorială  $\mathbf{L}$  este un operator liniar definit pe spațiul vectorial  $C^1([a, b])$  și cu valori în spațiul vectorial  $C([a, b])$ .*

**Demonstrație.** Prima parte a teoremei este evidentă dacă avem în vedere expresia (2.44) a operatorului  $\mathbf{L}$  și continuitatea funcțiilor  $a_{ij}$ .

Se vede apoi că operatorul  $\mathbf{L}$  are proprietatea

$$\mathbf{L}(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\mathbf{L}(\varphi) + \beta\mathbf{L}(\psi), \quad (2.46)$$

oricare ar fi numerele  $\alpha$  și  $\beta$ , reale sau complexe, și oricare ar fi funcțiile vectoriale de variabilă reală  $\varphi, \psi \in C^1([a, b])$ . ■

A integra sistemul liniar și omogen (2.43) de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi, cu coeficienți variabili, înseamnă a găsi toate soluțiile lui. Observăm că dacă  $\mathbf{y} \in C^1([a, b])$  este o soluție a sistemului (2.45), atunci imaginea lui  $\mathbf{y}$  prin operatorul  $\mathbf{L}$  este elementul nul din  $C([a, b])$ . Prin urmare, mulțimea soluțiilor sistemului (2.45) coincide cu nucleul operatorului liniar  $\mathbf{L}$ , deci cu  $\text{Ker } \mathbf{L}$ .

Operatorul  $\mathbf{L}$  fiind liniar, rezultă că  $\text{Ker } \mathbf{L}$  este un spațiu liniar, subspațiu liniar al spațiului liniar infinit dimensional  $C([a, b])$ .

**Observația 2.3.1** *Dacă coeficienții sistemului omogen (2.45) sunt funcții reale, iar funcția vectorială  $\varphi + i\psi$  este o soluție complexă a sistemului omogen (2.45), atunci funcțiile vectoriale de variabilă reală  $\varphi$  și  $\psi$  sunt soluții ale acestui sistem.*

Într-adevăr, din (2.46) rezultă

$$\mathbf{L}(\varphi + i\psi) = \mathbf{L}(\varphi) + i\mathbf{L}(\psi) = \mathbf{0},$$

deoarece  $\varphi + i\psi$  este o soluție a sistemului. Cum  $\mathbf{L}(\varphi)$  și  $\mathbf{L}(\psi)$  sunt funcții reale, deducem  $\mathbf{L}(\varphi) = \mathbf{0}$  și  $\mathbf{L}(\psi) = \mathbf{0}$ , adică funcțiile reale  $\varphi$  și  $\psi$  sunt soluții ale sistemului (2.45). ■

Să considerăm un punct oarecare  $x_0 \in [a, b]$  și  $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$  numere reale arbitrare.

*Problema lui Cauchy* pentru sistemul (2.45) constă în determinarea acelei soluții  $\mathbf{y}$  a sistemului care să verifice *condiția lui Cauchy (condiția inițială)*

$$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}, \quad (2.47)$$

unde  $\mathbf{y}^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ .

Teorema de existență și unicitate a soluției problemei lui Cauchy pentru sistemul (2.45) pune în evidență un element  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \text{Ker } \mathbf{L}$  care satisface condiția (2.47).



**Teorema 2.3.2** *Mulțimea  $\text{Ker } \mathbf{L}$  este un spațiu vectorial real de dimensiune  $n$ .*

**Demonstrație.** Să considerăm mulțimea de soluții ale sistemului (2.45)

$$\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}\} \quad (2.48)$$

care verifică următoarele condiții ale lui Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}(x_0) = (1, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{y}^{(2)}(x_0) = (1, 0, \dots, 0), \\ \dots, \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_0) = (1, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (2.49)$$

și să arătăm că elementele acestei mulțimi, ca elemente ale spațiului  $\text{Ker } \mathbf{L}$ , sunt liniar independente. Vom demonstra prin reducere la absurd.

Presupunem deci că soluțiile sunt liniar dependente. Atunci există constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , nu toate nule, astfel încât

$$C_1 \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2 \mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}, \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (2.50)$$

În particular, (2.50) are loc pentru  $x_0$  și atunci, din (2.49) și (2.50), avem

$$(C_1, C_2, \dots, C_n) = \mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$$

din care deducem că toate constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt egale cu zero, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, soluțiile (2.48) sunt *liniar independente*.

Să arătăm că soluțiile (2.48) constituie o bază în  $\text{Ker } \mathbf{L}$ .

Pentru aceasta trebuie demonstrat că orice  $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$  se scrie ca o combinație liniară de elementele din (2.48), deci că există constantele reale  $C_1, C_2, \dots, C_n$  astfel încât

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}^{(1)} + C_2 \mathbf{y}^{(2)} + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}, \quad (2.51)$$

sau

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2 \mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}(x), \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (2.52)$$

Scriind că (2.52) are loc și pentru  $x_0$  și folosind (2.49), găsim

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (C_1, C_2, \dots, C_n),$$

din care deducem că  $C_i$  din (2.51) sunt unic determinate și

$$C_1 = y_1(x_0), \quad C_2 = y_2(x_0), \quad \dots, \quad C_n = y_n(x_0).$$

Prin urmare, soluția considerată se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = y_1(x_0)\mathbf{y}^{(1)} + y_2(x_0)\mathbf{y}^{(2)} + \dots + y_n(x_0)\mathbf{y}^{(n)}.$$

Am dovedit astfel că orice  $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$  se exprimă unic ca o combinație liniară a vectorilor (2.48), liniar independenți în  $\text{Ker } \mathbf{L}$ , ceea ce arată că mulțimea (2.48) este o bază în  $\text{Ker } \mathbf{L}$ .

Prin urmare,  $\text{Ker } \mathbf{L}$  este spațiu vectorial real  $n$  dimensional. ■

**Definiția 2.3.3** Vom spune că  $n$  soluții  $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  ale sistemului (2.45) formează un **sistem fundamental de soluții** pe intervalul  $[a, b]$  dacă ele sunt liniar independente în spațiul liniar  $n$ -dimensional  $\text{Ker } \mathbf{L}$ .

Cum dimensiunea lui  $\text{Ker } \mathbf{L}$  este  $n$  rezultă că orice bază din  $\text{Ker } \mathbf{L}$  este un sistem fundamental de soluții a sistemului (2.45).

### 2.3.2 Matricea fundamentală a unui sistem omogen

**Definiția 2.3.4** Matricea pătratică  $\Gamma(x)$ , de ordinul  $n$ , ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor  $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$  care formează un sistem fundamental de soluții al sistemului liniar și omogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi, cu coeficienți variabili (2.45), se numește **matricea fundamentală** a sistemului.

**Teorema 2.3.3** Fie  $\Gamma(x)$  o matrice fundamentală a sistemului (2.45),  $\Gamma'(x)$  matricea formată din derivatele elementelor matricei  $\Gamma(x)$  și  $O$  matricea nulă pătratică de ordinul  $n$ . Atunci

$$\Gamma'(x) + A(x)\Gamma(x) = O, \quad (\forall) x \in [a, b]. \quad (2.53)$$

**Demonstrație.** Identitatea (2.53) este evidentă deoarece reprezintă scrierea matriceală a identităților  $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{(i)}) = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  care exprimă faptul că funcțiile vectoriale  $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  sunt soluții ale sistemului (2.45). ■

Matricea fundamentală a unui sistem omogen nu este unică.

Pentru aceasta să observăm că orice matrice  $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C$ , unde  $C$  este o matrice pătratică constantă de ordinul  $n$  neregulară, este tot o matrice fundamentală a sistemului (2.45).

Reciproc, orice matrice fundamentală  $\tilde{\Gamma}(x)$  a sistemului (2.45) se poate reprezenta sub forma

$$\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x) \cdot C, \quad x \in [a, b], \quad (2.54)$$

unde  $C$  este o matrice constantă de tip  $n \times n$  nesingulară. Această ultimă afirmație rezultă din

**Corolarul 2.3.1** *Dacă  $\Gamma(x)$  este o matrice fundamentală a sistemului de ecuații diferențiale (2.45), atunci orice soluție a acestuia se reprezintă sub forma*

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}(\Gamma(x)C), \quad x \in [a, b], \quad (2.55)$$

unde  $C$  este matricea coloană a coordonatelor unui vector constant din  $\mathbb{R}^n$ .

**Demonstrație.** Formula (2.55) rezultă din faptul că pe coloanele matricei  $\Gamma(x)$  sunt coordonatele vectorilor unei baze din spațiul soluțiilor sistemului (2.45). Astfel, (2.55) este exprimarea unui vector a unui spațiu liniar  $n$  dimensional într-o bază. ■

### 2.3.3 Determinantul lui Wronski

Ca și la studiul ecuațiilor diferențiale liniare, omogene de ordinul  $n$ , cu coeficienți constanți, se poate introduce și aici *determinantul lui Wronski* sau *wronskianul* asociat unui sistem fundamental de soluții, și anume

$$W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}] = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \quad (2.56)$$

Pentru valorile funcției introdusă în (2.56) se pot utiliza notațiile  $W(x)$  sau  $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}](x)$ .

**Observația 2.3.2** *Wronskianul  $W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}]$  asociat unui sistem fundamental de soluții  $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$  este determinantul matricei fundamentale  $\Gamma(x)$ .*

**Teorema 2.3.4** *Condiția necesară și suficientă ca soluțiile*

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)},$$

*ale sistemului (2.45), să formeze un sistem fundamental de soluții a acestuia este ca determinantul lui Wronski corespunzător să nu fie identic nul pe intervalul  $[a, b]$ .*

**Demonstrație.** Să arătăm mai întâi suficiența, adică din

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)} \in \text{Ker } \mathbf{L} \quad \text{și} \quad W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}] \Big|_{x=x_0} \neq 0$$

să rezulte că funcțiile

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)} \tag{2.57}$$

formează un sistem fundamental de soluții pentru sistemul (2.45).

Demonstrația se face prin reducere la absurd.

Presupunem că funcțiile  $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ , ca elemente ale lui  $\text{Ker } \mathbf{L}$ , sunt linear dependente. Există atunci  $n$  constante, nu toate nule, astfel încât pentru orice  $x \in [a, b]$  să avem

$$C_1 \mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2 \mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}. \tag{2.58}$$

Scriind (2.58) pe componente și luând  $x = x_0$ , deducem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = 0, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = 0, \\ \dots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Am obținut astfel un sistem linear și omogen de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute al cărui determinant este  $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)] \Big|_{x=x_0}$ , care prin ipoteză este diferit de zero, deci sistemul (2.59) are numai soluția banală

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \dots, \quad C_n = 0,$$

ceea ce contrazice presupunerea. Deci, soluțiile (2.57) sunt linear independente.

În baza Definiției 2.3.3 funcțiile (2.57) formează un sistem fundamental de soluții ale sistemului (2.45) pe intervalul  $[a, b]$ .

Să demonstrăm necesitatea. Dacă soluțiile  $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  sunt liniar independente atunci, măcar într-un punct  $x_0 \in [a, b]$ , determinantul lui Wronski asociat acestor soluții este diferit de zero.

Deoarece  $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$  formează o bază în  $\text{Ker } \mathbf{L}$ , orice  $\mathbf{y} \in \text{Ker } \mathbf{L}$  se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}^{(1)} + C_2 \mathbf{y}^{(2)} + \dots + C_n \mathbf{y}^{(n)}. \quad (2.60)$$

Considerând un  $x_0 \in [a, b]$ , notând  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$  și scriind (2.60) pe coordonate în  $x_0$ , obținem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = y_1^{(0)}, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = y_2^{(0)}, \\ \dots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = y_n^{(0)}. \end{cases} \quad (2.61)$$

Deoarece sistemul (2.61) are soluția unică  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , rezultă că determinantul sistemului,  $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)] \Big|_{x=x_0}$ , este nenul. ■

**Teorema 2.3.5 (Liouville)** *Dacă funcția*

$$W(x) = W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]$$

*este wronskianul unui sistem de  $n$  soluții ale sistemului (2.45), atunci are loc egalitatea*

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x \text{tr } A(t) dt}, \quad (\forall) x, x_0 \in [a, b], \quad (2.62)$$

unde  $\text{tr } A(t) = \sum_{i=1}^n a_{ii}(t)$  este urma matricei  $A$  a sistemului.

**Demonstrație.** Fără a restrânge generalitatea, presupunem că sistemul  $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$  este liniar independent (în caz contrar  $W(x) \equiv 0$  și (2.62) este banal satisfăcută).

Fie  $\Gamma(x)$  matricea fundamentală cu coloanele

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x).$$

Cu teorema creșterilor finite, avem

$$\Gamma(x + \varepsilon) = \Gamma(x) + \varepsilon \Gamma'(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a, b],$$

iar din ecuația (2.53) rezultă

$$\Gamma(x + \varepsilon) = \Gamma(x) - \varepsilon A(x)\Gamma(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a, b]. \quad (2.63)$$

Dacă în egalitatea (2.63) luăm determinantul ambelor membri, obținem:

$$W(x + \varepsilon) = \det(I_n - \varepsilon A(x) + o(\varepsilon)\Gamma^{-1}(x))W(x) = W(x) \left(1 - \varepsilon \operatorname{tr} A(x) + o(\varepsilon)\right),$$

unde  $\varepsilon$  este arbitrar și suficient de mic. Trecând la limită pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  rezultă

$$W'(x) = -\operatorname{tr} A(x) W(x), \quad x \in [a, b],$$

iar prin integrare se obține formula (2.62). ■

### 2.3.4 Soluția generală a sistemului omogen de ecuații diferențiale liniare

Să presupunem că avem un sistem fundamental de soluții

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

al sistemului (2.45). Atunci, orice altă soluție a sistemului se scrie în mod unic în forma (2.60), unde  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante arbitrare.

Putem afirma că (2.60) constituie *soluția generală* a sistemului (2.45), deoarece verifică sistemul, are în componența sa  $n$  constante arbitrare și oricărei probleme de tip Cauchy a sistemului i se pot preciza în mod unic sistemul de constante  $C_1, C_2, \dots, C_n$  astfel încât soluția determinată să satisfacă condiția inițială  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$ , cu  $\mathbf{y}^{(0)}$  vector arbitrar din  $\mathbb{R}^n$ .

Cum vectorul din membrul drept al relației (2.60) se poate scrie în forma  $\mathbf{e}(\Gamma(x)C)$ , unde  $C$  este matrice cu o singură coloană și cu  $n$  linii, rezultă că soluția generală a sistemului (2.45) poate fi scrisă și în forma (2.55).

**Observația 2.3.3** *Sistemul fundamental de soluții pentru (2.45) nu este unic.*

Într-adevăr, se știe că într-un spațiu liniar  $n$  dimensional există o infinitate de baze. Dacă mulțimea de funcții  $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$  este o bază

în  $\text{Ker } \mathbf{L}$  și  $\|C_i^j\| \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  este o matrice nesară, atunci sistemul de vectori

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(i)} = \sum_{j=1}^n C_j^i \mathbf{y}^{(j)}, \quad i \in \overline{1, n}, \quad (2.64)$$

formează de asemenea o bază în  $\text{Ker } \mathbf{L}$  și deci avem un alt sistem fundamental de soluții.

Matricea constantă  $C$  din (2.64) este matricea de trecere de la baza  $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$  la sistemul de vectori

$$\{\tilde{\mathbf{y}}^{(1)}(x), \tilde{\mathbf{y}}^{(2)}(x), \dots, \tilde{\mathbf{y}}^{(n)}(x)\}. \quad (2.65)$$

Dacă această matrice de trecere este și nesară, sistemul de vectori (2.65) este, de asemenea, sistem fundamental de soluții pentru sistemul (2.45). ■

## 2.4 Sisteme neomogene de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi

Să considerăm sistemul liniar și neomogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \quad (2.66)$$

în care matricea  $A(x) = \|a_{ij}(x)\| \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  a coeficienților sistemului are elemente funcții continue pe intervalul  $[a, b]$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in C([a, b])$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^1([a, b])$ , iar  $Y = \|y_i\|_{1 \times n}$  este matricea coloană cu  $n$  linii a necunoscutelor  $y_i \in C^1([a, b])$  ale sistemului.

Ne propunem să determinăm soluțiile sistemului (2.66) prin *metoda variației constantelor*. Vom cerceta dacă soluția generală a sistemului (2.66) se poate obține din soluția generală (2.60) a sistemului omogen asociat sistemului (2.66), înlocuind constantele  $C_1, C_2, \dots, C_n$  prin funcțiile convenabil alese  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ .

Dacă mulțimea  $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$  este un sistem fundamental de soluții a sistemului omogen asociat  $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , atunci vom determina funcțiile

$$C_1(x), \quad C_2(x), \quad \dots, \quad C_n(x),$$

continue și cu derivate continue pe  $[a, b]$ , astfel încât

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x)\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2(x)\mathbf{y}^{(2)}(x) + \dots + C_n(x)\mathbf{y}^{(n)}(x) \quad (2.67)$$

să fie soluție a sistemului neomogen (2.66). Impunând aceasta și ținând cont că  $\mathbf{y}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , sunt soluții ale sistemului omogen asociat, găsim sistemul

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) \mathbf{y}^{(i)}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.68)$$

care are forma matriceală

$$\Gamma(x) \cdot C'(x) = F(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2.69)$$

Dar (2.68) este un sistem de  $n$  ecuații cu  $n$  necunoscute  $C'_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Soluția acestui sistem se deduce din (2.69) prin înmulțirea la stânga cu inversa matricei  $\Gamma(x)$ . Se obține

$$C'(x) = \Gamma^{-1}(x) \cdot F(x). \quad (2.70)$$

Integrând ecuațiile diferențiale ordinare (2.70) se găsește

$$C(x) = K + \int_{x_0}^x \Gamma^{-1}(s) \cdot F(s) ds, \quad (2.71)$$

unde  $K \in \mathcal{M}_{1 \times n}$  are elemente constante arbitrare.

Înlocuind (2.71) în (2.67), obținem soluția generală a sistemului neomogen (2.66)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}\left(\Gamma(x)K + \int_{x_0}^x \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\right), \quad (2.72)$$

unde  $F$  este matricea coordonatelor vectorului  $\mathbf{f}$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^n$ .

Să mai observăm că (2.72) se scrie și în forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}\left(\Gamma(x)K\right) + \mathbf{e}\left(\int_{x_0}^x \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\right) = \mathbf{y}_o(x) + \mathbf{y}_p(x), \quad (2.73)$$

din care deducem că soluția generală a sistemului neomogen (2.66) este suma dintre soluția generală  $\mathbf{y}_o(x)$  a sistemului omogen asociat  $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$  și o soluție particulară  $\mathbf{y}_p(x)$  a sistemului neomogen.

O soluție particulară a sistemului neomogen (2.66) se obține prin metoda variației constantelor luând pentru  $K$  din (2.71) matricea coloană identic nulă.



## 2.5 Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Să studiem sistemele de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi, neomogene și omogene, în care coeficienții din (2.42) sunt constante reale notate cu  $-a_{ij}$ .

Forma generală a unui sistem neomogen este

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \cdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \quad (2.74)$$

în care  $f_1, f_2, \dots, f_n$  sunt funcții date, continue pe un compact  $[a, b]$ .

Dacă în (2.74) toate funcțiile  $f_i$  sunt identic nule, atunci sistemul corespunzător

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \quad (2.75)$$

este un sistem omogen de ecuații diferențiale de ordinul întâi cu coeficienți constanți. Deoarece coeficienții acestui sistem coincid cu cei ai sistemului (2.74), sistemul se numește în plus *asociatul* sistemului (2.74).

Forma matriceală a unui astfel de sistem omogen este

$$Y' = AY, \quad (2.76)$$

unde  $Y$  este matricea cu o singură coloană cu elementele coordonatele vectorului  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , iar  $A$  este matricea pătratică de ordinul  $n$  a cărei elemente sunt coeficienții sistemului.

Toate rezultatele stabilite mai sus pentru sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili, omogene și neomogene, sunt adevărate și pentru sistemele (2.74) și (2.75).

Vom determina soluția generală a sistemului omogen (2.75) folosind teoria valorilor și vectorilor proprii a unei matrice pătratice.

Pentru aceasta, căutăm soluții particulare ale sistemului (2.76) de forma

$$Y = \Gamma e^{rx}, \quad (2.77)$$

unde  $\Gamma$  este matricea coordonatelor vectorului nenul  $\gamma$ , deci  $\gamma = \mathbf{e}\Gamma$ , iar  $r$  este un număr real sau complex.

Vom determina  $\gamma$  și  $r$  din condiția ca  $\mathbf{y} = \mathbf{e}\Gamma e^{rx}$  să fie soluție a sistemului (2.75), a cărui formă vectorială este

$$\mathbf{y}' = \mathbf{e}(A\mathbf{y}). \quad (2.78)$$

Impunând condiția ca  $Y$  din (2.77) să verifice (2.76), găsim că  $\Gamma$  este soluția unui sistem liniar omogen a cărui formă matriceală este

$$(A - rE)\Gamma = O, \quad (2.79)$$

unde  $E$  este matricea unitate de ordinul  $n$ , iar  $O$  este matricea nulă.

Pentru ca sistemul algebric (2.79) să aibă soluții nebanale, determinantul acestuia trebuie să fie nul. Astfel, obținem ecuația algebrică de gradul  $n$  în necunoscuta  $r$

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0, \quad (2.80)$$

numită *ecuație caracteristică* a sistemului (2.75).

Ecuațiile (2.80) și (2.79) arată că  $\Gamma$  din (2.77) este matricea coloană a vectorului propriu  $\gamma$  a matricei  $A$ , corespunzător valorii proprii  $r$ .

Dacă ecuația caracteristică (2.80) are toate cele  $n$  rădăcini reale și distincte,  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , lor le corespund  $n$  vectori proprii  $\gamma_i$ , respectiv  $n$  soluții particulare ale sistemului neomogen (2.78)

$$\mathbf{y}_1(x) = \gamma_1 e^{r_1 x}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \gamma_2 e^{r_2 x}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_n(x) = \gamma_n e^{r_n x}. \quad (2.81)$$

Wronskianul soluțiilor (2.81) este produsul dintre  $e^{(a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})x}$  și determinantul Vandermonde construit cu numerele  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Deoarece rădăcinile caracteristice sunt distincte, rezultă că wronskianul soluțiilor menționate în (2.81) este diferit de zero, fapt ce atrage concluzia că funcțiile (2.81) constituie un sistem fundamental de soluții pentru sistemul de ecuații diferențiale (2.75).

În acest caz, soluția generală a sistemului (2.75) este combinația liniară

$$\mathbf{y} = C_1 \gamma_1 e^{r_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n \gamma_n e^{r_n x}, \quad (2.82)$$

în care  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sunt constante arbitrare. Forma acestei soluții generale este

$$Y = C_1 \Gamma_1 e^{r_1 x} + C_2 \Gamma_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n \Gamma_n e^{r_n x}. \quad (2.83)$$

**Teorema 2.5.1** *Dacă ecuația caracteristică are, de pildă, rădăcina  $r_1$  multiplă de ordinul  $k$ , atunci partea din soluția generală corespunzătoare ei are forma*

$$\begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \quad (2.84)$$

unde  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  sunt polinoame de grad cel mult  $k - 1$ , având coeficienții funcții liniare de  $k$  constante oarecare  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Polinoamele  $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  nu pot fi identic nule decât dacă toate constantele  $C_1, C_2, \dots, C_k$  sunt nule.

Cazul rădăcinilor complexe poate fi tratat în mod analog. Vor rezulta soluții complex conjugate în perechi. Din fiecare astfel de pereche se construiește alte două soluții reale luând semisuma acestora și semidiferența împărțită prin unitatea imaginară.

Pentru determinarea soluțiilor particulare ale sistemelor neomogene se poate folosi metoda variației constantelor a lui Lagrange.

În cazul în care  $f_i(x) = e^{\alpha x}(Q_i^1(x) \cos \beta x + Q_i^2(x) \sin \beta x)$ , soluții particulare se pot obține prin metoda coeficienților nedeterminați, fără cuadraturi. Mai precis, se caută soluții particulare de forma termenului liber, adică de forma

$$y_i(x) = x^s e^{\alpha x}(R_i^1(x) \cos \beta x + R_i^2(x) \sin \beta x), \quad i = \overline{1, n},$$

unde  $R_i^1$  și  $R_i^2$  sunt polinoame de aceleași grade cu respectiv polinoamele  $Q_i^1$  și  $Q_i^2$ , iar  $s$  este multiplicitatea lui  $r = \alpha + i\beta$  ca rădăcină a ecuației caracteristice.

Vom ilustra aceste afirmații prin exemple.

**Exemplul 2.5.1** *Să se determine soluția generală a sistemului diferențial*

omogen

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - 2y_2 + 3y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

**Soluție.** Sistemul de ecuații diferențiale dat este de ordinul întâi, omogen, cu coeficienți constanți și se poate scrie în forma matriceală

$$Y' = AY,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

este matricea sistemului, iar

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

este matricea funcțiilor necunoscute ale sistemului diferențial.

Pentru a determina soluția generală a sistemului, aplicăm teoria valorilor și vectorilor proprii prezentată mai sus.

Valorile proprii ale matricei  $A$  sunt rădăcinile ecuației caracteristice

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} 2-r & -2 & 3 \\ 1 & 1-r & 1 \\ 1 & 3 & -1-r \end{vmatrix} = 0,$$

adică a ecuației  $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$ . Rădăcinile acestei ecuații sunt  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = -2$ .

Deoarece valorile proprii sunt reale și distincte, vectorii proprii corespunzători sunt liniar independenți în  $\mathbb{R}^3$ .

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii  $r$  este o soluție nebanală a sistemului liniar și omogen

$$\begin{cases} (2-r)\gamma_1 & -2\gamma_2 & +3\gamma_3 & = 0, \\ \gamma_1 & +(1-r)\gamma_2 & +\gamma_3 & = 0, \\ \gamma_1 & +3\gamma_2 & +(-1-r)\gamma_3 & = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Cele trei sisteme corespunzătoare rădăcinilor caracteristice, obținute din (2.85) luând succesiv pentru  $r$  valorile  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 3$ ,  $r_3 = -2$ , sunt:

$$\begin{cases} \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 4\gamma_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Soluțiile nebanale ale acestor sisteme omogene

$$\gamma^{(1)} = (-1, 1, 1), \quad \gamma^{(2)} = (1, 1, 1), \quad \gamma^{(3)} = (11, 1, -14).$$

sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii menționate.

Corespunzător acestor vectori proprii avem următoarele soluții liniar independente ale sistemului

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x; \quad Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}; \quad Y^{(3)}(x) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

și prin urmare soluția generală a sistemului diferențial este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + C_3 Y^{(3)}(x),$$

unde  $C_1, C_2, C_3$  sunt constante arbitrare.

Egalând elementele corespunzătoare găsim soluția generală pe componente (coordonate)

$$\begin{cases} y_1(x) &= -C_1e^x + C_2e^x + 11C_3e^{-2x}, \\ y_2(x) &= C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}, \\ y_3(x) &= C_1e^x + C_2e^{3x} - 14C_3e^{-2x}. \end{cases} \quad (2.86)$$

Integrarea sistemului se poate efectua și prin metoda eliminării. Ecuația diferențială ordinară, de ordinul al treilea, cu coeficienți constanți, omogenă, în care funcția necunoscută este  $y_2$  are expresia

$$y_2''' - 2y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 0, \quad (2.87)$$

iar soluția sa generală este dată în  $(2.86)_2$ . Celelalte coordonate ale soluției generale  $\mathbf{y}$  se obțin din legăturile acestora cu funcția  $y_2$ . ■

**Exemplul 2.5.2** *Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale omogene cu coeficienți constanți*

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - y_2, \\ y_2' &= y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

**Soluție.** Matricea sistemului,  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , are ecuația caracteristică  $r^2 - 4r + 4 = 0$  cu rădăcina dublă  $r = 2$ .

Conform Teoremei 2.5.1, soluția generală a sistemului este de forma

$$\begin{cases} y_1 &= (A_1x + C_1)e^{2x}, \\ y_2' &= (A_2x + C_2)e^{2x}, \end{cases}$$

unde constantele  $A_1, A_2, C_1, C_2$  se determină din sistemul

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &= 0, \\ A_1 + C_1 + C_2 &= 0, \\ A_1 + A_2 &= 0, \\ A_2 + C_1 + C_2 &= 0, \end{cases}$$

din care se găsește

$$A_1 = C_1 + C_2, \quad A_2 = -C_1 - C_2.$$

Astfel, soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale este

$$\begin{cases} y_1 &= ((C_1 + C_2)x + C_1)e^{2x}, \\ y_2' &= -(C_1 + C_2)x + C_2)e^{2x}, \end{cases}$$

și ea poate fi scrisă matriceal în forma

$$Y = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x),$$

unde

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x \end{pmatrix} e^{2x}, \quad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

■

**Exemplul 2.5.3** *Determinați soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale omogene cu coeficienți constanți*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

**Soluție.** Sistemul se poate scrie matriceal în forma

$$Y' = AY,$$

unde  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  este matricea sistemului.

Conform Teoremei 2.5.1, contribuția rădăcinii triple  $r = 1$  la soluția generală a sistemului trebuie căutată în forma

$$Y = \begin{pmatrix} A_1 x^2 + B_1 x + C_1 \\ A_2 x^2 + B_2 x + C_2 \\ A_3 x^2 + B_3 x + C_3 \end{pmatrix} e^x.$$

Se deduce că coeficienții  $A_1$ ,  $A_2$  și  $A_3$  sunt nuli, iar

$$\begin{cases} B_1 &= C_1 - C_2 - C_3, \\ B_2 &= 2(C_1 - C_2 - C_3), \\ B_3 &= -C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}$$

Astfel,  $Y$  se scrie ca o combinație liniară de constantele  $C_1, C_2, C_3$

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ x+1 \end{pmatrix} e^x,$$

și deci am obținut chiar soluția generală a sistemului. ■

**Exemplul 2.5.4** Să se integreze sistemul  $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

**Soluție.** Se aplică metoda valorilor și vectorilor proprii.

Valorile proprii sunt numerele complex conjugate  $r_1 = 3 + i, r_2 = 3 - i$ .

După determinarea vectorilor proprii corespunzători se găsesc soluțiile complex conjugate

$$\tilde{Y}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+i)x}, \quad \tilde{Y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-i)x}.$$

Pornind de la acestea, determinăm alte două soluții liniar independente,

$$Y^{(1)}(x) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(x) + \tilde{Y}^{(2)}(x)}{2} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{3x},$$

$$Y^{(2)}(x) = \frac{\tilde{Y}^{(1)}(x) - \tilde{Y}^{(2)}(x)}{2i} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Așadar, soluția generală a sistemului, scrisă matriceal, este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x),$$

unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante reale arbitrare. ■

**Exemplul 2.5.5** Să se integreze sistemul  $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$

**Soluție.** Valorile proprii ale matricei sistemului sunt  $r_1 = r_2 = 1$ .

Sistemul de ecuații care dă coordonatele vectorilor proprii se reduce la o singură ecuație  $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ . Toți vectorii proprii sunt de forma  $\gamma = \lambda(1, 1)$ , unde  $\lambda \neq 0$  și deci nu există doi vectori proprii liniar independenți.



Se caută atunci soluția generală a sistemului în forma

$$y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x, \quad y_2(x) = (D_1 + D_2x)e^x.$$

și, în final, se găsește  $y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x$ ,  $y_2(x) = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x$ , unde  $C_1$  și  $C_2$  sunt constante reale arbitrare. ■

**Exemplul 2.5.6** Să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + x. \end{cases}$$

**Soluție.** Determinăm întâi soluția generală a sistemului omogen asociat

$$\begin{cases} y_1' &= -3y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 + y_2. \end{cases}$$

Pentru aceasta, procedăm ca în exemplul precedent și găsim

$$\begin{cases} y_1^{(o)}(x) &= (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x}, \\ y_2^{(o)}(x) &= (C_1 + C_2x)e^{-x}. \end{cases}$$

Deoarece  $r = 0$  nu este rădăcină caracteristică a sistemului omogen asociat, căutăm soluția particulară în forma

$$y_1^p(x) = A_1x + B_1, \quad y_2^p(x) = A_2x + B_2$$

și determinăm coeficienții celor două polinoame din condiția ca sistemul să fie verificat. Se obțin sistemele

$$\begin{cases} 3A_1 + 4A_2 - 2 &= 0, \\ A_1 + A_2 + 1 &= 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 + 3B_1 + 4B_2 &= 0, \\ A_2 - B_1 - B_2 &= 0, \end{cases}$$

de unde deducem  $A_1 = -6$ ,  $A_2 = 5$ ,  $B_1 = 14$ ,  $B_2 = -9$ .

Deoarece soluția generală a sistemului dat este suma dintre soluția generală a sistemului omogen asociat și soluția particulară determinată, avem

$$\begin{cases} y_1(x) &= y_1^{(o)}(x) + y_1^p(x) &= (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) &= y_2^{(o)}(x) + y_2^p(x) &= (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

Forma matriceală a acestei soluții este

$$Y(x) = Y^{(o)}(x) + Y^p(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + Y^p(x).$$

■

## Capitolul 3

# Ecuatii diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi

### 3.1 Ecuatii diferențiale liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

#### 3.1.1 Definiții. Suprafețe integrale

**Definiția 3.1.1** *O relație de forma*

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (3.1)$$

unde  $F$  este o funcție reală continuă de  $2n + 1$  variabile reale definită pe un domeniu  $\Delta \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ , se numește **ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi**, dacă se cere să se determine funcția

$$u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.2)$$

cu derivate parțiale de ordinul întâi continue într-un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^n$ , astfel încât să avem

$$F\left(\mathbf{x}; \varphi(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right) \equiv 0 \quad (3.3)$$

pentru orice  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ .

**Definiția 3.1.2** Funcția  $\varphi \in \mathcal{F}(D)$  din (3.2) care satisface condiția (3.3) se numește **soluție** sau **suprafață integrală** a ecuației (3.1).

**Definiția 3.1.3** Ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi de forma

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (3.4)$$

se numește **ecuație liniară și omogenă**.

Forma (3.4) arată că ecuația depinde liniar de derivatele parțiale ale funcției necunoscute  $u$ , iar coeficienții  $X_k$  sunt funcții numai de variabila vectorială  $\mathbf{x}$ , sau altfel spus de variabilele independente  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

În cele ce urmează vom presupune că funcțiile  $X_k$  sunt de clasă  $C^1(D)$  și nu se anulează simultan în  $D$ , ceea ce înseamnă că are loc inegalitatea

$$X_1^2(\mathbf{x}) + X_2^2(\mathbf{x}) + \cdots + X_n^2(\mathbf{x}) > 0, \quad (\forall) \mathbf{x} \in D. \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Sistem caracteristic. Curbe caracteristice

Considerăm ecuația liniară (3.4) în care funcțiile  $X_k \in C^1(D)$  satisfac în  $D$  condiția (3.5).

**Definiția 3.1.4** Sistemul simetric definit în  $D$

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \quad (3.6)$$

se numește **sistemul caracteristic asociat** ecuației cu derivate parțiale (3.4).

**Definiția 3.1.5** Curbele integrale ale sistemului (3.6) se numesc **curbe caracteristice** ale ecuației cu derivate parțiale liniară și omogenă (3.4).

În ipoteza că  $x_n$  este variabilă independentă atunci, din Capitolul 2, paragraful 2, știm că soluția generală a sistemului caracteristic (3.6) este

$$x_i = \varphi_i(x_n, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3.7)$$

sau, rezolvând în raport cu constantele arbitrare  $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ ,

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_2, \\ \dots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= C_{n-1} \end{cases} \quad (3.8)$$

unde  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  sunt funcții continue cu derivate parțiale continue în  $D$ .

Oricare din relațiile (3.8) se numește *integrală primă* a sistemului caracteristic (3.6), iar ansamblul (3.8) reprezintă o familie de curbe integrale, sau o familie de curbe caracteristice ale ecuației (3.4).

Vom vedea că integrarea ecuației (3.4) este strâns legată de integrarea sistemului caracteristic asociat (3.6). Această legătură este dată de teorema următoare.

**Teorema 3.1.1** *Dacă relația*

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = C \quad (3.9)$$

*este o integrală primă a sistemului caracteristic (3.6), atunci funcția reală de  $n$  variabile reale definită pe  $D$*

$$u = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.10)$$

*este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (3.4).*

**Demonstrație.** Folosind Teorema 2.2.1, rezultă că dacă (3.9) este o integrală primă a sistemului caracteristic (3.6), atunci de-a lungul unei curbe caracteristice avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \quad (3.11)$$

Egalitatea (3.11) fiind adevărată pentru orice constantă  $C$ , este adevărată pentru orice curbă integrală situată în  $D$ , de unde rezultă că este adevărată pentru orice  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ ; prin urmare (3.10) este o soluție a ecuației (3.4) în  $D$ . ■

### 3.1.3 Soluția generală

**Teorema 3.1.2** *Dacă  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  sunt integrale prime ale sistemului caracteristic (3.6), independente funcțional pe mulțimea  $D' \subset D$ , și*

$$\Phi(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$$

*o funcție oarecare cu derivate parțiale continue într-un domeniu  $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , atunci funcția  $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$ , unde*

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})), \quad (3.12)$$

*este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (3.4) în  $D'$ .*

**Demonstrație.** În prima etapă arătăm că funcția  $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  verifică ecuația (3.4). Pentru aceasta trebuie să calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții. Aplicând regula de derivare a funcțiilor compuse, avem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2}, \\ \dots, \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}. \end{cases} \quad (3.13)$$

Dacă în (3.13) înmulțim prima relație cu  $X_1$ , a doua cu  $X_2$  și așa mai departe până la ultima relație pe care o înmulțim cu  $X_n$  și adunăm pe coloane rezultatele înmulțirilor, obținem

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial v_j} \left( \sum_{k=1}^n X_k \cdot \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \right) \quad (3.14)$$

Însă, în (3.14) fiecare paranteză din partea dreaptă este nulă deoarece după Teorema 3.1.1 funcțiile  $\psi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ , sunt soluții ale ecuației cu derivate parțiale (3.4). Rezultă că funcția  $u$  din (3.12) este soluție a ecuației (3.4).

Reciproc, orice soluție  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a ecuației (3.4) este de forma (3.12).

În adevăr,  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  fiind soluție a ecuației (3.4), avem

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (3.15)$$

Pe lângă aceasta, avem și relațiile

$$X_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + \dots + X_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad (3.16)$$

care exprimă că integralele prime  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  sunt soluții ale ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi (3.4).

Pentru orice punct fixat  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ , ecuațiile (3.15) și (3.16) formează un sistem de  $n$  ecuații liniare și omogene în necunoscutele  $X_1$ ,

$X_2, \dots, X_n$ . Datorită condiției (3.5), acest sistem are și soluții nebanale. Conform teoremei lui Rouché, determinantul sistemului,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (3.17)$$

trebuie să fie nul pentru orice  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ . Așadar, putem scrie

$$\frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} = 0, \quad (\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Deoarece  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  sunt integrale prime independente funcțional în  $D$ , există domeniul  $D' \subset D$  în care matricea jacobiană  $J_\psi(\mathbf{x})$ , unde  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ , are rangul  $n - 1$ . Aceasta înseamnă că cel puțin un minor de ordinul  $n - 1$  al matricei este nenul pe  $D'$ . Fie că acest minor este determinantul funcțional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})} \neq 0, \quad (\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D. \quad (3.18)$$

Folosind rezultatele de la dependență și independență funcțională a funcțiilor, rezultă că funcția  $u$  depinde funcțional pe  $D'' \subset D'$  de funcțiile  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ . Prin urmare, putem scrie  $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$ . ■

**Definiția 3.1.6** Funcția  $u$  din (3.12), unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară definită pe un domeniu din spațiul  $\mathbb{R}^{n-1}$ , se numește **soluția generală** a ecuației cu derivate parțiale liniare și omogenă (3.4).

**Exercițiul 3.1.1** Să se integreze următoarele ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogene

1.  $(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$
2.  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$
3.  $x(2x^3 - y^3) \frac{\partial z}{\partial x} + y(x^3 - 2y^3) \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$
4.  $2\sqrt{x} \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

**Soluție.** Sistemele caracteristice corespunzătoare ale acestor ecuații sunt:

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y}; \quad 2. & \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}; \\ 3. & \frac{dx}{x(2x^3-y^3)} = \frac{dy}{y(x^3-2y^3)}; \quad 4. & \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dy}{-y}. \end{array}$$

Aceste sisteme caracteristice sunt echivalente respectiv cu ecuațiile diferențiale ordinare

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+2y}; \quad 2. & \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}; \\ 3. & \frac{dy}{dx} = \frac{y(x^3-2y^3)}{x(2x^3-y^3)}; \quad 4. & \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{2\sqrt{x}}. \end{array}$$

Prima și a treia ecuație diferențială de ordinul întâi este omogenă și se integrează utilizând substituția  $\frac{y}{x} = u$ , unde noua funcție necunoscută este  $u$  ce depinde de  $x$ , iar celelalte două ecuații sunt cu variabile separabile. Soluțiile acestor ecuații diferențiale ordinare sunt:

$$1. y(x+y) = C; \quad 2. x^2 + y^2 = C; \quad 3. \frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2} = C; \quad 4. \sqrt{x} + \ln y = C.$$

Fiecare din relațiile de mai sus reprezintă o integrală primă pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă corespunzătoare.

Soluția generală a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă este o funcție arbitrară de  $n-1$  integrale prime independente. Cum pentru toate aceste exerciții  $n$  este 2, la fiecare avem nevoie doar de câte o integrală primă și le vom considera pe cele deduse mai sus. Prin urmare, soluțiile ecuațiilor date sunt respectiv

$$\begin{array}{ll} 1. & z = \psi(y(x+y)); \quad 2. & z = \psi(x^2 + y^2); \\ 3. & z = \psi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right); \quad 4. & z = \psi(\sqrt{x} + \ln y), \end{array}$$

unde  $\psi$  este o funcție oarecare de clasă  $C^1(I)$  și  $I$  un interval real. ■

**Exercițiul 3.1.2** Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi omogene

$$1. \quad (az - by)\frac{\partial u}{\partial x} + (bx - cz)\frac{\partial u}{\partial y} + (cy - ax)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$2. \quad (x - a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$3. \quad xz\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$4. \quad (x - y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$5. \quad xy\frac{\partial w}{\partial x} - y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

$$6. \quad x^2\frac{\partial F}{\partial x} - xy\frac{\partial F}{\partial y} + y^2\frac{\partial F}{\partial z} = 0;$$

$$7. \quad \sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0;$$

$$8. \quad 2 \cosh x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \sinh x \frac{\partial u}{\partial y} - z \sinh x \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

**Soluție.** Sistemele caracteristice corespunzătoare ecuațiilor de mai sus sunt:

$$1. \quad \frac{dx}{az - by} = \frac{dy}{bx - cz} = \frac{dz}{cy - ax};$$

$$2. \quad \frac{dx}{x - a} = \frac{dy}{y - b} = \frac{dz}{z - c};$$

$$3. \quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{-yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2};$$

$$4. \quad \frac{dx}{x - y + z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z};$$

$$5. \quad \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{z^2};$$

$$6. \quad \frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{y^2};$$



$$7. \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}};$$

$$8. \quad \frac{dx}{2 \cosh x} = \frac{dy}{2 \sinh x} = \frac{dz}{-z \sinh x}.$$

Vom căuta combinații integrabile ale rapoartelor egale.

1. Prin înmulțirea celor trei rapoarte cu respectiv  $x, y$  și  $z$  și adunarea numărătorilor și a numitorilor, obținem un nou raport care are numitorul egal cu zero, iar numărătorul este diferențiala expresiei  $x^2 + y^2 + z^2$ . Rezultă că și numărătorul trebuie să fie zero și prin urmare  $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$  este prima integrală primă a sistemului caracteristic corespunzător primei ecuații.

Înmulțind acum rapoartele cu  $c, a$  și  $b$  și adunând iarăși numărătorii și numitorii între ei, obținem din nou zero la numitor. Prin urmare  $cx + ay + bz = C_2$  este a doua integrală primă.

$$2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} \implies \frac{x-a}{y-b} = C_1, \\ \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} \implies \frac{y-b}{z-c} = C_2. \end{cases}$$

3. Considerăm primele două rapoarte. După simplificare prin  $z$  se obține combinația integrabilă  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y}$  care conduce la integrala primă  $xy = C_1$ .

A doua integrală primă se obține după ce adunăm numărătorii și numitorii din primele două rapoarte, raportul găsit egalându-l cu al treilea. Avem  $\frac{d(x+y)}{z(x-y)} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$ , de unde, după simplificare cu  $x - y$ , se obține combinația integrabilă

$$(x+y)d(x+y) = z dz$$

care conduce la integrala primă  $(x+y)^2 - z^2 = C_2$ .

4. Integrând  $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$  obținem integrala primă  $\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{z}$ .

Pentru a obține a doua integrală primă pornim de la egalitatea

$$\frac{dx}{x-y+z} = \frac{d(y-z)}{y-z},$$

dedusă folosind o proprietate a rapoartelor egale. Notând  $y - z = u$ , se ajunge la ecuația liniară de ordinul întâi neomogenă  $\frac{dx}{du} - \frac{1}{u}x = -1$  care

are soluția  $x = u(C_2 - \ln u)$ . Revenind la variabilele  $x, y, z$  se obține a doua integrală primă  $\frac{x}{y-z} + \ln(y-z) = C_2$ .

5. Cele două integrale prime independente funcțional se obțin considerând primele două rapoarte și respectiv ultimele două. Se obține:

$$xy = C_1; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = C_2.$$

6. O integrală primă se găsește prin considerarea primelor două rapoarte. După simplificare cu  $x$  și apoi integrare, se obține  $xy = C_1$ .

Pentru cea de a doua integrală primă vom folosi integrala primă găsită.

Din ultimele două rapoarte se obține  $y dy = -x dz$  care, după înmulțire cu  $y$  și folosirea integralei prime deja găsită, se obține  $\frac{1}{3}y^3 + C_1z = C_2$ . Înlocuind  $C_1 = xy$  avem că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{1}{3}y^3 + xyz = C_2.$$

7. Cele două combinații integrabile le vom determina considerând primele două rapoarte și apoi ultimele două. Integrând, obținem:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1; \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2.$$

8. O combinație integrabilă este  $\frac{dx}{2 \cosh x} = \frac{dy}{2 \sinh x}$  din care rezultă integrala primă  $y - \ln \cosh x = C_1$ .

A doua integrală primă se obține dacă se consideră ultimele două rapoarte după care se simplifică prin  $\sinh x$ . Integrând în ambii membri, avem  $z^2 e^y = C_2$ .

Astfel, soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate parțiale din enunț sunt:

$$1. \quad u(x, y, z) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2, cx + ay + bz);$$

$$2. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{x-a}{y-b}, \frac{y-b}{z-c}\right);$$

$$3. \quad u(x, y, z) = \Phi(xy, (x+y)^2 - z^2);$$

$$4. \quad u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y-z} + \ln(y-z)\right);$$

$$5. \quad u(x, y, z) = \Phi(xy, \frac{1}{y} + \frac{1}{z});$$

$$6. \quad u(x, y, z) = \Phi(xy, \frac{1}{3}y^3 + xyz);$$

$$7. \quad u(x, y, z) = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{y}, \sqrt{y} - \sqrt{z});$$

$$8. \quad u(x, y, z) = \Phi(y - \ln \cosh x, z^2 e^y),$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară de integralele prime menționate. ■

### 3.1.4 Problema lui Cauchy

În general, în problemele practice, nu interesează soluții arbitrare a ecuației (3.4), ci acele soluții care să îndeplinească anumite condiții inițiale.

**Definiția 3.1.7** Problema determinării în domeniul  $D \subset \mathbb{R}^n$  a acelei soluții  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  a ecuației cu derivate parțiale liniare și omogene (3.4) care pentru  $x_n = x_n^0$  se reduce la o funcție dată  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in C^1(D')$ , unde  $D' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ , adică

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in D', \quad (3.19)$$

se numește **problema lui Cauchy** pentru ecuația (3.4).

În anumite condiții impuse funcțiilor  $X_k$  și  $\psi$  soluția problemei Cauchy există și este unică.

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea efectivă a soluției problemei lui Cauchy.

Această soluție va fi de forma (3.12) și problema se reduce la a determina funcția  $\Phi$ , deci de a determina legătura între integralele prime  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ .

Fie o vecinătate a punctului  $M_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0)$ , inclusă în  $D$ , în care determinantul funcțional (3.18) este diferit de zero. O asemenea vecinătate există în baza faptului că funcțiile  $\psi_k$ ,  $k = \overline{1, n-1}$ , sunt continue și au derivate parțiale continue pe  $D$ . Dacă în (3.8) punem  $x_n = x_n^0$ , obținem sistemul

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = C_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (3.20)$$

care, rezolvat în raport cu  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ , conduce la

$$x_j = \omega_j(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \quad j = \overline{1, n-1}. \quad (3.21)$$

Putem enunța acum următoarea teoremă.

**Teorema 3.1.3** *Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (3.4) cu condiția inițială (3.19) este dată de*

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}))$$

unde  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  sunt  $n-1$  integrale prime independente funcțional ale sistemului caracteristic (3.6).

**Demonstrație.** Trebuie să arătăm că funcția  $u$  din enunțul teoremei este soluție a ecuației cu derivate parțiale (3.4), apoi că verifică condiția inițială (3.19).

Faptul că  $u$  este soluție a ecuației (3.4) rezultă imediat din faptul că  $u$  este de forma  $\Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  după cum rezultă din expresia ei.

Soluția verifică condiția inițială în vecinătatea  $U$  a punctului  $M_0$ . În adevăr pentru  $x_n = x_n^0$ , conform relațiilor (3.20) și (3.21), rezultă că (3.19) este îndeplinită. Din modul cum este construită funcția  $u$  rezultă și unicitatea ei. ■

**Exercițiul 3.1.3** *Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuațiile cu derivate parțiale liniare și omogene*

$$\begin{aligned} 1. \quad & 2x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z^3 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \\ 2. \quad & zux + (x-z)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \end{aligned}$$

cu condițiile inițiale date respectiv de

$$1. \quad u(x, y, 1) = x + y, \quad 2. \quad u(x, 0, z) = 2z(z - x).$$

**Soluție.** Sistemele caracteristice corespunzătoare

$$1. \quad \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^3}, \quad 2. \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}$$

au integralele prime

$$1. \quad \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = xy^2, \\ \psi_2(x, y, z) = \frac{1}{z^2} + \ln x, \end{cases} \quad 2. \quad \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = x^2 - z^2 \\ \psi_2(x, y, z) = 2y + (x - z)^2. \end{cases}$$

Sistemul (3.20), în cazul acestor ecuații cu derivate parțiale, devine respectiv

$$1. \quad \begin{cases} xy^2 &= C_1 \\ 1 + \ln x &= C_2 \end{cases}, \quad 2. \quad \begin{cases} x^2 - z^2 &= C_1, \\ (x - z)^2 &= C_2. \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme, găsim

$$1. \quad \begin{cases} x = e^{C_2-1} = \omega_1(C_1, C_2) \\ y = \sqrt{\frac{C_1}{e^{C_2-1}}} = \omega_2(C_1, C_2) \end{cases}, \quad 2. \quad \begin{cases} x = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{C_2}} = \omega_1(C_1, C_2), \\ z = \frac{C_1 - C_2}{2\sqrt{C_2}} = \omega_2(C_1, C_2). \end{cases}$$

Conform Teoremei 3.1.3, avem că soluția problemei lui Cauchy este

$$u(x, y, z) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2), \omega_2(\psi_1, \psi_2)).$$

Deoarece expresiile funcției  $\psi$  sunt respectiv

$$1. \quad \psi(x, y) = x + y, \quad 2. \quad \psi(x, z) = 2z(z - x),$$

rezultă că soluțiile problemei lui Cauchy pentru cele două ecuații cu derivate parțiale sunt

$$1. \quad u(x, y, z) = \omega_1(\psi_1, \psi_2) + \omega_2(\psi_1, \psi_2)$$

$$2. \quad u(x, y, z) = 2\omega_2(\psi_1, \psi_2)(\omega_2(\psi_1, \psi_2) - \omega_1(\psi_1, \psi_2)).$$

Efectuând calculele, găsim

$$1. \quad u(x, y, z) = e^{\psi_2(x, y, z)-1} + \sqrt{\frac{\psi_1(x, y, z)}{e^{\psi_2(x, y, z)-1}}}$$

$$2. \quad u(x, y, z) = \psi_2(x, y, z) - \psi_1(x, y, z).$$

Înlocuind pe  $\psi_1$  și  $\psi_2$ , obținem  $u(x, y, z) = xe^{z^{-2}-1} + y\sqrt{e^{1-z^{-2}}}$  și respectiv  $u(x, y, z) = 2y + 2z^2 - 2xz$ . ■

### 3.2 Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, cuasiliniare

**Definiția 3.2.1** O ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi de forma

$$X_1(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1}(\mathbf{x}, u) \quad (3.22)$$

se numește **ecuație cuasiliniară neomogenă**.

O astfel de ecuație este liniară în raport cu derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției necunoscute  $u$  care depinde de variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (de variabila vectorială  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ), iar coeficienții  $X_k$  sunt funcții atât de variabila vectorială independentă  $\mathbf{x}$  cât și de funcția  $u$ .

Vom presupune că funcțiile  $X_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , sunt continue pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , au derivate parțiale continue în  $D$  și

$$\sum_{k=1}^n X_k^2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) > 0, \quad (\forall) (x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in D.$$

### 3.2.1 Soluția generală

**Teorema 3.2.1** Integrarea ecuației cu derivate parțiale (3.22) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale liniară cu  $n + 1$  variabile

$$X_1(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + X_{n+1}(\mathbf{x}, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

**Demonstrație.** Să căutăm pentru ecuația cuasiliniară (3.22) o soluție  $u$ , definită implicit de ecuația

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0, \quad (3.23)$$

$V$  fiind o funcție necunoscută ce urmează să o determinăm. În ipoteza că  $V$  este continuă și are derivate parțiale continue, cu derivata parțială în raport cu  $u$  diferită de zero în interiorul lui  $D$ , din (3.23) și teorema de existență și unicitate a funcțiilor reale de  $n$  variabile reale definite implicit de o ecuație în  $n + 1$  necunoscute, obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

pe care le înlocuim în ecuația (3.22). În acest fel ajungem la

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + X_{n+1} \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad (3.24)$$

care este o ecuație liniară și omogenă în necunoscuta  $V$ . Fie

$$\psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = C_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.25)$$

$n$  integrale prime independente ale ecuației (3.24). Soluția generală a ecuației (3.24) este

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}), \quad (3.26)$$

iar ecuația  $V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$  definește implicit soluția a ecuației cuasilineare (3.22) în forma  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . ■

Conform Teoremei 3.2.1, urmează că trebuie să determinăm  $n$  integrale prime ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}},$$

atașat ecuației (3.24), anume

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_1, \\ \dots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) &= C_{n-1}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Atunci, soluția generală a ecuației (3.22) este funcția definită implicit de

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0, \quad (3.28)$$

$\Phi$  fiind o funcție arbitrară derivabilă și cu derivate parțiale de ordinul întâi continue.

**Exercițiul 3.2.1** *Să se determine integrala generală a ecuației cuasilineare*

$$xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z.$$

**Soluție.** Sistemul caracteristic asociat acestei ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi este

$$\frac{dx}{x^2 y} = \frac{dy}{x^2 y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Din primele două rapoarte obținem ecuația  $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$  care ne conduce la integrala primă  $x^2 - y^2 = C_0$ .

O a doua integrală primă se obține din combinația

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + x^3y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Primul raport al acestei combinații se obține din primele două rapoarte ale sistemului caracteristic prin înmulțirea lor cu respectiv  $x$  și  $y$  urmată de adunarea lor. Se obține un nou raport egal cu celelalte rapoarte ale sistemului caracteristic. După înmulțirea cu  $x^2 + y^2$  se obține

$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z},$$

iar de aici rezultă a doua integrală primă  $\frac{z}{xy} = C_1$ .

Conform Teoremei 3.2.1, soluția generală a ecuației date este funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$ , unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară. Având în vedere expresiile lui  $\psi_1$  și  $\psi_2$ , avem că soluția generală a ecuației cu derivate parțiale cuasiliniară este funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$\Phi(x^2 - y^2, \frac{z}{xy}) = 0.$$

Se constată că soluția generală se poate scrie în forma  $z = xy\Psi(x^2 - y^2)$ , unde  $\Psi$  este o funcție reală arbitrară de o variabilă reală, derivabilă și cu derivată continuă. ■

**Exercițiul 3.2.2** Să se integreze ecuația cuasiliniară

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = z + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{z}.$$

**Soluție.** Sistemul caracteristic asociat acestei ecuații este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{zdz}{z^2 + x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Se observă că avem următoarele combinații integrabile:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3}, \quad \dots, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_n}{x_n}$$



și

$$\frac{d(x_1 x_2 \cdots x_n)}{n x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{z dz}{z^2 + x_1 x_2 \cdots x_n}. \quad (3.29)$$

Din integrarea primelor  $n - 1$  combinații integrabile obținem integralele prime

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_2, \quad \dots \quad \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}.$$

Pentru a integra ultima combinație integrabilă notăm:

$$x_1 x_2 \cdots x_n = v; \quad z^2 = u.$$

Astfel, combinația integrabilă (3.29) se reduce la

$$\frac{du}{dv} - \frac{2}{nv} u = \frac{2}{n}.$$

Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întâi liniară și neomogenă și integrala ei generală este

$$u = C_n \sqrt[n]{v^2} + \frac{2v}{n-2}$$

sau, dacă revenim la vechile variabile,

$$(n-2)z^2 = C_n(n-2) \sqrt[n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^2} + 2x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Integrala generală a ecuației date este funcția  $z$  definită implicit de

$$(n-2)z^2 = 2x_1 x_2 \cdots x_n + (n-2) \sqrt[n]{(x_1 x_2 \cdots x_n)^2} \Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right),$$

unde  $\Phi$  este o funcție diferențiabilă arbitrară. ■

**Exercițiul 3.2.3** Să se determine soluția generală a ecuației

$$(xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

**Soluție.** Sistemul caracteristic asociat ecuației este :

$$\frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Considerând primele două rapoarte se obține o ecuație diferențială omogenă care integrată conduce la integrala primă

$$\frac{y^3 + x^3}{y^2 x^2} = C_0.$$

O a doua integrală primă se obține din combinația integrabilă

$$\frac{ydx + xdy}{3xy^4 - 3x^4y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Simplificând, obținem ecuația cu variabile separate  $\frac{d(xy)}{xy} + \frac{dz}{3z} = 0$  care prin integrare conduce la a doua integrală primă  $x^3 y^3 z = C_1$ .

Soluția generală a ecuației este

$$z = \frac{1}{x^3 y^3} \Phi\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\right)$$

unde  $\Phi$  este o funcție derivabilă arbitrară. ■

### 3.2.2 Problema lui Cauchy

Fie ecuația cu derivate parțiale cuasiliniară (3.22) și punctul arbitrar, dar fixat,  $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \in D$ .

**Definiția 3.2.2** Problema determinării unei soluții  $u$  a ecuației (3.22) într-o vecinătate  $U$  a punctului  $M_0 \in D$ , care pentru  $x_n = x_{n0}$  să se reducă la funcția continuă și cu derivate parțiale continue  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ , adică

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (3.30)$$

se numește **problema lui Cauchy** a ecuației (3.22).

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy vom considera că s-au determinat  $n$  integrale prime independente funcțional într-o vecinătate a lui  $M_0$ , iar dacă presupunem că aceste integrale prime sunt cele din (3.27), ele vor fi independente dacă

$$\frac{D(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)} \Big|_{M_0} \neq 0. \quad (3.31)$$

Vom cere ca soluția căutată  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  să treacă prin punctul  $M_0$ , deci  $u_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ .

Funcția  $u$ , după cum am arătat la aliniatul precedent, este definită implicit de ecuația

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0$$

și problema se reduce la determinarea funcției  $\Phi$ , adică a legăturii între integralele prime (3.27). În același timp  $u$  trebuie să fie unic determinată într-o vecinătate a punctului  $M_0$ , deci

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \neq 0.$$

Fie  $W$  o vecinătate a punctului  $M_0$  în care sistemul (3.27) se poate inversa în funcție de  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$ . Vom face însă inversarea după ce vom înlocui pe  $x_n$  cu  $x_{n0}$ , obținând astfel sistemul

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_1, \\ \dots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_{n-1}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Prin rezolvarea sistemului (3.32) în privința variabilelor menționate, găsim

$$\begin{cases} u &= \omega_0(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ x_1 &= \omega_1(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ \dots & \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(C_0, C_1, \dots, C_{n-1}). \end{cases} \quad (3.33)$$

**Teorema 3.2.2** *Soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația (3.22) care îndeplinește condiția inițială (3.30) este funcția  $u$  definită implicit de ecuația*

$$\omega_0(\psi_0, \dots, \psi_{n-1}) - \psi[\omega_1(\psi_0, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_0, \dots, \psi_{n-1})] = 0, \quad (3.34)$$

*unde  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$  sunt integrale prime independente funcțional care satisfac condiția (3.31).*

**Demonstrație.** Funcția  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definită implicit de ecuația (3.34) este o soluție a ecuației (3.22) deoarece provine dintr-o relație de forma (3.28).

Funcția  $u$  dată de (3.34) verifică condiția inițială (3.30) deoarece conform lui (3.32) și (3.33) pentru  $x_n = x_{n0}$  avem

$$\omega_0(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \Big|_{x_n=x_{n0}} = u,$$

$$\omega_k(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}) = x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Din (3.34) rezultă că pentru  $x_n = x_{n0}$

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) \Big|_{x_n=x_{n0}} = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Derivata funcției  $V$  din membrul întâi al relației (3.34), în raport cu  $u$ , în punctul  $M_0$ , se găsește că este egală cu 1, deci diferită de zero.

Prin urmare, sunt satisfăcute toate ipotezele teoremei de existență și unicitate a unei funcții reale de mai multe variabile reale definită implicit de ecuația (3.34), deci funcția  $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  există și este unică. ■

**Exercițiul 3.2.4** *Să se găsească suprafața integrală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și neomogenă*

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

care trece prin curba

$$(C_a) : \begin{cases} x &= a, \\ 2ayz &= a^2 + 2. \end{cases} \quad (3.35)$$

**Soluție.** Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{x}. \quad (3.36)$$

Considerând primele două rapoarte, obținem combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

din care obținem integrala primă a sistemului  $xy = C_0$ .

Amplificând în sistemul (3.36) primul raport cu  $y$ , al doilea cu  $x$  și raportul al treilea cu  $y^2$ , obținem

$$\frac{ydx}{xy^2} = -\frac{xdy}{xy^2} = \frac{y^2dz}{xy^2}. \quad (3.37)$$

Aceste trei rapoarte având același numitor, rezultă

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1}.$$

Folosind proprietățile rapoartelor egale, deducem

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1} = \frac{ydx - xdy}{2},$$

ultima egalitate fiind o combinație integrabilă căci se poate scrie în forma  $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(2z)$ .

Integrând ultima combinație integrabilă, obținem a doua integrală primă a sistemului (3.36)

$$2z - \frac{x}{y} = C_1.$$

Integrala generală a ecuației este funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = \Phi(C_0, C_1) = \Phi(xy, 2z - \frac{x}{y}).$$

Observăm că integrala generală se mai poate scrie ca

$$z = \frac{x}{2y} + f(xy),$$

unde  $f$  este o funcție reală de variabilă reală, arbitrară.

Ansamblul ecuațiilor celor două integrale prime formează ecuațiile unei curbe caracteristice ( $C$ ) situată pe suprafața integrală ( $S$ ).

Suprafața integrală căutată ( $S_a$ ) se obține eliminând pe  $x, y, z$  în sistemul format de ecuațiile celor două integrale prime și ecuațiile curbei ( $C_a$ ). Efectuând această eliminare, rezultă:

$$C_1 = \frac{2}{C_0} \implies z - \frac{x}{2y} = \frac{1}{xy} \implies (S_a) \quad 2xyz - x^2 = 2$$

și deci ( $S_a$ ) este o suprafață algebrică de ordinul al treilea. ■

**Exercițiul 3.2.5** Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasilineară

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluția sa generală și să se rezolve problema lui Cauchy cu condiția inițială

$$z(2, y) = 1 + y^2 \iff \begin{cases} x = 2, \\ z = 1 + y^2. \end{cases}$$

**Soluție.** Sistemul caracteristic asociat este  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}$ . Din primele două rapoarte se obține integrala primă  $\frac{x}{y} = C_0$ .

Înmulțind primul raport cu  $y$ , al doilea cu  $x$  și efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor, găsim un nou raport egal cu oricare din cele trei. Egalându-l cu primul raport, obținem combinația integrabilă

$$\frac{d(xy + z)}{xy + z} = \frac{dx}{x}.$$

Integrând, obținem a doua integrala primă  $y + \frac{z}{x} = C_1$ .

Rezultă că soluția generală este funcția definită implicit de ecuația

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0,$$

unde  $\Phi$  este o funcție arbitrară derivabilă și cu derivate continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul

$$\begin{cases} \frac{2}{y} = C_0, \\ y + \frac{z}{2} = C_1, \end{cases} \implies \begin{cases} z = 2\left(C_1 - \frac{2}{C_0}\right) = \omega_0(C_0, C_1), \\ y = \frac{2}{C_0} = \omega_1(C_0, C_1). \end{cases}$$

Înlocuind pe  $y$  și  $z$  în  $z = 1 + y^2$  găsim relația care corespunde lui (3.34)

$$2\left(C_1 - \frac{2}{C_0}\right) - 1 - \frac{4}{C_0^2} = 0.$$

Dacă se înlocuiesc  $C_0$  și  $C_1$  cu respectiv

$$\psi_0(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_1(x, y, z) = y + \frac{z}{x},$$

deducem că soluția problemei lui Cauchy este funcția  $z = \frac{(x + 2y)^2}{2x} - xy$ .

După eliminarea numitorului, observăm că din punct de vedere geometric soluția determinată reprezintă o suprafață algebrică de ordinul al treilea din care se scot intersecțiile acesteia cu planul  $Oyz$ . ■

**Exercițiul 3.2.6** Să se determine suprafața integrală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasilineară neomogenă

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y$$

care conține dreapta ( $d$ ) de ecuații  $x = y = z$ .

**Soluție.** Sistemul caracteristic asociat ecuației diferențiale date este

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}, \quad (3.38)$$

căruia trebuie să-i determinăm două integrale prime funcțional independente. Pentru aceasta, căutăm combinații integrabile ale rapoartelor egale. Se observă că acestea sunt egale cu încă două

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0},$$

obținute efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor (penultimul raport) și suma numărătorilor pe suma numitorilor celor trei rapoarte din (3.38), înmulțite în prealabil cu  $x$ ,  $y$  și respectiv  $z$ .

Când într-o succesiune de rapoarte egale numitorul unui raport este zero, numărătorul acelui raport trebuie să fie, de asemenea, zero. Prin urmare,

$$dx + dy + dz = 0, \quad xdx + ydy + zdz = 0.$$

Din aceste egalități se obțin cele două integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric (3.38)

$$x + y + z = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2. \quad (3.39)$$

Geometric, prima integrală primă reprezintă un fascicol de plane paralele de normală  $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ , iar cea de a doua este o familie de sfere concentrice cu centrul în originea reperului.

Soluția generală a sistemului simetric (3.38) este ansamblul celor două integrale prime care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie dublu parametrică de cercuri în spațiu, care sunt curbele caracteristice.

Pentru a determina suprafața integrală care conține dreapta ( $d$ ), impunem condiția ca sistemul format de ecuațiile curbelor caracteristice și ecuațiile dreptei să fie compatibil, ceea ce conduce la relația de compatibilitate  $C_1^2 - 3C_2 = 0$ .

Înlocuind  $C_1$  și  $C_2$  în relația de compatibilitate cu expresiile lor din (3.39) se găsește că suprafața integrală căutată este conul pătratic (eliptic) cu vârful în origine de ecuație  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ . ■

## Capitolul 4

# Elemente de teoria câmpurilor

### 4.1 Câmpuri scalare. Curbe și suprafețe de nivel

Fie  $D \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu tridimensional,  $M(x, y, z)$  un punct oarecare din  $D$  și  $f \in \mathcal{F}(D)$  o funcție reală definită pe  $D$ . Valorile funcției  $f$ , scrise în forma  $f(M)$ , sau în forma  $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$ , unde  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$ , sunt numere reale sau *scalari*. Astfel, funcția  $f$  se mai numește și *funcție scalară*.

**Definiția 4.1.1** *Funcția scalară  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^3$ , se numește câmp scalar tridimensional.*

Dacă domeniul  $D$  este bidimensional, deci  $D \subset \mathbb{R}^2$ , sau  $D$  este o porțiune de suprafață mărginită de o curbă în spațiu, poziția punctului  $M \in D$  va fi determinată de doi parametri (coordonatele carteziane  $x$  și  $y$  ale punctului din plan în primul caz, sau coordonatele curbilinii  $u$  și  $v$  ale punctului situat pe o suprafață în cel de al doilea caz). După caz, vom scrie:  $f(M) = f(x, y)$ ;  $f(M) = f(u, v)$ . În ambele cazuri, funcția scalară  $f \in \mathcal{F}(D)$  se numește *câmp scalar bidimensional*.

În cele ce urmează vom presupune că funcția  $f$  este continuă pe  $D$  și admite derivate parțiale de orice ordin continue în  $D$ .

**Exemplul 4.1.1** *Câmpul temperaturilor  $T = T(M)$  într-o regiune tridimensională sau bidimensională și câmpul presiunilor  $p = p(M)$  într-un domeniu plan sau spațial sunt exemple de câmpuri scalare.*



**Exemplul 4.1.2** *Funcția reală de două variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad (4.1)$$

*este un câmp scalar bidimensional.*

**Exemplul 4.1.3** *Funcția reală de trei variabile reale*

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(M) = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.2)$$

*este un câmp scalar definit în întreg spațiu tridimensional.*

Fie câmpul scalar  $f(M)$ ,  $M \in D \subset \mathbb{R}^3$  și  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ , fixat.

**Definiția 4.1.2** *Se numește suprafață de nivel care trece prin  $M_0$  a câmpului scalar tridimensional  $f(M)$ , locul geometric  $S_0$  al punctelor  $M \in D$  cu proprietatea*

$$f(M) = f(M_0) \quad (4.3)$$

*sau, având în vedere coordonatele carteziene ale punctelor  $M$  și  $M_0$ ,*

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0). \quad (4.4)$$

Deoarece  $M_0$  este un punct al suprafeței de nivel  $S_0$ , ecuația acesteia este (4.3) sau (4.4).

**Observația 4.1.1** *Prin orice punct  $M_0 \in D$  trece o suprafață de nivel a câmpului scalar tridimensional  $f \in \mathcal{F}(D)$ , iar orice două suprafețe de nivel ale sale ori sunt identice, ori nu au nici un punct comun.*

**Exemplul 4.1.4** *Suprafețele de nivel ale câmpului termic dintr-o regiune tridimensională sunt izotermele; cele ale câmpului presiunilor sunt izobarele; suprafețele de nivel ale câmpului scalar (4.2) sunt sfere cu centrele în origine.*

**Definiția 4.1.3** *Prin curbă de nivel a câmpului scalar bidimensional  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  (sau  $D \subset \Sigma$ , unde  $\Sigma$  este o suprafață), se înțelege locul geometric al punctelor  $M(x, y) \in D$  (sau  $M(u, v) \in D \subset \Sigma$ ) cu proprietatea*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (f(u, v) = f(u_0, v_0)), \quad (4.5)$$

*unde  $M_0(x_0, y_0)$ , respectiv  $M_0(u_0, v_0)$ , sunt puncte oarecare, dar fixate, din  $D$ .*

**Observația 4.1.2** Prin orice punct  $M_0 \in D$  trece câte o curbă de nivel și oricare două asemenea curbe sau coincid, sau nu au puncte comune.

**Exemplul 4.1.5** Curbele de nivel ale câmpului scalar (4.1) sunt elipse omofocale, cu centrul de simetrie în origine, care au axele de coordonate ca axe de simetrie și semiaxele  $a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$  și  $b\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}$ .

O primă imagine a unui câmp scalar este dată de suprafețele (curbele) sale de nivel care arată modul cum sunt stratificate valorile câmpului, viteza de stratificare într-un punct fiind tocmai derivata după o direcție oarecare de versor  $\mathbf{s}$  a câmpului în punctul considerat.

## 4.2 Derivata după o direcție și gradientul unui câmp scalar

Să considerăm câmpul scalar  $f \in \mathcal{F}(D)$ ,  $\mathbf{s}$  un versor arbitrar și, pentru fiecare punct  $\mathbf{x} \in D$ , definim funcția reală  $g$  de variabila reală  $t$

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} + t\mathbf{s} \in D, \quad (4.6)$$

$I$  este un interval real.

Evident, avem o infinitate de funcții  $g$  (pentru fiecare  $\mathbf{x} \in D$  există o asemenea funcție) și pentru toate, avem  $g(0) = f(\mathbf{x})$ . Funcțiile  $g$  sunt restricțiile funcției  $f$  la dreapta care trece prin  $\mathbf{x}$  și are direcția  $\mathbf{s}$ .

Presupunem că, pentru orice  $\mathbf{x} \in D$ , funcția  $g$  corespunzătoare este derivabilă în  $t = 0$ .

**Definiția 4.2.1** Spunem că funcția  $f$  este **derivabilă în  $D$  după direcția  $\mathbf{s}$**  dacă funcțiile  $g$ , definite în (4.6), sunt derivabile în  $t = 0$ .

**Definiția 4.2.2** Dacă  $f$  este derivabilă în  $D$  după direcția  $\mathbf{s}$ , numărul real  $g'(0)$  se numește **derivata câmpului scalar  $f$ , după direcția  $\mathbf{s}$ , în punctul  $\mathbf{x} \in D$** .

Notăm această derivată cu  $\frac{df}{ds}(\mathbf{x})$ . Prin urmare,

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad (4.7)$$

**Definiția 4.2.3** Funcția  $\frac{df}{ds} \in \mathcal{F}(D)$  ale cărei valori se determină după legea (4.7), se numește **derivata câmpului scalar  $f$  după direcția  $s$** .

**Observația 4.2.1** Fiind definite cu ajutorul derivatelor unei funcții reale de o variabilă reală, proprietățile derivatelor după o direcție ale câmpurilor scalare sunt aceleași ca acele ale derivatelor funcțiilor reale de o variabilă reală.

În consecință, putem scrie (pentru simplificare, ometem variabila  $\mathbf{x}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \frac{df_1}{ds} + \lambda_2 \frac{df_2}{ds}; \\ \frac{d}{ds}(f_1 \cdot f_2) = \frac{df_1}{ds} \cdot f_2 + f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}; \\ \frac{d}{ds}\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{\frac{df_1}{ds} \cdot f_2 - f_1 \cdot \frac{df_2}{ds}}{f_2^2}; \\ \frac{d}{ds}(F(f)) = F'(f) \cdot \frac{df}{ds}, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

unde  $f_1, f_2$  și  $f$  sunt câmpuri scalare derivabile în  $D$  după direcția  $s$ , iar  $F(f) = F \circ f$  este compusa funcției  $f$  cu funcția  $F$ .

Deoarece am presupus că funcția  $f$  care definește un câmp scalar are derivate parțiale continue în  $D$ , rezultă că  $f$  este diferențiabilă în  $D$  și valoarea în  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$  a diferențialei funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$  este

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}, \quad (4.9)$$

unde

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) \mathbf{k} \quad (4.10)$$

este *gradientul* funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$ . Între gradientul funcției  $f$  și vectorul  $\mathbf{h}$  se efectuează produsul scalar standard

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) h_3. \quad (4.11)$$

Operatorul diferențial  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$  se numește *operatorul lui Hamilton* sau *operatorul nabla*.

Pe de altă parte, se știe că dacă  $f$  este diferențiabilă în  $D$ , atunci  $f$  este derivabilă în  $D$  după orice direcție și derivata sa după direcția  $\mathbf{s}$  într-un punct  $\mathbf{x} \in D$  este valoarea în  $\mathbf{s}$  a diferențialei funcției  $f$  în punctul  $\mathbf{x}$ . Prin urmare,

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = df(\mathbf{x})(\mathbf{s}). \quad (4.12)$$

Din (4.9) și (4.12) deducem

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}, \quad (4.13)$$

iar din (4.10) și (4.13) rezultă

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) s_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) s_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}) s_3. \quad (4.14)$$

Fie  $P$  punctul din  $D$  al cărui vector de poziție este  $\mathbf{x} + t\mathbf{s}$ . Conform Observației 4.1.1, prin punctul  $P$  trece o suprafață de nivel  $(S)$  a câmpului scalar  $f$ . Dreapta  $(d)$  care trece prin  $M$  și are direcția  $\mathbf{s}$ , intersectează suprafața  $(S)$  în punctul  $P$ . Astfel,  $t$  este abscisa curbilinie a punctului  $P$  de pe dreapta  $(d)$  pe care  $M$  este originea elementului de arc. Dacă notăm cu  $t = \ell(MP)$  lungimea arcului  $MP$ , formula (4.7) se rescrie în forma

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in (d)}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}. \quad (4.15)$$

Considerăm acum că punctul  $P \in (S)$  nu este pe dreapta  $(d)$  ci pe o curbă netedă arbitrară  $\Gamma$  care trece prin  $M$  și are versorul tangentei în  $M$  identic cu  $\mathbf{s}$ .

**Definiția 4.2.4** Se numește **variație medie** a câmpului scalar  $f$ , raportul

$$\frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}, \quad (4.16)$$

unde  $P \in \Gamma \cap (S)$  iar  $\ell(MP)$  este abscisa curbilinie a punctului  $P$ .

**Teorema 4.2.1** Limita variației medii (4.16) a câmpului scalar  $f$  atunci când  $P$  tinde, pe curba  $\Gamma$ , la punctul  $M(\mathbf{x})$ , este egală cu derivata în  $\mathbf{x}$  după direcția  $\mathbf{s}$  a câmpului scalar  $f$ .

**Demonstrație.** Evaluarea diferenței de la numărătorul variației medii, conduce la

$$f(P) - f(M) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) + \varepsilon \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}), \quad (4.17)$$

unde  $\varepsilon$  este o funcție vectorială de variabilă vectorială cu proprietatea

$$\lim_{P \rightarrow M} \varepsilon = 0, \quad (4.18)$$

cu mențiunea că punctul  $P$ , în acest proces de trecere la limită, se află pe curba  $\Gamma$ .

Dacă împărțim (4.17) prin  $\ell(MP)$ , trecem la limită pentru  $P \rightarrow M$  ceea ce este echivalent cu  $\ell(MP) \rightarrow 0$ , ținem cont de (4.18), (4.14) și de rezultatul

$$\lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in \Gamma}} \frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}}{\ell(MP)} = \mathbf{s},$$

din geometria diferențială, se deduce

$$\lim_{\substack{\ell(MP) \rightarrow 0 \\ P \in \Gamma}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)} = \frac{df}{ds}(\mathbf{x}), \quad (4.19)$$

ceea ce demonstrează teorema. ■

**Observația 4.2.2** *Relația (4.19) se poate lua ca definiție pentru derivata după direcția  $\mathbf{s}$  a câmpului scalar  $f$  în punctul  $\mathbf{x} \in D$ .*

Ne propunem să determinăm acea direcție a spațiului după care derivata câmpului scalar  $f$  în punctul  $\mathbf{x}$  este maximă.

Ținând cont că produsul scalar a doi vectori din  $\mathbb{R}^3$  este egal cu produsul dintre normele vectorilor și cosinusul unghiului  $\theta$  dintre ei și că  $\|\mathbf{s}\| = 1$ , din (4.13) deducem

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(\mathbf{x})\| \cdot \cos \theta. \quad (4.20)$$

Din (4.20) se vede că derivata este maximă când  $\theta = 0$ , adică atunci când versorul  $\mathbf{s}$  este versorul  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  al vectorului  $(\nabla f)(\mathbf{x})$ ,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{(\nabla f)(\mathbf{x})}{\|(\nabla f)(\mathbf{x})\|}. \quad (4.21)$$

Pentru a demonstra o proprietate remarcabilă a versorului (4.21) să presupunem că  $M$  este fixat și notat cu  $M_0$  și că vectorul său de poziție este

$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ . Fie  $\gamma_0 \subset (S_0)$  o curbă netedă arbitrară care trece prin  $M_0$  și care are tangenta  $\mathbf{t}_0$  în  $M_0$ . Dacă  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$  sunt ecuațiile parametrice ale curbei  $\gamma_0$  și punctul  $M_0$  corespunde lui  $t_0$  pe curba  $\gamma_0$ , atunci

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\varphi}{dt}(t_0) \mathbf{i} + \frac{d\psi}{dt}(t_0) \mathbf{j} + \frac{d\chi}{dt}(t_0) \mathbf{k}. \quad (4.22)$$

Cum curba  $\gamma_0$  este situată pe  $(S_0)$ , unde  $(S_0)$  este suprafața de nivel care trece prin  $M_0$  de ecuație  $f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$ , avem

$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = f(x_0, y_0, z_0). \quad (4.23)$$

Dacă derivăm (4.23) ca o funcție compusă și considerăm  $t = t_0$ , deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \frac{d\varphi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \frac{d\psi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0) \frac{d\chi}{dt}(t_0) = 0. \quad (4.24)$$

Din (4.10), (4.21), (4.22) și (4.24), obținem

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0,$$

care demonstrează că  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  este ortogonal tuturor tangentelor la respectiv toate curbele  $\gamma_0 \subset (S_0)$  care trec prin  $M_0$ . Cum locul geometric al acestor tangente este planul tangent în  $M_0$  la suprafața  $(S_0)$ , rezultă că  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  este versorul normalei în  $M_0$  la suprafața de nivel  $(S_0)$ . Sensul versorului  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  este spre acea parte a spațiului în care  $f(x, y, z) > f(x_0, y_0, z_0)$ . Așadar:

**Teorema 4.2.2** *Derivata câmpului scalar  $f$  după direcția  $\mathbf{s}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  este maximă după direcția versorului  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  a normalei în  $M_0$  la suprafața de nivel  $(S_0)$  care trece prin  $M_0$ , sensul normalei fiind sensul creșterii valorilor câmpului scalar  $f$ .*

Revenind la un punct arbitrar  $\mathbf{x} \in D$ , obținem că derivata după direcția normalei  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  în punctul  $M$  la suprafața de nivel care trece prin  $M$  are expresia

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (4.25)$$

Cu ajutorul lui (4.21), din (4.25) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(\mathbf{x})\|. \quad (4.26)$$

Cum gradientul câmpului scalar  $f$  în punctul  $\mathbf{x}$  este coliniar și de același sens cu  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , din (4.26) obținem

$$(\nabla f)(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (4.27)$$

Să mai observăm că folosind (4.20) și (4.25) putem scrie

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cos \theta, \quad (4.28)$$

unde  $\theta$  este unghiul dintre versorii  $\mathbf{s}$  și  $\mathbf{n}$ .

Formula (4.28) dă legătura între derivata după un versor oarecare  $\mathbf{s}$  și derivata după direcția normalei în punctul  $M$  la suprafața de nivel care trece prin  $M$ , ocazie cu care reîntâlnim concluzia Teoremei 4.2.2.

Din (4.27) deducem că regulile de calcul pentru gradient sunt aceleași cu regulile de calcul ale derivatei după o direcție. Dacă avem în vedere (4.8) și renunțăm la scrierea variabilei vectoriale  $\mathbf{x}$ , se pot scrie relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\nabla\varphi + \mu\nabla\psi; \\ \nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi; \\ \nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi}{\psi^2}; \\ \nabla F(\varphi) = F'(\varphi)\nabla\varphi. \end{array} \right. \quad (4.29)$$

Mai precizăm că pentru gradientul câmpului scalar  $\varphi$  se folosește și notația  $\text{grad } \varphi$ .

#### Exercițiul 4.2.1 Se dă câmpul scalar

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2},$$

unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Să se calculeze unghiul dintre vectorii  $(\nabla\varphi)(A)$  și  $(\nabla\varphi)(B)$ , unde  $A$  și  $B$  sunt puncte de coordonate  $A(2, 1, 1)$  și  $B(0, 1, -1)$ .

**Soluție.** Dacă aplicăm regulile de calcul (4.29), găsim că gradientul câmpului scalar  $\varphi$  în punctul oarecare  $M(x, y, z)$ , diferit de originea reperului  $Oxyz$ , este

$$(\nabla\varphi)(M) = -2 \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r} + \frac{1}{r^2} \mathbf{a}$$

de unde rezultă  $(\nabla\varphi)(A) = -\frac{1}{18}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k})$  și  $(\nabla\varphi)(B) = \frac{1}{2}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$ . Cum cosinusul unghiului  $\theta$  dintre doi vectori este raportul dintre produsul scalar al lor și produsul normelor acestora, obținem

$$\cos\theta = \frac{(\nabla\varphi)(A) \cdot (\nabla\varphi)(B)}{\|(\nabla\varphi)(A)\| \|(\nabla\varphi)(B)\|} = -\frac{5}{9}.$$

Semnul minus dovedește că unghiul dintre cei doi gradienti este obtuz. ■

**Exercițiul 4.2.2** Fie câmpul scalar  $\varphi(x, y, z) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2$ , unde  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  este vectorul de poziție al punctului  $M(x, y, z)$ , iar  $\mathbf{a}$  este un versor constant.

a) Să se determine suprafața de nivel care trece prin  $M_0(1, 2, 3)$ .

b) Să se calculeze derivata câmpului scalar  $\varphi$  după direcția de parametri directori  $(2, -1, 2)$  în punctul  $M_0$ .

**Soluție.** Deoarece  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2 = a^2 r^2 \cos^2 \theta$  și  $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2 = a^2 r^2 \sin^2 \theta$ , iar  $a^2 = 1$ , deducem că valorile câmpului scalar sunt  $\varphi(x, y, z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

a) Suprafața de nivel care trece prin  $M_0(1, 2, 3)$  este  $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ , adică sfera de rază  $R = \sqrt{14}$  și cu centrul în origine.

b) Versorul  $\mathbf{s}$  al vectorului  $\mathbf{v}$  de parametri directori  $(2, -1, 2)$  este

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Gradientul câmpului scalar  $\varphi$  în punctul  $M_0$  este

$$(\nabla\varphi)(M) = (\text{grad } \varphi)(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

de unde

$$(\nabla\varphi)(M_0) = (\text{grad } \varphi)(1, 2, 3) = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}).$$

Derivata funcției  $\varphi$  în punctul  $M_0$  după direcția  $\mathbf{s}$  este

$$\frac{d\varphi}{ds}(M_0) = (\nabla\varphi)(M_0) \cdot \mathbf{s} = 2(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2 - 2 + 6) = 4.$$

Rezultă că unghiul  $\theta$  dintre vectorii  $(\nabla\varphi)(M_0)$  și  $\mathbf{s}$  este ascuțit. ■



### 4.3 Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp

**Definiția 4.3.1** *Se numește câmp vectorial o funcție vectorială de variabilă vectorială definită pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^3$ .*

Funcția vectorială  $\mathbf{v}$  care definește un câmp vectorial pe  $D \subset \mathbb{R}^3$  se poate scrie în una din formele:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z), \quad (4.30)$$

unde  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție al punctului  $P \in D$ , care, în reperul  $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ , are expresia analitică

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (4.31)$$

unde  $O$  este originea reperului, iar  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  este o bază ortonormată în  $\mathbb{R}^3$ .

Notând

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}, \quad (4.32)$$

unde  $v_m = v_m(x, y, z)$ ,  $m = 1, 2, 3$ , observăm că studiul unei funcții vectoriale de trei variabile reale (sau de variabilă vectorială), adică a unui câmp vectorial, se reduce la studiul a trei funcții reale de trei variabile reale (a trei câmpuri scalare tridimensionale).

În cele ce urmează, vom presupune că funcția vectorială care definește un câmp vectorial pe domeniul tridimensional  $D$  este continuă, are derivate parțiale continue în  $D$  care nu se anulează în nici un punct din  $D$ .

**Definiția 4.3.2** *Se numește linie de câmp în  $D$  a câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , o curbă strâmbă  $(L) \subset D$  cu proprietatea că tangenta în fiecare punct  $P \in (L)$  are ca vector director pe  $\mathbf{v}(P)$ .*

Cum un alt vector director al tangentei în punctul  $P(x, y, z) \in (L)$  este diferențiala vectorului de poziție (4.31)

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (4.33)$$

avem că  $\mathbf{v}$  și  $d\mathbf{r}$  sunt vectori directori ai aceleiași drepte, adică ei sunt coliniari.

În concluzie, coordonatele acestor doi vectori directori trebuie să fie proporționale și deci

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}. \quad (4.34)$$

**Definiția 4.3.3** *Sistemul simetric (4.34) se numește **sistemul diferențial al liniilor de câmp** în  $D$  a câmpului vectorial  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ .*

**Observația 4.3.1** *În baza teoremei de existență și unicitate a soluției unui sistem simetric, rezultă că prin orice punct al domeniului  $D$  trece câte o singură linie de câmp a câmpului vectorial  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ .*

**Definiția 4.3.4** *Se numește **suprafață de câmp** a unui câmp vectorial, orice suprafață generată de o linie de câmp a acelui câmp vectorial.*

**Teorema 4.3.1** *Condiția necesară și suficientă ca o suprafață  $(S)$  să fie suprafață de câmp a câmpului vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  este ca vectorul  $\mathbf{v}(P)$  să fie conținut în planul tangent la suprafața  $(S)$  în punctul  $P \in (S)$ .*

**Demonstrație. Necesitatea.** O linie de câmp  $(G)$  a câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  este ansamblul a două integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric (4.34)

$$(G) \quad \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = C_1 \\ \psi_2(x, y, z) = C_2, \end{cases} \quad (4.35)$$

unde  $\psi_1, \psi_2$  sunt două integrale prime independente funcțional, ceea ce se traduce prin condiția

$$\left( \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y, z)} \right)^2 + \left( \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(z, x)} \right)^2 + \left( \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(x, y)} \right)^2 \neq 0.$$

Se știe apoi că, pentru ca  $(G)$  din (4.35) să genereze o suprafață, parametrii  $C_1$  și  $C_2$  trebuie să fie legați printr-o relație de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0, \quad (4.36)$$

numită *relație de condiție* și că, suprafața de câmp corespunzătoare condiției (4.36) se obține eliminând constantele arbitrare  $C_1$  și  $C_2$  între (4.35) și (4.36). Obținem

$$\Phi(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) = 0, \quad (4.37)$$

deci o ecuație de forma

$$(S) : F(x, y, z) = 0 \quad (4.38)$$

în care recunoaștem ecuația carteziană implicită a unei suprafețe  $(S)$ . În plus, în orice punct  $P \in (S)$ , vectorul  $\mathbf{v}(P)$  este tangent suprafeței de ecuație (4.37) și deci conținut în planul tangent în  $P$  la suprafața  $(S)$  deoarece

$\mathbf{v}(P)$  este tangent la linia de câmp care trece prin  $P$  și generează suprafața  $(S)$ .

**Suficiența.** Trebuie să arătăm că orice suprafață  $(S)$  de ecuație (4.38) cu proprietatea că  $\mathbf{v}(P)$  este conținut în planul tangent în punctul  $P$  la  $(S)$  este generată de liniile de câmp ale câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ .

Ecuația (4.38) poate fi considerată ca o suprafață de nivel a câmpului scalar  $F$ .

Se știe că un vector coliniar și de același sens cu sensul de creștere al funcției  $F$  în punctul  $P(x, y, z) \in (S)$  este

$$(\nabla F)(x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k}. \quad (4.39)$$

Deoarece vectorul (4.39) este ortogonal vectorului  $\mathbf{v}(\mathbf{P})$  conținut în planul tangent în  $P$  la suprafața  $(S)$ , rezultă că produsul lor scalar este nul, deci

$$\begin{aligned} v_1(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) + v_2(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) + \\ + v_3(x, y, z) \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0, \end{aligned} \quad (4.40)$$

ceea ce arată că funcția  $F(x, y, z)$  din (4.38) verifică o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi omogenă. Dar orice soluție a ecuației diferențiale (4.40) este generată de curbele integrale ale sistemului caracteristic asociat, adică de (4.34), iar curbele caracteristice ale sale sunt liniile de câmp ale câmpului vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ . Teorema este demonstrată. ■

**Definiția 4.3.5** Câmpul vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  se numește **biscalar** dacă există funcția scalară derivabilă  $\varphi \in \mathcal{F}(D)$  și funcția diferențiabilă  $F \in \mathcal{F}(D)$ , astfel încât să avem

$$\mathbf{v} = \varphi \operatorname{grad} F = \varphi \nabla F. \quad (4.41)$$

Derivata după o direcție  $\mathbf{s}$  a unui câmp vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  într-un punct  $\mathbf{x} \in D$  se definește la fel ca la câmpurile scalare

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{t}. \quad (4.42)$$

Dacă funcția  $\mathbf{v}$  are derivate parțiale de ordinul întâi continue, existența limitei (4.42) este asigurată și

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \frac{dv_1}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{i} + \frac{dv_2}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{j} + \frac{dv_3}{ds}(\mathbf{x}) \mathbf{k}. \quad (4.43)$$

Dacă se ține cont de (4.14), (4.43) devine

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = s_1 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{x}) + s_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{x}) + s_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}(\mathbf{x}). \quad (4.44)$$

Relația (4.44) constituie *expresia carteziană* a derivatei câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , în punctul  $\mathbf{x} \in D$ , după direcția de versor  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ , expresie care se mai poate scrie în forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds}(\mathbf{x}) = \left( s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}. \quad (4.45)$$

Deoarece operatorul  $s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$  poate fi interpretat formal ca produsul scalar dintre  $\mathbf{s}$  și operatorul vectorial  $\nabla$ , se poate adopta convenția de scriere

$$\mathbf{s} \cdot \nabla = s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.46)$$

Cu această convenție și cu renunțarea la menționarea variabilei  $\mathbf{x}$ , formula de calcul (4.45) ia forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = (\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.47)$$

**Exercițiul 4.3.1** Să se determine derivata câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  definit prin

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

după direcția de parametri directori  $(1, 3, -1)$ . Care este locul geometric al punctelor din spațiu pentru care derivata după direcția  $\mathbf{s}$  este normală vectorului  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ ?

**Soluție.** Să calculăm versorul direcției menționate. Fiindcă norma vectorului  $\mathbf{v}$  este  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{11}$ , rezultă că versorul direcției după care trebuie să derivăm este  $\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$ .

Folosind (4.47), găsim

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left[ (y^2 + 6xy)\mathbf{i} + (2xy + 3x^2)\mathbf{j} + (2xz + 6yz - x^2 - y^2)\mathbf{k} \right].$$

Pentru a determina locul geometric cerut, impunem condiția de ortogonalitate  $\frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \mathbf{v} = 0$  și obținem ecuația  $x^2 + 4xy + xz + 3xz = 0$  ce reprezintă ecuația unei quadrice (suprafață algebrică de ordinul al doilea).

Analizând invariantii acestei quadrice constatăm că locul geometric este un con pătratic cu vârful în origine. ■

**Exercițiul 4.3.2** Să se determine liniile de câmp ale câmpurilor vectoriale:

$$1^0. \quad \mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\mathbf{k};$$

$$2^0. \quad \mathbf{v}(x, y, z) = (xy - 2z^2)\mathbf{i} + (4xz - y^2)\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\mathbf{k};$$

$$3^0. \quad \mathbf{v}(x, y, z) = (xz - y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (z^2 - 1)\mathbf{k};$$

$$4^0. \quad \mathbf{v}(x, y, z) = (x + y)\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

**Soluție.** Liniile de câmp sunt curbele integrale ale respectiv sistemelor simetrice:

$$1^0. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$2^0. \quad \frac{dx}{xy - 2z^2} = \frac{dy}{4xz - y^2} = \frac{dz}{yz - 2x^2};$$

$$3^0. \quad \frac{dx}{xz - y} = \frac{dy}{yz - x} = \frac{dz}{z^2 - 1};$$

$$4^0. \quad \frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{y - x} = \frac{dz}{-2z}.$$

Se obțin combinațiile integrabile:

$$1^0. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad xdx + ydy + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})dz = 0;$$

$$2^0. \quad ydx + xdy + 2zdz = 0, \quad 2xdx + zdy + ydz = 0;$$

$$3^0. \quad \frac{dx - dy}{(x - y)(1 + z)} = \frac{dz}{z^2 - 1}, \quad \frac{xdx - ydy}{(x^2 - y^2)z} = \frac{dz}{z^2 - 1};$$

$$4^0. \quad \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{dz}{-2z}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

care conduc respectiv la integralele prime:

$$1^0. \quad \frac{y}{x} = C_1, \quad z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2;$$

$$2^0. \quad z^2 + xy = C_1, \quad x^2 + yz = C_2;$$

$$3^0. \quad \frac{x - y}{z - 1} = C_1, \quad \frac{x + y}{z + 1} = C_2;$$

$$4^0. \quad (x^2 + y^2)z = C_1, \quad \ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2.$$

Curbele integrale ale sistemelor simetrice de mai sus sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^0. \begin{cases} \frac{y}{x} &= C_1 \\ z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= C_2 \end{cases} ; \quad \mathbf{2}^0. \begin{cases} z^2 + xy &= C_1 \\ x^2 + yz &= C_2 \end{cases} ; \\ \mathbf{3}^0. \begin{cases} \frac{x-y}{z-1} &= C_1 \\ \frac{x+y}{z+1} &= C_2 \end{cases} ; \quad \mathbf{4}^0. \begin{cases} (x^2 + y^2)z &= C_1 \\ \ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} &= C_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Primul câmp vectorial are liniile de câmp la intersecția planelor  $y = C_1x$  cu paraboloidii de rotație în jurul axei  $Oz$  de ecuație  $z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_2$ . De menționat că fiecare plan al familiei  $y = C_1x$  nu trebuie să conțină dreapta de intersecție a acestuia cu planul  $Oyz$ .

Liniile de câmp al celui de al doilea câmp vectorial se găsesc la intersecția hiperboloizilor  $z^2 + xy = C_1$  și  $x^2 + yz = C_2$ .

Al treilea câmp vectorial are liniile de câmp drepte rezultate din intersecția familiilor de plane  $x - y = C_1(z - 1)$  și  $x + y = C_2(z + 1)$ . Din fiecare astfel de dreaptă se scot punctele de cote  $-1$  și  $1$ .

Curbele de intersecție ale suprafețelor de rotație în jurul axei  $Oz$  de ecuații  $z = \frac{C_1}{x^2 + y^2}$  și suprafețele cilindrice cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  de ecuații  $\ln(x^2 + y^2) + 2\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C_2$  reprezintă liniile de câmp ale ultimului câmp vectorial. ■

**Exercițiul 4.3.3** Să se determine suprafețele de câmp ale câmpurilor vectoriale de mai jos care trec prin curbele  $(\Gamma)$  specificate alăturat

1.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j} + (x^2 + y^2)z \mathbf{k}$ ,  $(\Gamma) : \begin{cases} x = 2y, \\ z = 1, \end{cases}$
2.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1)\mathbf{k}$ ,  $(\Gamma) : \begin{cases} x - z = a^2, \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1, \end{cases}$
3.  $\mathbf{v}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{k}$ ,  $(\Gamma) : \begin{cases} x = 1, \\ z = y^2, \end{cases}$
4.  $\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - x^2 \sin y) \mathbf{k}$ ,  $(\Gamma) : \begin{cases} x = y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

**Soluție.** Sistemele diferențiale ale liniilor de câmp sunt:

$$\begin{aligned} 1. \quad \frac{dx}{xy^2} &= \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}; \\ 2. \quad \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2 + 1}; \\ 3. \quad \frac{dx}{xz} &= \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}; \\ 4. \quad \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 \sinh y}. \end{aligned}$$

1. O combinație integrabilă a primului sistem simetric este dată de primele două rapoarte egale care, după simplificare cu  $x^2y^2$ , conduce la  $xdx - ydy = 0$  și din care se obține integrala primă  $x^2 - y^2 = C_1$ .

O a doua combinație integrabilă se obține scriind

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2 + y^2}.$$

Dacă ultimul raport îl egalăm cu suma primelor două, după simplificarea cu  $x^2 + y^2$ , obținem combinația integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

care furnizează a doua integrală primă independentă

$$\frac{z}{xy} = C_2.$$

Atunci, generatoarele ( $G$ ) ale suprafeței de câmp au ecuațiile

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= C_1 \\ \frac{z}{xy} &= C_2. \end{cases}$$

Dar, generatoarele ( $G$ ) trebuie să se sprijine pe curba directoare  $\Gamma$ . Pentru aceasta, sistemul format de ecuațiile lor

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= C_1 \\ \frac{z}{xy} &= C_2 \\ x &= 2y, \\ z &= 1 \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Fiind un sistem de patru ecuații cu trei necunoscute  $x, y$  și  $z$ , el va fi compatibil numai dacă constantele  $C_1, C_2$  satisfac relația de condiție

$$2C_1C_2 = 3.$$

Înlocuind pe  $C_1$  și  $C_2$  din integralele prime găsim că suprafața de câmp are ecuația carteziană explicită

$$z = \frac{3xy}{2(x^2 - y^2)}.$$

**2.** O integrală primă se vede imediat și anume

$$\frac{x}{y} = C_1$$

și se obține integrând primele două rapoarte egale. Înmulțind primele două rapoarte cu  $x$ , respectiv  $y$  și adunându-le, obținem un nou raport egal cu primele trei. Un al cincilea raport egal cu primele patru se obține adunând al treilea raport cu al patrulea. Combinația obținută prin egalarea ultimilor două rapoarte

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + dz}{z + 1}$$

este integrabilă și, după efectuarea notației  $t = x^2 + y^2$ , se obține ecuația diferențială de ordinul întâi liniară și neomogenă

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1-t}{2t}$$

a cărei soluție generală este

$$z = C_2\sqrt{t} - 1 - t.$$

Revenind la notație, constatăm că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2.$$

Suprafața de câmp se obține rezolvând sistemul

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x}{y} & = & C_1 \\ \frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & = & C_2 \\ x - z & = & a^2 \\ x^2 + y^2 & = & a^2 - 1. \end{array} \right.$$



Acest sistem este compatibil dacă și numai dacă este satisfăcută relația de condiție

$$C_1 = C_2 \sqrt{1 + C_1^2}.$$

Înlocuind pe  $C_1$  și  $C_2$  găsim că suprafața de câmp are ecuația

$$z = -x^2 - y^2 + x - 1.$$

**3.** O integrală primă este  $\frac{y}{x} = C_1$ . Înmulțim primul raport cu  $x$ , al doilea cu  $y$ , alcătuim din acestea un nou raport egal cu celelalte ce are la numărător suma numărătorilor celor două rapoarte modificate și la numitor suma numitorilor acelorași rapoarte și obținem în acest fel combinația integrabilă

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2z(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cu notația  $t = x^2 + y^2$ , combinația integrabilă se reduce la ecuația diferențială Bernoulli

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1}{2} \frac{1}{z}.$$

Substituția  $z^2 = u$  reduce această ecuație la ecuația diferențială liniară

$$u' - \frac{1}{t}u = 1$$

care are soluția generală  $u = t C_2 + t \ln t$ .

Revenind la vechile variabile, găsim că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z^2 - (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = C_2.$$

Pentru a determina suprafața de câmp trebuie să găsim suprafața generată de curbele integrale ale sistemului simetric al liniilor de câmp care trebuie să se sprijine pe curba  $\Gamma$ . Se procedează ca la celelalte exerciții, se găsește relația de condiție

$$\frac{\frac{1}{C_1^4} - \left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{C_1^2}\right)}{1 + \frac{1}{C_1^2}} = C_2,$$

de unde, eliminând constantele arbitrare cu ajutorul integralelor prime, deducem că suprafața de câmp are ecuația

$$z^2 = \frac{y^4}{x^2} + 2(x^2 + y^2) \ln x.$$

4. Integralele prime ale sistemului simetric al liniilor de câmp sunt

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{z}{x} - \frac{x}{y} \cos y = C_2$$

și ansamblul acestora reprezintă ecuațiile liniilor de câmp.

Relația de condiție este  $C_1 C_2 + \cos C_1 = 0$ , de unde deducem că suprafața de câmp care trece prin curba  $\Gamma$  are ecuația carteziană explicită

$$z = \frac{x^2}{y} \cos y - y \cos xy.$$

■

## 4.4 Integrale cu vectori și câmpuri scalare

Sub această denumire se înțeleg diverse tipuri de integrale (definite sau Riemann, curbilinii, de suprafață, duble și triple) al căror integrant conțin câmpuri vectoriale sau câmpuri scalare. Vom considera câmpuri vectoriale de forma  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  sau de forma  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ , unde  $D \subset \mathbb{R}^3$  este un domeniu și câmpuri scalare de forma  $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ , toate satisfăcând condițiile cerute astfel încât integralele menționate mai sus să aibă sens. Vom prezenta pe scurt aceste tipuri de integrale.

### 4.4.1 Integrale curbilinii

Fie  $AB$  un arc de curbă în domeniul  $D$  care satisface condițiile de regularitate până la ordinul care va fi necesar.

Integrala curbilinie pe curba  $AB$  a unui câmp vectorial  $\mathbf{v}(P)$  sau a câmpului scalar  $\varphi(P)$  este una din următoarele:

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \mathbf{v} \times d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \varphi d\mathbf{r}, \quad (4.48)$$

unde  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$  este diferențiala vectorului de poziție  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ .

Având în vedere expresiile analitice ale produselor de vectori, integralele curbilinii menționate în (4.48) se exprimă după cum urmează:

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz; \quad (4.49)$$

$$\int_{AB} \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_{AB} v_2 dz - v_3 dy + \mathbf{j} \int_{AB} v_3 dx - v_1 dz + \mathbf{k} \int_{AB} v_1 dy - v_2 dx;$$

$$\int_{AB} \varphi(x, y, z) d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dx + \mathbf{j} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dy + \mathbf{k} \int_{AB} \varphi(x, y, z) dz$$

Integralele curbilinii care apar în membrul al doilea în oricare din relațiile de mai sus au forma generală

$$I = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

La studiul integralelor curbilinii de speța a doua s-a specificat faptul că dacă  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  reprezintă un câmp de forțe pe  $D$ , integrala curbilinii (4.49) este *lucrul mecanic* al forței  $\mathbf{v}(P)$  când punctul  $P$  parcurge arcul  $AB$ .

Integrala curbilinii (4.49) se mai numește *integrală de linie* a vectorului  $\mathbf{v}(P)$ . Integrala de linie pe curbă închisă ( $C$ ), parcursă o singură dată, se numește *circulația* vectorului  $\mathbf{v}(P)$  pe curba ( $C$ ).

Integralele de linie au următoarele proprietăți:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{r} &= \lambda \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \mu \int_{AB} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}; \\ \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{AP} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{PB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad P \in (AB), \quad AP \cup PB = AB; \\ \left| \int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \right| &\leq \int_{AB} |\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}| \leq \int_{AB} \|\mathbf{v}\| ds \leq M \int_{AB} ds = M \cdot L; \\ \int_{AB} \mathbf{v}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} &= \left( \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) (x_0, y_0, z_0) \cdot L, \end{aligned} \quad (4.50)$$

unde:  $\lambda$  și  $\mu$  sunt scalari arbitrari;  $L$  este lungimea arcului  $AB$ ;  $M$  este valoarea maximă a normei vectorului  $\mathbf{v}(P)$  pe arcul ( $AB$ );  $Q(x_0, y_0, z_0)$  este un punct determinat pe arcul de curbă ( $AB$ ).

Proprietatea (4.50) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie de la integrala definită.

Celelalte tipuri de integrale curbilinii din (4.48) au proprietăți similare.

Fie câmpul vectorial continuu  $\mathbf{v} \in C(D, \mathbb{R}^3)$ .

**Definiția 4.4.1** Integrala curbilinii  $I = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  se numește **independentă de drum** pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$  dacă oricare ar fi punctele  $M_1, M_2 \in$

$D$  și oricare ar fi arcele de curbă  $(M_1\alpha M_2)$  și  $(M_1\beta M_2)$ , ambele incluse în  $D$  și cu sensurile de parcurs de la  $M_1$  către  $M_2$ , avem

$$\int_{M_1\alpha M_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1\beta M_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

**Teorema 4.4.1** Integrala curbilinie  $I = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum pe  $D$  dacă și numai dacă  $I = 0$  oricare ar fi curba închisă netedă sau netedă pe porțiuni  $(C) \subset D$ .

**Demonstrație.** Dacă  $M_1, M_2 \in D$  sunt puncte arbitrare și  $(M_1\alpha M_2) \subset D$ ,  $(M_1\beta M_2) \subset D$  sunt arce arbitrare, netede pe porțiuni, atunci curba  $(M_1\alpha M_2\beta M_1)$  este închisă și netedă pe porțiuni și, reciproc, fiind dată o curbă orientată închisă, netedă pe porțiuni,  $(C) \subset D$  și  $M_1, M_2 \in (C)$  două puncte alese arbitrar, curba  $C$  se prezintă ca o juxtapunere de două arce netede pe porțiuni. Din aceste afirmații și Definiția 4.4.1 rezultă concluzia teoremei. ■

#### 4.4.2 Integrale de suprafață

Domeniul pe care se efectuează integrarea este o porțiune de suprafață  $(\Sigma)$  de ecuație vectorială

$$(\Sigma) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in (\Delta \cup \gamma) \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.51)$$

unde  $\Delta$  este un domeniu plan iar frontiera acestuia  $\gamma$  este o curbă netedă închisă. Fie  $(C)$  frontiera suprafeței  $(\Sigma)$ . Această curbă este corespunzătoare prin transformarea (4.51) a curbei închise  $\gamma$ .

Presupunem că suprafața  $(\Sigma)$  este netedă. Prin urmare, există și sunt continue pe  $\Delta$  derivatele parțiale

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v), \quad \mathbf{r}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

care satisfac condiția de regularitate  $\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$ .

În aceste condiții, funcția

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{\|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)\|} = n_1 \mathbf{i} + n_2 \mathbf{j} + n_3 \mathbf{k}$$

este versorul normalei în punctul  $M \in (\Sigma)$  corespunzător punctului  $(u, v) \in \Delta$ , iar  $n_1, n_2, n_3$  sunt cosinusurile directoare ale acestui versor.

După același criteriu ca și la integrale curbilinii, introducem următoarele integrale de suprafață de speța întâi:

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) d\sigma; \quad \iint_{(\Sigma)} \varphi \mathbf{n} d\sigma, \quad (4.52)$$

unde  $d\sigma$  este elementul de arie al suprafeței  $(\Sigma)$ .

În cazul când suprafața este dată prin ecuația vectorială (4.51), expresia elementului de arie  $d\sigma$  este

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv,$$

unde  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  și  $G(u, v)$  sunt coeficienții lui Gauss:

$$E(u, v) = \mathbf{r}_u^2(u, v); \quad F(u, v) = \mathbf{r}_u(u, v) \cdot \mathbf{r}_v(u, v); \quad G(u, v) = \mathbf{r}_v^2(u, v).$$

Integralele de suprafață cu vectori din (4.52) se calculează după cum urmează:

$$\begin{aligned} \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma &= \iint_{\Delta} (n_1 w_1 + n_2 w_2 + n_3 w_3) \sqrt{EG - F^2} du dv; \\ \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \times \mathbf{w}) d\sigma &= \mathbf{i} \iint_{(\Sigma)} (n_2 w_3 - n_3 w_2) d\sigma + \\ &+ \mathbf{j} \iint_{(\Sigma)} (n_3 w_1 - n_1 w_3) d\sigma + \mathbf{k} \iint_{(\Sigma)} (n_1 w_2 - n_2 w_1) d\sigma; \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\iint_{(\Sigma)} \varphi \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{i} \iint_{(\Sigma)} n_1 \varphi d\sigma + \mathbf{j} \iint_{(\Sigma)} n_2 \varphi d\sigma + \mathbf{k} \iint_{(\Sigma)} n_3 \varphi d\sigma. \quad (4.54)$$

Integralele din membrul doi al egalităților (4.53) și (4.54) se reduc la integrale duble pe  $\Delta$  conform formulei de calcul a unei integrale de suprafață de speța întâi.

**Definiția 4.4.2** O expresie de forma  $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma$  se numește **flux elementar** al câmpului vectorial  $\mathbf{w}$  prin elementul de suprafață orientat  $\mathbf{n} d\sigma$ , iar integrala de suprafață de speța întâi  $\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma$  se numește **fluxul total** al câmpului  $\mathbf{w}$  prin suprafața  $(\Sigma)$ .

Proprietățile integralelor de suprafață (4.52) sunt analoage celor prezentate pentru integrale curbilinii. Prin urmare, avem

$$\iint_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) d\sigma = \lambda \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) d\sigma + \mu \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad (4.55)$$

$$\iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma = \iint_{(\Sigma_1)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma + \iint_{(\Sigma_2)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma; \quad (4.56)$$

$$\left| \iint_{(\Sigma)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) d\sigma \right| \leq \iint_{(\Sigma)} |(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})| d\sigma \leq \iint_{(\Sigma)} \|\mathbf{w}\| d\sigma \leq M \iint_{(\Sigma)} d\sigma = M A_\Sigma; \quad (4.57)$$

$$\iint_{(\Sigma)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} d\sigma = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})(x_0, y_0, z_0) A_\Sigma, \quad (4.58)$$

unde:  $\lambda$  și  $\mu$  sunt scalari arbitrari;  $\Sigma_1$  și  $\Sigma_2$  sunt submulțimi ale suprafeței  $\Sigma$  pentru care  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$ ,  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ;  $A_\Sigma$  este aria suprafeței  $(\Sigma)$ ;  $M$  este valoarea maximă a normei vectorului  $\mathbf{w}(P)$  pe suprafața  $(\Sigma)$ ;  $Q(x_0, y_0, z_0)$  este un punct determinat al suprafeței  $\Sigma$ .

Proprietatea (4.58) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie din teoria integralelor definite.

Celelalte integrale de suprafață din (4.52) au proprietăți asemănătoare celor prezentate în (4.55) – (4.57).

Este posibil ca suprafața netedă  $(\Sigma)$  să fie reprezentată cartezian explicit prin ecuația

$$(\Sigma) : \quad z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (4.59)$$

caz în care elementul de arie  $d\sigma$  al suprafeței are forma

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde

$$p = p(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \quad q = q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y),$$

iar versorul normalei  $\mathbf{n}$  la fața superioară a suprafeței are expresia analitică

$$\mathbf{n} = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{i} - \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \mathbf{k}. \quad (4.60)$$

În cazul menționat de (4.59) și (4.60), reducerea unei integrale de suprafață  $\iint_{(\Sigma)} \varphi(x, y, z) d\sigma$  la o integrală dublă se face cu ajutorul formulei de calcul

$$\iint_{(\Sigma)} \varphi(x, y, z) d\sigma = \iint_D \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \quad (4.61)$$

Folosind (4.59) – (4.61) se pot transpune cu ușurință toate rezultatele stabilite în cazul când suprafața  $(\Sigma)$  este dată prin ecuația vectorială (4.51). Pentru aceasta trebuie efectuată schimbarea de variabile  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  în integrala dublă (4.61).

Afirmații asemănătoare au loc și atunci când suprafața  $(\Sigma)$  este dată implicit printr-o ecuație de forma  $F(x, y, z) = 0$ . Astfel,

$$p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

iar versorul normalei la suprafața  $(\Sigma)$  în punctul  $P(x, y, z) \in (\Sigma)$  este

$$\mathbf{n}(P) = \frac{(\nabla F)(x, y, z)}{\|(\nabla F)(x, y, z)\|}.$$

#### 4.4.3 Integrale triple (de volum)

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu carabil, deci o mulțime care are volum. Elementul de volum, notat cu  $d\omega$ , are expresia  $d\omega = dx dy dz$ .

Integralele de volum sau triple care ne vor interesa sunt:

$$\iiint_{\Omega} \varphi d\omega; \quad \iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega. \quad (4.62)$$

Prima din integralele (4.62) a fost studiată arătându-se că, în anumite ipoteze asupra domeniului  $\Omega$ , ea se reduce la o iterație de integrale simple. De exemplu, dacă  $\Omega$  este un *domeniu simplu* în raport cu axa  $Oz$  iar proiecția sa pe planul  $xOy$  este un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$ , atunci

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Astfel,

$$\iiint_{\Omega} \varphi d\omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(x, y, z) dz.$$

A doua integrală (4.62) se reduce la calculul a trei integrale de tipul celei precedente,

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega = \mathbf{i} \iiint_{\Omega} v_1 d\omega + \mathbf{j} \iiint_{\Omega} v_2 d\omega + \mathbf{k} \iiint_{\Omega} v_3 d\omega,$$

fiecăreia din integralele membrului drept urmând să i se aplice o formulă de calcul.

Prezentăm, fără demonstrație, unele proprietăți ale integralelor triple:

$$\iiint_{\Omega} (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) d\omega = \lambda \iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega + \mu \iiint_{\Omega} \mathbf{w} d\omega;$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{v} d\omega = \iiint_{\Omega_1} \mathbf{v} d\omega + \iiint_{\Omega_2} \mathbf{v} d\omega,;$$

$$\left| \iiint_{\Omega} \mathbf{v}(P) d\omega \right| \leq \iiint_{\Omega} \|\mathbf{v}(P)\| d\omega \leq M \iiint_{\Omega} d\omega = M \text{Vol}(\Omega),$$

unde  $\Omega_1, \Omega_2$  sunt astfel încât  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ ,  $\text{Int } \Omega_1 \cap \text{Int } \Omega_2 = \emptyset$ ,  $M = \max_{P \in \Omega} \|\mathbf{v}(P)\|$  și  $\text{Vol}(\Omega)$  este volumul domeniului  $\Omega$ .

#### 4.4.4 Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecințe

Să considerăm domeniul tridimensional  $V$  a cărui frontieră este suprafața închisă netedă  $S$  și fie  $(x_1, x_2, x_3)$  coordonatele carteziene ale unui punct oarecare  $P \in V \cup S$ . Suprafața  $S$  fiind netedă, în fiecare punct  $P \in S$  există versorul  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$  al normalei exterioare. Astfel, avem un câmp vectorial definit în punctele  $P$  ale suprafeței care depinde de variabila vectorială  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}$ .

Considerăm  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(V \cup S, \mathbb{R}^3)$  un câmp vectorial continuu pentru care coordonata  $v_i$  are derivata parțială  $v_{i,i}$  continuă în  $V$ .

În aceste ipoteze are loc *formula integrală Gauss–Ostrogradski*

$$\iint_S (n_1 v_1 + n_2 v_2 + n_3 v_3) d\sigma = \iiint_V (v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3}) d\omega, \quad (4.63)$$



care se poate scrie și în forma

$$\iint_S \sum_{i=1}^3 n_i v_i d\sigma = \iiint_V \sum_{i=1}^3 v_{i,i} d\omega. \quad (4.64)$$

În particular, considerând pe rând:  $v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 0$ ;  $v_1 = 0, v_2 = 1, v_3 = 0$ ;  $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 1$ , formula (4.63) devine:

$$\iint_S n_1 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_2 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_3 d\sigma = 0. \quad (4.65)$$

Relațiile (4.65) pot fi scrise unitar în forma

$$\iint_S \mathbf{n} d\sigma = \mathbf{0}.$$

Dacă alegem succesiv pentru câmpul vectorial  $\mathbf{v}$  una din următoarele expresii analitice:

$$(x_1, 0, 0); \quad (0, x_1, 0); \quad (0, 0, x_1);$$

$$(x_2, 0, 0); \quad (0, x_2, 0); \quad (0, 0, x_2);$$

$$(x_3, 0, 0); \quad (0, x_3, 0); \quad (0, 0, x_3),$$

din (4.64) obținem

$$\iint_S n_1 x_1 d\sigma = \text{vol}(V); \quad \iint_S n_2 x_1 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_3 x_1 d\sigma = 0;$$

$$\iint_S n_1 x_2 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_2 x_2 d\sigma = \text{vol}(V); \quad \iint_S n_3 x_2 d\sigma = 0;$$

$$\iint_S n_1 x_3 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_2 x_3 d\sigma = 0; \quad \iint_S n_3 x_3 d\sigma = \text{vol}(V).$$

Aceste relații pot fi scrise concentrat în forma

$$\iint_S n_i x_j d\sigma = \delta_{ij} \text{vol}(V), \quad (4.66)$$

unde indicii  $i$  și  $j$  iau oricare din valorile 1, 2, 3,  $\delta_{ij}$  este simbolul Kronecker ( $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ , dacă  $i \neq j$ ), iar  $\text{vol}(V)$  este volumul domeniului  $V$ .

Din (4.66) se pot deduce relațiile

$$\iint_S x_1 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{i}; \quad \iint_S x_2 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{j}; \quad \iint_S x_3 \mathbf{n} d\sigma = \text{vol}(V) \mathbf{k}. \quad (4.67)$$

#### 4.4.5 Câmp potențial

**Definiția 4.4.3** *Un câmp vectorial continuu  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  se numește câmp potențial dacă există câmpul scalar  $\varphi \in C^1(D)$ , numit potențialul scalar al câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , astfel încât*

$$\mathbf{v}(M) = (\nabla \varphi)(M), \quad (\forall) M \in D.$$

**Definiția 4.4.4** *Un câmp de forțe  $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$  se numește câmp conservativ de forțe dacă există câmpul scalar  $U \in C^1(D)$ , numită funcție de forță, astfel încât  $\mathbf{F} = \nabla U$ .*

**Exemplul 4.4.1** *Câmpul gravitațional este un câmp conservativ de forțe.*

**Soluție.** Într-adevăr, să presupunem că originea reperului  $Oxyz$  este în centrul pământului. Se știe că forța  $\mathbf{F}$  cu care este atras de către pământ un punct material  $M(\mathbf{r})$  este

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{C}{r^3} \mathbf{r},$$

unde  $C$  este o constantă iar  $r$  este mărimea vectorului de poziție  $\mathbf{r}$  a punctului  $M$ . Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{z}{r^3},$$

rezultă că putem reprezenta câmpul de forță gravitațional  $\mathbf{F}$  în forma

$$\mathbf{F}(M) = (\nabla U)(M),$$

unde  $U(M) = C/r$ .

Prin urmare, câmpul vectorial  $\mathbf{F}$  este un câmp conservativ de forțe pe  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . ■

**Teorema 4.4.2** *Fie câmpul vectorial  $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$ , unde  $D$  este un domeniu tridimensional.*

*Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- $\mathbf{v}$  este un câmp potențial;
- integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum pe  $D$ ;
- expresia diferențială  $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este diferențială totală pe  $D$ .

**Demonstrație.** Faptul că prima afirmație implică celelalte două este evident.

Să presupunem că  $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este diferențială totală pe  $D$ . Atunci există funcția  $U$  diferențiabilă pe  $D$  astfel încât  $\omega = dU = (\nabla U) \cdot (d\mathbf{r})$  din care deducem că

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

și deci integrala curbilinie depinde doar de extremitățile  $A$  și  $B$  ale curbei ( $C$ ). Din  $\omega = (\nabla U) \cdot (d\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  și unicitatea expresiei diferențialei unei funcții obținem  $\mathbf{v} = \nabla U$ , ceea ce arată că  $\mathbf{v}$  este un câmp potențial. Așadar, prima afirmație este implicată de ultima.

Dacă integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum pe  $D$ , considerând arcul de curbă  $AM \subset D$  cu extremitatea  $A$  fixă și cealaltă extremitate  $M$  variabilă, funcția  $U(M) = \int_{AM} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  are proprietatea  $\nabla U = \mathbf{v}$ , adică  $\mathbf{v}$  este un câmp potențial. ■

## 4.5 Divergența unui câmp vectorial

Fie  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  un domeniu având ca frontieră suprafața închisă netedă sau netedă pe porțiuni  $\Sigma$  și  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega \cup \Sigma, \mathbb{R}^3)$  un câmp vectorial continuu pe  $\Omega \cup \Sigma$ , diferențiabil în orice punct  $M(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ .

Considerând un punct  $P_0 \in \Omega$ , de vector de poziție  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ , există domenii  $V \subset \Omega$  astfel încât  $P_0 \in V$ . Presupunem că frontiera unui astfel de domeniu  $V$  este o suprafață închisă netedă  $S$ . Fie  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$  versorul normalei exterioare într-un punct oarecare  $P \in S$  de vector de poziție  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

Fie  $\delta(V)$  diametrul mulțimii  $V$ , adică maximul distanței dintre două puncte oarecare  $M, Q \in V$ . Presupunem că domeniul  $V$  are volum și că  $\text{vol}(V)$  este volumul său.

Cu aceste pregătiri, considerăm raportul

$$\frac{\Phi}{\text{vol}(V)} = \frac{\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\sigma}{\text{vol}(V)}, \quad (4.68)$$

dintre fluxul  $\Phi$  a câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  prin suprafața  $S$  și  $\text{vol}(V)$ .

**Definiția 4.5.1** Se numește **divergența** câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , în punctul  $P_0$ , notată  $(\text{div } \mathbf{v})(P_0)$  sau  $(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0)$ , limita raportului (4.68) atunci când diametrul domeniului  $V$  tinde la zero, deci

$$\lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})) d\sigma}{\text{vol}(V)} = (\text{div } \mathbf{v})(P_0) = (\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0). \quad (4.69)$$

**Teorema 4.5.1** Dacă  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$  este câmp vectorial diferențiabil în  $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP_0}$  și există constantele pozitive  $k_1$  și  $k_2$  astfel încât:

$$\text{aria}(S) \leq k_1 \delta^2(V); \quad \text{vol}(V) \geq k_2 \delta^3(V), \quad (4.70)$$

atunci limita (4.69) există și

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0). \quad (4.71)$$

**Demonstrație.** Din ipoteza diferențiabilității funcției vectoriale  $\mathbf{v}$  de argument vectorial în punctul  $\mathbf{x}_0 \in D$  rezultă că are loc identitatea

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \quad (4.72)$$

unde

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (d\mathbf{v})(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \left( J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) \begin{pmatrix} X - X_0 \end{pmatrix} \right)$$

este valoarea în  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) \begin{pmatrix} X - X_0 \end{pmatrix}$  a diferențialei funcției  $\mathbf{v}$  în punctul  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{i} \ \mathbf{j} \ \mathbf{k}) X_0$ ,

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right\|_{3 \times 3}$$

este matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  în punctul  $\mathbf{x}_0$ , iar  $\boldsymbol{\alpha}$  este o funcție vectorială definită pe  $\mathbb{R}^3$  cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (4.73)$$

În aceste relații,  $X - X_0$  și  $X_0$  reprezintă matricea cu trei linii și o coloană a coordonatelor vectorilor  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  și respectiv  $\mathbf{x}_0$  în baza formată de versorii

ortogonali  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  care, împreună cu originea  $O$ , constituie reperul cartezian ortogonal  $Ox_1x_2x_3$ .

Dacă înmulțim ambii membri ai relației (4.72) cu  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , integrăm pe suprafața  $S$ , ținem cont de relațiile (4.66) și (4.67) și împărțim cu  $\text{vol}(V)$ , se obține

$$\frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0) + \frac{\iint_S \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) d\sigma}{\text{vol}(V)}.$$

Trecem acum în membrul întâi primul termen al membrului doi al acestei relații și luăm valoarea absolută a noii egalități. A doua ipoteză (4.70), faptul că  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta(V)$  și inegalitatea Schwarz–Cauchy–Buniakowski

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\| \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|,$$

conduc la

$$\left| \frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\iint_S \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| d\sigma}{k_2 \delta^2(V)}. \quad (4.74)$$

Însă, din (4.73) rezultă că funcția  $\boldsymbol{\alpha}$  este continuă în  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  ceea ce atrage că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\mu(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{k_2}{k_1} \varepsilon, \quad (4.75)$$

oricare ar fi  $\mathbf{x} \in S$  care satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \mu(\varepsilon).$$

Putem considera că domeniul  $V \subset \Omega$  ce conține punctul  $\mathbf{x}_0$  este astfel ales încât  $\delta(V) \leq \mu(\varepsilon)$ . În acest caz, din (4.70), (4.74), (4.75) rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\mu(\varepsilon) > 0$  astfel încât oricare ar fi domeniul  $V$  cu  $\delta(V) < \mu$  avem

$$\left| \frac{\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma}{\text{vol}(V)} - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon$$

ceea ce conduce la relația

$$\lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\sigma}{\text{vol}(V)} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) (\mathbf{x}_0). \quad (4.76)$$

Din (4.69) și (4.76) rezultă (4.71). ■

Cum divergența câmpului vectorial  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  într-un punct oarecare  $M \in \Omega$  este

$$(\text{div } \mathbf{v})(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z), \quad (4.77)$$

analizând (4.77) constatăm că în membrul al doilea este rezultatul înmulțirii scalare a operatorului diferențial al lui Hamilton

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

cu vectorul  $\mathbf{v}$  și deci notația  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  pentru divergența câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  este justificată.

**Definiția 4.5.2** *Un câmp vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ , diferențiabil în domeniul  $D$ , se numește **solenoidal** dacă  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ .*

## 4.6 Rotorul unui câmp vectorial

Să considerăm o direcție arbitrară de versor  $\mathbf{a}$  și fie  $(\Pi)$  planul perpendicular pe versorul  $\mathbf{a}$  care trece printr-un punct fixat  $P_0 \in \Omega$ . În acest plan considerăm o curbă simplă închisă  $(C)$  care înconjoară punctul  $P_0$ . Curbă  $(C)$  delimitează o porțiune  $(S)$  de suprafață plană, a cărei arie o notăm tot cu  $S$ . Fie  $\delta(S)$  diametrul mulțimii  $(S)$ .

Pentru a introduce rotorul unui câmp vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ , plecăm de la circulația  $\Gamma$  a acestuia pe curba  $(C)$  și să calculăm limita

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

În acest scop, transformăm raportul  $\Gamma/S$  într-un raport dintre un flux pe o suprafață închisă  $(\mathcal{S})$  și volumul domeniului  $V$  închis de această suprafață,

reducând astfel problema la cea prezentată în paragraful precedent. Pentru aceasta, considerăm porțiunea din suprafața cilindrică, cu generatoarele paralele cu  $\mathbf{a}$ , de înălțime constantă  $h$  și având una din baze porțiunea de suprafață  $(S)$ .

Notăm cu  $(S_1)$  cealaltă bază a cilindrului, cu  $(S_\ell)$  suprafața laterală a sa, iar cu  $d\sigma_\ell$  elementul de arie al suprafeței  $(S_\ell)$ .

Având în vedere că  $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} ds$  și că  $h \cdot ds = d\sigma_\ell$ , rezultă că

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{h \cdot \int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{h \cdot S} = \frac{\iint_{S_\ell} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} d\sigma_\ell}{\text{vol}(V)}, \quad (4.78)$$

unde  $\boldsymbol{\tau}$  este versorul tangentei la curba  $(C)$  orientat astfel încât să fie compatibil cu orientarea suprafeței  $(S)$ . Însă  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{n}_\ell$  (normala exterioară la suprafața laterală a cilindrului) formează un triedru drept astfel că  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_\ell$ . Atunci, (4.78) devine

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\iint_{S_\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_\ell d\sigma_\ell}{\text{vol}(V)}. \quad (4.79)$$

Deoarece integralele pe bazele cilindrului din integrandul care intră în (4.79) sunt nule, în baza celor deduse în paragraful precedent, rezultă că

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(V) \rightarrow 0} \frac{\iint (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\text{vol}(V)} = (\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}))(\mathbf{x}_0). \quad (4.80)$$

Dacă aplicăm formula de calcul a divergenței, găsim că limita din (4.80) se poate scrie ca produsul scalar dintre vectorul  $\mathbf{a}$  și un anumit vector  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$

$$\lim_{\delta(S) \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{S} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_0),$$

unde

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (v_{3,2}(\mathbf{x}_0) - v_{2,3}(\mathbf{x}_0))\mathbf{i} + (v_{1,3}(\mathbf{x}_0) - v_{3,1}(\mathbf{x}_0))\mathbf{j} + (v_{2,1}(\mathbf{x}_0) - v_{1,2}(\mathbf{x}_0))\mathbf{k}.$$

**Definiția 4.6.1** Vectorul  $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$  se numește **rotorul** câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  în punctul  $\mathbf{x}_0$  și se scrie:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (\text{rot } \mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Dacă analizăm expresia rotorului vedem că aceasta se poate calcula cu ajutorul determinantului formal

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0) = (\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Într-un punct oarecare  $\mathbf{x}$ , vom avea

$$(\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) = (\operatorname{rot} \mathbf{v})(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1(\mathbf{x}) & v_2(\mathbf{x}) & v_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

**Definiția 4.6.2** *Un câmp vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ , diferentiabil în domeniul  $D$ , se numește **irotațional** sau **lamelar** dacă  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ .*

**Teorema 4.6.1** *Un câmp potențial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ , al cărui potențial  $\varphi \in C^2(D)$ , este lamelar.*

**Demonstrație.** Într-adevăr, câmpul vectorial  $\mathbf{v}$  fiind potențial,  $\mathbf{v}(M) = \operatorname{grad} \varphi(M)$ . Calculând rotorul acestui câmp, găsim

$$\nabla \times \mathbf{v} = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right) \mathbf{k}.$$

Deoarece  $\varphi$  este de clasă  $C^2(D)$ , derivatele parțiale mixte de ordinul doi ale lui  $\varphi$  sunt egale și deci  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . ■

## 4.7 Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton

O parte a acestor reguli au fost menționate în (4.29) unde operatorul  $\nabla$  s-a aplicat unor funcții scalare. Mai mult, gradientul poate fi aplicat și unui produs scalar a două câmpuri vectoriale. Am văzut mai sus că operatorul  $\nabla$  aplicat scalar unui câmp vectorial, sau unei sume de câmpuri bisclare,



dă ca rezultat divergența acelor câmpuri, iar dacă  $\nabla$  se aplică vectorial unor asemenea câmpuri se obține rotorul acelor câmpuri vectoriale, adică

$$\nabla\varphi = \text{grad } \varphi; \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{u}; \quad \nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}.$$

În baza celor prezentate mai sus, se pot demonstra următoarele formule de calcul cu operatorul vectorial  $\nabla$  a lui Hamilton (pentru simplitate, renunțăm la scrierea variabilei vectoriale  $\mathbf{x}$ ):

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v};$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v};$$

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \varphi(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \varphi);$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v});$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{u}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \varphi);$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v};$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v},$$

unde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  este *operatorul lui Laplace* sau *laplacian*. Avem

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Ecuția diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

se numește *ecuația lui Laplace*. Orice soluție a ecuației lui Laplace se numește *funcție armonică*.

Pentru alte operații cu operatorul  $\nabla$ , obținem:

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}; \quad (4.81)$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \text{rot}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0}; \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0.$$

## 4.8 Formule integrale

Fie  $(\Sigma)$  o suprafață închisă ce mărginește domeniul  $\Omega$ , care are următoarele proprietăți:

- o dreaptă paralelă la axele de coordonate ale reperului cartezian ortogonal  $Oxyz$  intersectează suprafața  $(\Sigma)$  în cel mult două puncte;
- $\Omega$  se proiectează pe planul  $xOy$  după un domeniu  $D$  și cilindrul proiectant al lui  $\Omega$  cu generatoarele paralele cu  $Oz$  este tangent la  $\Omega$  în lungul unei curbe  $(\Gamma)$  care împarte  $(\Sigma)$  în două suprafețe (condiții analoage se pot pune și pentru planele  $yOz$  și  $zOx$ );
- suprafața  $(\Sigma)$  este cu două fețe și presupunem că este formată dintr-un număr de porțiuni netede.

Pentru astfel de suprafețe  $(\Sigma)$  și domeniile  $\Omega$  mărginite de ele au loc următoarele formule integrale (legături între tipurile de integrale cu vectori sau cu câmpuri scalare):

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega; \quad (4.82)$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \varphi \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi \, d\omega; \quad (4.83)$$

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\omega, \quad (4.84)$$

$$\iint_{\Sigma} \varphi \frac{d\psi}{d\mathbf{n}} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} (\operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi + \varphi \nabla^2 \psi) \, d\omega, \quad (4.85)$$

$$\iint_{\Sigma} \left( \varphi \frac{d\psi}{d\mathbf{n}} - \psi \frac{d\varphi}{d\mathbf{n}} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) \, d\omega, \quad (4.86)$$

Formulă integrală (4.82) este forma vectorială a formulei integrale Gauss–Ostrogradski (4.63). Aceasta este întâlnită și sub denumirea *formula integrală a divergenței* sau ca *teorema divergenței*.

Identitatea (4.83) se numește *formula integrală a gradientului*.

Relației (4.84) i se poate spune *formula integrală a rotorului*.

Egalitatea (4.85) este cunoscută sub denumirea de *prima identitate integrală a lui Green*.

Relația (4.86) este a doua identitate integrală a lui Green.

Dacă  $(S)$  este o porțiune de suprafață regulată orientabilă (cu două fețe) având frontiera o curbă închisă rectificabilă  $(\Gamma)$ , iar câmpul vectorial  $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R}^3)$  este diferențiabil și  $S \subset \Omega$ , atunci are loc formula integrală a lui Stokes

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\sigma. \quad (4.87)$$

**Teorema 4.8.1** Câmpul vectorial  $\mathbf{v} \in C^1(D, \mathbb{R}^3)$  este irotational pe domeniul simplu conex  $D \subset \mathbb{R}^3$  dacă și numai dacă integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum pe  $D$ .

**Demonstrație.** Presupunem  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  și fie  $(C)$  o curbă închisă oarecare inclusă în  $D$ . Există atunci suprafețe  $S \subset D$  cu frontiera  $C$ . Aplicând formula integrală a lui Stokes (4.87), găsim  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$ . În baza Teoremei 4.4.1 rezultă că integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum pe  $D$ .

Demonstrația reciprocei se face prin reducere la absurd. Presupunem că există un punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  în care  $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  și fie că, în acest punct,  $v_{2,1} - v_{1,2} = \mu > 0$ . Atunci există o vecinătate a punctului  $M_0$ , situată în planul  $z = z_0$  și inclusă în  $D$ , în punctele căreia să avem  $v_{2,1} - v_{1,2} > 0$ . Aplicând formula lui Stokes în care porțiunea de suprafață este în vecinătatea de mai sus, găsim că pe frontiera acesteia, care este o curbă închisă din  $D$ , integrala curbilinie este diferită de zero. Dar acest lucru contrazice ipoteza. ■

**Exercițiul 4.8.1** Se dă câmpul de forță definit pe  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotational și să se determine funcția de forță.

**Soluție** Faptul că  $\mathbf{F}$  este câmp irotational de forță este simplu de arătat.

În baza Teoremei 4.8.1 rezultă că integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  este independentă de drum în  $\mathbb{R}^3$ . Folosind Teorema 4.4.2 deducem că funcția de forță care se anulează în origine este  $U = \int_{OM} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , unde  $M(x, y, z)$  este un punct oarecare.

Deoarece integrala curbilinie este independentă de drum, se poate integra de la origine la  $M$  pe muchiile paralelipipedului dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate ce are  $O$  și  $M$  ca vârfuri opuse. Atunci

$$U(M) = \int_0^x v_1(t, 0, 0)dt + \int_0^y v_2(x, t, 0)dt + \int_0^z v_3(x, y, t)dt.$$

Având în vedere coordonatele câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , rezultă că funcția de forță a câmpului de forță  $\mathbf{F}$ , care se anulează în origine, este

$$U(x, y, z) = \int_0^z xy(x + y + 2t)dt = xyz(x + y + z).$$

Oricare altă funcție de forță a câmpului  $\mathbf{F}$  diferă printr-o constantă de  $U$  determinat mai sus. ■

**Exercițiul 4.8.2** *Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial*

$$\mathbf{w} = (-x + y + z)\mathbf{i} + (x - y + z)\mathbf{j} + (x + y - z)\mathbf{k}.$$

*Arătați de asemenea că  $\mathbf{w}$  este un câmp conservativ și determinați funcțiile de forță. Calculați apoi fluxul câmpului  $\mathbf{w}$  prin fața exterioară a suprafeței închise  $S$  de ecuație*

$$|-x + y + z| + |x - y + z| + |x + y - z| = 1.$$

**Soluție.** Din sistemul de ecuații diferențiale ale liniilor de câmp deducem combinațiile integrabile

$$\frac{dx + dy + dz}{x + y + z} = \frac{dy - dx}{-2(y - x)} = \frac{dx + dy - 2dz}{-2(x + y - 2z)}$$

și liniile de câmp

$$\begin{cases} (x + y + z)^2(x + y - 2z) = C_1 \\ x + y - 2z = C_2(y - x) \end{cases}$$

care sunt intersecții de cilindri și plane.

Avem că  $\nabla \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$  ceea ce arată că  $\mathbf{w}$  este un câmp conservativ.

Observând că expresia diferențială  $\omega = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$  este diferențiala funcției

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx,$$

deducem că funcțiile de forță sunt

$$F(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + zx + \text{const.}$$

Suprafața prin care se calculează fluxul este închisă, are opt fețe și limitează domeniul  $V$ . Folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski rezultă  $\nabla \cdot \mathbf{w} = -3$  și  $\Phi = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{w} dx dy dz = -3 \iiint_V dx dy dz$ .

Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile

$$X = -x + y + z, \quad Y = x - y + z, \quad z = x + y - z$$

pentru care  $dx dy dz = \frac{1}{4} dX dY dZ$ . Frontiera  $\Sigma$  a domeniului transformat  $V_1$  are ecuația  $|X| + |Y| + |Z| = 1$ , deci  $V_1$  este un octaedru de volum  $4/3$ . Rezultă  $\Phi = -1$ . ■

**Exercițiul 4.8.3** Fie  $\mathbf{a}$  un versor constant și câmpul vectorial

$$\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{a} \times \mathbf{u}(r).$$

Să se arate că au loc relațiile:

1.  $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma + \mathbf{a} \iiint_{\Omega} \text{div} \mathbf{u} d\omega = \iiint_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}} d\omega;$
2.  $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \mathbf{a} \cdot \iiint_{\Omega} \text{rot} \mathbf{u} d\omega = 0;$
3.  $\iint_{\Sigma} \text{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \mathbf{a} \times \iiint_{\Omega} \text{rot}(\text{rot} \mathbf{u}) d\omega = - \iiint_{\Omega} \frac{d(\text{rot} \mathbf{u})}{d\mathbf{a}} d\omega,$

unde  $\Omega$  este un domeniu tridimensional oarecare mărginit de suprafața  $\Sigma$ , închisă și netedă pe porțiuni.

**Soluție.** Utilizând formula integrală a rotorului (4.84), obținem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - \iiint_{\Omega} \text{rot} \mathbf{v} d\omega.$$

Înlocuind în membrul al doilea pe  $\mathbf{v}$  și ținând cont de formula (4.81), deducem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = - \iiint_{\Omega} [\mathbf{a} \text{div} \mathbf{u} - \mathbf{u} \text{div} \mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u}] d\omega.$$

Deoarece  $\mathbf{a}$  este versor constant,  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  și  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \mathbf{0}$  și

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\mathbf{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega + \iiint_{\Omega} (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\omega.$$

Cu relația (4.47) avem  $\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\mathbf{a} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} d\omega + \iiint_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}} d\omega$ ,

de unde rezultă prima identitate.

Pentru a demonstra a doua identitate, aplicăm formula integrală Gauss–Ostrogradski (4.82), calculând totodată și divergența produsului de vectori. Obținem

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u}) d\omega = -\mathbf{a} \cdot \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u} d\omega,$$

din care se deduce a doua identitate.

Pentru demonstrația celei de a treia identități se folosește (4.83). ■

**Exercițiul 4.8.4** Se consideră câmpul vectorial  $\mathbf{w} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ , unde  $\mathbf{a}$  este un versor constant și  $\mathbf{r}$  este vectorul de poziție al unui punct  $M(x, y, z) \in \Omega$ . Frontiera domeniului  $\Omega$  este suprafața închisă orientabilă  $(\Sigma)$  cu proprietățile precizate la începutul paragrafului.

Să se arate că au loc relațiile:

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{n} d\sigma = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{w} d\omega; \quad (4.88)$$

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}) d\sigma = 2 \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} d\omega. \quad (4.89)$$

**Soluție.** Calculând divergența câmpului vectorial  $\mathbf{w}$ , găsim

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = r^2 - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^2.$$

Aplicăm formula integrală a gradientului (4.83) în care  $\varphi = \operatorname{div} \mathbf{w}$ . Așadar, vom avea

$$\iint_{\Sigma} (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} d\omega.$$

Având în vedere expresia lui  $\operatorname{div} \mathbf{w}$  și regulile de calcul cu gradientul, deducem

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{w} = 2[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}].$$

Pe de altă parte  $\text{rot rot } \mathbf{w} = 4[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}]$ , adică

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = 2\text{grad div } \mathbf{w} \quad (4.90)$$

și astfel egalitatea (4.88) este evidentă.

Pentru a demonstra relația (4.89) folosim formula integrală a rotorului (4.84) în care câmpul vectorial  $\mathbf{v}$  este înlocuit cu  $\text{rot } \mathbf{w}$ . Prin urmare, avem

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{w}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \text{rot rot } \mathbf{w} d\omega. \quad (4.91)$$

Dacă în relația (4.91) facem uz de (4.90) deducem că are loc și (4.89). ■

**Exercițiul 4.8.5** *Se consideră  $\mathbf{v} = \varphi(r)\mathbf{r}$  un câmp vectorial definit pe un domeniu  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  a cărui frontieră este suprafața închisă și netedă pe porțiuni ( $\Sigma$ ). Presupunem că funcția  $\varphi$  este diferențiabilă pe un interval  $I \subset \mathbb{R}_+$ . Vectorul de poziție și mărimea razei vectoriale ale punctului  $M(x, y, z) \in \Omega \cup \Sigma$  sunt*

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.92)$$

*Să se arate că au loc identitățile:*

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r) d\omega = \iiint_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \text{grad } \varphi(r) d\omega; \quad (4.93)$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(r)\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.94)$$

unde  $\Gamma$  este o curbă simplă închisă, netedă pe porțiuni, inclusă în domeniul închis  $\Omega \cup \Sigma$ , care este frontiera unei suprafețe deschise  $S \subset \Omega \cup \Sigma$ .

**Soluție.** Din (4.92) rezultă că expresia analitică a câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  este

$$\mathbf{v} = x\varphi(r)\mathbf{i} + y\varphi(r)\mathbf{j} + z\varphi(r)\mathbf{k},$$

iar divergența lui, conform (4.77), este

$$\text{div } \mathbf{v} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

Formula integrală Gauss–Ostrogradski (4.82) conduce la

$$\iint_{\Sigma} \varphi(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma - 3 \iiint_{\Omega} \varphi(r) d\omega = \iiint_{\Omega} r\varphi'(r) d\omega. \quad (4.95)$$

Identitatea (4.93) rezultă din (4.95) deoarece  $r\varphi'(r) = \mathbf{r} \cdot \text{grad } \varphi(r)$ .

Identitatea (4.94) rezultă din formula lui Stokes (4.87) aplicată câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ , căci  $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } (\varphi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ . ■

## Capitolul 5

# Funcții de variabilă complexă

### 5.1 Mulțimea numerelor complexe

Fie  $\mathbb{C}$  mulțimea perechilor ordonate de forma  $(x, y)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}. \quad (5.1)$$

Două elemente ale lui  $\mathbb{C}$ ,  $z = (x, y)$  și  $z_0 = (x_0, y_0)$  sunt *egale* dacă și numai dacă  $x = x_0$  și  $y = y_0$ .

Fie  $z_1 = (x_1, y_1)$  și  $z_2 = (x_2, y_2)$  două elemente arbitrare ale mulțimii  $\mathbb{C}$ . În mulțimea  $\mathbb{C}$  definim legile de compoziție binare interne:

$$\left\{ \begin{array}{l} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (\forall) (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{C}, \end{array} \right. \quad (5.2)$$

numită *adunarea* elementelor lui  $\mathbb{C}$ ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (\forall) (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \in \mathbb{C}, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

numită *înmulțirea* elementelor lui  $\mathbb{C}$ .

De asemenea, pe mulțimea  $\mathbb{C}$ , definim și *operația externă cu domeniul de operatori  $\mathbb{R}$* ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \\ (\forall) (\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \alpha \cdot z = (\alpha x, \alpha y) \in \mathbb{C}, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

numită *înmulțirea elementelor mulțimii  $\mathbb{C}$  cu scalari din  $\mathbb{R}$*



Nu este greu de demonstrat că:

$$(\mathbb{C}, +) \text{ este grup aditiv abelian ;} \quad (5.5)$$

$$(\mathbb{C}, \cdot) \text{ este grup abelian multiplicativ;} \quad (5.6)$$

$$z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2, \quad (\forall) z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (5.7)$$

Elementul nul al grupului abelian aditiv  $(\mathbb{C}, +)$  este perechea  $(0, 0)$ , pe care o vom nota cu  $0$ , iar opusul perechii  $z = (x, y)$  este perechea  $(-x, -y)$ , notată cu  $-z$ .

Folosind (5.5) și (5.6), deducem că elementul nul și opusul oricărui element din  $\mathbb{C}$  sunt unice.

Se constată că elementul unitate al grupului  $(\mathbb{C}, \cdot)$  este perechea  $(1, 0)$  pe care convenim să o notăm cu  $1$  deoarece, în baza legii (5.3),

$$z \cdot 1 = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

Inversul elementului  $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  este  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$  deoarece  $z \cdot z^{-1} = 1 = (1, 0)$ .

Elementul unitate al grupului  $(\mathbb{C}, \cdot)$  este unic iar inversul oricărui  $z$  nenul din  $\mathbb{C}$  este, de asemenea, unic.

Operația (5.4) se bucură de proprietățile:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 \cdot z &= z, & (\forall) z \in \mathbb{C}, \quad 1 \in \mathbb{R}; \\ (\alpha + \beta) \cdot z &= \alpha \cdot z + \beta \cdot z, & (\forall) z \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot z &= \alpha \cdot (\beta \cdot z), & (\forall) z \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \\ \alpha \cdot (z_1 + z_2) &= \alpha \cdot z_1 + \alpha \cdot z_2, & (\forall) \alpha \in \mathbb{R}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Analiza relațiilor (5.2), (5.3), (5.5) – (5.7) arată că

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \text{ este corp comutativ sau câmp,} \quad (5.9)$$

iar din (5.2), (5.4), (5.5) și (5.8) rezultă că

$$\mathbb{C} \text{ este spațiu liniar real.} \quad (5.10)$$

Elementele  $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$  și  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$  sunt *liniar independente* deoarece

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \iff \alpha = \beta = 0. \quad (5.11)$$

Apoi, în baza relațiilor (5.2), (5.4), orice element  $z \in \mathbb{C}$  se scrie în mod unic ca o combinație liniară a elementelor 1 și  $i$  din  $\mathbb{C}$ . Într-adevăr, avem relațiile

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i, \quad (5.12)$$

din care desprindem scrierea

$$z = x + iy. \quad (5.13)$$

Rezultatele (5.10) – (5.13) arată că mulțimea  $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$  o bază în  $\mathbb{C}$ . Prin urmare, *dimensiunea spațiului vectorial real  $\mathbb{C}$  este 2.*

Remarcăm că  $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$  are proprietatea

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1. \quad (5.14)$$

**Definiția 5.1.1** *Mulțimea  $\mathbb{C}$ , cu operațiile și proprietățile menționate, se numește **mulțimea numerelor complexe**. Numărul complex  $i = (0, 1)$  se numește **unitatea imaginară**.*

**Definiția 5.1.2** *Scrierea (5.13) se numește **forma algebrică** a unui număr complex. Numerele reale  $x$  și  $y$  din această scriere se numesc respectiv **partea reală** și **partea imaginară** a numărului complex  $z$ .*

Fie  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  spațiul liniar real euclidian de dimensiune este 2. Acesta, poate fi identificat cu mulțimea vectorilor geometrici dintr-un plan în care s-a ales reperul ortonormat  $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  ( $O$ , *originea reperului*, este un punct fixat al planului, iar  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  – *versorii reperului*, corespund perechilor  $(1, 0)$  și  $(0, 1)$  care au ca reprezentanți în  $O$  segmentele orientate perpendiculare  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OB}$ ).

Dacă notăm cu  $Ox, Oy$  axele reale cu originea comună în  $O$  și versorii directori  $\mathbf{i}$  și  $\mathbf{j}$ , numite *axele reperului*, atunci reperul  $\mathcal{R}$  se poate nota și cu  $xOy$ .

Reprezentantul în origine al vectorului  $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  este segmentul orientat  $\overrightarrow{OM}$  ale cărui proiecții pe axele  $Ox, Oy$  ale reperului sunt segmentele orientate  $\overrightarrow{OM}_1$ , respectiv  $\overrightarrow{OM}_2$ . Aceste segmente orientate sunt la rândul lor reprezentanți în origine a vectorilor  $\mathbf{v}_1$  și  $\mathbf{v}_2$ , coliniari cu versorii  $\mathbf{i}$ , respectiv  $\mathbf{j}$ , factorii de coliniaritate fiind mărimile algebrice  $x, y \in \mathbb{R}$  ale proiecțiilor vectorului  $\mathbf{v}$  pe versorii  $\mathbf{i}$ , respectiv  $\mathbf{j}$ . Prin urmare, avem  $\mathbf{v}_1 = x \mathbf{i}$  și  $\mathbf{v}_2 = y \mathbf{j}$ .

Deoarece segmentul orientat  $\overrightarrow{OM}$  este suma segmentelor orientate  $\overrightarrow{OM_1}$  și  $\overrightarrow{OM_2}$ , putem scrie

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (5.15)$$

care reprezintă exprimarea vectorului  $\mathbf{v}$  în baza  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ .

Perechea  $(x, y)$  stabilește totodată poziția punctului  $M$  în planul considerat și de aceea  $x$  și  $y$  se numesc *coordonatele punctului  $M$*  (*abscisa*, respectiv *ordonata*) în reperul  $xOy$ , fapt ce se scrie în forma  $M(x, y)$ .

Aplicația

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(z) = \mathbf{v}, \quad (5.16)$$

unde  $z$  și  $\mathbf{v}$  sunt dați în (5.13), respectiv (5.15), este liniară (are proprietatea  $\varphi(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 \varphi(z_1) + \alpha_2 \varphi(z_2)$ ) și bijectivă.

Rezultă că  $\varphi$  stabilește un *izomorfism* între spațiile liniare reale  $\mathbb{C}$  și  $\mathbb{R}^2$ , deci numărului complex arbitrar  $z$  din (5.13) îi corespunde punctul  $M(x, y)$ , sau vectorul  $\mathbf{v}$  din (5.15). Prin urmare, un număr complex poate fi figurat în plan. Punctul  $M(x, y)$  se numește *imagea* numărului complex  $z = x + iy$ , iar  $z$  se numește *afixul* punctului  $M(x, y)$ .

Cele două spații liniare descrise mai sus, fiind izomorfe, proprietățile unuia se transmit prin izomorfism și celuilalt.

Odată stabilit izomorfismul între  $\mathbb{C}$  și  $\mathbb{R}^2$ , axei  $Ox$  i se spune *axa reală* iar axa  $Oy$  poartă denumirea de *axă imaginară*. Numerele reale, care constituie o submulțime a numerelor complexe, au imaginile pe axa  $Ox$ , iar numerele pur imaginare  $z = iy$  au ca imagini puncte de forma  $M(0, y) \in Oy$ .

Se știe că  $\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  este o normă pe  $\mathbb{R}^2$  (norma euclidiană). În baza izomorfismului (5.16), funcția

$$|\cdot| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\forall) z = (x, y) \in \mathbb{C}, \quad (5.17)$$

este o normă pe  $\mathbb{C}$ , deci

$$\text{cuplul } (\mathbb{C}, |\cdot|) \text{ este } \mathbf{spa\cetiu\ normat}. \quad (5.18)$$

Cum orice spațiu normat este și spațiu metric, rezultă că mulțimea  $\mathbb{C}$  este spațiu metric, metrica  $d$  fiind cea indusă de norma (5.18)

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (5.19)$$

unde  $z_1 = x_1 + iy_1$  și  $z_2 = x_2 + iy_2$  sunt numere complexe arbitrare.

Așadar, putem considera că  $\mathbb{C}$  este o mulțime de puncte.

În consecință, toate rezultatele stabilite pentru spații liniare, spații normate și spații metrice sunt adevărate și în mulțimea  $\mathbb{C}$  a numerelor complexe.

De exemplu, *discul deschis* (bila deschisă) cu centrul în punctul  $z_0 = x_0 + iy_0$  și raza  $r > 0$  este mulțimea  $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}$ , unde

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}, \quad (5.20)$$

iar

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \quad (5.21)$$

este *discul închis* cu centrul în  $z_0$  și rază  $r$ .

Cu ajutorul bilei deschise putem introduce noțiunea de vecinătate a punctului  $z_0$ .

**Definiția 5.1.3** *Mulțimea nevidă  $V \subset \mathbb{C}$  se numește **vecinătate** a punctului  $z_0 \in \mathbb{C}$  dacă există  $r > 0$  astfel încât  $B(z_0, r) \subset V$ . Mulțimea  $\mathcal{V}(z_0)$ , a tuturor vecinătăților punctului  $z_0 \in \mathbb{C}$ , se numește **sistemul de vecinătăți** a punctului  $z_0$ .*

Folosind vecinătățile, putem defini în  $\mathbb{C}$  toate noțiunile topologice întâlnite în teoria spațiilor metrice.

Amintim pe cele care pot fi utilizate în studiul funcțiilor complexe de o variabilă complexă: *punct aderent*; *punct interior*; *punct exterior*; *punct frontieră*; *punct de acumulare*; *punct izolat*, ale unei mulțimi  $E \subset \mathbb{C}$ .

Folosindu-le apoi pe acestea, se pot defini alte noțiuni de topologie, precum: *închiderea* unei mulțimi; *mulțime închisă*; *interiorul* unei mulțimi; *mulțime deschisă*; *exteriorul* unei mulțimi; *frontiera* unei mulțimi; *mulțime mărginită*; *mulțime conexă*; *domeniu* (o mulțime  $E \subset \mathbb{C}$  deschisă și conexă); *continuu* (o mulțime de numere complexe închisă și conexă), *mulțime compactă* (o mulțime  $E \subset \mathbb{C}$  mărginită și închisă).

Aceste noțiuni topologice constituie un motiv al recapitulării aceluiași noțiuni introduse în teoria spațiilor metrice din analiza matematică.

În încheiere, prezentăm alte exprimări ale unui număr complex  $z = x + iy$ .

În acest scop, introducem unghiul  $\theta = \text{Arg } z$  (măsurat în radiani, între  $0$  și  $2\pi$ , în sens direct trigonometric) dintre versorul  $\mathbf{i}$  al axei  $Ox$  și vectorul  $\overrightarrow{OM}$ , unde  $M(x, y)$ . Atunci,  $x$  și  $y$ , care sunt mărimile algebrice ale proiecției vectorului  $\overrightarrow{OM}$  pe versorii axelor  $Ox$  și  $Oy$ , se exprimă cu ajutorul distanței  $|z|$  între punctele  $O$  și  $M$  și unghiul  $\text{Arg } z$  astfel:

$$x = |z| \cos \text{Arg } z; \quad y = |z| \sin \text{Arg } z. \quad (5.22)$$

Relațiile (5.22) și (5.13) conduc la exprimarea

$$z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z), \quad (5.23)$$

care se numește *forma trigonometrică* a numărului complex  $z = x + iy$ .

În cele ce urmează vom vedea că

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad (5.24)$$

de unde deducem forma

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}, \quad (5.25)$$

numită *forma exponențială* numărului complex  $z$ .

Dacă în relația (5.24) trecem  $\theta$  în  $-\theta$  și ținem cont de proprietățile funcțiilor trigonometrice, rezultă că avem

$$\cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}. \quad (5.26)$$

Din (5.24) și (5.26), găsim:

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad (5.27)$$

cunoscute sub numele de *formulele lui Euler*.

## 5.2 Funcții de o variabilă complexă

Fie  $\mathcal{F}(E, \mathbb{C})$  mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea nevidă  $E \subset \mathbb{C}$  cu valori în spațiul metric  $(\mathbb{C}, d)$ , ale cărei elemente sunt *funcții complexe de o variabilă complexă*.

Deoarece mulțimea  $\mathbb{C}$  este spațiu metric, orice mulțime nevidă  $E \subset \mathbb{C}$  este, de asemenea, spațiu metric, metrica pe  $E$  fiind cea indusă de metrica pe  $\mathbb{C}$ . Așadar, o funcție complexă de variabilă complexă este o funcție definită pe un spațiu metric cu valori într-un alt spațiu metric astfel că toate rezultatele legate de limita într-un punct și continuitatea unei funcții definită pe un spațiu metric, cu valori într-un alt spațiu metric, sunt valabile și pentru aceste funcții.

Cum punctele unui plan euclidian raportat la un reper cartezian de axe se pot identifica cu imaginile numerelor complexe, mulțimea  $E$  de definiție a funcției complexe de variabilă complexă  $f$  poate fi considerată și ca submulțime a spațiului  $\mathbb{R}^2$ .

Dacă pentru funcția complexă de variabilă complexă

$$w = f(z), \quad z \in E, \quad w \in \mathbb{C}, \quad (5.28)$$

se evidențiază *partea reală*  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$  și *partea imaginară*  $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$  rezultă că pentru valorile funcției  $f$  putem utiliza și notația

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y). \quad (5.29)$$

Din (5.28) și (5.29) rezultă că funcția  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C})$ , cu  $E \subset \mathbb{C}$ , este determinată atunci și numai atunci când se cunosc funcțiile reale  $u(x, y)$  și  $v(x, y)$ , ambele definite pe mulțimea  $E \subset \mathbb{R}^2$ .

În cele ce urmează, pentru o funcție complexă de variabilă complexă vom utiliza denumirea de *funcție complexă* și vom nota mulțimea sa de definiție cu  $D$  dacă este un domeniu.

### 5.3 Funcție monogenă într-un punct

Fie funcția complexă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  și  $z_0 \in D$ .

**Definiția 5.3.1** *Funcția complexă de variabilă complexă*

$$\rho \in \mathcal{F}(D \setminus \{z_0\}, \mathbb{C}), \quad \rho(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (5.30)$$

se numește **raportul incrementar în punctul  $z_0$  al funcției  $f$** .

**Definiția 5.3.2** *Spunem că funcția complexă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  este **monogenă** sau **derivabilă** în punctul  $z_0 \in D$ , dacă funcția raport incrementar în punctul  $z_0$  al funcției  $f$  are limită în punctul  $z_0$ .*

**Definiția 5.3.3** *Dacă funcția complexă  $f$  este monogenă în  $z_0$ , atunci limita în  $z_0$  a funcției (5.30), notată cu  $f'(z_0)$ , se numește **derivata** funcției  $f$  în punctul  $z_0$ .*

Așadar, dacă funcția complexă  $f$  este derivabilă în  $z_0$ , derivata sa în punctul  $z_0$  este

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (5.31)$$

**Teorema 5.3.1** *O funcție monogenă în  $z_0$  este continuă în acest punct.*

**Demonstrație.** Valoarea funcției complexe  $f$  într-un punct  $z \neq z_0$  poate fi scrisă în forma

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0).$$

Trecând la limită în această egalitate pentru  $z \rightarrow z_0$ , obținem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f(z_0),$$

ceea ce arată că funcția  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  este continuă în  $z_0$ . ■

### Exemplul 5.3.1 Funcția complexă

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

este monogenă în orice punct  $z \in \mathbb{C}$  și  $f'(z) = 2z$ .

**Soluție.** Într-adevăr, considerând un punct arbitrar fixat  $z_0$ , funcția  $\rho$  din (5.30) corespunzătoare funcției  $f(z) = z^2$  este  $\rho(z) = \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0$  de unde, prin trecere la limită pentru  $z \rightarrow z_0$ , se obține  $f'(z_0) = 2z_0$ . Deoarece  $z_0$  este ales arbitrar, rezultă că  $f$  este monogenă în orice punct  $z \in \mathbb{C}$  și  $f'(z) = 2z$ . ■

**Exemplul 5.3.2** Funcția  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sin z$  este monogenă în orice  $z \in \mathbb{C}$  și  $f'(z) = \cos z$ .

**Soluție.** Într-adevăr, raportul incrementar (5.30) al funcției  $f(z)$  are limita  $\cos z_0$  în punctul arbitrar  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ceea ce arată că  $(\sin z)' = \cos z$ . ■

## 5.4 Condițiile Cauchy–Riemann

**Teorema 5.4.1** Dacă funcția complexă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  din (5.29) este monogenă în punctul  $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ , atunci funcțiile reale de două variabile reale  $u, v \in \mathcal{F}(D)$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ , sunt derivabile în punctul  $(x_0, y_0)$ , derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcțiilor  $u$  și  $v$  în  $(x_0, y_0)$  satisfac condițiile Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{cases} \quad (5.32)$$

iar derivata funcției  $f$  în punctul  $z_0$  se calculează după una din formulele:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0); \quad (5.33)$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right). \quad (5.34)$$

**Demonstrație.** Cum  $f$  este monogenă în punctul  $z_0$ , există limita în  $z_0$  a raportului incrementar (5.30) și această limită este  $f'(z_0)$ . Ținând cont de expresia (5.29), rezultă că

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}. \quad (5.35)$$

Să considerăm întâi că  $z \rightarrow z_0$  pe o paralelă la una din axele de coordonate. Dacă această paralelă este la axa  $Ox$ , atunci  $y = y_0$  și  $z \rightarrow z_0$  este echivalent cu  $x \rightarrow x_0$ , încât (5.35) devine

$$f'(z_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \quad (5.36)$$

Din (5.36) rezultă că există limitele din membrul al doilea și:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \quad (5.37)$$

Relațiile din (5.37) arată că funcțiile reale  $u$  și  $v$  de variabilele reale  $x$  și  $y$  sunt derivabile parțial în punctul  $(x_0, y_0)$  în raport cu variabila  $x$  și aceste derivate parțiale sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \quad (5.38)$$

Apoi, dacă  $z \rightarrow z_0$  pe o paralelă la axa  $Oy$ , atunci  $x = x_0$ ,  $z \rightarrow z_0$  este echivalent cu  $y \rightarrow y_0$  și (5.35) devine

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right). \quad (5.39)$$

Din (5.39) deducem că funcțiile reale  $u$  și  $v$  de variabilele reale  $x$  și  $y$  sunt derivabile parțial în punctul  $(x_0, y_0)$  în raport cu variabila  $y$  și că aceste



derivate parțiale sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \quad (5.40)$$

Din (5.38) și (5.40) rezultă condițiile Cauchy–Riemann (5.32) iar dacă ținem cont că  $f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)$ , rezultă că au loc (5.33) și (5.34). ■

**Teorema 5.4.2** *Dacă funcțiile reale  $u, v \in \mathcal{F}(D)$ , sunt derivabile într-o vecinătate a punctului  $(x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , iar derivatele parțiale de ordinul întâi ale lor sunt continue în  $(x_0, y_0)$  și satisfac în acest punct condițiile Cauchy–Riemann (5.32), atunci funcția complexă (5.29) este monogenă în  $z_0 = x_0 + i y_0$ .*

**Demonstrație.** Din ipoteze rezultă că funcțiile  $u$  și  $v$  sunt diferențiabile în punctul  $(x_0, y_0) \in D$ , deci există funcțiile reale  $\alpha$  și  $\beta$  de variabilele reale  $x$  și  $y$ , definite pe  $D$ , continue în  $(x_0, y_0)$  și egale cu zero în acest punct, astfel încât creșterile:

$$\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0); \quad \Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0), \quad (5.41)$$

ale respectiv funcțiilor  $u$  și  $v$ , corespunzătoare creșterilor

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad (5.42)$$

să fie

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(x, y)|z - z_0|, \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta(x, y)|z - z_0|. \end{cases} \quad (5.43)$$

Să evaluăm creșterea funcției  $f$  în  $z_0$  corespunzătoare creșterii  $\Delta z = z - z_0$ ,

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0). \quad (5.44)$$

Folosind (5.29) și (5.41) rezultă că această creștere este

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \Delta u + i \Delta v. \quad (5.45)$$

Înlocuind în (5.45) expresiile (5.43) și ținând cont de condițiile Cauchy–Riemann (5.32), obținem

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \cdot \Delta z + (\alpha + i\beta) \cdot |\Delta z|. \quad (5.46)$$

Împărțind ambii membri ai egalității (5.46) prin  $\Delta z$  și trecând la limită pentru  $\Delta z \rightarrow 0$ , obținem

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( (\alpha + i\beta) \cdot \frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right). \quad (5.47)$$

Deoarece funcția  $\alpha + i\beta$  are limita zero în  $z_0$ , iar funcția  $\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$  este mărginită, avem

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\alpha + i\beta) \cdot \frac{|\Delta z|}{\Delta z} = 0. \quad (5.48)$$

Din (5.47) și (5.48) rezultă că raportul incrementar în  $z_0$  al funcției  $f$  are limită în punctul  $z_0$  și aceasta este

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \quad (5.49)$$

Așadar, funcția  $f$  este monogenă în  $z_0$  și derivata sa în  $z_0$  este (5.33).

Dacă în (5.47) folosim condițiile Cauchy–Riemann ajungem la concluzia

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \right) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left( (\alpha + i\beta) \cdot \frac{|\Delta z|}{\Delta z} \right),$$

de unde, prin trecere la limită pentru  $\Delta z \rightarrow 0$ , se obține că derivata funcției  $f$  în punctul  $z_0$  este (5.34). ■

**Exercițiul 5.4.1** Să se determine punctele  $z = x + iy$  în care funcțiile de mai jos sunt monogene și să se calculeze derivatele în punctele determinate:

$$1^0. \quad f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2);$$

$$2^0. \quad f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3z + 2\bar{z},$$

unde  $\bar{z} = x - iy$  este **conjugatul** numărului complex  $z = x + iy$ .

**Soluție.**  $1^0$ . Partea reală a funcției  $f$  este  $u(x, y) = x^2 - 4xy + y$ , iar cea imaginară este  $v(x, y) = 3x - y^2$ . Ecuațiile Cauchy–Riemann sunt

$$\begin{cases} 2x - 4y &= -2y \\ -4x + 1 &= -3. \end{cases}$$

Cum soluția acestui sistem este  $x_0 = 1, y_0 = 1$  rezultă că funcția dată este monogenă în punctul  $z_0 = 1 + i$  și

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) = -2 + 3i.$$

2<sup>0</sup>. Funcția se scrie

$$f(z) = x^2 + 3y^2 + 5x + i(6xy + y),$$

iar condițiile Cauchy–Riemann conduc la sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5 &= 6x + 1 \\ 6y &= -6y, \end{cases}$$

de unde rezultă soluția  $x_0 = 1, y_0 = 0$ . Așadar, funcția dată este monogenă numai în punctul  $z_0 = 1 + i \cdot 0 = 1$ .

Derivata funcției  $f$  în  $z_0$  este  $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 7$ . ■

## 5.5 Funcție olomorfă. Proprietăți

**Definiția 5.5.1** *Funcția complexă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  se numește olomorfă pe  $D$  dacă este monogenă în fiecare punct  $z \in D$ .*

**Definiția 5.5.2** *Dacă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  este olomorfă pe  $D$ , atunci funcția*

$$f' : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (5.50)$$

*se numește derivata funcției  $f$ .*

**Observația 5.5.1** *Din Teorema 5.4.1 deducem că dacă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  este funcție olomorfă pe  $D$ , atunci derivata  $f'(z)$  are una din următoarele expresii:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y), \quad (\forall) z = x + iy \in D; \quad (5.51)$$

$$f'(z) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right), \quad (\forall) z = x + iy \in D. \quad (5.52)$$

**Teorema 5.5.1** Dacă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  este funcție olomorfă pe  $D$  și  $f'(z) = 0$ ,  $(\forall) z \in D$ , atunci  $f(z) = \text{const. pe } D$ .

**Demonstrație.** Într-adevăr, din  $f'(z) = 0$ , (5.51) și (5.52) rezultă că în orice punct  $(x, y) \in D$  sunt satisfăcute egalitățile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$$

și deci diferențialele funcțiilor  $u$  și  $v$  sunt nule pe  $D$ . Așadar,  $u(x, y) = C_1$ ,  $v(x, y) = C_2$ , de unde rezultă  $f(z) = C_1 + i C_2$ . ■

**Teorema 5.5.2** Dacă funcția complexă  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  este olomorfă pe domeniul  $D \subset \mathbb{C}$  și  $u, v \in C^2(D)$ , atunci  $u$  și  $v$  sunt funcții armonice.

**Demonstrație.** Deoarece funcția  $f$  este olomorfă pe  $D$ ,  $u$  și  $v$  verifică condițiile Cauchy–Riemann pe  $D$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (5.53)$$

Dar, în baza criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor parțiale mixte, avem că derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea ale oricărei din funcțiile  $u$  și  $v$  sunt egale și deci putem scrie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (5.54)$$

Derivând prima relație (5.53) în raport cu  $x$ , a doua în raport cu  $y$ , adunând și ținând cont de a doua relație (5.54), obținem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (\forall) (x, y) \in D, \quad (5.55)$$

care arată că  $u$  este funcție armonică.

În mod analog obținem că  $v$  este funcție armonică, deci că

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (\forall) (x, y) \in D. \quad (5.56)$$

■

Cu ajutorul operatorului lui Laplace  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , relațiile (5.55) și (5.56) se scriu:

$$\nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0, \quad (5.57)$$

fiecare din ele exprimând că, în ipoteze suplimentare de regularitate, partea reală și partea imaginară a unei funcții olomorfe sunt funcții armonice.

**Teorema 5.5.3 (Determinarea unei funcții olomorfe când se cunoaște partea sa reală)** *Dată o funcție armonică  $u = u(x, y)$ ,  $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , există funcții olomorfe pe  $D$  de forma  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  și oricare două asemenea funcții diferă printr-o constantă pur imaginară  $iC$ , unde  $C \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstrație.** Cum partea reală este cunoscută, pentru a determina funcția olomorfă  $f$  trebuie să determinăm partea ei imaginară  $v$ . Funcția  $v$  trebuie să fie tot armonică și legată de funcția  $u$  prin relațiile Cauchy–Riemann (5.53).

Dacă în diferențiala funcției  $v$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

ținem cont de relațiile Cauchy–Riemann (5.53), deducem

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy. \quad (5.58)$$

Dar, expresia diferențială din membrul doi al relației (5.58) este o diferențială totală exactă, deoarece condiția de integrabilitate

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (\nabla^2 u = 0) \quad (5.59)$$

este verificată în baza faptului că  $u$  este funcție armonică. Relația (5.59) arată că integrala curbilinie din expresia diferențială a membrului doi din (5.58) este independentă de drum, depinzând doar de extremitățile acestuia. Integrând (5.58) pe un drum paralel cu axele de coordonate cu extremitățile  $M_0(x_0, y_0)$  fixat și  $M(x, y)$  variabil, obținem

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt. \quad (5.60)$$

Astfel, funcția  $v$  se determină până la o constantă arbitrară care poate fi determinată dacă se cunoaște valoarea funcției olomorfe  $f(z)$  într-un punct  $z_0 = x_0 + i y_0$ .

Asemănător se demonstrează și cazul în care se dă partea imaginară  $v = v(x, y)$ , funcție armonică pe  $D$ . Și în acest caz funcția  $f(z)$  se determină până la o constantă reală aditivă. În adevăr, avem

$$-i f(z) = v(x, y) - i u(x, y)$$

și cum funcția are ca parte reală chiar  $v(x, y)$ , suntem conduși la problema precedentă. Formula de determinare a funcției  $u$  este asemănătoare celei din (5.60) și are forma

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_0) dt - \int_{y_0}^y \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) dt. \quad (5.61)$$

Se vede că funcția  $f$  este determinată până la o constantă arbitrară care se poate determina dacă se cunoaște valoarea funcției  $f$  în punctul  $z_0 = x_0 + i y_0$ . ■

**Exercițiul 5.5.1** Să se determine funcția olomorfă  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a cărei parte reală este funcția  $u(x, y) = e^x \cos y$  și care în  $z = 0$  are valoarea  $f(0) = 1$ .

**Soluție.** Mai întâi se verifică că  $u$  este funcție armonică. Apoi, luând în (5.60) pe  $x_0 = 0$ , și  $y_0 = 0$ , adică  $z_0 = 0$ , avem că partea imaginară a funcției  $f$  este

$$v(x, y) = v(0, 0) + \int_0^x e^t \sin 0 dt + \int_0^y e^x \cos t dt.$$

Ținând cont că  $f(0) = 1$ , deducem  $v(0, 0) = 0$  și deci

$$v(x, y) = e^x \int_0^y \cos t dt = e^x \sin y.$$

Prin urmare,  $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$ . Din (5.24) rezultă  $\cos y + i \sin y = e^{iy}$  și dacă ținem cont că  $e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$ , avem că  $f(z) = e^z$ . Aceasta este funcția exponențială din complex care va fi studiată într-un paragraf ulterior. ■

**Exercițiul 5.5.2** Să se determine funcția olomorfă  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  a cărei parte imaginară este funcția  $v(x, y) = e^x \sin y + \frac{y}{x^2 + y^2}$  și care în  $z = 1$  are valoarea  $f(1) = 1$ .

**Soluție.** Verificăm mai întâi dacă funcția  $v(x, y)$  este armonică. Pentru derivatele parțiale de ordinul întâi găsim expresiile

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin y - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{cases}$$

iar pentru cele de ordinul al doilea nemixte, avem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) &= e^x \sin y + 2y \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) &= -e^x \sin y - 2y \frac{3x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^3}, \end{cases}$$

de unde se vede că  $\nabla^2 v(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$ , ceea ce demonstrează că  $v$  este funcție armonică.

Pentru determinarea funcției  $u = u(x, y)$ , aplicăm formula (5.61), luând  $x_0 = 1, y_0 = 0$ . Observăm că din  $f(1) = 1$  avem  $u(1, 0) = 1$  și (5.61) conduce la

$$u(x, y) = 1 + \int_1^x \left( e^t + \frac{1}{t^2} \right) dt + \int_0^y \left( -e^x \sin t + \frac{2xt}{(x^2 + t^2)^2} \right) dt.$$

Integrând, rezultă

$$u(x, y) = 2 - e + e^x \cos y - \frac{x}{x^2 + y^2},$$

deci

$$f(z) = 2 - e + e^x \cos y - \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( e^x \sin y + \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Există un procedeu simplu pentru a găsi expresia lui  $f$  în variabilă  $z$  și acesta constă în trecerea lui  $x$  în  $z$  și anularea lui  $y$ .

Aplicând acest procedeu expresiei de mai sus a funcției, obținem

$$f(z) = 2 - e + e^z - \frac{1}{z}.$$

Constatăm că funcția  $f(z)$  a fost determinată exact deoarece s-a precizat și valoarea sa într-un punct. ■

Operațiile cu funcții olomorfe decurg din (5.50) și rezultă că sunt asemănătoare proprietăților funcțiilor reale de o variabilă reală derivabile. Renunțând la scrierea variabilei  $z$ , avem:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2};$$

$$(f \circ \varphi)' = f'(\varphi) \cdot \varphi';$$

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \text{ unde } w_0 = f(z_0) \text{ etc.}$$

**Definiția 5.5.3** *Diferențiala unei funcții olomorfe este*

$$df(z) = f'(z) dz \quad (5.62)$$

unde  $dz = dx + i dy$ .

Regulile de calcul cu diferențiala din real sunt valabile și în complex.

## 5.6 Puncte ordinare și puncte singulare. Planul lui Gauss

**Definiția 5.6.1** *Un punct  $z \in D \subset \mathbb{C}$  se numește **punct ordinar** pentru funcția complexă  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  dacă există o vecinătate  $V \in \mathcal{V}(z)$  cu proprietatea  $f$  olomorfă pe mulțimea  $V \cap D$ .*

**Definiția 5.6.2** *Un punct  $z \in \mathbb{C}$  care nu este punct ordinar pentru funcția complexă  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  se numește **punct singular** al funcției.*

Între punctele singulare ale unei funcții complexe, remarcăm pe cele de tip pol.

**Definiția 5.6.3** *Punctul  $z = a \in \mathbb{C}$  este un **pol** al funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , dacă există un număr natural  $\alpha$ , numit **ordinul polului**, astfel încât funcția*

$$\varphi(z) = (z - a)^\alpha f(z)$$

să aibă în  $z = a$  un punct ordinar, iar  $\varphi(a) \neq 0$ .



**Observația 5.6.1** Dacă  $z = a$  este un pol de ordin  $\alpha$  pentru funcția complexă  $f$ , valorile funcției se scriu sub forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^\alpha},$$

unde  $\varphi(a) \neq 0$  și  $z = a$  este un punct ordinar pentru funcția complexă  $\varphi$ .

Dacă în Definiția 5.6.3 avem  $\alpha = 1$ , polul se spune că este *simplu*. Dacă  $\alpha = 2$ , polul se numește *dublu*, ș. a. m. d.

**Definiția 5.6.4** Un punct  $z = a$  se numește **zerou de ordin  $n$**  al funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  dacă există  $n \in \mathbb{N}^*$  și o funcție  $\psi : D \rightarrow \mathbb{C}$ , olomorfă pe  $D$ , cu  $\psi(a) \neq 0$ , astfel încât

$$f(z) = (z-a)^n \psi(z), \quad (\forall) z \in D.$$

**Definiția 5.6.5** Prin **punctul de la infinit al planului variabilei  $z$**  se înțelege punctul corespunzător punctului  $\zeta = 0$  din relația  $z = \frac{1}{\zeta}$ .

**Observația 5.6.2** Planul complex conține un singur punct la infinit; acesta se notează cu  $z = \infty$ .

**Definiția 5.6.6** Planul variabilei complexe  $z$ , completat cu punctul de la infinit, se numește **planul complex** sau **planul lui Gauss**, notat cu  $(z)$ .

Modulul numărului complex  $z = \infty$  este  $\infty$ , iar argumentul său este nedeterminat. O vecinătate  $|\zeta| < r$  a punctului  $\zeta = \xi + i\eta = 0$  din planul  $\xi O' \eta$  se transformă prin relația  $z = \frac{1}{\zeta}$  în mulțimea punctelor  $z$  care satisfac inegalitatea  $|z| > \frac{1}{r} = R$ , deci în exteriorul discului închis, de rază  $R$ , cu centrul în originea planului complex  $(z)$ . Inegalitatea  $|z| > R$  reprezintă o vecinătate a punctului de la infinit în planul variabilei  $(z)$ .

## 5.7 Funcții elementare de o variabilă complexă

### 5.7.1 Funcția polinom în planul complex

Cea mai simplă funcție elementară nebanală este funcția polinomială de gradul  $n \in \mathbb{N}$

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n, \quad (\forall) z \in \mathbb{C},$$

unde  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sunt constante complexe.

Funcția polinomială o vom numi adesea *polinom*.

**Teorema 5.7.1** *Polinomul  $P$  este o funcție olomorfă pe  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstrație.** Evident, funcția constantă este olomorfă și are derivata nulă în orice punct din  $\mathbb{C}$ .

Funcția identică  $P(z) = z$  este, de asemenea, olomorfă și derivata sa este egală cu 1 în orice  $z \in \mathbb{C}$ , deoarece

$$P'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = 1.$$

Funcția putere naturală a lui  $z$ , cu valorile  $f(z) = z^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , este un produs de  $k$  funcții egale cu funcția identică. Folosind definiția unei funcții monogene într-un punct și definiția unei funcții olomorfe deducem că funcția putere cu exponent  $k \in \mathbb{N}^*$  este olomorfă pe  $\mathbb{C}$  și derivata sa are valorile  $f'(z) = kz^{k-1}$ ,  $(\forall) z \in \mathbb{C}$ .

Funcția complexă ale cărei valori se calculează după legea  $A_k z^k$  este olomorfă pe  $\mathbb{C}$  fiind produsul a două funcții cu această proprietate. Polinomul  $P$ , fiind o sumă de funcții de forma  $A_k z^k$ , este o funcție olomorfă pe  $\mathbb{C}$ .

Aplicând definiția derivatei unei funcții complexe într-un punct, găsim

$$P'(z) = A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \dots + nA_n z^{n-1},$$

de unde se vede că derivata funcției polinom are aceeași formă ca în cazul real. ■

Reamintim o proprietate importantă a polinomului. Datorită faptului că  $\mathbb{C}$  este un corp algebric închis, în sensul că toate rădăcinile unui polinom cu coeficienți numere complexe sunt numere complexe, orice polinom de gradul  $n > 1$  admite descompune în factori

$$P(z) = A_n(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_p)^{m_p}, \quad m_k \in \mathbb{N}^*,$$

unde  $z_1, z_2, \dots, z_p \in \mathbb{C}$  rădăcini distincte de respectiv multiplicități  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , cu  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = n$ .

Așadar, zerourile funcției polinom formează o mulțime discretă în sensul că fiecare element al acesteia este un punct izolat al domeniului de definiție al unei funcții polinom. Se poate demonstra un rezultat mai general, și anume

**Teorema 5.7.2** *Dacă  $f$  este o funcție olomorfă pe un domeniu  $D$ , mulțimea zerourilor sale conținute în  $D$  este discretă.*

Se mai spune că *zerourile unei funcții olomorfe sunt puncte izolate*.

După ce vom studia și funcția rațională, vom cerceta natura punctului de la infinit pentru funcția polinom de gradul  $n$  și vom arăta că este un *pol de ordin  $n$* .

### 5.7.2 Funcția rațională

Fie  $P$  și  $Q$  două funcții polinomiale definite pe  $\mathbb{C}$  cu valori în  $\mathbb{C}$ ,

$$P(z) = A_0 + A_1z + \cdots + A_nz^n, \quad Q(z) = B_0 + B_1z + \cdots + B_mz^m.$$

Fie  $a, b, \dots, \ell \in \mathbb{C}$  rădăcinile distincte ale polinomului  $Q$  și  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  ordinele lor de multiplicitate. Atunci,

$$Q(z) = B_m(z-a)^\alpha(z-b)^\beta \cdots (z-\ell)^\lambda.$$

**Definiția 5.7.1** *Funcția complexă de variabilă complexă  $f = \frac{P}{Q}$ , definită pe domeniul  $\mathbb{C} \setminus \{a, b, \dots, \ell\}$ , se numește **funcție rațională**.*

În cazul când  $Q$  este un polinom nenul de grad zero (o constantă complexă), funcția rațională corespunzătoare se reduce la o funcție polinom care se mai numește *funcție rațională întreagă*.

**Teorema 5.7.3** *Funcția rațională în complex  $f = \frac{P}{Q}$  este olomorfă pe domeniul  $D = \mathbb{C} \setminus \{a, b, \dots, \ell\}$ .*

**Demonstrație.** Funcțiile polinom  $P$  și  $Q$ , cu ajutorul cărora se definește funcția rațională  $f$ , sunt funcții olomorfe pe  $\mathbb{C}$ . Câtul a două funcții olomorfe, acolo unde el există, este o funcție olomorfă. Prin urmare, funcția rațională  $f = \frac{P}{Q}$  este olomorfă în  $\mathbb{C} \setminus \{a, b, \dots, \ell\}$ . ■

**Observația 5.7.1** *Dacă  $f = \frac{P}{Q}$  este o funcție rațională definită pe domeniul  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) \neq 0\}$  și  $a, b, \dots, \ell$  sunt rădăcinile distincte ale polinomului  $Q$ , iar  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  sunt respectiv ordinele lor de multiplicitate, atunci punctul  $z = a$  este un pol de ordin  $\alpha$ ,  $z = b$  este un pol de ordin  $\beta$ ,  $\dots$ ,  $z = \ell$  este un pol de ordinul  $\lambda$  pentru funcția rațională  $f$ .*

Să cercetăm comportarea funcției raționale în punctul de la infinit.

Pentru aceasta, în  $f(z)$  trecem pe  $z$  în  $\frac{1}{\zeta}$  și avem

$$f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{A_0 + \frac{A_1}{\zeta} + \cdots + \frac{A_n}{\zeta^n}}{B_0 + \frac{B_1}{\zeta} + \cdots + \frac{B_m}{\zeta^m}} = \frac{\zeta^m}{\zeta^n} \cdot \frac{A_n + A_{n-1}\zeta + \cdots + A_1\zeta^{n-1} + A_0\zeta^n}{B_m + B_{m-1}\zeta + \cdots + B_1\zeta^{m-1} + B_0\zeta^m}.$$

Cercetăm natura punctului  $\zeta = 0$  pentru noua funcție.

Distingem două cazuri, și anume:

- $n > m$ ,  $\zeta = 0$  este un pol de ordin  $n - m$ ;
- $n \leq m$ ,  $\zeta = 0$  este un punct ordinar.

Deci, funcția rațională are în punctul de la infinit un pol sau un punct ordinar, după cum gradul numărătorului este mai mare ori mai mic sau egal cu gradul numitorului. Am demonstrat

**Teorema 5.7.4** *Funcția rațională nu are alte singularități în planul complex  $(z)$  decât poli.*

Funcția polinom este un caz particular de funcție rațională pentru care  $m = 0$ .

Folosind Teorema 5.7.4 deducem că funcția polinom de gradul  $n$  are în punctul de la infinit un pol de ordin  $n$ .

### 5.7.3 Funcția exponențială

Vom determina o funcție complexă  $f$  de variabilă complexă  $z = x + iy$ , care să satisfacă axiomele:

1. să fie funcție olomorfa în tot planul complex din care se exclude punctul de la infinit;
2. să satisfacă relația funcțională  $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$ ,  $(\forall) z_1, z_2 \in (z) \setminus \{\infty\}$ ;
3. restricția funcției  $f$  la axa reală să fie funcția exponențială reală  $e^x$ , adică  $f(\operatorname{Re} z) = e^{\operatorname{Re} z} = e^x$ ;
4. valoarea în  $z$  a funcției conjugate  $\bar{f}$  să fie egală cu valoarea funcției  $f$  în conjugatul complex a lui  $z$ , adică  $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$ ,  $(\forall) z \in (z) \setminus \{\infty\}$ .

Să calculăm pătratul modulului valorii în  $z = x + iy$  a funcției  $f$  care satisface axiomele de mai sus. Avem

$$|f(z)|^2 = f(z) \cdot \bar{f}(z) = f(z) \cdot f(\bar{z}) = f(z + \bar{z}) = f(2x) = e^{2x},$$

de unde  $|f(z)| = e^x$ .

Având în vedere că orice număr complex se poate scrie sub formă trigonometrică și notând cu  $\varphi(x, y)$  argumentul lui  $f(z)$ , rezultă că

$$f(z) = e^x (\cos \varphi(x, y) + i \sin \varphi(x, y)).$$

Partea reală  $u(x, y)$  și partea imaginară  $v(x, y)$  a lui  $f(z)$  sunt

$$u(x, y) = e^x \cos \varphi(x, y), \quad v(x, y) = e^x \sin \varphi(x, y).$$

Cum  $f$  este funcție olomorvă,  $u$  și  $v$  trebuie să satisfacă condițiile Cauchy–Riemann (5.32), deci

$$\begin{cases} e^x \left( \cos \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \sin \varphi(x, y) \right) = e^x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \cos \varphi(x, y), \\ e^x \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \cos \varphi(x, y) + \sin \varphi(x, y) \right) = e^x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \sin \varphi(x, y). \end{cases}$$

După simplificare cu  $e^x$ , obținem sistemul de ecuații diferențiale cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \cos \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \sin \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \cos \varphi(x, y), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \cos \varphi(x, y) + \sin \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \sin \varphi(x, y) \end{cases}$$

pe care-l interpretăm ca un sistem algebric liniar și neomogen în necunoscutele  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)$ . Soluția acestui sistem este

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 1$$

și deci diferențiala funcției  $\varphi$  este egală cu  $dy$ , ceea ce arată că  $\varphi(x, y)$  diferă de  $y$  printr-o constantă. Așadar,  $\varphi(x, y) = y + C$ , unde  $C$  este o constantă reală arbitrară. Impunând acum a treia axiomă, adică  $f(\operatorname{Re} z) = e^{\operatorname{Re} z}$ ,

ceea ce revine la a face  $y = 0$  în expresia lui  $f(z)$  sub formă trigonometrică, obținem

$$e^x(\cos C + i \sin C) = e^x \implies \cos C + i \sin C = 1 \implies \begin{cases} \cos C = 1, \\ \sin C = 0. \end{cases}$$

O soluție a ultimului sistem este  $C = 0$  și deci  $\varphi(x, y) = y$ . Așadar, expresia funcției căutate este

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Notăm această funcție cu  $e^z$  și o numim *funcția exponențială*. Prin urmare,

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Dacă în această egalitate punem  $x = 0$ , deducem

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Trecând pe  $y$  în  $-y$ , avem și

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Din ultimele două relații se obțin *formulele lui Euler*:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Partea reală a funcției exponențiale este  $u(x, y) = e^x \cos y$ , iar partea imaginară este  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Derivatele parțiale în raport cu  $x$  ale acestor funcții sunt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = u(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y = v(x, y). \quad (5.63)$$

**Teorema 5.7.5** *Derivata funcției exponențiale  $f(z) = e^z$  este*

$$f'(z) = f(z) = e^z, \quad (\forall) z \in (z) \setminus \{\infty\}. \quad (5.64)$$

**Demonstrație.** Dacă se aplică una din formulele de calcul ale derivatei unei funcții complexe, de exemplu

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

și se ține cont de (5.63), se obține (5.64). ■

**Teorema 5.7.6** *Funcția exponențială este periodică și perioada principală este  $T_1 = 2\pi i$ .*

**Demonstrație.** Dacă există  $T = A + iB \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , astfel încât  $f(z+T) = f(z)$ ,  $(\forall) z \in \mathbb{C}$ , aceasta revine la

$$e^{x+A}(\cos(y+B) + i \sin(y+B)) = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

Pentru aceasta este necesar și suficient ca

$$e^{x+A} = e^x, \quad y+B = y+2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\forall) x, y \in \mathbb{R}.$$

Din prima egalitate rezultă  $A = 0$ , iar din a doua  $B = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Așadar,  $T$  poate lua toate valorile  $T_k = 2k\pi i$ , cu  $k \in \mathbb{Z}^*$ .  $T_1 = 2\pi i$ , este perioada principală. ■

### 5.7.4 Funcțiile circulare și funcțiile hiperbolice

**Definiția 5.7.2** *Pe mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$  definim următoarele funcții:*

- **funcțiile circulare cosinus și sinus**, notate  $\cos$ , respectiv  $\sin$ , cu valorile

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}; \quad (5.65)$$

- **funcțiile cosinus hiperbolic și sinus hiperbolic**, notate  $\cosh$ , respectiv  $\sinh$ , cu valorile

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}. \quad (5.66)$$

**Observația 5.7.2** *Funcțiile definite în (5.65) sunt prelungiri în  $\mathbb{C}$  ale funcțiilor reale date în (5.27). O observație similară are loc și pentru funcțiile hiperbolice.*

**Teorema 5.7.7** *Funcțiile circulare și funcțiile hiperbolice au următoarele proprietăți:*

- sunt funcții olomorfe pe  $\mathbb{C}$  ale căror derivate sunt:

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z;$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z;$$

- funcțiile circulare  $\cos$  și  $\sin$  au aceleași perioade ca restricțiile lor la  $\mathbb{R}$ , iar perioada lor principală este  $2\pi$ . Funcțiile hiperbolice au perioadele  $T_k = k \cdot 2\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ , perioada principală fiind  $2\pi i$ ;
- între funcțiile circulare și funcțiile hiperbolice există relațiile

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}; \quad (5.67)$$

- zerourile funcțiilor circulare sunt numere reale și coincid cu zerourile restricțiilor lor la  $\mathbb{R}$ ,

$$\cos z = 0 \implies z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \sin z = 0 \implies z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

iar cele ale funcțiilor hiperbolice sunt:

$$\cosh z = 0 \implies z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right); \quad \sinh z = 0 \implies z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Demonstrație.** Funcțiile  $e^{-z}$ ,  $e^{iz}$ ,  $e^{-iz}$  rezultă din compunerea unor funcții elementare olomorfe pe  $\mathbb{C}$ . În consecință, funcțiile  $\cos z$ ,  $\sin z$ ,  $\cosh z$ ,  $\sinh z$  sunt olomorfe pe  $\mathbb{C}$ , fiind combinații liniare de funcții olomorfe pe  $\mathbb{C}$ . Pentru calculul derivatelor acestor funcții folosim operațiile cu funcții olomorfe. Avem

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

Celelalte formule de derivare se obțin analog.

Pentru determinarea perioadei funcției  $\cos z$  se procedează ca în Teorema 5.7.6. Așadar încercăm să determinăm  $T \neq 0$ , astfel încât să avem

$$\cos(z + T) = \cos z, \quad (\forall) z \in \mathbb{C},$$

de unde se găsește  $T_k = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ . Perioada principală se obține pentru  $k = 1$ .

Pentru celelalte funcții se procedează similar.

Din (5.65) rezultă

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z, \quad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \sinh z.$$

Pentru determinarea zerourilor funcției  $f(z) = \cos z$ , rezolvăm ecuația  $\cos z = 0$ . Aceasta conduce la  $e^{iz} + e^{-iz} = 0$  care este echivalentă cu ecuația



$e^{2iz} = -1$ . Punând  $z = x + iy$  și comparând modulele și argumentele, se obține sistemul

$$\begin{cases} e^{-2y} = 1 \\ 2x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

de unde deducem  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Prin urmare, funcția  $\cos z$  are zerourile  $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Analog se determină și zerourile celorlalte funcții. ■

**Observația 5.7.3** *Folosind (5.65), se pot demonstra ușor relațiile:*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

*Din acestea, folosind relațiile (5.67), rezultă*

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z.$$

Părțile reale și părțile imaginare ale funcțiilor circulare și hiperbolice se pot obține acum cu ușurință. De exemplu,

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x.$$

**Definiția 5.7.3** *Funcțiile circulare  $\operatorname{tg} z$ ,  $\cot z$  și funcțiile hiperbolice  $\tanh z$ ,  $\coth z$  se definesc prin:*

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}; \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Vom trece la studiul unor funcții uzuale obținute prin inversarea unor funcții olomorfe.

### 5.7.5 Funcția logaritmică

Dacă în transformarea

$$w = e^z, \quad (5.68)$$

definită de funcția exponențială, intervertim rolul variabilelor, obținem transformarea

$$z = e^w = e^{f(z)}, \quad (5.69)$$

care definește o nouă funcție  $w = f(z)$ , numită *inversa funcției exponențiale*.

Să folosim scrierea exponențială a unui număr complex (5.25) și să notăm

$$z = r e^{i\theta}; \quad w = u + iv, \quad (5.70)$$

unde  $r$  și  $\theta \in [0, 2\pi)$  sunt modulul, respectiv argumentul numărului complex  $z$ .

Înlocuind (5.70) în (5.69), în care  $w = u + iv$ , obținem egalitatea

$$r e^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}. \quad (5.71)$$

Cum funcția exponențială este periodică și cum două numere complexe sunt egale dacă și numai dacă modulele lor sunt egale iar argumentele diferă prin  $2k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ , rezultă:

$$r = e^u; \quad v = \theta + 2k\pi. \quad (5.72)$$

Prima din relațiile (5.72) este o egalitate între două numere reale și deci  $u = \ln r$ .

În acest mod, funcția  $w = f(z)$  definită în (5.69) are expresia

$$f(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad (5.73)$$

și se numește *funcția logaritmică*, notată cu

$$w = \operatorname{Log} z. \quad (5.74)$$

Funcția complexă de variabilă complexă (5.74) generalizează funcția reală de variabilă reală  $x \mapsto \ln x$  și extinde definiția acesteia în domeniul complex. Deoarece constanta  $k$  poate lua orice valori întregi, funcția logaritmică (5.74) are, pentru aceeași valoare a variabilei  $z$ , o *infinitate de determinări*.

Funcția logaritmică (5.74) se mai scrie

$$w = \operatorname{Log} z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i\left(\arctg \frac{y}{x} + 2k\pi\right). \quad (5.75)$$

Pentru funcția  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  se ia determinarea cuprinsă între  $-\pi$  și  $+\pi$ , care verifică egalitățile:

$$\begin{cases} r \cos \theta &= x \\ r \sin \theta &= y \end{cases}$$

Se verifică ușor că funcția (5.75) este monogenă și se observă că ea este definită în orice punct al planului complex situat la distanță finită, fără origine, iar în origine ia valoarea  $\infty$ .

**Definiția 5.7.4** *O funcție complexă de variabilă complexă  $f(z)$  se numește multiformă dacă unui punct  $z$  din domeniul de definiție al funcției îi corespunde cel puțin două valori ale funcției  $f(z)$ .*

Datorită constantei  $k$  din (5.75) care poate lua orice valoare întreagă, funcția logaritmică este multiformă și are o infinitate de valori. Acest rezultat se datorează faptului că funcția exponențială, deși este olomorfa în tot planul cu excepția punctului de la infinit, nu este injectivă.

Se pune întrebarea dacă funcția  $\operatorname{Log} z$  nu se poate descompune într-o infinitate de funcții uniforme. Acestea se obțin dând succesiv lui  $k$  diferite valori întregi.

Această descompunere este posibilă, însă funcțiile astfel obținute, numite *determinările* sau *ramurile* funcției  $\operatorname{Log} z$ , nu sunt fără legături între ele, ci ele se *continuă* unele pe altele formând împreună o singură funcție, funcția multiformă  $\operatorname{Log} z$ .

Să presupunem că am ales o valoare fixă pentru  $k$ . Avem

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i(\theta + 2k\pi).$$

Dacă  $z$  descrie un contur închis care înconjoară o singură dată originea în sens pozitiv, plecând din punctul  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$  și revenind în același punct, funcția pleacă de la valoarea  $\ln r_0 + i(\theta_0 + 2k\pi)$  și ajunge cu o altă valoare, după cum vom constata.

Mărimea razei vectoare  $r = |z|$  variază de la valoarea  $r_0$ , însă revine la valoarea inițială fără a se anula (conturul nu trece prin origine), ceea ce înseamnă că partea reală a funcției pleacă de la valoarea  $\ln r_0$  și revine tot la ea după o variație continuă.

Partea imaginară însă, pleacă de la valoarea  $\theta_0 + 2k\pi$  și, după ce variază continuu, ajunge la valoarea  $(\theta_0 + 2\pi) + 2k\pi$ , deci partea imaginară ia valoarea finală  $\theta_0 + 2(k+1)\pi$ .

Prin urmare, funcția  $\operatorname{Log} z$  pleacă de la valoarea

$$\operatorname{Log}_k z_0 = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2k\pi)$$

și ajunge la valoarea

$$\operatorname{Log}_{k+1} z_0 = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2(k+1)\pi)$$

care este determinarea corespunzătoare lui  $k+1$ .

Așadar, când  $z$  înconjură originea, diferitele determinări ale funcției  $\operatorname{Log} z$  se permută între ele și de aceea nu le putem privi ca pe niște funcții independente (nu se pot separa) ci trebuie considerate ca ramuri ale unei singure funcții multiforme.

**Definiția 5.7.5** Se numește **punct critic** al funcției complexe de variabilă complexă  $f$  un punct  $a \in \mathbb{C}$  cu proprietatea că în orice domeniu care-l conține, funcția  $f$  este multiformă.

Dacă  $z$  înconjură originea de  $p$  ori în sens pozitiv,  $\operatorname{Log} z$  crește cu  $2p\pi i$ , iar dacă  $z$  înconjură originea de  $p$  ori în sens negativ, creșterea este  $-2p\pi i$ .

Evident, dacă  $z$  descrie un contur închis care nu înconjură originea, funcția  $\operatorname{Log} z$  revine la valoarea ei inițială.

Fiecare din determinările (ramurile) funcției  $\operatorname{Log} z$  este o funcție uniformă și olomorfa în orice domeniu care nu conține originea  $O$ . Pentru a fi siguri că un domeniu oarecare al funcției logaritmice nu conține originea, în planul complex ( $z$ ) se efectuează o tăietură printr-o semidreaptă prin origine. În planul complex în care este practică această tăietură, oricare din funcțiile  $\operatorname{Log}_k z$  este funcție uniformă deoarece orice curbă închisă din acest plan nu poate înconjura originea.

Permutarea determinărilor funcției, deci caracterul ei de funcție multiformă, se manifestă numai în domenii care conțin originea. Prin urmare, pentru funcția  $\operatorname{Log} z$  originea are un caracter singular și se numește un *punct critic* al funcției.

După analiza funcției logaritm, se poate da o nouă definiție funcției multiforme precum și a funcției uniforme.

**Definiția 5.7.6** Funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  este **multiformă** în domeniul  $D \subset \mathbb{C}$  dacă în  $D$  există un contur închis pe care transformarea  $w = f(z)$  îl transformă într-un arc deschis  $w_0 w'_0$  din planul  $uO'v$ .

**Definiția 5.7.7** Funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  este **uniformă** în domeniul  $D$  dacă  $w = f(z)$  transformă orice contur închis situat în  $D$  într-un contur închis din planul  $uO'v$ .

Derivata funcției  $\text{Log } z$  se obține ușor observând că, din însăși definiția funcției logaritmice, avem

$$e^{\text{Log } z} = z \quad (5.76)$$

În membrul întâi al relației (5.76) avem o funcție compusă care este monogenă în tot planul complex la distanță finită cu excepția originii. Derivând și ținând cont de (5.76), pentru  $z \neq 0$  avem,

$$e^{\text{Log } z} \cdot (\text{Log } z)' = 1 \implies (\text{Log } z)' = \frac{1}{z}. \quad (5.77)$$

Mai general, plecând de la (5.77), obținem

$$(\text{Log } f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (5.78)$$

Se observă că atât (5.77) cât și (5.78) sunt extinderi în complex ale unor rezultate din real.

### 5.7.6 Funcția radical

Fie funcția

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

și să presupunem că  $z$  descrie o dată, în sens pozitiv, cercul cu centrul în  $O$  și rază  $r_0$  plecând din punctul  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ . Atunci  $w$  pleacă de la valoarea  $w_0 = \sqrt{r_0} e^{(i\theta_0)/2}$  și, în timp ce  $\theta$  crește de la valoarea  $\theta_0$  la valoarea  $\theta_0 + 2\pi$ ,  $\frac{\theta}{2}$  crește de la valoarea  $\frac{\theta_0}{2}$  la valoarea  $\frac{\theta_0}{2} + \pi$ , iar  $w$  variază continuu de la  $w_0$  la  $w'_0 = \sqrt{r_0} e^{i\frac{\theta_0}{2} + i\pi} = -w_0$ . Dacă  $z$  descrie iarăși același cerc,  $w$  revine la valoarea inițială  $w_0$  după o variație continuă.

Prin urmare, funcția radical are două determinări (ramuri)  $\sqrt{z}$  și  $-\sqrt{z}$ , sau

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{(i\theta)/2}, \quad f_2(z) = -\sqrt{r} e^{(i\theta)/2},$$

care se permută între ele atunci când  $z$  înconjură originea. Se vede că originea este singurul *punct critic* al funcției situat la distanță finită sau *punct de ramificație* pentru funcția  $f(z) = \sqrt{z}$ .

Dacă în planul complex efectuăm o *tăietură* de-a lungul unei semidrepte care pleacă din origine, punctul  $z$  nu mai poate descrie curbe închise care să înconjure originea.

**Observația 5.7.4** În planul complex la distanță finită în care am făcut tăietura descrisă, funcțiile  $f_1(z)$  și  $f_2(z)$  sunt uniforme.

În concluzie, funcțiile  $f_1(z)$  și  $f_2(z)$  sunt uniforme în orice disc deschis care nu conține originea.

### 5.7.7 Funcții trigonometrice inverse

Dacă în definiția funcției  $w = \cos z$  intervertim rolurile variabilelor  $z$  și  $w$ , obținem funcția inversă

$$w = \arccos z \quad (5.79)$$

dată de

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}. \quad (5.80)$$

Ultima ecuație se poate scrie și în forma

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad (5.81)$$

de unde  $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$  și deci

$$w = \arccos z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \quad (5.82)$$

În mod analog se definește funcția trigonometrică inversă  $w = \arcsin z$  punând  $z = \sin w$ . Se găsește

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \quad (5.83)$$

care are rădăcinile  $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$  ce la rândul lor conduc la expresia funcției trigonometrice inverse

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}). \quad (5.84)$$

Se vede că atât  $\arccos z$  cât și  $\arcsin z$  sunt funcții multiforme de  $z$ , căci atunci când  $z$  înconjură o dată punctul  $z = -1$  sau  $z = 1$ , radicalul schimbă semnul, iar când punctul  $z + \sqrt{z^2 - 1}$  înconjură o dată originea, funcția crește cu  $2\pi$ . Prin urmare, pentru aceste două funcții inverse, punctele  $z = -1$  și  $z = 1$  sunt puncte singulare pe care le numim și aici *puncte critice*.

Funcția  $w = \operatorname{arctg} z$  se definește punând

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{1}{i} \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \implies e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

de unde rezultă că expresia funcției trigonometrice inverse (inversa funcției  $\operatorname{tg}$ ) este

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Această funcție este, de asemenea, multiformă, având punctele critice  $z = \pm i$ .

Analog se introduce funcția inversă a funcției trigonometrice cotangenta lui  $z$ .

De remarcat că toate aceste funcții trigonometrice inverse se exprimă cu ajutorul funcției logaritmice aplicată unor expresii algebrice, ceea ce nu apare în studiul acestor funcții în real.

Datorită prezenței funcției logaritmice în expresiile acestor funcții trigonometrice inverse, rezultă că fiecare din ele are o infinitate de determinări.

### 5.7.8 Funcții algebrice

O ecuație algebrică de forma

$$A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z) = 0$$

definește pe  $w$  ca funcție de  $z$ . Dacă funcțiile  $A_k(z)$  sunt uniforme într-un domeniu  $D$ , se vede că  $w$  va fi o funcție multiformă de  $z$ , având  $n$  determinări pentru fiecare  $z \in D$ . Dacă toți coeficienții  $A_k(z)$  sunt polinoame în  $z$ , funcția  $w$  este definită în tot planul ( $z$ ) și se poate arăta că are un număr finit de puncte critice în acest plan. O astfel de funcție se numește *funcție algebrică*, deși în general nu se poate exprima cu ajutorul radicalilor și al operațiilor raționale efectuate asupra lui  $z$ .

Există însă și funcții multiforme de variabilă  $z$  care au o infinitate de determinări, cum am văzut în cazul funcțiilor  $\operatorname{Log} z$ ,  $\operatorname{arctg} z$ , etc. Acestea nu sunt funcții algebrice și de aceea se numesc *funcții multiforme transcendente*.

## 5.8 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 5.8.1** *Să se determine punctele singulare la distanță finită ale funcțiilor de mai jos cercetând pentru fiecare din ele și comportarea în punctul de la infinit:*

1.  $f(z) = 2 + z - z^2$ ;    2.  $f(z) = \frac{z - i}{z(z + 1)}$ ;    3.  $f(z) = \frac{2z^4 + 5z + 1}{(z^2 - 6z + 8)^2}$ ;
4.  $f(z) = \frac{z^3}{1 - z^3}$ ;    5.  $f(z) = \frac{z^8 + 1}{(z^2 + 4)^3}$ ;    6.  $f(z) = \frac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9}$ .

**Soluție.** Cu excepția primei funcții care este un polinom de gradul 2, celelalte sunt funcții raționale.

1. Funcția  $f(z)$  este un polinom, deci este funcție olomorvă în tot planul complex la distanță finită. Punctul de la infinit este pol de ordinul al doilea pentru această funcție.
2. Funcția de la acest punct fiind funcție rațională, rădăcinile numitorului sunt puncte singulare de tip pol. Prin urmare,  $z_1 = 0$  și  $z_2 = -1$  sunt poli de ordinul unu. Deoarece gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, punctul de la infinit este punct ordinar. Prin urmare, funcția dată este olomorvă în orice domeniu, mărginit sau nemărginit, care nu conține punctele  $z_1 = 0$  și  $z_2 = -1$ .
3. Punctele  $z_1 = 2$  și  $z_2 = 4$  sunt poli de ordinul al doilea, iar  $z = \infty$  este punct ordinar. Domeniul maxim în care funcția  $f(z)$  este olomorvă este planul complex din care s-au scos punctele  $z_1 = 2$  și  $z_2 = 4$ .
4. Punctele  $z_1 = 1$  și  $z_2 = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sunt poli de ordinul unu, iar  $z = \infty$  este punct ordinar. Prin urmare, funcția  $f(z)$  este olomorvă în orice domeniu, mărginit sau nemărginit, care nu conține punctele  $z_1$  și  $z_2$ .
5. La distanță finită, funcția  $f(z)$  are ca singularități pe  $z_1 = 2i$  și  $z_2 = -2i$  care sunt puncte singulare de tip pol, fiecare din ele fiind pol de ordinul trei. Punctul  $z_3 = \infty$  este pol de ordinul doi. Prin urmare, funcția  $f(z)$  este olomorvă în orice domeniu mărginit care nu conține punctele  $z_1 = 2i$  și  $z_2 = -2i$ .
6. Punctul  $z_1 = 3$  este pol de ordin doi, iar  $z_2 = \infty$  este pol de ordin cinci. Funcția  $f(z)$  este olomorvă în orice domeniu mărginit care nu conține punctul  $z_1$ . ■

**Exercițiul 5.8.2** Să se afle singularitățile funcțiilor de mai jos, precizându-se natura punctului de la infinit:

1.  $f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$ ; 2.  $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z-1}$ ; 3.  $f(z) = \ln \frac{z}{(z-i)^2}$ ;
4.  $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ ; 5.  $f(z) = e^{-\frac{z}{z-1}}$ ; 6.  $f(z) = e^{\frac{1}{\sin \pi z}}$ .



**Soluție.** Primele două funcții sunt legate de funcția radical, următoarele două sunt compuneri ale funcției logaritmice cu funcții raționale, iar ultimele sunt compuneri ale funcției exponențiale cu o funcție rațională și respectiv cu o funcție circulară.

1.  $z_1 = -3i$  și  $z_2 = +3i$  sunt puncte critice algebrice, iar  $z = \infty$  este pol de ordinul unu. Funcția  $f(z)$  este multiformă, are două ramuri și fiecare din ele devine uniformă dacă în planul complex se face o tăietură care să unească cele două puncte singulare la distanță finită. Tăietura cea mai indicată este segmentul de dreaptă de pe axa imaginară cu extremitățile în  $z_1$  și  $z_2$ . Fiecare din ramuri este funcție olomorfa în orice domeniu mărginit al planului în care s-a efectuat tăietura.
2. Punctul  $z_1 = 1$  este pol de ordinul unu, iar punctele  $z_2 = 0$  și  $z_3 = \infty$  sunt puncte critice algebrice.
3. Punctele  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = i$  și  $z_3 = \infty$  sunt puncte critice logaritmice. Funcția  $f(z)$  are o infinitate de determinări (ramuri), fiecare din ele fiind o funcție olomorfa în orice domeniu mărginit inclus în planul complex din care se exclude tăietura care poate fi reprezentată de segmentul de dreaptă ce unește punctele  $z_1$  și  $z_2$ .
4. Punctele  $z_1 = -1$  și  $z_2 = 1$  sunt puncte critice logaritmice, iar punctul de la infinit este punct ordinar. Funcția  $f(z)$  are o infinitate de determinări (ramuri), fiecare din ele fiind o funcție olomorfa în orice domeniu mărginit sau nemărginit inclus în planul complex din care se exclude segmentul de dreaptă ce unește punctele  $z_1$  și  $z_2$ .
5. Punctele  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$  sunt puncte singulare esențiale izolate, iar  $z = \infty$  este punct ordinar.
6.  $z = k$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ , sunt puncte singulare esențiale izolate, iar  $z = \infty$  este punct singular esențial neizolat deoarece este limita unui șir de puncte singulare esențiale.

**Exercițiul 5.8.3** Să se studieze funcțiile multiforme:

1.  $f_1(z) = \sqrt{z^3 + 1}$ ;
2.  $f_2(z) = \sqrt[3]{z^3 + 1}$ ;
3.  $f_3(z) = \text{Log} \frac{z-i}{z+i}$ ;
4.  $f_4(z) = \sqrt{z^2 + 1} \text{Log}(z^2 + 1)$ .

**Soluție. 1.** Notăm

$$z + 1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = r_2 e^{i\theta_2}, \quad z - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = r_3 e^{i\theta_3}.$$

Atunci funcția  $f_1(z)$  se scrie

$$f_1(z) = \sqrt{r_1 r_2 r_3} e^{k\pi i + i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2}.$$

Ținând seama de reprezentarea geometrică a adunării și scăderii numerelor complexe, rezultă că  $r_1$  este lungimea segmentului care unește punctul  $-1$  cu  $z$ , iar  $\theta_1$  este unghiul dintre axa reală și acest segment, măsurat în sens direct trigonometric. Interpretări analoage avem pentru  $r_2$ ,  $\theta_2$  și  $r_3$ ,  $\theta_3$ .

Cele două ramuri ale funcției  $f_1(z)$  sunt:

$$f_{11}(z) = \sqrt{r_1 r_2 r_3} e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2}; \quad f_{12}(z) = \sqrt{r_1 r_2 r_3} e^{i\pi + i(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2}.$$

Observăm că  $f_{12}(z) = -f_{11}(z)$ .

Dacă punctul  $z$  descrie un arc de curbă  $zMz'$ , plecând din punctul  $z$  și fără a înconjura nici unul din punctele

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

funcția  $f_1$  revine la aceeași valoare, ceea ce înseamnă că  $f_1(z') = f_1(z)$ , unde expresia lui  $f_1(z)$  poate fi una din cele scrise mai sus.

Dacă  $z$  descrie arcul de curbă  $zNz'$ , înconjurând unul din punctele  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  sau toate trei și dacă funcția  $f_1$  pleacă de la valoarea  $f_{11}(z)$ , ea va ajunge la valoarea

$$f_1(z') = \sqrt{r_1 r_2 r_3} e^{i(k\pi + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)/2)} = -f_{11}(z)$$

deoarece  $k = 1$  dacă este înconjurat un punct și  $k = 3$  dacă sunt înconjurate toate punctele.

Dacă  $z$  descrie un arc de curbă care unește  $z$  cu  $z'$  înconjurând două din cele trei puncte, funcția  $f_1$  revine cu aceeași valoare.

Deci, când punctul  $z$  descrie o curbă care înconjoară un număr impar din cele trei puncte, funcția  $f_1$  trece de la o determinare la alta, iar când curba înconjoară un număr par de puncte valoarea funcției nu se schimbă.

Punctele  $z_1, z_2, z_3$  sunt punctele critice ale funcției  $f_1$ .

Dacă facem anumite *tăieturi* în planul complex  $(z)$ , ramurile funcției  $f_1$  devin funcții uniforme pentru că nu mai există posibilitatea înconjurării unui punct sau mai multe din cele trei.

Tăieturile se pot efectua în patru moduri. Trei din aceste moduri constau dintr-un segment ce unește două din cele trei puncte la care se adaugă câte o semidreaptă cu extremitatea în cel de al treilea punct, semidreaptă ce nu trebuie să intersecteze segmentul care unește celelalte două puncte. Cel de al patrulea sistem de tăieturi constă din trei semidrepte disjuncte care au extremități câte unul din cele trei puncte.

**2.** Cu notațiile făcute, valorile funcției  $f_2$  se scriu

$$f_2(z) = \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3} e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}$$

Procedând similar, găsim că funcția  $f_2$  are trei determinări (cele obținute dând lui  $k$  valorile 0, 1 și 2) și că prin efectuarea tăieturilor fiecare din ramuri devine uniformă și olomorfă în orice domeniu care nu intersectează tăieturile.

**3.** Cu notația  $z - i = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z + i = r_2 e^{i\theta_2}$ , funcția  $f_3$  se scrie

$$f_3(z) = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Dacă  $z$  descrie un arc de curbă care unește pe  $z$  cu  $z'$  înconjurând punctul  $z = i$ , funcția devine

$$f_3(z') = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 + 2\pi - \theta_2 + 2k\pi) = 2\pi i + f_3(z).$$

Dacă arcul descris înconjoară pe  $z = -i$ , avem  $f_3(z') = f_3(z) - 2\pi i$ . Când arcul descris înconjoară ambele puncte  $z = -i$  și  $z = i$ , funcția revine cu aceeași valoare. Făcând o tăietură (de exemplu, segmentul care unește cele două puncte), ramurile funcției devin uniforme. Aceste ramuri sunt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conține nici unul din punctele critice ale funcției  $f_3$ .

**4.** Cu aceleași notații ca la funcția precedentă, funcția  $f_4(z)$  se scrie

$$f_4(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{k\pi i + i(\theta_1 + \theta_2)/2} \left( \ln r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k_1\pi) \right), \quad k, k_1 \in \mathbf{Z}$$

și se studiază ca mai sus. ■

## Capitolul 6

# Integrala curbilinie. Teoremele lui Cauchy

### 6.1 Integrala curbilinie în planul complex și proprietățile ei fundamentale

Fie  $C$  o curbă netedă pe porțiuni de lungime  $L$  situată în planul complex ( $z$ ) de ecuații parametrice

$$C : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty],$$

unde funcțiile  $\varphi$  și  $\psi$  sunt derivabile pe porțiuni, derivatele  $\varphi'$ ,  $\psi'$  sunt continue și satisfac condiția  $(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0$ . Specificarea coordonatelor  $x$  și  $y$  ale punctelor curbei  $C$  este echivalentă cu specificarea funcției complexe de variabilă reală

$$\zeta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \zeta(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

sau cu specificarea ecuației curbei  $C$  cu ajutorul variabilei complexe  $z = x + iy$ ,

$$C : \quad z = \zeta(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Presupunem că în fiecare punct al curbei  $C$  este dată funcția complexă

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Conceptul de *integrală a funcției  $f(z)$  pe curba  $C$*  se introduce asemănător cu integrala curbilinie din real.

Astfel, se consideră o *partiție* a curbei  $C$  în  $n$  arce prin punctele de diviziune  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ , care corespund valorilor crescătoare ale parametrului  $t$ , notate respectiv  $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = \beta$ , unde  $t_k < t_{k+1}$ . Notăm  $\Delta\zeta_k = \zeta_k - \zeta_{k-1}$  și formăm *suma integrală*

$$\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k^*) \Delta\zeta_k, \quad (6.1)$$

unde  $\zeta_k^*$  este un punct arbitrar de pe arcul curbei  $C$  de extremități  $\zeta_{k-1}$  și  $\zeta_k$ .

**Definiția 6.1.1** *Dacă există limita sumei integrale (6.1) pentru*

$$\max\{|\Delta\zeta_k|, 1 \leq k \leq n\} \rightarrow 0$$

*și aceasta este independentă de partiția curbei  $C$  și de alegerea punctelor intermediare  $\zeta_k^*$ , atunci se spune că funcția complexă de variabilă complexă  $f(z)$  este **integrabilă** pe curba  $C$ , iar limita se numește **integrala funcției  $f(z)$  pe curba  $C$**  și se notează*

$$\int_C f(z) dz. \quad (6.2)$$

Problema existenței integralei (6.2) se reduce la problema existenței unor integrale curbilinii reale de tipul al doilea ale părții reale  $u$  și părții imaginare  $v$  a funcției  $f(z)$ . Într-adevăr, scriind

$$f(\zeta_k^*) = u(P_k^*) + i v(P_k^*), \quad \Delta\zeta_k = \Delta\xi_k + i\Delta\eta_k,$$

unde  $P_k^*(\xi_k^*, \eta_k^*) \in C$  este imaginea numărului complex  $\zeta_k^* = \xi_k^* + i\eta_k^*$ , putem reprezenta expresia (6.1) ca

$$\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*) = \sum_{k=1}^n \left( u(P_k^*) \Delta\xi_k - v(P_k^*) \Delta\eta_k \right) + i \sum_{k=1}^n \left( v(P_k^*) \Delta\xi_k + u(P_k^*) \Delta\eta_k \right).$$

Partea reală și partea imaginară a sumei  $\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*)$  sunt sumele integrale ale respectiv integralelor curbilinii de al doilea tip

$$\int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy; \quad \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy, \quad (6.3)$$

cu presupunerea că, pentru existența integralelor (6.3), și deci a integralei (6.2), este suficient ca funcțiile reale  $u$  și  $v$  să fie continue pe porțiuni.

Astfel, integrala (6.2) ia forma

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy, \quad (6.4)$$

Această relație poate să servească ca definiție a integralei curbilinii a funcției  $f(z)$  pe curba  $C$ .

Enumerăm câteva proprietăți care sunt consecințe evidente ale proprietăților integralelor curbilinii de speța a doua:

$$\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz; \quad (6.5)$$

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1 \cup C_2} f(z) dz; \quad (6.6)$$

$$\int_C (a f(z) + b g(z)) dz = a \int_C f(z) dz + b \int_C g(z) dz, \quad (6.7)$$

unde  $C_1 \cup C_2$  este juxtapunerea curbilor  $C_1$  și  $C_2$  (se presupune prin urmare că extremitatea curbei  $C_1$  coincide cu originea curbei  $C_2$ ),  $a$  și  $b$  sunt constante complexe oarecare, iar  $f$  și  $g$  sunt funcții complexe pentru care există integralele pe curba  $C$ ;

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds, \quad (6.8)$$

unde  $ds$  este elementul de arc al curbei  $C$ , integrala din membrul drept fiind o integrală curbilinie reală de speța întâi;

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M \cdot L, \quad (6.9)$$

cu  $M = \max_{z \in C} |f(z)|$ ;

$$\int_C f(z) dz = \int_{\Gamma} f(\varphi(\zeta)) \varphi'(\zeta) d\zeta, \quad (6.10)$$

unde  $z = \varphi(\zeta)$  este o funcție olomorfă care stabilește o corespondență biunivocă între curbele  $C$  și  $\Gamma$ ;

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt, \quad (6.11)$$

$z = \zeta(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  fiind o reprezentare parametrică a curbei  $C$  cu extremitățile  $\zeta(\alpha)$  și  $\zeta(\beta)$ .

Egalitatea (6.11) este un caz particular al celei din (6.10) și constituie formula de calcul a integralei curbilinii în complex.

Integrala din membrul al doilea din (6.11) este o integrală definită a unei funcții complexe de variabilă reală care se scrie

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (u(\varphi(t), \psi(t)) + i\psi(\varphi(t), \psi(t))) (\varphi'(t) + i\psi'(t)) dt$$

sau

$$\begin{aligned} f(\zeta(t)) \zeta'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) - v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt + \\ &+ i \int_{\alpha}^{\beta} (u(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)) dt. \end{aligned}$$

**Exercițiul 6.1.1** Să se calculeze integrala curbilinie în complex

$$I_n = \int_{\Gamma} (z - z_0)^n dz, \quad (6.12)$$

unde  $n \in \mathbf{Z}$ , pe un cerc  $\Gamma$  cu centrul în punctul  $z_0 \in \mathbb{C}$  și rază  $r$ .

**Soluție.** Considerăm parametrizarea cercului

$$t \rightarrow \zeta(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

unde  $r$  este raza cercului.

Înlocuind  $z$  cu  $\zeta(t)$  și  $dz$  cu  $\zeta'(t)dt = rie^{it}dt$ , conform formulei (6.11), deducem

$$I_n = \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Pentru  $n = -1$ , integrala  $I_{-1}$  are valoarea  $I_{-1} = 2\pi i$ , iar pentru  $n \neq -1$  avem

$$I_n = \frac{r^{n+1}}{n+1} (e^{2\pi i(n+1)} - 1) = 0.$$

Am obținut următorul rezultat, care ulterior ne va fi util

$$\int_{\Gamma} (z - a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i, & \text{pentru } n = -1. \end{cases}$$

Observăm că rezultatul obținut nu depinde de raza  $r$  a cercului și nici de centrul său  $z_0$ . ■

**Exercițiul 6.1.2** Să se calculeze integrala curbilinie  $\int_{\Gamma} z^n dz$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pe frontiera semi-discului  $D = \{z = x + iy \mid x^2 + y^2 < a^2, y > 0\}$ .

**Soluție.** Fie porțiunile de curbe

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{z = x + iy \mid x \in [-a, a], y = 0\}, \\ \Gamma_2 &= \{z = x + iy \mid x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0\}\end{aligned}$$

ale căror ecuații parametrice sunt:

$$\Gamma_1 : t \mapsto \gamma_1(t) = t, \quad t \in [-a, a]; \quad \Gamma_2 : t \mapsto \gamma_2(t) = a e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

Deoarece  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , integrala se scrie ca o sumă de două integrale și fiecareia i se aplică formula de calcul (6.11). Avem:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} z^n dz &= \int_{\Gamma_1} z^n dz + \int_{\Gamma_2} z^n dz = \int_{-a}^a t^n dt + \int_0^{\pi} a^n e^{int} \cdot a i e^{it} dt = \\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1} (1 - (-1)^{n+1}) + a^{n+1} i \int_0^{\pi} e^{i(n+1)t} dt = 0,\end{aligned}$$

deoarece

$$\int_0^{\pi} e^{i(n+1)t} dt = \frac{1}{i(n+1)} (e^{i(n+1)\pi} - 1) = \frac{1}{i(n+1)} ((-1)^{n+1} - 1).$$

Vom demonstra mai jos (vezi relația (6.15)) că integrala pe orice contur dintr-o funcție olomorfă este nulă și prin urmare rezultatul găsit este justificat dacă avem în vedere că funcția polinom este olomorfă în orice domeniu mărginit. ■

**Observația 6.1.1** Formula (6.4) și relația (6.11) permit extinderea conceptului de integrală improprie a unei funcții reale de o variabilă reală la cazul unei funcții complexe de o variabilă complexă, care este o integrală curbilinie dintr-o funcție complexă pe o curbă de lungime infinită.

**Definiția 6.1.2** O integrală improprie de primul tip pe o curbă infinită  $C$  se zice că este **convergentă** dacă există limita șirului de integrale complexe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} f(z) dz, \quad (6.13)$$

unde  $(C_n)$  este un șir de curbe cu proprietățile:



- $C_n$  este o parte de lungime finită a curbei  $C$ ;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$

și această limită nu depinde de alegerea șirului  $(C_n)$ .

Dacă există limita (6.13) numai pentru o anumită alegere a șirului de curbe  $(C_n)$ , integrala improprie  $\int_C f(z)dz$  se numește **convergentă în sensul valorii principale**.

În cele ce urmează vom considera integrale din funcții complexe olomorfe într-un anumit domeniu a cărui frontieră să fie o curbă închisă netedă pe porțiuni care nu are puncte multiple (curba nu se intersectează pe ea însăși). O astfel de curbă va fi numită *contur* și are ecuația  $z = \zeta(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ , unde funcția  $\zeta(t)$  satisface condiția  $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$  pentru  $t_1 \neq t_2$ , cu excepția lui  $t_1 = \alpha$  și  $t_2 = \beta$ . Integrala (6.2) de-a lungul unei astfel de curbe se va numi *integrală pe contur*.

## 6.2 Teoremele lui Cauchy

Deoarece valoarea unei integrale pe contur depinde de sensul de parcurgere al curbei, convenim să luăm drept *sens pozitiv* acel sens de parcurgere care lasă la stânga domeniul limitat de curbă. Sensul contrar acestuia se numește *sens negativ* de parcurgere al conturului. Integrarea pe un contur  $C$  parcurs în sens pozitiv din funcția complexă de variabilă complexă  $f(z)$  se va nota  $\int_{C^+} f(z)dz$ ; dacă conturul este parcurs în sens negativ, integrala corespunzătoare se va nota prin  $\int_{C^-} f(z)dz$ . Când nu se menționează sensul de parcurs iar curba pe care se face integrarea este un contur, deci când vom întâlni scrierea  $\int_C f(z)dz$ , se va subînțelege că sensul de parcurs al curbei  $C$  este cel pozitiv.

Proprietățile integralei pe contur din funcții continue pe *domeniul închis* limitat de acel contur și olomorfe în domeniul mărginit de conturul respectiv sunt determinate în mare măsură de proprietățile obișnuite ale integralelor curbilinii reale de al doilea tip. Una din aceste proprietăți stabilește legătura între integrala curbilinie de speța a doua pe un contur parcurs în sens pozitiv și o anumită integrală dublă pe domeniul mărginit de contur.

**Teorema 6.2.1** Dacă funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt continue pe domeniul închis  $D \cup C$  mărginit de conturul neted pe porțiuni  $C$  și derivatele lor parțiale de

primul ordin sunt continue pe domeniul  $D$ , atunci are loc relația

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dxdy, \quad (6.14)$$

numită **formula integrală Riemann–Green**.

Să demonstrăm un rezultat fundamental al teoriei funcțiilor complexe.

**Teorema 6.2.2 (Teorema lui Cauchy pentru un domeniu simplu conex)** Dacă funcția complexă de variabilă complexă  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  este olomorfă pe domeniul simplu conex  $D$  din planul complex  $(z)$ , atunci

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (6.15)$$

oricare ar fi conturul  $\Gamma \subset D$ .

**Demonstrație.** Deoarece funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este olomorfă pe  $D$ , funcțiile  $u$  și  $v$  admit derivate parțiale de ordinul întâi continue în  $D$  care satisfac în  $D$  condițiile Cauchy–Riemann:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y); \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (6.16)$$

Să notăm cu  $D_1 \subset D$  domeniul simplu conex limitat de un contur oarecare  $\Gamma \subset D$  și să aplicăm formula (6.14) integralelor curbilinii reale de al doilea tip din membrul doi al relației (6.4) folosind totodată (6.16). Avem:

$$\int_{\Gamma} u dx - v dy = \iint_{D_1} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0; \quad (6.17)$$

$$\int_{\Gamma} v dx + u dy = \iint_{D_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0. \quad (6.18)$$

Relațiile (6.4), (6.17) și (6.18) demonstrează teorema. ■

Teorema 6.2.2 stabilește că integrala unei funcții complexe pe orice contur situat în domeniul  $D$  de olomorfie al funcției este zero.

Dacă se impune condiția suplimentară ca funcția  $f$  să fie definită și continuă pe frontiera  $C$  a domeniului  $D$ , ea însăși un contur ( $D$  este o mulțime deschisă, simplu conexă), Teorema 6.2.2 are loc și pentru  $C = \partial D$ .

Ultima afirmația este un enunț ușor modificat al Teoremei 6.2.2. Datorită importanței sale în aplicațiile practice, vom formula această afirmație într-o teoremă separată.

**Teorema 6.2.3 (A doua formulare a teoremei lui Cauchy pentru domenii simplu conexe)** *Dacă  $f(z)$  este o funcție olomorvă într-un domeniu simplu conex  $D$  mărginit de conturul  $C$  și este continuă pe domeniul închis  $D \cup C$ , atunci integrala funcției  $f(z)$  de-a lungul frontierei  $C$  a domeniului  $D$  este zero:*

$$\int_C f(z)dz = 0. \quad (6.19)$$

Teorema de mai sus a fost formulată pentru un domeniu simplu conex, însă ea poate fi generalizată la cazul unui domeniu multiplu conex. În acest caz, frontiera totală a domeniului este formată din mai multe contururi: *conturul exterior*  $C_0$  și *contururile interioare*  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Oricare două contururi sunt disjuncte. *Sensul pozitiv de parcurgere a frontierei totale a unui domeniu multiplu conex* va fi acela pentru care domeniul este lăsat la stânga. Astfel,  $C_0$  este traversat în sens pozitiv, iar contururile interioare sunt parcurse în sens negativ (sensul acelor de ceasornic).

**Teorema 6.2.4 (Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe)** *Dacă  $f(z)$  este funcție olomorvă pe domeniul multiplu conex  $D$  mărginit pe exterior de conturul  $C_0$  și pe interior de contururile  $C_1, C_2, \dots, C_n$  și  $f$  este funcție continuă pe domeniul închis  $D \cup C$ , unde  $C = \partial D = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$  este frontiera totală a domeniului  $D$  parcursă în sens pozitiv, atunci  $\int_C f(z)dz = 0$ , relație echivalentă cu una din formele:*

$$\int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^-} f(z)dz = 0; \quad (6.20)$$

$$\int_{C_0^+} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^+} f(z)dz + \dots + \int_{C_n^+} f(z)dz. \quad (6.21)$$

**Demonstrație.** Fie curbele netede  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ <sup>1</sup> care leagă conturul exterior  $C_0$  cu fiecare din contururile interioare  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Curbele  $C_0, C_1, \dots, C_n$  și  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , ultimele parcurse în ambele sensuri, limitează un domeniu simplu conex. În baza Teoremei 6.2.3, integrala de-a lungul frontierei acestui domeniu este zero. Cum integralele de-a lungul

<sup>1</sup>Curbele  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  se aleg astfel încât să nu se intersecteze și pot fi în particular segmente de dreaptă

curbelor auxiliare  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  apar de două ori, dar în sensuri opuse, ele se anulează și deci obținem (6.20).

Relația (6.21) se deduce ușor din precedentă. ■

**Exemplul 6.2.1** *Aplicând teorema lui Cauchy funcției  $f(z) = e^{-z^2}$  pe conturul unui dreptunghi de laturi  $2R$  și  $\frac{k}{a}$ , situat în semiplanul superior, simetric în raport cu axa imaginară și cu una din laturile de lungime  $2R$  situată pe axa reală, să se arate că*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{k}{a})^2} dx. \quad (6.22)$$

Să se calculeze apoi valoarea integralei improprii

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2k}{a} x dx.$$

**Soluție.** Funcția  $f(z) = e^{-z^2}$  este olomorfă în întreg planul, prin urmare integrala sa pe orice contur este nulă.

Considerând conturul din enunț și trecând la limită pentru  $R \rightarrow \infty$ , obținem

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{II} e^{-z^2} dz + \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-(x+i\frac{k}{a})^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{IV} e^{-z^2} dz = 0, \end{aligned}$$

unde  $II$  și  $IV$  reprezintă laturile dreptunghiului paralele cu axa imaginară situate de o parte și de alta a ei la distanța  $R$ .

A doua și a patra integrală este egală cu zero pentru că modulul integrantului tinde la zero când  $R \rightarrow \infty$  și din egalitatea de mai sus rezultă (6.22).

Dar egalitatea (6.22) se poate scrie în forma

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{\frac{k^2}{a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2i\frac{k}{a}x} dx. \quad (6.23)$$

Dacă ținem seama de faptul că  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  și că  $e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ , din (6.23) deducem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2k}{a} x dx = \sqrt{\pi} e^{-\frac{k^2}{a^2}}. \quad (6.24)$$

Această integrală va fi folosită în unul din capitolele următoare. ■

**Exercițiul 6.2.1** Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 - 1} dz,$$

unde  $\Gamma$  este cercul cu centrul în origine și raza  $a \neq 1$ , parcurs în sens pozitiv.

**Soluție.** Funcția  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$  este olomorfă pe domeniul triplu conex  $D \setminus \{-1, 1\}$ .

Dacă  $a < 1$ , funcția  $f(z)$  este olomorfă pe domeniul simplu conex  $\Delta$  a cărui frontieră este cercul  $\Gamma$ . Conform primei teoreme a lui Cauchy,  $I = 0$ .

Dacă  $a > 1$ , domeniul închis  $\Delta \cup \Gamma$  nu mai este un domeniu de olomorfie pentru funcția  $f$ . În această situație, considerăm cercurile  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$ , incluse în  $\Delta$ , de raze  $r_1 < 1$  și  $r_2 < 1$ . Notăm cu  $\Delta_1$  și  $\Delta_2$  discurile mărginite de  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  și fie  $\overline{\Delta}_1$  și  $\overline{\Delta}_2$  închiderile acestor discuri.

Domeniul  $\Delta \setminus \{\overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2\}$  și frontiera sa sunt incluse în  $D$ , deci putem aplica Teorema 6.2.4 și folosi relația (6.21) a acesteia. Obținem

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z}{z^2 - 1} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2 - 1} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2 - 1} dz,$$

unde contururile  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  sunt parcurse în sens pozitiv.

Cum  $\frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1} \right)$ , avem

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2 - 1} dz = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z - 1} dz + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \frac{1}{z + 1} dz.$$

În conformitate cu (6.12) prima integrală din exprimarea lui  $I_1$  este egală cu  $2\pi i$ . A doua este nulă deoarece  $\overline{\Delta}_1$  este inclus în domeniul de olomorfie al funcției  $z \mapsto f_1(z) = \frac{1}{z + 1}$ , deci  $I_1 = \pi i$ .

Analog se dovedește că  $I_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2 - 1} dz = \pi i$ , prin urmare  $I = I_1 + I_2 = 2\pi i$ , pentru orice  $a > 1$ . ■

### 6.3 Integrala nedefinită

Rezultatul demonstrat mai jos este o consecință a teoremelor lui Cauchy.

Fie  $f(z)$  o funcție olomorfă pe un domeniu simplu conex  $D$  din planul complex ( $z$ ). Fixăm un punct  $z_0 \in D$  și notăm

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

integrala de-a lungul unei anumite curbe situată în întregime în  $D$  și care leagă punctele  $z_0$  și  $z$ . În baza teoremei lui Cauchy, această integrală este independentă de curba de integrare din domeniul  $D$ , deci este o funcție uniformă de limita superioară de integrare  $z$  definită pe  $D$ . Notând această funcție cu  $\Phi(z)$ , avem

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \Phi(z). \quad (6.25)$$

**Teorema 6.3.1** *Dacă funcția  $f(z)$ , definită și continuă în domeniul simplu conex  $D$ , are proprietatea că integrala acesteia pe orice contur  $\Gamma$ , în întregime inclus în  $D$ , este egală cu zero, atunci funcția  $\Phi(z)$  din (6.25) este olomorfă în  $D$ ,  $\Phi'(z) = f(z)$  și  $\Phi'(z)$  este funcție continuă pe  $D$ .*

**Demonstrație.** Evaluăm raportul incremental al funcției  $\Phi(z)$  în vecinătatea punctului  $z$

$$\frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left( \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

Deoarece integralele care apar sunt independente de drum, alegem drept curbă ce unește punctele  $z$  și  $z + \Delta z$  segmentul de dreaptă de extremități  $z$  și  $z + \Delta z$ .

În baza relației evidente  $\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$ , putem scrie

$$\left| \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right|.$$

Aplicând proprietatea (6.9), găsim

$$\left| \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|.$$

În baza continuității funcției  $f$  în punctul  $z$ , pentru orice număr pozitiv  $\varepsilon$  există  $\delta > 0$  astfel încât  $|\Delta z| < \delta$  implică  $\max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ , astfel că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $\delta > 0$  cu proprietatea

$$\left| \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon, \quad \text{pentru } 0 < |\Delta z| < \delta.$$

Din aceasta inegalitate rezultă că există limita în  $\Delta z = 0$  a raportului incremental al funcției  $\Phi(z)$  în vecinătatea punctului  $z$  și această limită este  $f(z)$ . Prin urmare, putem scrie

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z),$$

ce arată că  $\Phi(z)$  este o funcție olomorfă în domeniul  $D$ ,  $\Phi'(z) = f(z)$  și derivata sa este funcție continuă pe  $D$  deoarece  $f$  este continuă pe  $D$ . ■

Teorema 6.3.1 sugerează introducerea noțiunii de *integrală nedefinită a unei funcții complexe de o variabilă complexă*.

**Definiția 6.3.1** O funcție olomorfă  $\Phi(z)$  se numește **primitivă** funcției  $f(z)$  în domeniul  $D$  dacă în acest domeniu are loc relația  $\Phi'(z) = f(z)$ .

Este evident că funcția  $f(z)$  are o infinitate de primitive și oricare două asemenea primitive diferă printr-o constantă.

**Definiția 6.3.2** Mulțimea tuturor primitivelor funcției  $f(z)$  se numește **integrala nedefinită a funcției  $f(z)$** .

La fel ca în cazul funcțiilor reale, are loc relația

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) - F(z_1),$$

unde  $F(z)$  este o primitivă a lui  $f(z)$ .

Într-adevăr, integrala din membrul drept este independentă de calea de integrare și drept urmare

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z) dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz, \quad (6.26)$$

unde  $z_0$  este un punct arbitrar din domeniul  $D$ . Conform relației (6.25), fiecare din integralele din membrul doi a egalității (6.26) este o primitivă a funcției  $f(z)$ .

Deoarece oricare două primitive ale funcției  $f(z)$  diferă printr-o constantă, nu are importanță care primitivă este folosită în (6.26).

**Exemplul 6.3.1** Un exemplu de interes pentru mai târziu este funcția definită prin integrala

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (6.27)$$

**Soluție.** Să observăm că integrantul lui (6.27) este o funcție analitică (olomorfă și cu derivata funcție continuă) în întreg planul complex, cu excepția punctului  $z = 0$ . Curba pe care se face integrarea în (6.27) nu trebuie să conțină originea care este pol simplu pentru funcția de integrat. În orice domeniu care nu conține originea, funcția  $f(z)$  este uniformă iar integrala din membrul doi al relației (6.27) nu depinde de drumul de integrare. Pentru

a se realiza aceasta vom considera planul complex ( $z$ ) căruia i s-a efectuat o tăietură, care ar putea fi semi-axa reală nepozitivă.

Prin urmare, domeniul maxim  $D$  în care funcția  $f(z)$  din (6.27) poate fi definită este  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ . Vom presupune că drumul de integrare în (6.27) se află în întregime în domeniul de mai sus, deci nu intersectează tăietura și nici nu trece prin origine.

Alegând drept cale de integrare segmentul  $[1, x]$ , avem

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \quad (6.28)$$

și deci pentru valori pozitive ale argumentului, funcția  $f(z)$  coincide cu funcția logaritm natural de o variabilă reală. Prin urmare, pentru funcția (6.27) definită în domeniul  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ , avem

$$\operatorname{Log} z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (6.29)$$

Egalitatea (6.29) poate fi considerată definiția ramurii principale a funcției logaritmice în complex. În baza relației (6.25) avem

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}. \quad (6.30)$$

Așadar, în domeniul  $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ , derivata funcției logaritmice are aceeași expresie cu cea a funcției reale  $\ln x$ , cu deosebirea că se înlocuiește  $x$  cu  $z$ . ■

## 6.4 Integrala Cauchy

Teoremele lui Cauchy dau posibilitatea stabilirii unei relații numită *formula integrală a lui Cauchy*.

### 6.4.1 Deducerea formulei integrale a lui Cauchy

Fie funcția complexă de variabilă complexă  $f$ , olomorfă într-un domeniu simplu conex  $D$ , conturul  $\Gamma$  situat în  $D$  și  $z$  un punct interior domeniului  $\Delta \subset D$  de frontieră  $\Gamma$ . Să considerăm integrala

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (6.31)$$



unde variabila complexă de integrare  $\zeta$  descrie întreg conturul  $\Gamma$ . Privită ca funcție de  $\zeta$ , expresia de sub semnul integralei (6.31) este olomorfă în  $\Delta$ , cu excepția punctului  $\zeta = z$  unde devine infinită dacă  $f(z) \neq 0$ . Izolăm punctul  $z$  cu un cerc  $\gamma$  de rază suficient de mică astfel încât să nu existe puncte comune cu  $\Gamma$ . Atunci, Teorema 6.2.3 ne dă

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.32)$$

Pentru  $\varepsilon > 0$  există  $r > 0$  suficient de mic pentru ca  $\gamma$  să nu intersecteze cercul  $\Gamma$ , astfel încât  $(\forall) \zeta \in \gamma$  să avem

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta, z), \quad |\eta(\zeta, z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad (\forall) \zeta \in \gamma, \quad (6.33)$$

ceea ce este posibil, căci  $f(z)$  este olomorfă, deci continuă pe mulțimea  $\Delta$ . Avem

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{f(z) + \eta(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_{\gamma} \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.34)$$

Dar

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \quad \left| \int_{\gamma} \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot |2\pi i| = \varepsilon. \quad (6.35)$$

Deoarece în (6.35)  $\varepsilon$  se poate alege oricât de mic, urmează

$$\int_{\gamma} \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad (6.36)$$

Folosind (6.35) și (6.36) în (6.34), deducem

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z),$$

din care rezultă *formula integrală a lui Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (6.37)$$

fundamentală în teoria funcțiilor analitice.

Formula (6.37) arată că *dacă se știu valorile funcției  $f(\zeta)$  pe conturul  $\Gamma$ , iar funcția  $f(\zeta)$  este olomorfă într-un domeniu simplu conex  $D$  care conține în interior pe  $\Gamma$ , valoarea funcției  $f$  este determinată în orice punct  $z$  interior lui  $\Gamma$ .*

**Observația 6.4.1** În (6.37) integrarea se face de-a lungul conturului  $\Gamma$  în întregime situat în domeniul de olomorfie al funcției  $f(\zeta)$  și care conține punctul  $z$ . Dacă se impune și condiția de continuitate a lui  $f$  în domeniul închis  $\overline{D} = D \cup \partial D$ , în baza Teoremei 6.2.2 rezultă o formulă similară celei din (6.37), dar în care integrarea se face de-a lungul conturului  $C$  al domeniului simplu conex  $D$ . Așadar

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.38)$$

**Observația 6.4.2** Considerațiile de mai sus rămân valabile și în cazul unui domeniu multiplu conex  $D$  având frontiera exterioară  $C_0$  și frontierele interioare curbele închise, netede pe porțiuni  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , disjuncte două câte două și în întregime situate în interiorul lui  $C_0$ . Cu condiția suplimentară de continuitate a funcției  $f$  pe închiderea domeniului  $D$ , are loc formula

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \dots - \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right). \quad (6.39)$$

**Exercițiul 6.4.1** Se cere valoarea integralei

$$I = \int_{\Gamma} \frac{z \cos \pi z}{z^2 - 1} dz,$$

unde  $\Gamma$  este o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porțiuni, care nu conține punctele  $-1$  și  $1$ .

**Soluție.** Fie  $\Delta$  domeniul mărginit care are ca frontieră curba  $\Gamma$ . Se disting cazurile:

1.  $\Delta$  nu conține nici unul din punctele  $-1$  și  $1$ . În acest caz,  $\Delta \cup \Gamma = \overline{\Delta}$  este inclus în domeniul de olomorfie al funcției  $z \mapsto \frac{z \cos \pi z}{z^2 - 1}$ , deci  $I = 0$ ;
2.  $1 \in \Delta$  iar  $-1 \notin \Delta$ . Funcția  $f_1$  cu valorile  $f_1(z) = \frac{z \cos \pi z}{z + 1}$  este olomorfă pe  $\overline{\Delta}$  și, conform formulei integrale a lui Cauchy,

$$I = \int_{\Gamma} \frac{f_1(z)}{z - 1} dz = 2\pi i f_1(1) = -\pi i;$$

3.  $-1 \in \Delta$ ,  $1 \notin \Delta$ . Funcția  $f_2(z) = \frac{z \cos \pi z}{z - 1}$  este olomorfă pe  $\Delta$ , deci

$$I = \int_{\Gamma} \frac{f_2(z)}{z + 1} dz = 2\pi i f_2(-1) = -\pi i;$$

4.  $-1 \in \Delta$ ,  $1 \in \Delta$ . În acest caz, considerăm discurile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  de centre  $-1$ , respectiv  $1$  și de raze suficient de mici astfel încât  $\overline{\omega_1} \cup \overline{\omega_2} \subset \Delta$  și cercurile frontieră  $\gamma_1 = \partial\omega_1$ ,  $\gamma_2 = \partial\omega_2$  să nu aibă puncte comune. Conform Teoremei 6.2.4, are loc o egalitate de forma (6.21)

$$\int_{\Gamma} \frac{z \cos \pi z}{z^2 - 1} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{z \cos \pi z}{z^2 - 1} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{z \cos \pi z}{z^2 - 1} dz,$$

cele două integrale din membrul doi încadrându-se în câte unul din cazurile precedente și deci  $I = -2\pi i$ . ■

### 6.4.2 Consecințe ale formulei lui Cauchy

Există remarci importante referitoare la formula integrală a lui Cauchy scrisă sub forma (6.38) sau sub forma (6.39), după cum domeniul  $D$  este simplu sau multiplu conex.

O integrală de forma  $\int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  de-a lungul unui contur  $\Gamma$  situat în întregime în domeniul de olomorfie  $D$  al funcției complexe  $f$  are sens pentru orice punct  $z$  situat în planul complex și care nu este pe frontiera domeniului. Dacă  $z$  se află în interiorul domeniului  $\Delta$  limitat de curba închisă și netedă pe porțiuni  $\Gamma$ , atunci valoarea integralei este  $2\pi i f(z)$ ; dacă  $z$  este situat în afara conturului  $\Gamma$ , valoarea integralei este zero, deoarece în acest caz integrantul este funcție olomorfă pe domeniul  $\Delta$  și, conform Teoremei 6.2.2, integrala este nulă. Astfel, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{dacă } z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă } z \notin \Delta \cup \Gamma. \end{cases} \quad (6.40)$$

Pentru  $z \in \Gamma$  integrala  $I(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$  nu există în sensul obișnuit; totuși, în condiții suplimentare asupra comportării funcției  $f(\zeta)$  pe conturul  $\Gamma$ , acestei integrale i se poate atribui o valoare. Astfel, dacă pe conturul  $\Gamma$  funcția  $f(\zeta)$  satiface condiția Hölder

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq |\zeta_1 - \zeta_2|^{\nu}, \quad 0 < \nu < 1,$$

atunci integrala  $I(z)$  există în sensul *valorii principale a lui Cauchy*:

$$VP I(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

unde  $\Gamma_\varepsilon$  este porțiunea din  $\Gamma$ , exterioară cercului  $|\zeta - z| < \varepsilon$ . Se demonstrează că

$$VP I(z) = \frac{1}{2}f(z)$$

și prin urmare (6.40) devine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z), & \text{dacă } z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă } z \notin \Delta \cup \Gamma, \\ \frac{1}{2}f(z), & \text{dacă } z \in \Gamma. \end{cases} \quad (6.41)$$

**Exercițiul 6.4.2** Să se calculeze integrala  $I(a) = \int_{\Gamma} \frac{z^n}{z - a} dz$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , pe cercul  $\Gamma$  cu centrul în origine și raza egală cu 1 și din rezultatul găsit să se deducă valoarea principală în sensul lui Cauchy pentru două integrale improprii reale cu singularitatea în intervalul de integrare.

**Soluție.** Conform (6.41), avem

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |a| > 1, \\ 2\pi i a^n, & \text{dacă } |a| < 1. \end{cases}$$

În cazul când  $|a| = 1$ , rezultă că  $a \in \Gamma$  și integrala se calculează în sensul valorii principale a lui Cauchy. Prin urmare, scriem

$$VP I(a) = VP \int_{\Gamma} \frac{z^n}{z - a} dz = \pi i a^n.$$

Dacă punem în evidență partea reală și partea imaginară a ultimei integrale, din ultimul rezultat putem deduce valoarea principală în sens Cauchy pentru alte două integrale reale.

Pentru aceasta, fie  $\varphi \in [0, 2\pi]$  argumentul numărului complex  $a \in \Gamma$ , deci  $a = e^{i\varphi}$ . Parametrizăm cercul  $\Gamma$  prin  $\theta \rightarrow z = e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  și ultima integrală devine  $VP \int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - e^{in\varphi}} e^{i\theta} d\theta = \pi e^{in\varphi}$ . Dar,

$$\frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - e^{in\varphi}} = \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \theta)}} = \frac{1}{2} \left( 1 + i \frac{\cos \frac{\varphi - \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} \right),$$

astfel că, introducând în egalitatea de mai sus, rezultă

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \frac{\varphi - \theta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \theta}{2}} e^{in\theta} d\theta = \pi e^{in\varphi}.$$

Prima integrală este nulă. Egalând părțile reale și imaginare, obținem

$$\begin{aligned} VP \int_0^{2\pi} \frac{\cos \frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\theta}{2}} \cos n\theta d\theta &= 2\pi \sin n\varphi, \\ VP \int_0^{2\pi} \frac{\cos \frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin \frac{\varphi-\theta}{2}} \sin n\theta d\theta &= -2\pi \cos n\varphi, \end{aligned}$$

care sunt valorile principale în sens Cauchy pentru două integrale improprii cu singularitatea în punctul  $\theta = \varphi$ . ■

O altă consecință a formulei integrale a lui Cauchy este *formula valorii medii* care exprimă valoarea unei funcții olomorfe în centrul unui cerc ca o medie (o integrală) a valorilor sale pe frontiera cercului. Să deducem această formulă.

Fie  $f(z)$  o funcție olomorfă în domeniul simplu conex  $D$  și fie  $z_0$  un punct oarecare al acestui domeniu. Fiind un punct interior, se poate descrie cercul  $C_{R_0}$  de rază  $R_0$  cu centrul în  $z_0$  care să fie în întregime situat în  $D$ . Folosind formula integrală a lui Cauchy, obținem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_0}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Deoarece pe cercul  $C_{R_0}$  avem  $z = z_0 + R_0 e^{i\varphi}$ , obținem relația

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi}) d\varphi,$$

care se mai scrie în forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0} \int_{C_{R_0}} f(z) ds, \quad (6.42)$$

unde  $ds = R_0 d\varphi$  este elementul de arc al cercului.

Relația (6.42) se numește *formula valorii medii*.

## 6.5 Integrale depinzând de parametru

Funcția de integrat din formula lui Cauchy (6.39) depinde de două variabile: variabila de integrare  $\zeta$  aparținând unei curbe  $C$  pe care se face integrarea și  $z \in D$ , unde  $D$  este un domeniu oarecare iar  $C$  este o curbă oarecare.

Astfel, integrala Cauchy este o integrală depinzând de parametrul  $z$ .

Să studiem proprietățile generale ale integralei Cauchy.

Fie dată o funcție complexă de două variabile complexe  $\varphi(z, \zeta)$  unic definită pentru valorile variabilei complexe  $z = x + iy$  dintr-un domeniu  $D$  și pentru valorile unei variabile complexe  $\zeta = \xi + i\eta$  care aparține unei curbe netede pe porțiuni  $C$ .

Pozițiile domeniului  $D$  și curbei  $C$  pot fi oricare.

Să presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiții:

1. Pentru orice valoare a lui  $\zeta \in C$ , funcția  $\varphi(z, \zeta)$  este analitică în domeniul  $D$ , adică  $\varphi(z, \zeta)$  este funcție olomorfă în raport cu variabila  $z$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \zeta)$  este funcție continuă pe mulțimea  $D \times C$ ;
2. Funcțiile  $\varphi(z, \zeta)$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \zeta)$  sunt continue de variabilele  $z, \zeta$  luate împreună pentru o variație arbitrară a lui  $z$  în domeniul  $D$  și al lui  $\zeta$  pe curba  $C$ .

Condiția a doua semnifică faptul că părțile reală și imaginară a derivatei de mai sus sunt continue în raport cu variabilele  $x, y, \xi, \eta$ .

Cu presupunerile făcute, integrala funcției  $\varphi(z, \zeta)$  de-a lungul curbei  $C$  există pentru orice  $z \in D$  și această integrală este o funcție de variabila  $z$ ,

$$F(z) = \int_C \varphi(z, \zeta) d\zeta. \quad (6.43)$$

Prezentăm o proprietate fundamentală a funcției  $F(z)$  definită în (6.43).

**Teorema 6.5.1** *Funcția  $F(z)$  definită de (6.43) este olomorfă în domeniul  $D$  și derivata sa se poate calcula derivând funcția de sub semnul integrală în raport cu variabila  $z$ .*

**Demonstrație.** Să notăm cu  $u(x, y, \xi, \eta)$  și  $v(x, y, \xi, \eta)$  părțile reală și imaginară ale funcției  $\varphi(z, \zeta)$ . Atunci partea reală a funcției  $F(z)$  este integrala curbilinie reală de speța a doua

$$U(x, y) = \int_C u(x, y, \xi, \eta) d\xi - v(x, y, \xi, \eta) d\eta.$$

Deoarece am presupus că funcțiile  $u$  și  $v$  posedă derivate parțiale continue, derivatele parțiale ale funcției  $U(x, y)$  există și pot fi calculate derivând sub semnul integral:

$$U_{,x}(x, y) = \int_C u_{,x} d\xi - v_{,x} d\eta; \quad U_{,y}(x, y) = \int_C u_{,y} d\xi - v_{,y} d\eta.$$

Aceste derivate sunt, la rândul lor, funcții continue de variabilele  $x$  și  $y$  în domeniul  $D$ .

În baza proprietăților similare ale funcției  $V(x, y)$  și ținând cont că  $\varphi(z, \zeta)$  satisface condițiile Cauchy–Riemann, obținem:

$$\begin{aligned} V_{,y}(x, y) &= \int_C v_{,y} d\xi + u_{,y} d\eta = \int_C u_{,x} d\xi - v_{,x} d\eta = U_{,x} \\ V_{,x}(x, y) &= \int_C v_{,x} d\xi + u_{,x} d\eta = - \int_C u_{,y} d\xi - v_{,y} d\eta = -U_{,y}. \end{aligned}$$

Aceste relații arată că  $F(z)$  satisface condițiile Cauchy–Riemann ceea ce demonstrează că funcția  $F(z)$  este olomoră în domeniul  $D$ . Să observăm că

$$\begin{aligned} F'(z) &= U_{,x}(x, y) + iV_{,x}(x, y) = \\ &= \int_C u_{,x} d\xi - v_{,x} d\eta + i \int_C v_{,x} d\xi + u_{,x} d\eta = \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Așadar, este posibil să calculăm derivata integralei derivând parțial în raport cu paramterul sub integrală, iar dacă  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  satisface cele două condiții de mai sus,  $F'(z)$  este funcție olomoră în domeniul  $D$ . ■

## 6.6 Expresia derivatelor unei funcții olomorfe

Proprietatea stabilită în Teorema 6.5.1 permite calculul derivatelor unei funcții olomorfe și stabilirea unei proprietăți importante ale acestor derivate.

După cum am văzut, valoarea funcției  $f(z)$ , olomoră într-un anumit domeniu  $D$  mărginit de conturul  $C$  și continuă pe închiderea acestui domeniu pot fi exprimate în punctele interioare ale acestui domeniu în funcție de valorile funcției pe contur:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6.44)$$

Să considerăm un subdomeniu închis  $D'$  al domeniului  $D$  ale cărui puncte, inclusiv cele de pe frontieră, au proprietatea că distanța până la punctele frontierei  $C$  sunt mai mari sau egale cu numărul pozitiv  $d$ . Prin urmare, avem  $|z - \zeta| \geq d$ .

Atunci, funcția  $\varphi(z, \zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$  este o funcție de  $z$  olomoră în domeniul  $D'$  și  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$  este o funcție continuă de argumentele sale în

$D'$ . În baza proprietăților generale ale integralelor depinzând de parametru, derivata  $f'(z)$  se poate reprezenta în punctele interioare ale domeniului  $D'$  în forma

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \quad (6.45)$$

Integrala (6.45) este tot o integrală care depinde de un parametru și funcția de integrat are aceleași proprietăți ca și integrala (6.44). În consecință,  $f'(z)$  este o funcție analitică în domeniul  $D'$  și are loc formula

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta. \quad (6.46)$$

Deoarece pentru orice punct  $z \in D$  se poate construi un subdomeniu de forma  $D'$ , formulele (6.45) și (6.46) sunt adevărate în orice punct  $z \in D$ . În teorema de mai jos enunțăm rezultatul general.

**Teorema 6.6.1** *Fie  $f(z)$  o funcție olomorfă în domeniul  $D$  și continuă în domeniul închis  $D \cup C$ , unde  $C$  este frontiera lui  $D$ . Atunci există derivata de orice ordin a funcției  $f(z)$  în punctele lui  $D$  și are loc*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}, \quad (\forall) z \in D. \quad (6.47)$$

**Demonstrație.** Relația (6.47) se obține prin repetarea raționamentului precedent care ne-a condus la expresiile primelor două derivate ale funcției  $f(z)$ . ■

Așadar, dacă  $f(z)$  este olomorfă în domeniul  $D$ , atunci  $f(z)$  are derivate continue de orice ordin în acel domeniu. Această proprietate a unei funcții de variabilă complexă o distinge în mod esențial de o funcție de o variabilă reală care are prima derivată continuă într-un anumit domeniu. În cazul funcțiilor de o variabilă reală, existența derivatelor de ordin superior nu rezultă din existența primei derivate.

**Teorema 6.6.2 (Teorema lui Morera)** *Dacă  $f$  este o funcție complexă continuă într-un domeniu simplu conex  $D$  și are proprietatea că integrala sa pe orice contur inclus în  $D$  este nulă, atunci  $f$  este funcție olomorfă pe  $D$ .*

**Demonstrație.** În ipotezele acestei teoreme, s-a demonstrat că funcția  $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ , unde  $z_0$  și  $z$  sunt puncte arbitrare din  $D$  și integrala este considerată pe orice drum cu extremitățile  $z_0$  și  $z$  care este în întregime



situat în  $D$ , este o funcție olomorfa în  $D$  și  $F'(z) = f(z)$ . Însă, derivata unei funcții olomorfe este o funcție olomorfa, ceea ce înseamnă că există o derivată tot continuă a funcției  $F'(z)$ , și anume funcția  $F''(z) = f'(z)$ . ■

**Observația 6.6.1** *Teorema 6.6.2 este, într-un anumit sens, inversa Teoremei lui Cauchy. Ea poate fi generalizată pentru domenii multiplu conexe.*

**Teorema 6.6.3 (Teorema lui Liouville)** *Dacă  $f(z)$  este funcție olomorfa în planul complex și modulul ei este uniform mărginit, atunci  $f(z)$  este identic egală cu o constantă.*

**Demonstrație.** Din ipoteză rezultă că există  $M > 0$  astfel încât în toate punctele  $z$  ale planului să avem

$$|f(z)| \leq M. \quad (6.48)$$

Folosind formula (6.45), obținem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad (6.49)$$

unde  $C_R$  este cercul  $|\zeta - z| = R$ . Aplicând (6.42), deducem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi R^2} \int_{C_R} f(\zeta) ds, \quad (6.50)$$

unde  $ds$  este elementul de arc al cercului  $C_R$ .

Aplicând proprietatea (6.8) și folosind (6.48), din (6.50) obținem:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi R^2} \int_{C_R} |f(\zeta)| ds \leq \frac{M}{R}. \quad (6.51)$$

Deoarece am considerat întreg planul, raza  $R$  se poate alege oricât de mare și această alegere nu depinde de funcția  $f(z)$  și nici de derivata sa. Rezultă astfel că  $|f'(z)| = 0$ . Cum  $z$  este arbitrar, deducem că  $f'(z) \equiv 0$  în întreg planul complex. Deci  $f(z)$  este funcția constantă deoarece aceasta este singura funcție definită în întreg planul care are derivata identic nulă. ■

Am introdus funcțiile trigonometrice și am demonstrat că ele sunt funcții analitice în întreg planul complex. În baza Teoremei 6.6.3 ele nu pot fi uniform mărginite în planul complex căci dacă ar fi astfel, fiecare din ele ar fi funcția constantă.

Rezultă că există valori ale lui  $z$  astfel încât  $|\sin z| > 1$ .

Prin urmare, funcțiile trigonometrice de o variabilă complexă diferă esențial de funcțiile corespunzătoare din real.

## Capitolul 7

# Serii de funcții analitice în complex

În acest capitol se vor examina unele proprietăți ale seriilor de funcții ale căror termeni sunt funcții complexe de o variabilă complexă. Un rol special în teoria funcțiilor de variabilă complexă îl au *seriile de funcții analitice* și, în particular, *seriile de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

unde  $c_n$  sunt numere complexe cunoscute iar  $z_0$  este un punct fixat din planul complex. Studiul acestor serii este important atât pentru stabilirea unor proprietăți ale funcțiilor complexe de o variabilă complexă cât și în aplicații.

### 7.1 Funcții analitice

**Definiția 7.1.1** *Funcția complexă de variabilă complexă  $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  se numește **funcție analitică** în domeniul  $D \subset \mathbb{C}$  dacă  $f(z)$  este olomorfă și derivata  $f'(z)$  este continuă în  $D$ .*

**Observația 7.1.1** *O condiție necesară și suficientă pentru ca funcția complexă de variabilă complexă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  să fie analitică în domeniul  $D \subset \mathbb{C}$  este existența derivatelor parțiale continue ale funcțiilor  $u(x, y)$*

și  $v(x, y)$  care să satisfacă condițiile Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (7.1)$$

Vom vedea că noțiunea de funcție analitică este fundamentală în teoria funcțiilor complexe de o variabilă complexă datorită rolului important în rezolvarea multor probleme de matematică pură și în diverse aplicații ale funcțiilor complexe de o variabilă complexă.

Relațiile Cauchy–Riemann (7.1) se pot da și sub altă formă.

Deoarece numărul complex  $z = x + iy \in D$  se poate scrie sub forma exponențială  $z = re^{i\varphi}$ , unde  $r = |z|$  și  $\varphi = \text{Arg } z$ , rezultă că valorile funcției  $f(z)$  se pot da astfel încât părțile reală și imaginară să depindă de  $r$  și  $\varphi$ , adică

$$f(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi).$$

Cunoscând legăturile între  $r, \varphi$  și  $x, y$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (7.2)$$

și folosind derivarea funcțiilor compuse, din (7.1) și (7.2) obținem o altă formă a condițiilor Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Dacă valoarea funcției  $f$  într-un punct oarecare  $z$  al domeniului  $D$  în care este analitică se scrie în forma  $f(z) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$ , atunci condițiile Cauchy–Riemann sunt

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{cases} \quad (7.4)$$

unde  $R(x, y)$  și  $\Phi(x, y)$  sunt modulul și respectiv argumentul lui  $f(z)$ .

Dacă funcția  $f(z)$  este analitică în domeniul  $D$ , atunci pentru  $f'(z)$  pot fi date următoarele patru expresii:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y); \quad (7.5)$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y); \quad (7.6)$$

$$f'(z) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right); \quad (7.7)$$

$$f'(z) = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right). \quad (7.8)$$

Din Definiția 7.1.1 și Definiția 5.5.1 rezultă că funcțiile analitice sunt olomorfe, prin urmare proprietățile funcțiilor olomorfe sunt adevărate și pentru funcțiile analitice.

## 7.2 Serii de funcții de o variabilă complexă, uniform convergente

Considerăm șirul de funcții complexe de variabilă complexă  $(u_n)$ , unde  $u_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  sunt funcții uniforme definite pe domeniul  $D$  și seria de funcții asociată acestui șir

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (7.9)$$

**Observația 7.2.1** *O serie de funcții complexe uniforme este ansamblul seriilor de numere complexe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \quad (7.10)$$

unde  $z$  este un punct oarecare al lui  $D$ .

În cele ce urmează, o serie de funcții complexe va fi notată fie în forma (7.9), fie în forma (7.10).

**Definiția 7.2.1** *Seria de funcții complexe de variabilă complexă (7.9) se numește **convergentă** în domeniul  $D$  dacă pentru orice  $z \in D$  seria de numere complexe (7.10) este convergentă.*

Dacă seria (7.9) este convergentă în domeniul  $D$ , atunci în  $D$  se poate defini o funcție complexă uniformă  $f$  a cărei valoare în fiecare punct  $z \in D$  este suma seriei numerice (7.10). Această funcție se numește *suma seriei* (7.9) în domeniul  $D$ .

În baza definiției convergenței unei serii, pentru orice punct fixat  $z \in D$  și pentru orice număr pozitiv  $\varepsilon$  există un număr natural  $N$ , care depinde de  $\varepsilon$  și  $z$ , astfel încât

$$|f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n > N(\varepsilon, z).$$

La fel ca în cazul seriilor de funcții reale de variabilă reală, noțiunea de *convergență uniformă* joacă un rol important în teoria funcțiilor de variabilă complexă.

**Definiția 7.2.2** *Dacă pentru orice număr pozitiv  $\varepsilon$  există un număr natural  $N$  care să depindă numai de  $\varepsilon$  astfel încât pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  inegalitatea*

$$|f(z) - \sum_{k=1}^n u_k(z)| < \varepsilon \tag{7.11}$$

*să fie satisfăcută pentru toate punctele  $z \in D$ , seria (7.9) se numește **uniform convergentă** în domeniul  $D$ .*

Dacă  $r_n(z) = \sum_{n+1}^{\infty} u_k(z)$ , restul de ordin  $n$  al seriei (7.10), condiția (7.11) se poate scrie în forma

$$|r_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall) \ n > N(\varepsilon), \quad \text{și } z \in D. \tag{7.12}$$

Prezentăm unele proprietăți remarcabile ale seriilor uniform convergente de funcții complexe care sunt asemănătoare seriilor de funcții reale de variabilă reală uniform convergente.

**Teorema 7.2.1 (Criteriul lui Weierstrass)** *Dacă toți termenii seriei de funcții complexe (7.10) satisfac condiția*

$$|u_n(z)| \leq |a_n|, \quad (\forall) \ z \in D, \tag{7.13}$$

*și seria de numere reale  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  este absolut convergentă, atunci seria (7.9) este uniform convergentă pe domeniul  $D$ .*

**Demonstrație.** Din definiția seriei absolut convergente, rezultă că seria numerică  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  este o serie convergentă, deci pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$  pentru  $n > N(\varepsilon)$ . Însă, din (7.13) și criteriul lui Cauchy de convergență a unei serii numerice rezultă că în domeniul  $D$  au loc inegalitățile

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon, \quad (\forall) \ n > N(\varepsilon),$$

care demonstrează convergența uniformă a seriei (7.9) în domeniul  $D$ . ■

După cum se constată, criteriul lui Weierstrass este o condiție suficientă pentru uniforma convergență a unei serii de funcții complexe.

**Teorema 7.2.2 (Criteriul lui Cauchy)** *O condiție necesară și suficientă de convergență uniformă a seriei (7.9) într-un domeniu  $D$  este ca pentru orice  $\varepsilon > 0$  să existe un număr natural  $N(\varepsilon)$  astfel încât în toate punctele lui  $D$*

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall) \ n > N(\varepsilon), \quad m \in \mathbb{N}^*, \quad (7.14)$$

unde  $S_n(z) = \sum_{k=1}^n u_k(z)$  este suma parțială de rang  $n$  a seriei.

**Demonstrație. Necesitatea.** Din convergența uniformă a seriei (7.9) rezultă că  $(\forall) \ \varepsilon > 0$  există un rang  $N(\varepsilon)$  astfel încât în toate punctele  $z \in D$  au loc inegalitățile

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(z) - S_{n+m}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.15)$$

pentru orice  $n > N(\varepsilon)$  și pentru orice număr natural  $m$ . Pe de altă parte,

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| \leq |S_n(z) - f(z)| + |f(z) - S_{n+m}(z)|. \quad (7.16)$$

Folosind (7.15) și (7.16), deducem (7.14).

**Suficiența.** Din relația (7.14) rezultă că pentru orice  $z \in D$  fixat, șirul de numere complexe  $(S_n(z))$  este convergent. Aceasta înseamnă că seria de numere complexe (7.10) este convergentă și are suma

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z).$$

Prin trecere la limită pentru  $m \rightarrow \infty$  în (7.14) se obține

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |S_{n+m}(z) - S_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall) n > N(\varepsilon), \quad z \in D.$$

Aceasta demonstrează că seria de funcții (7.10) este uniform convergentă în domeniul  $D$ . ■

**Corolarul 7.2.1** *Dacă o serie de funcții este uniform convergentă, termenul ei general tinde la zero.*

Să examinăm unele proprietăți generale ale seriilor de funcții complexe uniform convergente.

**Teorema 7.2.3** *Dacă funcțiile  $u_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$  sunt continue în domeniul  $D$ , iar seria de funcții complexe  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge uniform în acest domeniu și are suma  $f(z)$ , atunci  $f(z)$  este o funcție continuă în domeniul  $D$ .*

**Demonstrație.** Pentru studiul continuității funcției  $f$  într-un punct oarecare  $z \in D$ , evaluăm expresia  $|f(z + \Delta z) - f(z)|$ , unde  $z + \Delta z$  aparține domeniului  $D$ .

În baza uniforme convergenței a seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  în domeniul  $D$ , pentru orice  $\varepsilon > 0$  se găsește un rang  $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât pentru toate punctele  $z, z + \Delta z \in D$  au loc inegalitățile:

$$\left| f(z + \Delta z) - \sum_{k=1}^N u_k(z + \Delta z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \left| f(z) - \sum_{k=1}^N u_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.17)$$

Cum funcțiile  $u_k(z)$  sunt continue în orice punct  $z \in D$ , pentru  $\varepsilon > 0$  arbitrar și un număr natural  $N$ , există  $\delta > 0$  astfel încât

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^N u_k(z + \Delta z) - \sum_{k=1}^N u_k(z) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^N |u_k(z + \Delta z) - u_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

pentru  $|\Delta z| < \delta$ . Din (7.17), (7.18) și din faptul că valoarea absolută a sumei nu întrece suma valorilor absolute a termenilor ei, rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un  $\delta > 0$  astfel încât  $|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$  pentru  $|\Delta z| < \delta$ , ceea ce demonstrează continuitatea funcției  $f$  în domeniul  $D$ . ■

**Teorema 7.2.4** *Dacă seria de funcții continue (7.9) este uniform convergentă pe un domeniu  $D$  și are suma  $f(z)$ , atunci  $f(z)$  este funcție integrabilă pe orice curbă netedă pe porțiuni  $C \subset D$  și*

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta) d\zeta, \quad (7.19)$$

sau

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta) d\zeta. \quad (7.20)$$

**Demonstrație.** Din convergența uniformă a seriei (7.10) rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât pentru toate punctele  $\zeta \in D$

$$|r_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad \text{pentru } n \geq N(\varepsilon),$$

unde  $L$  este lungimea curbei  $C$ . Atunci,

$$\left| \int_C f(\zeta) d\zeta - \sum_{k=1}^n \int_C u_k(\zeta) d\zeta \right| = \left| \int_C r_n(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_C |r_n(\zeta)| ds < \varepsilon,$$

unde  $ds$  este elementul de arc al curbei. Așadar seria de numere complexe din membrul drept al egalității (7.19) este convergentă și are suma  $\int_C f(\zeta) d\zeta$ . ■

Egalitatea (7.20) afirmă că, în ipotezele Teoremei 7.2.4, *integrala seriei este egală cu seria integralelor*.

Proprietățile seriilor complexe uniform convergente formulate în Teorema 7.2.3 și Teorema 7.2.4 sunt asemănătoare proprietăților corespunzătoare ale seriilor de funcții reale de o variabilă reală, demonstrațiile acestor teoreme fiind aceleași.

Vom da o proprietate remarcabilă a seriilor de funcții complexe uniform convergente.

**Teorema 7.2.5 (Prima Teoremă a lui Weierstrass)** *Dacă funcțiile  $u_n$  sunt analitice în domeniul  $D$ , iar seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  este uniform convergentă pe orice subdomeniu închis  $\overline{D}' \subset D$  și are suma  $f$ , atunci:*

1.  $f$  este funcție analitică în domeniul  $D$ ;

$$2. \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \quad (\forall) z \in D;$$



3. seria  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$  este uniform convergentă în orice subdomeniu închis  $\overline{D}' \subset D$ .

**Demonstrație.**

1. Considerăm un punct arbitrar  $z_0 \in D$  și construim un domeniu simplu conex  $D' \subset D$  astfel încât  $z_0 \in D'$ . Conform Teoremei 7.2.3,  $f(z)$  este o funcție continuă în  $D$ . Considerăm integrala funcției  $f(z)$  de-a lungul unui contur  $C \subset D'$ . În baza Teoremei 7.2.4, aceasta integrală se poate calcula integrând termen cu termen seria (7.10) și, deoarece funcțiile  $u_n(z)$  sunt funcții analitice, obținem

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta) d\zeta = 0.$$

Conform Teoremei lui Morera,  $f(z)$  este funcție analitică într-o vecinătate a punctului  $z_0$ . Deoarece alegerea punctului  $z_0$  este arbitrară,  $f(z)$  este analitică în domeniul  $D$ . De asemenea, funcția

$$r_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} u_j(z) = f(z) - \sum_{j=1}^n u_j(z)$$

este analitică în  $D$  ca sumă finită de funcții analitice în  $D$ .

2. Fixăm un punct  $z_0 \in D$  și alegem un contur  $C \subset D'$  care să înconjure punctul  $z_0$ . Fie  $d$  distanța dintre punctul  $z_0$  și conturul  $C$  și seria

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}. \quad (7.21)$$

Deoarece  $\min_{z \in C} |z - z_0| = d > 0$ , această serie este convergentă uniform pe  $C$  în baza ipotezelor teoremei. Prin urmare, integrând termen cu termen egalitatea (7.21) de-a lungul conturului  $C$  și ținând cont de formulele lui Cauchy care exprimă derivatele unei funcții analitice în funcție de integrala Cauchy, obținem

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0).$$

Deoarece  $z_0 \in D$  este arbitrar, concluzia (2) este demonstrată.

3. Considerăm un subdomeniu închis  $\overline{D}' \subset D$  și construim un contur  $C \subset D$ , care să fie situat în exteriorul lui  $\overline{D}'$ . Trasarea conturului  $C$  se face astfel

încât punctele sale să fie la distanța  $d$  de domeniul închis  $\overline{D}'$  ceea ce se traduce prin inegalitatea  $|z - \zeta| \geq d > 0$ . Deoarece restul de ordin  $n$  al seriei (7.10), notat cu  $r_n(z)$ , este funcție analitică în  $D$ , rezultă că pentru orice punct  $z \in D'$  avem relația

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{r_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = r_n^{(k)}(z),$$

membrul doi al egalității fiind restul de ordin  $n$  al seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ . Din convergența uniformă a seriei (7.10) rezultă că pentru  $\varepsilon > 0$  există  $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$  astfel încât pe conturul  $C$  și pentru  $n \geq N$  are loc evaluarea uniformă

$$|r_n(\zeta)| < \frac{2\pi d^{k+1}}{k!L} \varepsilon,$$

unde  $L$  este lungimea conturului  $C$ . Atunci

$$\left| r_n^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_C \frac{|r_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}} ds < \varepsilon, \quad (\forall) z \in \overline{D}',$$

ceea ce demonstrează și a treia concluzie a teoremei. ■

**Observația 7.2.2** *Demonstrația teoremei s-a făcut în cazul când domeniul  $D$  este simplu conex, însă nu este dificilă demonstrația sa în cazul unui domeniu multiplu conex.*

Să observăm că această metodă de demonstrație permite stabilirea uniforme convergenței a seriei derivatelor numai în domenii închise arbitrare  $\overline{D}' \subset D$ , chiar dacă seria inițială (7.10) este uniform convergentă în domeniul închis  $\overline{D}$ . Uniforma convergență a seriei (7.10) pe domeniul închis  $\overline{D}$  nu implică uniforma convergență pe  $\overline{D}$  a seriei derivatelor de un anumit ordin. Exemplul următor dovedește afirmația.

**Exemplul 7.2.1** *Seria de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$  este uniform convergentă în discul închis cu centrul în origine de rază 1, iar seria derivatelor de primul ordin  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$  nu este uniform convergentă pe acest disc.*

**Soluție.** Într-adevăr, în punctele discului închis  $|z| \leq 1$  termenii  $u_n(z)$  ai seriei date satisfac  $|u_n(z)| \leq \frac{1}{n^2}$ .

Pe de altă parte, se știe că seria numerică cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă, fiind seria armonică generalizată cu exponentul  $\alpha = 2 > 1$ . Conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcții dată este uniform convergentă în discul închis  $|z| \leq 1$ . Seria derivatelor,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ , nu poate converge uniform în discul închis deoarece este divergentă în punctul  $z = 1$  (seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  este divergentă). ■

**Observația 7.2.3** Când s-a demonstrat Teorema 7.2.5, am presupus uniforma convergență a seriei într-un subdomeniu închis arbitrar  $\overline{D}' \subset D$ . Cu o modificare care se va vedea în teorema următoare, concluziile teoremei rămân valabile și în cazul uniforme convergențe a seriei (7.10) în domeniul închis  $\overline{D}$ .

**Teorema 7.2.6 (A doua Teoremă a lui Weierstrass)** Dacă funcțiile  $u_n(z)$  sunt analitice într-un domeniu  $D$  și continue pe închiderea  $\overline{D}$  și seria (7.10) converge uniform pe frontiera  $\Gamma$  a acestui domeniu, atunci seria este uniform convergentă în  $\overline{D}$ .

**Demonstrație.** Diferența a două sume parțiale ale seriei date,  $S_{n+p}(z) - S_n(z)$ , fiind o sumă finită de funcții analitice, este o funcție analitică pe  $D$  și continuă pe  $\overline{D}$ . Din uniforma convergență pe  $\Gamma$  rezultă

$$|S_{n+p}(\zeta) - S_n(\zeta)| = |u_{n+1}(\zeta) + u_{n+2}(\zeta) + \cdots + u_{n+p-1}(\zeta) + u_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon$$

pentru orice număr natural  $n \geq N(\varepsilon)$ , pentru orice număr natural  $p$  și pentru toate punctele  $\zeta \in \Gamma$ . Conform *principiului maximului*, care afirmă că dacă  $f(z)$  este o funcție analitică într-un domeniu  $D$  și continuă pe domeniul închis  $\overline{D}$ , atunci sau  $|f(z)| \equiv \text{constant}$  sau  $|f(z)|$  își atinge valoarea maximă pe frontiera domeniului, rezultă că

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall) n > N(\varepsilon), \quad (\forall) p \in \mathbb{N}^*, \quad (\forall) z \in \overline{D}.$$

Astfel, pentru seria dată este satisfăcută ipoteza din Teorema 7.2.2, deci seria este uniform convergentă în  $\overline{D}$ . ■

## 7.3 Serii de puteri în complex

### 7.3.1 Teorema lui Abel

În paragraful precedent s-au considerat serii generale de funcții complexe de forma (7.9) fără a se specifica forma funcțiilor  $u_n(z)$ . Vom acorda interes seriilor de puteri, adică acele serii de forma (7.10) în care

$$u_n(z) = c_n(z - z_0)^n,$$

unde  $c_n \in \mathbb{C}$  și  $z_0$  este un punct fixat al planului complex. Se obișnuiește să se spună că seria de puteri *este centrată în  $z_0$* . Termenii seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (7.22)$$

sunt funcții analitice în întreg planul complex și deci teoremele din paragraful precedent pot fi aplicate acestor serii. După cum s-a văzut, multe proprietăți importante ale seriilor de funcții sunt consecințe ale uniforme convergenței ale seriilor respective astfel că pentru seria de puteri (7.22) este important să stabilim domeniul de uniformă convergență. Este evident că domeniul de convergență a unei serii de puteri este determinat de forma *coeficienților*

$c_n$ . De exemplu, seria de puteri în complex  $\sum_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n$  converge doar

în punctul  $z_0$  deoarece raportul a doi termeni consecutivi a seriei modulelor  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = (n+1)|z - z_0| > 1$  pentru orice valoare fixată a lui  $z$  diferită de  $z_0$

și pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  începând de la un număr natural  $N(z)$ . În schimb,

seria de puteri în complex  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!}$ , în baza criteriului lui D'Alembert,

este convergentă în întreg planul complex.

Teorema de mai jos este fundamentală pentru determinarea domeniului de convergență a unei serii de puteri.

**Teorema 7.3.1 (Abel)** *Dacă seria de puteri (7.22) converge într-un punct  $z_1 \neq z_0$ , atunci ea este absolut convergentă în toate punctele  $z$  care satisfac condiția  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ , iar în discul închis de rază  $\rho < |z_1 - z_0|$  și centrul în  $z_0$  seria este uniform convergentă.*

**Demonstrație.** Să luăm un punct arbitrar  $z$  care satisface condiția  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$  și să considerăm seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \quad (7.23)$$

Condiția pe care o satisface  $z$  implică existența unui număr pozitiv subunitar  $q < 1$  cu proprietatea  $|z - z_0| = q|z_1 - z_0|$ . Cum seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$  este convergentă, conform criteriului general al lui Cauchy, termenul ei general tinde la zero când  $n \rightarrow \infty$ . În consecință, există o constantă  $M$  astfel încât  $|c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \leq M$ , de unde

$$|c_n| \leq \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}.$$

Seria (7.23) este atunci absolut convergentă deoarece valoarea absolută a termenilor săi satisface inegalitatea

$$|c_n| \cdot |z - z_0|^n \leq M \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^n$$

iar seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ , cu rația  $q = \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| < 1$  este convergentă.

Pentru a demonstra uniforma convergență a seriei (7.22) în discul

$$|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|,$$

este suficient, conform criteriului lui Weierstrass (Teorema 7.2.1), să construim o serie majorantă de numere reale care să fie convergentă. Este evident că această serie este

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}. \quad (7.24)$$

Seria (7.24) este majorantă pentru seria (7.22) în domeniul considerat și, totodată, este convergentă fiind serie geometrică cu rația subunitară. Teorema este astfel demonstrată. ■

Din Teorema lui Abel se deduc unele corolarii (consecințe) care sunt utile în studiul seriilor de puteri în complex. Prezentăm în continuare șase astfel corolarii.

**Corolarul 7.3.1** *Dacă seria de puteri (7.22) este divergentă într-un punct  $z_1$ , atunci ea este divergentă în toate punctele  $z$  care satisfac inegalitatea  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ .*

**Demonstrație.** Presupunând contrariul, găsim că în baza Teoremei lui Abel seria (7.22) ar trebui să fie convergentă în orice disc cu centrul în  $z_0$  și

rază  $\rho < |z - z_0|$  și în particular în punctul  $z_1$ , care aparține discului, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Considerăm marginea superioară  $R$  a distanțelor  $|z - z_0|$  cu proprietatea că seria de funcții corespunzătoare  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  este convergentă.

Dacă  $R < +\infty$ , atunci în toate punctele  $z'$  cu  $|z' - z_0| > R$ , seria de puteri corespunzătoare este divergentă. Dacă  $R > 0$ , atunci discul  $|z - z_0| < R$  este domeniul maxim de convergență al seriei de puteri (7.22) și seria este divergentă în punctele exterioare discului închis de rază  $R$  cu centrul în  $z_0$ . Pe frontiera discului, deci în punctele  $z$  cu proprietatea  $|z - z_0| = R$ , seria de puteri corespunzătoare poate fi convergentă sau divergentă. Domeniul  $|z - z_0| < R$  se numește *discul de convergență* al seriei de puteri (7.22), iar numărul  $R$  este *raza de convergență*.

Am stabilit astfel

**Corolarul 7.3.2** *Pentru orice serie de puteri există un număr  $R \geq 0$  astfel încât în discul deschis de rază  $R$  cu centrul în  $z_0$ , seria de puteri (7.22) este convergentă, iar în exteriorul discului închis de rază  $R$  cu centrul în  $z_0$  seria este divergentă.*

**Corolarul 7.3.3** *Suma unei serii de puteri este o funcție analitică pe discul de convergență.*

**Demonstrație.** Termenii seriei de puteri (7.22) sunt funcții analitice în întreg planul complex; seria este uniform convergentă în orice subdomeniu închis inclus în discul de convergență. Deci, după prima teoremă a lui Weierstrass, suma seriei este o funcție analitică. ■

**Corolarul 7.3.4** *În interiorul discului de convergență, o serie de puteri poate fi integrată și derivată termen cu termen ori de câte ori, razele de convergență ale seriilor de puteri obținute fiind egale cu raza de convergență a seriei inițiale.*

**Demonstrație.** Afirmațiile acestui corolar sunt consecințe directe ale teoremelor lui Abel și Weierstrass. ■

**Corolarul 7.3.5** *Coeficienții seriei de puteri (7.22) se exprimă cu ajutorul funcției sumă  $f(z)$  prin formulele*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (7.25)$$

**Demonstrație.** Să notăm cu  $f(z)$  suma seriei de puteri (7.22) în discul deschis cu centrul în  $z_0$  și rază  $r$ ,  $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ . Luând  $z = z_0$  în expresia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (7.26)$$

obținem  $f(z_0) = c_0$ .

Derivând termen cu termen seria (7.26), găsim

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad z \in B(z_0, R) \quad (7.27)$$

din care, punând  $z = z_0$ , obținem  $f'(z_0) = c_1$ .

În mod analog, dacă punem  $z = z_0$  în egalitatea

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k}, \quad (7.28)$$

obținută efectuând derivarea termen cu termen de  $(k-1)$  ori în (7.27) și adevărată pentru  $z \in B(z_0, R)$ , găsim  $f^{(k)}(z_0) = c_k \cdot k!$ . Procedul poate continua obținându-se astfel derivata de orice ordin.

Analiza rezultatelor demonstrează corolarul. ■

**Corolarul 7.3.6** *Raza de convergență  $R$  a seriei de puteri (7.22) este determinată de relația*<sup>1</sup>

$$R = \frac{1}{\ell}, \quad \text{unde} \quad \ell = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}, \quad (7.29)$$

unde prin limita superioară a șirului  $(\sqrt[n]{|c_n|})$  înțelegem cel mai mare punct limită<sup>2</sup> al șirului.

**Demonstrație.** Să notăm  $\ell = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$  și să presupunem că  $0 < \ell < \infty$ . Trebuie să arătăm că în orice punct  $z_1$  care satisface condiția  $|z_1 - z_0| < \frac{1}{\ell}$ , seria de puteri (7.22) este convergentă, iar în orice punct  $z_2$  pentru care  $|z_2 - z_0| > \frac{1}{\ell}$ , seria de puteri (7.22) este divergentă.

Deoarece  $\ell$  este marginea superioară a șirului  $(\sqrt[n]{|c_n|})$ , pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr natural  $N(\varepsilon)$  cu proprietatea  $\sqrt[n]{|c_n|} < \ell + \varepsilon$ . Pe de altă

<sup>1</sup>Această relație se numește formula Cauchy-Hadamard.

<sup>2</sup>Elementul  $a \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$  se numește *punct limită* al șirului  $(a_n)$  dacă există un subșir  $(a_{k_n})$  al șirului dat care are limita  $a$ .

parte, pentru același  $\varepsilon$  este posibil să găsim o infinitate de termeni ai șirului  $(\sqrt[n]{|c_n|})$  care să fie mai mari ca  $\ell - \varepsilon$ . Considerăm un punct arbitrar  $z_1$  ce satisface inegalitatea  $\ell|z_1 - z_0| < 1$  și luăm ca valoare pentru  $\varepsilon$  numărul real  $\frac{1 - \ell|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|} > 0$ . Atunci

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_1 - z_0| < (\ell + \varepsilon)|z_1 - z_0| = \frac{1 + \ell|z_1 - z_0|}{2} = q < 1,$$

de unde rezultă că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$  este majorată de seria geometrică

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  cu rația  $q$  număr pozitiv subunitar. Aceasta demonstrează convergența seriei de puteri (7.22) în punctul  $z_1$ . Luând acum un punct  $z_2$  care satisface inegalitatea  $\ell|z_2 - z_0| > 1$  și alegând  $\varepsilon = \frac{\ell|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|} > 0$ , obținem

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_2 - z_0| > (\ell - \varepsilon)|z_2 - z_0| = 1$$

pentru o infinitate de valori ale lui  $n$ . De aici rezultă  $|c_n(z_2 - z_0)^n| > 1$  și, în baza condiției necesare de convergență a unei serii, seria  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_2 - z_0)^n$  este divergentă.

Considerăm cazurile extreme ale lui  $\ell$ .

Pentru  $\ell = 0$  seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  converge în orice punct  $z$ , adică  $R = \infty$ . Într-adevăr, în acest caz, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un număr  $N(\varepsilon)$  astfel încât  $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$  pentru  $n$  suficient de mare. Luând  $\varepsilon = \frac{q}{|z - z_0|}$ , unde  $z$  este un punct arbitrar din planul complex și  $0 < q < 1$ , obținem  $|c_n(z - z_0)^n| < q^n$ . Aceasta dovedește convergența seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ .

Pentru  $\ell = \infty$  seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  diverge în orice punct  $z \neq z_0$ , adică

$R = 0$ . Într-adevăr, în acest caz, pentru orice număr  $M$  există o infinitate de coeficienți  $c_n$  astfel încât  $\sqrt[n]{|c_n|} > M$ . Să considerăm un punct arbitrar  $z \neq z_0$  și să alegem  $M$  astfel încât  $M|z - z_0| = q > 1$ . Atunci o infinitate de termeni ai seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  satisface condiția  $|c_n(z - z_0)^n| > 1$ , ceea ce

demonstrează că seria  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  este divergentă.



Astfel, formula Cauchy–Hadamard  $R = \frac{1}{\ell}$ , unde  $\ell = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ , are loc pentru orice valoare a lui  $\ell$ . ■

**Exemplul 7.3.1** *Seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n$  este convergentă în discul deschis de rază 1 cu centrul în  $z_0$  și are suma  $f(z) = \frac{1}{1 - (z - z_0)}$ .*

**Soluție.** Într-adevăr, ținând că în această serie de puteri  $c_n = 1$  și aplicând formula Cauchy–Hadamard, găsim  $R = 1$  și deci seria geometrică dată este convergentă în discul  $B(z_0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < 1\}$  și are suma funcția analitică  $f(z)$ . Pentru a determina această funcție, aplicăm definiția sumei unei serii de funcții ca limită a șirului sumelor parțiale:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (z - z_0)^k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (z - z_0)^{n+1}}{1 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - (z - z_0)}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

S-a folosit atât avantajul calculului sumei primelor  $n + 1$  termeni ai unei progresii geometrice în complex, aceeași ca în real, cât și posibilitatea trecerii la limită la numărătorul unei fracții al cărui numitor este nenul.

Din (7.30) rezultă că suma unei progresii geometrice de numere complexe cu rația în modul subunitară conținând o infinitate de termeni se determină ca în real. ■

**Observația 7.3.1** *Studiul seriilor de puteri se poate efectua direct pe seria centrată în origine*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \quad (7.31)$$

Trecerea de la (7.31) la cazul general (7.22) se face cu substituția  $z = \zeta - z_0$ , deci printr-o translație.

**Teorema 7.3.2** *Fie  $R$  raza de convergență a seriei de puteri  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ . Dacă există în  $\overline{\mathbb{R}}$  limita*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \ell_1, \quad (7.32)$$

*atunci raza de convergență este de  $R = \ell_1$ .*

**Demonstrație.** Asociem seriei de puteri (7.31) seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n, \quad (7.33)$$

cu  $r > 0$  și notăm cu  $A$  mulțimea valorilor lui  $r$  pentru care această serie este convergentă. Atunci, marginea superioară a mulțimi  $A$ , pe intervalul  $[0, \infty]$ , este tocmai raza de convergență  $R$  a seriei de puteri (7.31). Conform criteriului raportului al lui D'Alembert, seria (7.33) este convergentă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| r^{n+1}}{|c_n| r^n} < 1. \quad (7.34)$$

Din (7.34) rezultă  $r \frac{1}{\ell_1} < 1$  și deci  $r < \ell_1$ . Evident, marginea superioară a numerelor  $r$  cu proprietatea de mai sus este  $\ell_1$  și deci raza de convergență este  $R = \ell_1$ . ■

**Exercițiul 7.3.1** Să se determine razele de convergență ale seriilor de puteri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n.$$

**Soluție.** Pentru primele două serii se folosește faptul că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  și deci  $\ell = 1$ , iar din formula Cauchy–Hadamard deducem că raza de convergență este  $R = 1$  pentru ambele serii.

Pentru a treia serie aplicăm Teorema 7.3.2 și găsim  $R = \infty$ .

Pentru ultima serie se deduce că  $R = 0$ . ■

**Exercițiul 7.3.2** Să se afle mulțimea de convergență a seriilor de puteri:

$$1^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n; \quad 2^0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \quad 3^0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1+i)^n}{(3n-2)2^n}.$$

**Soluție.** Determinăm mai întâi numerele nenegative  $R_1, R_2, R_3$ , razele de convergență ale respectiv celor trei serii de puteri.

Aplicând, după caz, una din formulele de calcul a razei de convergență (7.29) și (7.32), găsim:

$$R_1 = \frac{1}{e}; \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad R_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Atunci, discurile de convergență ale celor trei serii de puteri sunt respectiv

$$\begin{aligned} B_1\left(0, \frac{1}{e}\right) &= \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{e}\right\}, \\ B_2\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \\ B_3\left(1 - i, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) &= \left\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 - i)| < \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}. \end{aligned}$$

Cel de al treilea disc de convergență are centrul în punctul  $z_0 = 1 - i$  și raza  $R_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ . ■

**Exercițiul 7.3.3** Pentru următoarele patru serii de puteri, să se determine respectivele funcții sumă  $f_1(z), \dots, f_4(z)$  pe mulțimile lor de convergență:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n; \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad (iii) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}; \quad (iv) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}.$$

**Soluție.** Seria de puteri  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  este seria geometrică cu primul termen 1 și rația  $z$ . Conform Exemplului 7.3.1 suma seriei este funcția  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  ce este olomoră în discul cu centrul în origine și rază 1.

Pe discul de convergență se poate scrie egalitatea  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Aplicând teorema de derivabilitate termen cu termen a unei serii de puteri, pe același disc are loc egalitatea

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Înmulțind în ambii membri cu  $z$  se obține

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Prima serie poate fi integrată termen cu termen pe orice curbă netedă pe porțiuni inclusă în discul de rază 1 și centrul în origine. Presupunând că această curbă are originea în  $z = 0$  și extremitatea într-un punct oarecare  $z$  cu  $|z| < 1$ , obținem

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \zeta^n d\zeta \implies \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Însă, o primitivă a funcției  $\frac{1}{1-\zeta}$  este  $-\text{Log}(1-\zeta)$ , unde pentru funcția logaritm am luat determinarea fundamentală (principală) și deci funcția  $f_2(z) = -\text{Log}(1-z)$ .

Funcția  $f_3(z)$  este suma seriei de puteri obținută prin derivarea de două ori a seriei  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ . Prin urmare,

$$f_3(z) = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Din  $f_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}$  deducem  $zf_4(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ , iar prin derivare obținem

$$(zf_4(z))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Integrând egalitatea

$$(\zeta f_4(\zeta))' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^{2n} = \frac{1}{1+\zeta^2}$$

pe o curbă netedă ce are ca extremități originea și un punct arbitrar  $z$ , deducem  $zf_4(z) = \text{arctg } z$ , de unde  $f_4(z) = \frac{\text{arctg } z}{z}$ . ■

### 7.3.2 Serii Taylor

O serie de puteri definește în discul de convergență o funcție analitică numită suma sa. Apare în mod natural următoarea problemă inversă: *dată o funcție analitică pe un disc, putem asocia o serie de puteri convergentă în acel disc și având ca sumă funcția dată?* Teorema următoare răspunde acestei întrebări.

**Teorema 7.3.3 (Taylor)** *O funcție complexă de variabilă complexă  $f(z)$ , analitică în discul  $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , se poate reprezenta în mod unic prin seria de puteri*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{unde} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad z \in B(z_0, R),$$

convergentă în discul  $B(z_0, R)$ .

**Demonstrație.** Alegem un punct arbitrar  $z$  în discul  $B(z_0, R)$  și construim un cerc  $C_\rho$  de rază  $\rho$  cu centrul în  $z_0$  care să-l conțină pe  $z$ , construcție posibilă deoarece distanța de la punctul  $z$  la frontiera discului este pozitivă.

Deoarece  $z$  este un punct în domeniul de contur  $C_\rho$ , din formula integrală a lui Cauchy rezultă că

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (7.35)$$

Să observăm că o parte a integrantului din (7.35) se poate scrie în forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}, \quad (7.36)$$

deci sub forma unei serii geometrice de rație  $q = \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ .

Pentru  $\zeta \in C_\rho$ , seria (7.36) este uniform convergentă fiind majorată de seria numerică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}, \quad \text{cu } |z - z_0| < \rho.$$

Folosind (7.36) în (7.35) și integrând termen cu termen, obținem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n. \quad (7.37)$$

Cu notația

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad (7.38)$$

egalitatea (7.37) devine o serie de puteri, convergentă în punctul  $z$  considerat.

Prin urmare, putem scrie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (7.39)$$

În baza teoremei lui Cauchy, în formula (7.38), cercul  $C_\rho$  se poate înlocui cu orice contur situat în domeniul  $|z - z_0| < R$  care să conțină în interior punctul  $z_0$ .

Deoarece  $z$  este arbitrar, rezultă că seria (7.39) este convergentă în discul  $|z - z_0| < R$ , uniform convergentă pe discul închis  $|z - z_0| \leq \rho < R$  și are suma  $f(z)$  pe domeniul de convergență.

Prin urmare, funcția  $f(z)$  poate fi dezvoltată într-o serie de puteri centrată în  $z_0$ , serie care este convergentă pe un disc cu centrul în  $z_0$  și rază  $R$ . Suma acestei serii de puteri este funcția  $f(z)$ .

În baza formulei (6.47), coeficienții (7.38) ai dezvoltării sunt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \quad (7.40)$$

Rămâne să demonstrăm unicitatea dezvoltării (7.39). Presupunem că avem și dezvoltarea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n \quad (7.41)$$

unde cel puțin un coeficient  $c'_n \neq c_n$ . Seria de puteri (7.41) este convergentă în discul  $|z - z_0| < R$  și, în baza formulei (7.25), coeficienții acesteia sunt  $c'_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ . De aici și din (7.40) rezultă  $c_n = c'_n$ . Aceasta demonstrează unicitatea dezvoltării (7.39). ■

Această teoremă stabilește o corespondență biunivocă între o funcție analitică într-o vecinătate a unui punct  $z_0$  și o serie de puteri centrată în acest punct. Aceasta înseamnă că noțiunea de funcție analitică ca funcție infinit derivabilă este echivalentă cu o funcție ce poate fi reprezentată în forma sumei unei serii de puteri.

Să observăm că dacă funcția  $f(z)$  este analitică în domeniul  $D$  și  $z_0 \in D$ , atunci raza de convergență a seriei Taylor  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$  a acestei funcții este cel mult egală cu distanța de la punctul  $z_0$  la frontiera domeniului  $D$ .

**Definiția 7.3.1** Dezvoltarea unei funcții analitice, în discul  $|z - z_0| < R$ , în seria de puteri (7.39) se numește **dezvoltarea Taylor** în jurul punctului  $z_0$ , iar seria (7.39) se numește **seria Taylor** a funcției  $f(z)$ .

**Exercițiul 7.3.4** Să se dezvolte în serie Taylor funcția

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

în vecinătatea originii și în vecinătatea punctului  $z_0 = 1$ .

**Soluție.** Această funcție este analitică în tot planul complex cu excepția punctelor  $z_{1,2} = \pm i$  care sunt poli simpli ai funcției.

În baza Teoremei lui Taylor, funcția  $f(z)$  poate fi dezvoltată în serie Taylor în orice disc al planului complex care nu conține polii  $z_1 = +i$  și  $z_2 = -i$ .

Dacă dorim să determinăm dezvoltarea funcției  $f(z)$  în serie Taylor în vecinătatea originii atunci, această dezvoltare trebuie căutată în discul  $|z| < 1$ , deoarece pe această mulțime  $f(z)$  este funcție analitică.

În acest disc, funcția  $f(z)$  poate fi privită ca suma unei progresii geometrice cu rația  $-z^2$ , subunitară în modul, deci putem scrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}. \quad (7.42)$$

Raza de convergență a seriei (7.42) este  $R = 1$  și reprezintă distanța de la centrul discului la frontiera domeniului în care funcția  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  este analitică.

Raza maximă a unui disc cu centrul în  $z_0 = 1$  în care funcția  $f(z)$  este analitică este  $\sqrt{2}$  și prin urmare trebuie să determinăm dezvoltarea în serie Taylor a funcției date în discul  $|z-1| < \sqrt{2}$ .

Pentru aceasta ținem cont că funcția  $f(z)$  se descompune în fracții simple în complex astfel

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

Folosind formula de calcul a derivatei de ordin  $n$  a funcției raționale  $\frac{1}{z-a}$  și înlocuind în (7.40), găsim că în discul  $|z-1| < \sqrt{2}$  are loc dezvoltarea

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-1)^n. \quad (7.43)$$

Cu formele exponențiale ale lui  $1-i$  și  $1+i$ , adică  $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$  și  $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ , (7.43) se scrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2 \cdot 2} (z-1)^n. \quad (7.44)$$

Raza de convergență a seriei obținute este  $R = \sqrt{2}$  și poate fi determinată și folosind formula Cauchy-Hadamard. ■

**Exemplul 7.3.2** Dezvoltarea în serie Taylor într-o vecinătate a punctului  $z = 1$  a funcției complexe  $\text{Log } z$ , analitică în discul  $|z - 1| < 1$ , este

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad (7.45)$$

raza de convergență a seriei fiind 1.

**Soluție.** Într-adevăr, dacă se calculează coeficienții, se găsește

$$c_n = \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n} \Big|_{z=1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\text{și } c_0 = \text{Log } 1 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{z} \Big|_{z=1} = 1. \quad \blacksquare$$

**Exemplul 7.3.3** Funcția exponențială  $f(z) = e^z$  este analitică pe  $\mathbb{C}$ , deci se poate dezvolta în serie Taylor pe orice disc de centru  $z_0$  și rază oricât de mare. Derivatele funcției  $f(z) = e^z$  în  $z_0$  fiind  $f^{(n)}(z_0) = e^{z_0}$ , rezultă că seria Taylor în jurul punctului  $z_0$  a funcției exponențiale este

$$e^z = e^{z_0} \left( 1 + \frac{z-z_0}{1!} + \frac{(z-z_0)^2}{2!} + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{n!} + \dots \right), \quad (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

În particular, pentru  $z_0 = 0$ ,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

**Exemplul 7.3.4** În orice vecinătate a originii au loc dezvoltările:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (\forall) z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (\forall) z \in \mathbb{C}.$$

**Exercițiul 7.3.5** Să se arate că are loc egalitatea

$$\frac{1-z^2}{1-2tz+z^2} = T_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) z^n, \quad (7.46)$$

unde  $|t| < 1$  și  $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ .



**Soluție.** În fracția din membrul întâi a relației (7.46) punem  $t = \cos \theta$  și apoi o descompunem în fracții simple. Obținem

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = -1 + \frac{1}{1 - z e^{-i\theta}} + \frac{1}{1 - z e^{i\theta}}.$$

În locul fracțiilor din membrul doi scriem (pentru  $\theta$  fixat și  $|z| < 1$ ) seriile geometrice după puterile lui  $z$ .

Avem

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n\theta. \quad (7.47)$$

Comparând (7.46) cu (7.47) rezultă  $T_n(t) = \cos n\theta = \cos(n \arccos t)$ . ■

**Observația 7.3.2** Pornind de la identitatea evidentă

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos(n-1)\theta \cdot \cos \theta$$

se poate arăta că are loc relația de recurență

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \quad (7.48)$$

pe care o verifică funcțiile  $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$ . Folosind apoi un raționament prin inducție completă se arată că funcția  $T_n(t)$  este polinomul de gradul  $n$

$$T_n(t) = 2^{n-1}t^n + a_1t^{n-2} + a_2t^{n-4} + \dots, \quad (7.49)$$

numit **polinomul lui Cebâșev de speța întâi**.

Polinoamele Cebâșev având gradele de la 1 până la 4 sunt

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \cos(\arccos t) = 2^0 t, \\ T_2(t) &= \cos(2 \arccos t) = 2 \cos^2(\arccos t) - 1 = 2t^2 - 1, \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1. \end{aligned}$$

De altfel, se poate arăta că  $T_n(t)$  este soluția ecuației diferențiale ordinare de ordinul doi cu coeficienți variabili

$$(1 - t^2)T_n'' - tT_n' + n^2T_n = 0.$$

## Capitolul 8

# Serii Laurent

În acest capitol se va studia comportarea unei funcții analitice univalente în vecinătatea punctelor singulare izolate. Cunoașterea acestei comportări permite o aprofundare a naturii funcțiilor analitice.

În capitolul precedent am pus în evidență rolul pe care îl au seriile de puteri, în particular seriile Taylor, în studiul funcțiilor analitice într-un domeniu unde nu există puncte singulare ale funcțiilor.

Un rol asemănător îl au și seriile Laurent.

### 8.1 Domeniul de convergență al seriei Laurent

**Definiția 8.1.1** *Se numește serie Laurent centrată în  $z_0$  o serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad (8.1)$$

unde  $z_0$  este un punct fixat din planul complex,  $c_n$  sunt numere complexe, iar sumarea se face după toate valorile întregi ale indicelui  $n$ .

Pentru a determina domeniul de convergență al seriei (8.1), o aranjăm în forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (8.2)$$

Domeniul de convergență al seriei (8.1) va fi intersecția domeniilor de convergență ale seriilor de funcții din membrul doi al egalității (8.2), care se numesc respectiv *partea tayloriană* sau *partea regulată* și *partea principală* ale seriei Laurent.

Denumirea de serie dată expresiei (8.1) se justifică dacă analizăm membrul al doilea din (8.2) unde avem o sumă de două serii de funcții, prima fiind o serie de puteri de tipul celor studiate în capitolul precedent.

Domeniul de convergență al seriei Taylor din (8.2) este discul deschis  $B(z_0, R_1)$  de rază  $R_1 \in [0, +\infty]$  și centrul în punctul  $z_0$ , iar dacă  $f_1(z)$  este suma acestora atunci, pe discul de convergență, are loc

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R_1) \iff |z - z_0| < R_1. \quad (8.3)$$

Pentru a determina domeniul de convergență al seriei de funcții care reprezintă partea principală a seriei Laurent, efectuăm schimbarea de variabilă  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ .

Această serie va deveni serie de puteri centrată în originea planului complex ( $\zeta$ ) deci o serie de forma  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ .

Dacă  $1/R_2$  este raza de convergență a acestei serii de puteri și  $\varphi(\zeta)$  suma sa pe discul de convergență

$$B\left(0, \frac{1}{R_2}\right) = \left\{\zeta : |\zeta| < \frac{1}{R_2}\right\},$$

atunci putem scrie

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n, \quad |\zeta| < \frac{1}{R_2}. \quad (8.4)$$

Revenind la variabila inițială  $z$  și punând  $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$ , obținem

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > R_2. \quad (8.5)$$

Prin urmare, domeniul de convergență al seriei de funcții care reprezintă partea principală a seriei Laurent (8.1) este exteriorul cercului  $|z - z_0| = R_2$ , unde  $R_2 \in [0, \infty]$ .

Astfel, seria Laurent (8.1) este convergentă pe domeniul obținut prin intersecția domeniilor de convergență ale seriilor din membrul doi al relației (8.2) și suma sa va fi o funcție analitică pe acest domeniu.

Dacă  $R_2 < R_1$ , intersecția domeniilor de convergență ale celor două serii este *coroana circulară*  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  și seria Laurent (8.1) are suma

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad R_2 < |z - z_0| < R_1. \quad (8.6)$$

Deoarece seriile (8.3) și (8.4) sunt serii de puteri, rezultă că în domeniul de convergență al seriei Laurent funcția sumă  $f(z)$  are proprietățile sumei seriilor de puteri.

În concluzie, *seria Laurent (8.1) este convergentă în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  și suma sa  $f(z)$  este o funcție analitică în această coroană.*

## 8.2 Dezvoltarea unei funcții analitice într-o serie Laurent

Să cercetăm dacă este posibil să asociem unei funcții analitice într-o coroană circulară o serie Laurent convergentă în această coroană și care să aibă drept sumă funcția dată.

În acest sens, de ajutor este teorema următoare.

**Teorema 8.2.1** *Funcția  $f(z)$ , analitică în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , se reprezintă în mod unic în coroană printr-o serie Laurent convergentă în acea coroană.*

**Demonstrație.** Fixăm un punct arbitrar  $z$  în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$  și construim cercurile concentrice  $C_{R'_1}$  și  $C_{R'_2}$  cu centrul în  $z_0$  și raze care satisfac condițiile

$$R_2 < R'_2 < R'_1 < R_1, \quad R'_2 < |z - z_0| < R'_1.$$

Conform formulei integrale a lui Cauchy pentru un domeniu multiplu conex, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (8.7)$$

La fel ca în cazul seriei Taylor, observăm că

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n.$$

Observând că pe cercul  $C_{R'_1}$  are loc inegalitatea  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| \leq q < 1$  și folosind integrarea termen cu termen într-o serie de puteri, rezultă

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.8)$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \geq 0. \quad (8.9)$$

Deoarece pe cercul  $C_{R'_2}$  are loc inegalitatea  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , iar

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

din aceleași considerente ca mai sus, obținem

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad (8.10)$$

unde

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}^-} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta. \quad (8.11)$$

Schimbând orientarea curbei de integrare în (8.11), găsim o altă expimare pentru  $c_{-n}$ , și anume

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta. \quad (8.12)$$

Să observăm că funcțiile de integrat din (8.9) și (8.12) sunt funcții analitice în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ .

În baza Teoremei lui Cauchy, valorile integralelor din formulele (8.9) și (8.12) nu se schimbă la o deformare a conturilor de integrare în domeniu de analiticitate ale funcțiilor de integrat.

Această observație permite combinarea formulelor (8.9) și (8.12) într-o singură expresie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \quad n = \pm 1, \quad n = \pm 2, \quad \dots, \quad (8.13)$$

unde  $C$  este un contur arbitrar închis situat în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ .

Revenind la (8.7), obținem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (8.14)$$

unde coeficienții  $c_n$  se determină prin formula unitară (8.13).

Deoarece  $z$  este un punct arbitrar în coroana circulară  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , rezultă că seria (8.14) este convergentă și are suma  $f(z)$  în această coroană, iar în orice coroană închisă, concentrică și inclusă în coroana  $R_2 < R'_2 \leq |z - z_0| \leq R'_1 < R_1$ , seria (8.14) este uniform convergentă și are suma  $f(z)$ .

Rămâne să demonstrăm unicitatea dezvoltării (8.14).

Presupunem că mai avem și o altă dezvoltare

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n$$

unde cel puțin unul din coeficienți  $c'_n \neq c_n$ . Atunci, oriunde în interiorul coroanei  $R_2 < |z - z_0| < R_1$ , avem egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n. \quad (8.15)$$

Să considerăm un disc  $B(z_0, R)$ , de rază  $R$ , cu  $R_2 < R < R_1$ , cu centrul în  $z_0$ . Seriile de funcții din (8.15) sunt uniform convergente pe discul  $B(z_0, R)$ .

Înmulțim ambii membri ai lui (8.15) cu  $(z - z_0)^{-m-1}$ , unde  $m$  este un întreg fixat pentru care  $c_m \neq c'_m$  și integrăm apoi termen cu termen.

Vom întâlni termeni care conțin integrale de forma  $\int_{C_R} (z - z_0)^{n-m-1} dz$ .

Având în vedere că pe  $C_R$  avem că  $z - z_0 = R e^{i\varphi}$ , unde  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , obținem

$$\int_{C_R} (z - z_0)^{n-m-1} dz = i R^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m. \end{cases} \quad (8.16)$$

Luând în considerație (8.16), după efectuarea integrării egalității (8.15), găsim că seriile numerice care apar în cei doi membri au fiecare doar câte un termen diferit de zero, și anume  $c_m$ , respectiv  $c'_m$ .

Așadar,  $c_m = c'_m$ .

Cum numărul întreg  $m$  l-am ales arbitrar, rezultă că  $c_n = c'_n$  pentru toți întregii  $n$ , ceea ce dovedește unicitatea dezvoltării (8.14). ■

**Exercițiul 8.2.1** Fie funcția  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  care, în planul complex la distanță finită, are singularitățile  $-1$  și  $1$ , primul pol simplu, iar al doilea pol triplu. Se cer dezvoltările în serie Laurent

- în jurul punctului  $z_0 = 1$ ;
- în exteriorul discului închis  $\overline{B}(1, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2\}$ .

**Soluție.** a) Izolăm punctul  $z_0 = 1$  cu un cerc  $\Gamma_1$  cu centrul în  $z_0 = 1$  și cu raza  $R_1$ , unde  $0 < R_1 < 2$ .

Acest cerc, împreună cu cercul  $\Gamma_2$  cu același centru și cu raza  $R_2$ , ales așa fel încât  $R_1 < R_2 < 2$ , determină o coroană circulară care, împreună cu frontiera sa  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , este inclusă în domeniul de olomorfe al funcției  $f$ .

Izolăm factorul care dă singularitatea lui  $f$ , punând

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot g(z), \quad \text{unde} \quad g(z) = \frac{z}{z+1}$$

și dezvoltăm în serie Taylor funcția  $g(z)$  în jurul punctului  $z_0 = 1$ . Avem

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{2+(z-1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}}.$$

În ipoteza că  $\left| \frac{z-1}{2} \right| < 1$ , ultima fracție este suma unei serii geometrice cu rația subunitară  $q = -\frac{z-1}{2}$ , serie care este convergentă pe discul deschis  $|z-1| < 2$ , deci putem scrie egalitatea

$$\frac{1}{1 + \frac{z-1}{2}} = 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} + \dots$$

Folosind această egalitate, exprimarea lui  $g(z)$  devine

$$g(z) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

care, înlocuită în  $f(z)$  conduce la dezvoltarea în serie Laurent a acestei funcții în coroana circulară  $0 < |z-1| < 2$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2^3} \frac{1}{(z-1)} + \\ &+ \frac{1}{2^4} - \frac{z-1}{2^5} + \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+4}} + \dots \end{aligned}$$

Partea principală a dezvoltării conține un număr finit de termeni. Cel mai mic exponent este  $-3$ , iar  $3$  este ordinul polului în jurul căruia s-a făcut dezvoltarea în serie Laurent.

b) Coroana circulară va avea centrul tot în  $z_0 = 1$ , raza  $R_2 > 2$ , iar  $R_1 > R_2$  poate fi oricât de mare.

Coroana circulară, împreună cu frontiera sa  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , este inclusă în domeniul de analiticitate al funcției  $f$ .

Cu notațiile de mai sus,

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{2+(z-1)} = 1 - \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}.$$

Pentru  $|z-1| > 2$ , urmează  $\left| \frac{2}{z-1} \right| < 1$  și ultima fracție din expresia funcției  $g(z)$  este suma unei serii geometrice cu rația  $q = -\frac{2}{z-1}$ . Deci,

$$g(z) = 1 - \frac{1}{z-1} \left( 1 - \frac{2}{z-1} + \frac{2^2}{(z-1)^2} - \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^n} + \cdots \right).$$

În acest mod, se obține dezvoltarea în serie Laurent a funcției  $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^5} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2^n}{(z-1)^{n+4}} + \cdots$$

pentru orice număr complex  $z$  care satisfac condiția  $|z-1| > 2$ .

Partea principală a seriei Laurent în coroana infinită  $|z-1| > 2$  are o infinitate de termeni, iar partea Tayloriană nu există. ■

**Exercițiul 8.2.2** *Să se dezvolte în serie Laurent funcția*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

în următoarele coroane circulare:

$$(K_1): 0 < |z| < 1; \quad (K_2): 1 < |z| < 2; \quad (K_3): 2 < |z| < \infty.$$

**Soluție.** Funcția  $f(z)$  este analitică în întreg planul complex cu excepția punctelor  $z = 0$ ,  $z = 1$  și  $z = 2$  care sunt poli simpli. Fiind o funcție rațională, funcția  $f(z)$  admite descompunerea în fracții simple

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}. \quad (8.17)$$

În fiecare din coroanele de mai sus funcția considerată este dezvoltabilă în serie Laurent după puterile întregi ale lui  $z$ .



Să remarcăm că în orice coroană ne-am plasa cu punctul  $z$ , primul termen este deja o funcție dezvoltată în serie de puteri ale lui  $z$ , din toți termenii seriei rămânând doar cel cu coeficientul  $c_{-1} = \frac{1}{2}$ .

Considerând că ne aflăm în coroana  $K_1$ , al doilea termen al descompunerii în fracții simple a funcției  $f(z)$  este suma unei serii geometrice cu rația  $z$

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Cel de al doilea factor din termenul al treilea al descompunerii în fracții simple a funcției  $f(z)$  este de asemenea suma unei serii de puteri, și anume

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Sumând cele două serii, înmulțite în prealabil cu factorii ce se impun, obținem dezvoltarea în serie Laurent a funcției  $f(z)$  în coroana circulară  $K_1$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n.$$

Pentru dezvoltarea în serie Laurent în coroana  $K_2$  vom folosi din nou descompunerea (8.17), pe care o vom scrie în forma

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}. \quad (8.18)$$

Deoarece în coroana circulară  $K_2$ ,  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$  și  $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , factorii secunzi din termenii al doilea și al treilea ai descompunerii (8.18) sunt sumele unor progresii geometrice convergente cu rațiile  $q = \frac{1}{z}$  și respectiv  $q = \frac{z}{2}$ .

După reducerea termenilor asemenea, seria Laurent a funcției  $f(z)$  în coroana  $K_2$  se scrie în forma

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

Într-o manieră similară, luând în considerație că  $|z| > 2$ , se constată că în coroana  $K_3$  dezvoltarea Laurent nu conține decât puteri negative ale lui

$z$ . Pentru a ajunge la această dezvoltare, scriem

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}; \quad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Folosind aceste dezvoltări, constatăm că seria Laurent a funcției  $f(z)$  în coroana  $K_3$  este

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^{n+1}}.$$

■

**Exercițiul 8.2.3** Să se deducă dezvoltarea în serie Laurent a funcției  $f(z)$  de la Exercițiul 8.2.2 după puterile lui  $z-1$ .

**Indicație.** Funcția  $f(z)$  este analitică în coroana circulară cu centrul în  $z_0 = 1$ , raza interioară  $R_2 = \varepsilon$  și raza exterioară  $R_1 = 1$ . Prin urmare, se poate deduce seria Laurent a funcției  $f(z)$  după puterile lui  $z-1$ . ■

**Exercițiul 8.2.4** Fie funcția  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ . Să se dezvolte această funcție în serie Laurent:

1. în discul  $|z| < 1$ ;
2. în coroana circulară  $1 < |z| < 2$ ;
3. în jurul punctului de la infinit.

**Soluție.** Avem  $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$ , unde  $A = -1$  și  $B = 1$ .

1. În discul  $|z| < 1$ , funcția  $f(z)$  este suma seriei de puteri

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n,$$

Se observă că pe acest disc dezvoltarea funcției este tayloriană deoarece  $f(z)$  este funcție analitică în discul  $|z| < 1$ .

2. Sunt evidente egalitățile

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

Prima serie fiind convergentă pentru  $|z| < 2$ , iar a doua pentru  $|z| > 1$ , rezultă că dezvoltarea în serie Laurent are loc în coroana circulară  $1 < |z| < 2$ .

$$3. \quad f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \frac{1}{z^n}.$$

Dezvoltarea determinată este în jurul punctului de la infinit deoarece  $|z| > 2$ . ■

### 8.3 Clasificarea punctelor singulare izolate

**Definiția 8.3.1** *Un punct singular al funcției  $f(z)$  care nu este pol se numește punct singular esențial.*

**Definiția 8.3.2** *Un punct singular  $z_0$  este punct singular izolat al funcției  $f(z)$  dacă  $f(z)$  este o funcție univalentă și analitică în coroana circulară  $0 < |z - z_0| < R_1$ .*

Reamintim că polii unei funcții sunt puncte singulare izolate. Deci, dacă o singularitate izolată  $z_0$  nu este pol, atunci  $z_0$  este un *punct singular esențial izolat*. Dacă  $z_0$  este o singularitate neizolată, atunci  $z_0$  este un *punct singular esențial neizolat*.

Admitem situația în care funcția  $f(z)$  nu este definită în punctul  $z_0$  și studiem comportarea lui  $f(z)$  în vecinătatea lui  $z_0$ . În baza celor prezentate în paragraful precedent, într-o vecinătate a lui  $z_0$  funcția  $f(z)$  poate fi dezvoltată într-o serie Laurent de forma (8.14), convergentă în coroana circulară  $0 < |z - z_0| < R_1$ .

Sunt posibile următoarele trei cazuri:

- (1) Seria Laurent rezultată nu are parte principală, prin urmare nu conține termeni cu puteri negative ale lui  $(z - z_0)$ ;
- (2) Seria Laurent conține un număr finit de termeni în partea principală;
- (3) Seria Laurent conține un număr infinit de termeni în partea principală.

În cazul (1), seria Laurent a funcției  $f(z)$  este  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ .

În acest caz funcția  $f(z)$  are limită în  $z_0$  și anume  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ .

Dacă  $f$  nu a fost definită în  $z_0$ , atunci se prelungește funcția prin continuitate adăugând  $f(z_0) = c_0$ .

Dacă se întâmplă ca valoarea lui  $f$  să fi fost specificată în  $z_0$ , dar să nu coincidă cu  $c_0$ , modificăm valoarea funcției în  $z_0$  punând  $f(z_0) = c_0$ .

Funcția  $f(z)$  astfel definită va fi analitică pe discul  $|z - z_0| < R_1$ . Astfel s-a înlăturat discontinuitatea funcției  $f$  în punctul  $z_0$ .

**Definiția 8.3.3** *O singularitate izolată  $z_0$  a lui  $f(z)$  pentru care dezvoltarea Laurent în jurul punctului  $z_0$  nu conține termeni cu puteri negative ale lui  $(z - z_0)$  se numește **singularitate removabilă**.*

Raționamentul de mai sus, la care adăugăm ultima definiție, a demonstrat

**Teorema 8.3.1** *Dacă  $z_0$  este o singularitate removabilă a unei funcții analitice  $f(z)$ , atunci există o valoare limită  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ , unde  $|c_0| < \infty$ .*

**Observația 8.3.1** *În vecinătatea unei singularități removabile funcția  $f(z)$  este mărginită și poate fi reprezentată în forma*

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varphi(z_0) \neq 0. \quad (8.19)$$

*Dacă în singularitatea removabilă limita funcției  $f(z)$  este zero, atunci în reprezentarea (8.19)  $m \in \mathbb{N}^*$  și  $m$  determină ordinul lui  $z_0$  ca zerou al funcției  $f(z)$ .*

Are loc și afirmația inversă celei din Teorema 8.3.1. Prin urmare putem formula

**Teorema 8.3.2** *Dacă o funcție  $f(z)$ , analitică în coroana circulară  $0 < |z - z_0| < R_1$ , este mărginită, deci există  $M > 0$  astfel încât*

$$|f(z)| < M, \quad \text{pentru } 0 < |z - z_0| < R_1,$$

*atunci punctul  $z_0$  este o singularitate removabilă a lui  $f(z)$ .*

**Demonstrație.** Dezvoltăm funcția  $f(z)$  în seria Laurent (8.14) și considerăm expresia (8.13) pentru coeficienții seriei, adică

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Să luăm drept contur de integrare cercul  $C$  de ecuație  $|\zeta - z_0| = \rho$ . Atunci, din ipotezele teoremei rezultă

$$|c_n| < M\rho^{-n}. \quad (8.20)$$

Vom considera coeficienții  $c_{-n}$ . Deoarece valoarea coeficienților  $c_{-n}$  nu depinde de  $\rho$ , din (8.20) obținem  $c_{-n} = 0$  pentru  $n < 0$ , ceea ce demonstrează teorema. ■

Cazul (2) în care se poate plasa o dezvoltare Laurent a unei funcții  $f(z)$  în vecinătatea punctului  $z_0$  este analizat în teorema următoare.

**Teorema 8.3.3** *O funcție  $f$  are în punctul  $z_0$  un pol de ordin  $p$  dacă și numai dacă dezvoltarea în serie Laurent sa în jurul lui  $z_0$  are forma*

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \quad (8.21)$$

cu coeficientul  $c_{-p} \neq 0$ .

**Demonstrație.** Dacă funcția  $f(z)$  are dezvoltarea din enunț pentru  $0 < |z - z_0| < R_1$ , funcția  $\varphi$  definită prin

$$\varphi(z) = c_{-p} + c_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + c_0(z-z_0)^p + c_1(z-z_0)^{p+1} + \cdots$$

este analitică pe discul  $|z - z_0| < R_1$  fiindcă pe acest disc  $\varphi(z)$  se reprezintă ca o serie Taylor. Prin urmare,  $z_0$  este punct ordinar pentru funcția  $\varphi(z)$  și  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Dar  $\varphi(z) = (z - z_0)^p f(z)$ . Conform definiției polului de ordin  $p$  al unei funcții, rezultă că  $z_0$  este pol de ordin  $p$  pentru funcția  $f(z)$ .

Reciproc, dacă  $z_0$  este un pol de ordin  $p$  al funcției  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , există o funcție  $\varphi : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  care are în  $z_0$  un punct ordinar și  $\varphi(z_0) \neq 0$ , astfel încât

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p} \cdot \varphi(z), \quad (\forall) z \in D.$$

Dar funcția  $\varphi$  admite o dezvoltare Taylor în jurul punctului  $z_0$

$$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1(z-z_0) + \cdots + \gamma_n(z-z_0)^n + \cdots$$

cu  $\gamma_0 = \varphi(z_0) \neq 0$ , deci funcția  $f$  admite o dezvoltare în serie Laurent de forma

$$f(z) = \frac{\gamma_0}{(z-z_0)^p} + \frac{\gamma_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \gamma_p + \gamma_{p+1}(z-z_0) + \cdots$$

cu  $\gamma_0 \neq 0$ . Teorema este demonstrată. ■

Să revenim asupra singularităților posibile ale unei funcții, eliminând din discuție punctele critice care pot exista doar pentru funcții multiforme și să analizăm punctele singulare esențiale și pe cele singulare esențiale izolate.

Recunoașterea unui punct singular esențial izolat  $z_0$  al funcției uniforme  $f(z)$  se obține când ne situăm în cazul (3) al dezvoltării în serie Laurent a funcției  $f(z)$ . Conform ultimei teoreme,  $z_0$  este un punct singular esențial al funcției  $f(z)$  dacă și numai dacă partea principală a dezvoltării conține o infinitate de termeni.

**Exemplul 8.3.1** Funcția  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  are în  $z_0 = 0$  un punct singular esențial izolat.

**Soluție.** Funcția considerată admite următoarea dezvoltare Laurent în jurul punctului  $z_0 = 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} + \cdots.$$

Partea principală a acestei dezvoltări are o infinitate de termeni, deci  $z_0 = 0$  este un punct singular care este și izolat deoarece, cu excepția lui  $z_0$ , toate punctele oricărei vecinătăți a originii sunt puncte ordinare. ■

Fie  $f$  o funcție complexă de o variabilă complexă definită pe o mulțime deschisă  $D$ , cu valori în planul complex  $(z) = \overline{C}$ . Asociem funcției  $f$ , funcția  $\varphi$  cu valori în planul complex întreg și definită pe mulțimea  $D' = \left\{ \zeta \in \overline{C} : \zeta = \frac{1}{z}, z \in D \right\}$  prin  $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , unde  $\zeta \in D'$ .

**Definiția 8.3.4** Vom spune că  $z = \infty$  este **punct ordinar** al funcției  $f$  dacă  $\zeta = 0$  este punct ordinar al funcției  $\varphi$ . Dacă  $\zeta = 0$  este un punct singular al funcției  $\varphi$  vom spune că  $f(z)$  are în punctul de la infinit un punct singular de aceeași natură.

**Observația 8.3.2** Conform Definiției 8.3.4 și a Exemplului 8.3.1, rezultă că funcția exponențială  $z \mapsto e^z$  are în punctul de la infinit un punct singular esențial izolat.

De altfel, natura punctului de la infinit al unei funcții  $f(z)$  se poate stabili pornind de la dezvoltarea funcției în seria Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (8.22)$$

convergentă în coroana circulară  $R < |z| < \infty$ .

Distingem următoarele cazuri:

(1) Punctul  $z = \infty$  se numește *singularitate removabilă* a funcției  $f(z)$  dacă dezvoltarea (8.22) nu are termeni cu puteri pozitive ale lui  $z$ , adică are forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

ceea ce este tot una cu a spune că există limita finită a funcției când  $z \rightarrow \infty$ . Această limită nu depinde de drumul pe care  $z$  se duce către infinit și are valoarea  $c_0$ . Dacă

$$c_0 = c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-m+1} = 0, \quad c_{-m} \neq 0,$$

atunci punctul de la infinit este un zero de ordin  $m$  al funcției  $f(z)$ .

(2) Punctul  $z = \infty$  este un *pol de ordin  $m$*  al funcției  $f(z)$  dacă dezvoltarea (8.22) conține un număr de  $m$  termeni cu puteri pozitive ale lui  $z$ , adică,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^m c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m,$$

ceea ce este echivalent cu a spune că modulul valorilor funcției crește nemărginit atunci când  $z \rightarrow \infty$ .

(3) Punctul  $z = \infty$  se numește *singularitate esențială* a funcției  $f(z)$  dacă dezvoltarea (8.22) conține o infinitate de termeni cu puteri pozitive ale lui  $z$ , sau dacă oricare număr complex  $w$  s-ar alege, găsim un șir de puncte în planul complex  $(z_n)$  cu proprietatea  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w$ .

### Exemplul 8.3.2 Funcția complexă de variabilă complexă

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}},$$

are în punctul  $z_0 = 0$  un punct singular esențial neizolat.

**Soluție.** Într-adevăr, zerourile funcției  $\zeta \mapsto \sin \zeta$  sunt zerouri simple, deci  $\zeta_k = k\pi$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ , sunt poli simpli pentru funcția  $\zeta \mapsto \frac{1}{\sin \zeta}$ . Funcția  $f$  are poli simpli dați de  $\frac{1}{z_k} = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , adică  $z_k = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Observăm că  $z_0 = 0$  este un punct de acumulare al mulțimii polilor (în orice vecinătate a acestui punct există cel puțin un pol al funcției  $f$ ), deci  $z_0 = 0$  este punct singular esențial neizolat pentru funcția  $f$ .

**Definiția 8.3.5** Funcția  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  se numește **funcție meromorfă** pe domeniul  $D \subset \mathbb{C}$  dacă în acest domeniu  $f$  nu are alte singularități decât poli.

De exemplu, funcțiile raționale (în particular polinoamele) sunt funcții meromorfe pe  $\mathbb{C}$ . Funcțiile  $z \mapsto \operatorname{tg} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{cot} z$ ,  $z \mapsto \tanh z$ ,  $z \mapsto \coth z$  sunt meromorfe pe orice domeniu  $D \subset \mathbb{C}$ .

Următoarele proprietăți ale funcțiilor meromorfe sunt evidente și doar le enumerăm.

1) Dacă o funcție  $f$  este meromorfă pe un domeniu  $D$ , mulțimea polilor săi conținuți în  $D$  nu poate avea un punct de acumulare în  $D$ . De aici rezultă că o funcție meromorfă pe un domeniu mărginit  $D$  nu poate avea în  $D$  decât un număr finit de poli.

2) Dacă  $f$  este o funcție meromorfă pe un domeniu  $D$ , atunci  $f(z)$  admite o dezvoltare în serie de puteri centrată în orice punct  $z_0 \in D$ , de forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Dacă  $z_0$  este un punct ordinar al funcției  $f$ , atunci  $m \in \mathbb{N}$ . Dacă  $z_0$  este un pol de ordin  $p$  al funcției  $f$ , atunci  $m = -p$  și  $c_{-p} \neq 0$ .

3) Suma, produsul și câtul a două funcții meromorfe pe un domeniu  $D$  sunt funcții meromorfe pe  $D$ .

**Definiția 8.3.6** O funcție complexă de o variabilă complexă se numește **funcție întreagă** dacă este analitică în întreg planul complex  $\mathbb{C}$ .

De exemplu: polinoamele, funcția exponențială, funcțiile circulare  $z \mapsto \sin z$ ,  $z \mapsto \cos z$ , funcțiile hiperbolice  $z \mapsto \operatorname{sh} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ch} z$  sunt funcții întregi.

Evident, seria Taylor a unei funcții întregi, în jurul oricărui punct  $z_0 \in \mathbb{C}$ , are raza de convergență  $R = \infty$ .

În încheiere vom da două teoreme referitoare la comportarea unei funcții întregi în punctul de la infinit.

**Teorema 8.3.4** O funcție întreagă are în punctul de la infinit un punct singular esențial izolat dacă și numai dacă este diferită de un polinom.

**Demonstrație.** Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții întregi  $f$ ,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$



are loc pentru  $|z| < R$ , cu  $R$  oricât de mare. Funcția  $\varphi$ , cu valorile  $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , are dezvoltarea în serie Laurent

$$\varphi(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots$$

pentru  $|\zeta| > \rho = \frac{1}{R}$ , cu  $\rho$  arbitrar de mic, deci o dezvoltare în jurul lui  $\zeta_0 = 0$ . Punctul de la infinit este punct singular esențial izolat al funcției  $f$  dacă și numai dacă  $\zeta_0 = 0$  este un punct singular esențial izolat pentru funcția  $\varphi$ . Însa, partea principală a dezvoltării în serie Laurent a funcției  $\varphi$  conține o infinitate de termeni dacă și numai dacă  $f$  nu este polinom. Teorema este demonstrată. ■

De exemplu, funcțiile  $z \mapsto e^z$ ,  $z \mapsto \sin z$ ,  $z \mapsto \cos z$ ,  $z \mapsto \operatorname{sh} z$ ,  $z \mapsto \operatorname{ch} z$  au în punctul de la infinit un punct singular esențial izolat.

**Teorema 8.3.5** *Dacă o funcție întreagă  $f : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  are în punctul de la infinit un punct ordinar, atunci  $f$  se reduce la o constantă.*

**Demonstrație.** Dacă  $f$  are în punctul de la infinit un punct ordinar, funcția  $\varphi$ , cu valorile  $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ , are în  $\zeta_0 = 0$  un punct ordinar, deci seria Laurent

$$\varphi(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots$$

trebuie să aibă partea principală nulă. Rezultă  $c_n = 0$ ,  $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$  și rămâne  $\varphi(\zeta) = c_0$ ,  $(\forall) \zeta \in \overline{\mathbb{C}}$ , deci  $f(z) = c_0$ ,  $(\forall) z \in \overline{\mathbb{C}}$ . ■

Ca aplicație imediată a acestei teoreme se poate demonstra

**Teorema 8.3.6 (Teorema lui D'Alembert și Gauss)** *Orice polinom  $P$  de grad  $n \geq 1$  are cel puțin un zero în mulțimea  $\mathbb{C}$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $P(z) \neq 0$ ,  $(\forall) z \in \mathbb{C}$ , atunci funcția  $f$ , cu valorile  $f(z) = \frac{1}{P(z)}$  este o funcție întreagă, care, în punctul de la infinit are un punct ordinar, deci  $f$ , ca și  $P$ , se reduce la câte o constantă. Acest lucru contrazice însă ipoteza. ■

**Exercițiul 8.3.1** *Să se determine seria Laurent corespunzătoare ramurii principale a funcției complexe de variabilă complexă  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$  în coroana circulară  $1 < |z| < \infty$ .*

**Soluție.** Funcția  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$  are două ramuri, iar ramura care este o continuare analitică directă a funcției reale  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , definită pentru  $x > 1$ , este ramura principală sau determinarea principală.

Această funcție complexă are, în coroana circulară  $1 < |z| < \infty$ , numai puncte ordinare.

Să construim seria Laurent a acestei funcții în jurul punctului  $z = \infty$ .

Pentru aceasta, punem  $\zeta = \frac{1}{z}$  și astfel coroana infinită de mai sus se transformă în discul de rază unitate și centrul în  $\zeta_0 = 0$ , iar punctul  $z = \infty$  trece în punctul  $\zeta = 0$ .

Dezvoltăm funcția

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\zeta^2}}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}$$

într-o serie Taylor în vecinătatea punctului ordinar  $\zeta_0 = 0$ .

Să observăm că funcția  $\varphi(\zeta)$  este derivata funcției  $\psi(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta^2}$ . Alegerea ramurii funcției multiforme  $\psi$  este determinată de alegerea ramurii funcției  $f(z)$  și evident că este vorba de acea ramură a funcției pentru care  $\psi(0) = +1$ . Pentru simplificare, notăm  $w = \zeta^2$  și considerăm funcția  $\chi(w) = \sqrt{1 + w}$ .

Pentru dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $\chi$  în vecinătatea lui  $w = 0$  avem nevoie de valorile derivatelor  $\chi^{(n)}(0)$ .

Se găsește

$$\chi^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

Astfel, dezvoltarea ramurii alese a funcției  $\chi(\zeta)$  în discul  $|w| < 1$  este

$$\chi(w) = \sqrt{1+w} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \cdot w^n.$$

În felul acesta, pentru funcția  $\psi(\zeta)$  și pentru  $|\zeta| < 1$ , obținem

$$\psi(\zeta) = \sqrt{1 + \zeta^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} \cdot \zeta^{2n},$$

iar pentru funcția  $\varphi(\zeta)$  se obține

$$\varphi(\zeta) = \psi'(\zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \zeta^{2n+1}.$$

În final, pentru ramura aleasă a funcției  $f(z)$ , în coroana nemărginită  $1 < |z|$  obținem dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Deci, punctul de la infinit este punct ordinar pentru funcția  $f$ . ■

**Exercițiul 8.3.2** *Se consideră funcția*

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}.$$

*Să se dezvolte în serie în jurul punctelor  $z_0 = 0$ ,  $z_0 = 1$ ,  $z_0 = 2$ ,  $z_0 = 3$ .*

**Soluție.** Funcția  $f(z)$  admite punctele  $z_0 = 1$ ,  $z_0 = 2$ ,  $z_0 = 3$  ca poli simpli și se poate scrie:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z}{z-2} - \frac{1}{z-3}.$$

În discul  $|z| < 1$ , funcția  $f$  este analitică și are dezvoltarea Taylor

$$f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n.$$

Pentru a dezvolta funcția în serie în jurul punctului  $z = 1$  scriem funcția  $f(z)$  sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{z-1}{1-(z-1)} - \frac{1}{1-(z-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}}.$$

În discul  $|z-1| < 1$ , avem dezvoltările Taylor:

$$\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n; \quad \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

și deci dezvoltarea în serie Laurent a funcției  $f$  în coroana circulară  $0 < |z-1| < 1$  are forma

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 2\right) (z-1)^n.$$

Vom scrie acum expresia funcției  $f(z)$  sub forma

$$f(z) = \frac{1}{1 + (z - 2)} + 1 + \frac{2}{z - 2} + \frac{1}{1 - (z - 2)}.$$

Primul și ultimul termen din această expresie sunt sume de serii geometrice convergente în discul  $|z - 2| < 1$ , după cum urmează:

$$\frac{1}{1 + (z - 2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 2)^n; \quad \frac{1}{1 - (z - 2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (z - 2)^n.$$

Cu acestea, am determinat dezvoltarea Laurent a funcției  $f(z)$  în coroana  $0 < |z - 2| < 1$

$$f(z) = \frac{2}{z - 2} + 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (z - 2)^{2n}.$$

Pentru a obține dezvoltarea în serie a funcției  $f(z)$  în jurul punctului  $z = 3$ , vom scrie valorile acestora în forma

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-3}{2}} + \frac{z-3}{1 + (z-3)} + \frac{3}{1 + (z-3)} - \frac{1}{z-3}$$

și, procedând ca mai sus, se obține dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{-1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-3)^n$$

în coroana circulară  $\varepsilon < |z - 3| < 1$ .

Din ultimele trei dezvoltări ale funcției  $f(z)$ , rezultă că punctele  $z = 1$ ,  $z = 2$  și  $z = 3$  sunt poli simpli ai funcției  $f$ . ■

**Exercițiul 8.3.3** Se consideră funcția  $f(z) = \operatorname{Log} \frac{1-z}{1+z}$ , unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui  $z$  în discul deschis  $|z| < 1$  și în coroana nemărginită  $|z| > 1$ .

**Soluție.** Funcția  $f(z)$  are punctele critice  $z = \pm 1$ . Determinarea considerată este uniformă în domeniile considerate.

În discul  $|z| < 1$ , avem:

$$\operatorname{Log}(1 - z) = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots$$

$$\operatorname{Log}(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + \cdots$$

și deci, în discul  $|z| < 1$ , are loc dezvoltarea

$$f(z) = \operatorname{Log}(1-z) - \operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}.$$

Cu transformarea  $z = \frac{1}{\zeta}$ ,  $|z| > 1$  se transformă în  $|\zeta| < 1$ , iar funcția devine

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \operatorname{Log} \frac{\zeta-1}{\zeta+1} = \pi i + \operatorname{Log} \frac{1-\zeta}{1+\zeta}.$$

Folosind rezultatul precedent, putem scrie

$$\varphi(\zeta) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{n}.$$

Rezultă că pentru funcția  $f(z)$  avem

$$f(z) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z^{2n}}.$$

Remarcăm că partea principală a acestei serii Laurent are o infinitate de termeni, deci  $z = \infty$  este o singularitate removabilă a funcției. ■

**Exercițiul 8.3.4** Să se dezvolte în serie în jurul lui  $z = 1$  funcția

$$f(z) = \sin \frac{z-2}{z-1}.$$

**Soluție.** Se scrie funcția în forma

$$f(z) = \sin \left(1 - \frac{1}{z-1}\right) = \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} - \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{z-1}$$

și se ține cont de dezvoltările în serie ale funcțiilor  $\sin \zeta$  și  $\cos \zeta$

$$\sin \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \zeta^{2n+1}, \quad \cos \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \zeta^{2n}.$$

Revenind la variabila  $z$ , găsim că dezvoltarea Laurent a funcției  $f(z)$  în coroana circulară  $\varepsilon|z-1| < R$  este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left( \sin 1 - \frac{\cos 1}{2n+1} \cdot \frac{1}{z-1} \right) \frac{1}{(z-1)^{2n}}.$$

Partea principală a acestei dezvoltări are o infinitate de termeni, prin urmare, funcția  $f(z)$  are în  $z = 1$  un punct singular esențial izolat. ■

## Capitolul 9

# Teoria reziduurilor și aplicațiile ei

### 9.1 Reziduul funcției analitice într-un punct singular izolat

Fie  $z_0$  un punct singular izolat (pol sau punct singular esențial) al unei funcții complexe  $f(z)$ , univalente și analitice pe un domeniu  $D$ . Presupunem că domeniul de analiticitate al funcției  $f(z)$  are proprietatea că există contururi  $\gamma$  incluse în  $D$  astfel încât  $z_0$  să fie un punct interior al domeniului  $\Delta$  de frontieră  $\gamma$ .

Conform celor prezentate în capitolul precedent, funcția  $f(z)$  este dezvoltabilă în mod unic într-o serie Laurent convergentă pe o coroană circulară cu centrul în  $z_0$  inclusă în domeniul  $D$  și suma acestei serii, pe domeniul ei de convergență, este funcția  $f(z)$ . Prin urmare,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

unde coeficienții  $c_n$  ai seriei Laurent sunt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

în particular,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta, \quad (9.1)$$

iar  $C$  este orice contur inclus în coroana de convergență  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

**Definiția 9.1.1** Se numește **reziduul** funcției analitice  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  într-o singularitate izolată  $z_0$  a sa, numărul complex  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta$  în care integrala se ia pe sensul pozitiv al unui contur arbitrar  $\gamma$  care înconjură punctul  $z_0$ , situat în întregime în  $D$ .

Pentru reziduul unei funcții  $f(z)$  în punctul singular al ei  $z_0$  vom folosi notația  $\text{Rez}[f(z), z_0]$ .

**Observația 9.1.1** Dacă  $z_0$  este un punct ordinar sau o singularitate removabilă a funcției  $f(z)$ , reziduul acestei funcții într-un asemenea punct este zero.

**Observația 9.1.2** Din (9.1) și Definiția 9.1.1 rezultă

$$\text{Rez}[f(z), z_0] = c_1.$$

**Exercițiul 9.1.1** Să se determine reziduurile funcției  $f(z) = z^k e^{\frac{1}{z}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , în punctele singulare izolate ale sale.

**Soluție.** Deoarece intuim că unicul punct singular al funcției este  $z_0 = 0$ , dezvoltăm funcția  $f(z)$  în serie Laurent în jurul originii. Ne folosim în acest scop de dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $e^{\zeta}$

$$e^{\zeta} = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \cdots + \frac{\zeta^n}{n!} + \cdots$$

care este convergentă în întreg planul complex. Punând  $\zeta = \frac{1}{z}$  obținem dezvoltarea în serie Laurent în coroana nemărginită  $|z| > 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Înmulțind în ambii membri ai acestei dezvoltări cu  $z^k$  găsim dezvoltarea în serie Laurent a funcției date în coroana nemărginită  $|z| > 0$

$$f(z) = z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-k}}.$$

Deoarece partea principală a dezvoltării are, indiferent de  $k \in \mathbb{Z}$ , o infinitate de termeni, punctul  $z = 0$  este un punct singular esențial izolat

al funcției  $f(z)$ . Atunci, reziduul funcției în punctul  $z_0 = 0$  este coeficientul lui  $\frac{1}{z}$  din această dezvoltare. Acest termen se obține pentru  $n = k + 1$ .

Cum  $n > 0$  pentru  $k < -1$ , coeficientul lui  $\frac{1}{z}$  este nul, iar pentru  $k \geq -1$  coeficientul lui  $\frac{1}{z}$  este  $\frac{1}{(k+1)!}$ . Deci

$$\operatorname{Rez}[f(z), 0] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k < -1 \\ \frac{1}{(k+1)!}, & \text{pentru } k \geq -1. \end{cases}$$

■

## 9.2 Formule de calcul ale reziduurilor

Pentru a calcula reziduul funcției  $f(z)$  într-o singularitate izolată, putem folosi formula (9.1). Deci, putem scrie

$$\operatorname{Rez}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1}. \quad (9.2)$$

Există cazuri particulare în care se pot stabili formule de calcul mai simple ale reziduului unei funcții  $f(z)$  într-un punct singular izolat al ei. În aceste formule, integrarea din (9.2) se înlocuiește cu calculul unor derivate în punctul  $z_0$ .

Să examinăm astfel de cazuri.

(1) Presupunem că  $z_0$  este un pol simplu al funcției  $f(z)$ . Atunci,  $f(z)$  admite dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (9.3)$$

într-o coroană circulară centrată în  $z_0$ .

Înmulțind ambii membri ai egalității (9.3) cu  $(z - z_0)$  și trecând la limită pentru  $z \rightarrow z_0$ , obținem

$$c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (9.4)$$

În plus, din (9.3) observăm că într-o vecinătate a punctului  $z_0$  funcția  $f(z)$  poate fi reprezentată în forma unui raport de două funcții analitice

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad (9.5)$$



unde  $\varphi(z_0) \neq 0$  și  $z_0$  este un zerou de ordin 1 al funcției  $\psi(z)$ .

Așadar, dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $\psi$  într-o vecinătate a punctului  $z_0$  are forma

$$\psi(z) = (z - z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots, \quad (9.6)$$

în care  $\psi'(z_0) \neq 0$ . Atunci, din (9.4) – (9.6) obținem

$$c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (9.7)$$

Prin urmare, din (9.2) și (9.7) rezultă că *formula de calcul al reziduului unei funcții  $f(z)$  într-un pol simplu  $z_0$  al ei este*

$$\text{Rez}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (9.8)$$

Subliniem că în cazul discutat mai sus funcția  $f(z)$  are expresia (9.5), funcțiile  $\varphi(z)$  și  $\psi(z)$  sunt funcții analitice într-o vecinătate a punctului  $z_0$ , iar  $z_0$  este un zerou de ordinul întâi al funcției  $\psi(z)$ .

(2) Să considerăm cazul în care  $z_0$  este un pol de ordin  $p$  pentru funcția  $f(z)$ . Din capitolul precedent știm că într-o coroană circulară centrată în  $z_0$  are loc dezvoltarea

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z - z_0)^p} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \quad (9.9)$$

Conform relației (9.2), pentru a calcula reziduul funcției în punctul  $z_0$  trebuie să determinăm coeficientul  $c_{-1}$  al dezvoltării (9.9). În acest scop, înmulțim ambii membri ai egalității (9.9) cu  $(z - z_0)^p$  și obținem

$$(z - z_0)^p f(z) = c_{-p} + c_{-p+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{p-1} + c_0(z - z_0)^p + \cdots.$$

Pentru a determina coeficientul  $c_{-1}$  trebuie să derivăm această egalitate de  $(p - 1)$  ori și apoi să facem pe  $z$  să tindă la  $z_0$ . Odată determinat  $c_{-1}$  avem și reziduul funcției  $f(z)$  în punctul singular  $z_0$ .

Așadar, *formula de calcul al reziduului unei funcții  $f(z)$  în punctul singular  $z_0$  de tip pol de ordin  $p$  este*

$$\text{Rez}[f(z), z_0] = \frac{1}{(p - 1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left( (z - z_0)^p f(z) \right). \quad (9.10)$$

Cum funcția căreia i se calculează limita în (9.10) este continuă în punctul  $z_0$ , deci limita sa pentru  $z \rightarrow z_0$  este egală cu valoarea funcției în  $z_0$ , formula de calcul (9.10) poate fi scrisă și în forma

$$\operatorname{Rez}[f(z), z_0] = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \left[ \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left( (z - z_0)^p f(z) \right) \right] \Big|_{z=z_0}. \quad (9.11)$$

Formula (9.8) este un caz particular al formulei (9.10).

**Exercițiul 9.2.1** Să se determine reziduurile funcțiilor  $f_1(z)$ ,  $f_2(z)$ ,  $f_3(z)$ ,  $f_4(z)$  definite prin

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z}{z^n - 1}; & f_2(z) &= e^{iz} \cdot \operatorname{tg} z; \\ f_3(z) &= \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}; & f_4(z) &= \frac{1}{(z^2+1)^n}, \end{aligned}$$

unde  $n \geq 1$  din expresiile funcțiilor  $f_1$  și  $f_4$  este un număr natural arbitrar.

**Soluție.** Funcția  $f_1(z)$  are punctele singulare

$$z_k = \sqrt[n]{1} = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

și toate aceste  $n$  puncte sunt poli simpli situați pe cercul de rază unitate cu centrul în origine. Conform formulei (9.8), reziduul funcției  $f_1(z)$  în polul simplu  $z_k$  este

$$\operatorname{Rez}[f_1(z), z_k] = \frac{z_k}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot z_k^2 = \frac{1}{n} \cdot e^{i \frac{4k\pi}{n}} = \frac{1}{n} \left( \cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} \right).$$

Să determinăm punctele singulare izolate ale funcției  $f_2(z)$ .

În acest sens observăm că funcția se scrie sub forma  $f_2(z) = \frac{e^{iz} \sin z}{\cos z}$  și deci este de tipul (9.5), unde  $\psi(z) = \cos z$  are o infinitate de zerouri simple  $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , unde  $k \in \mathbf{Z}$ .

Aplicând formula (9.8), obținem

$$\operatorname{Rez}[f_2(z), z_k] = \left( \frac{e^{iz} \sin z}{(\cos z)'} \right) \Big|_{z=z_k} = \left( \frac{e^{iz} \sin z}{-\sin z} \right) \Big|_{z=z_k} = -e^{iz_k} = (-1)^{k+1}.$$

Funcția  $f_3(z)$  are polul simplu  $z_1 = -1$  și polul triplu  $z_2 = 1$ . Pentru calculul reziduului în polul simplu folosim (9.8) și găsim

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez}[f_3(z), z_1] &= \frac{z}{((z+1)(z-1)^3)'} \Big|_{z=-1} = \\ &= \left( \frac{z}{(z-1)^3 + 3(z+1)(z-1)^2} \right) \Big|_{z=-1} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Pentru calculul reziduului în punctul  $z_2 = 1$  aplicăm formula (9.11). Avem

$$\operatorname{Rez}[f_3(z), z_2] = \frac{1}{2!} \cdot \left[ \frac{d^2}{dz^2} ((z-1)^3 f_3(z)) \right] \Big|_{z=1} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{z}{z+1} \right) \right] \Big|_{z=1} = -\frac{1}{8}.$$

Cea de a patra funcție are punctele singulare  $z_{1,2} = \pm i$ ; ambele puncte sunt poli multipli de ordin  $n$ . Vom calcula reziduul funcției  $f_4(z)$  în fiecare din aceste puncte folosind formula (9.11). Obținem

$$\operatorname{Rez}[f_4(z), i] = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( (z-i)^n \frac{1}{(z^2+1)^n} \right) \right] \Big|_{z=i}.$$

După simplificarea cu  $(z-i)^n$  se obține

$$\operatorname{Rez}[f_4(z), i] = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left( \frac{1}{(z+i)^n} \right) \right] \Big|_{z=i}.$$

Efectuând derivata de ordinul  $(n-1)$ , găsim

$$\operatorname{Rez}[f_4(z), i] = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1) \cdots (2n-2)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{(z+i)^{2n-1}} \Big|_{z=i}.$$

Folosind artificii simple de calcul, reziduul funcției  $f_4(z)$  în punctul singular  $z_1 = i$  este

$$\operatorname{Rez}[f_4(z), i] = -i \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}.$$

În mod analog, se găsește că  $\operatorname{Rez}[f_4(z), -i] = i \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}$ . ■

### 9.3 Teorema reziduurilor

În cele ce urmează vom stabili câteva aplicații importante ale noțiunilor introduse mai sus.

Teorema care urmează este esențială în diverse cercetări teoretice și aplicații practice.

Fie  $\Delta \subset \mathbb{C}$  un domeniu mărginit de frontieră  $\Gamma$ . Reuniunea acestui domeniu cu frontiera sa este închiderea domeniului  $\Delta$ , notată cu  $\overline{\Delta}$ ; prin urmare,  $\overline{\Delta} = \Delta \cup \Gamma$ .

Presupunem că în mulțimea  $\Delta$  se află o mulțime finită de puncte distincte  $S = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$  care sunt poli sau puncte singulare esențiale izolate ale unei funcții analitice pe un domeniu  $D$ .

**Teorema 9.3.1 (Teorema reziduurilor a lui Cauchy)** *Dacă funcția  $f(z)$  este analitică în domeniul  $D$  și dacă  $\overline{\Delta} \setminus S \subset D$ , atunci*

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez}[f(z), z_k], \quad (9.12)$$

unde conturul  $\Gamma$  este parcurs în sens pozitiv.

**Demonstrație.** Amintim că dacă o funcție  $f(z)$  este analitică în domeniul închis  $\overline{\Delta} \setminus S$ , atunci toate punctele frontierei  $\Gamma$  sunt puncte regulate ale lui  $f(z)$ .

Izolăm fiecare din punctele singulare  $z_k$  ale funcției  $f(z)$  printr-un contur  $\gamma_k$  care să conțină numai punctul  $z_k$ . Considerăm domeniul închis multiplu conex mărginit de conturul  $\Gamma$  și de contururile  $\gamma_k$ . Atunci, funcția  $f(z)$  este analitică în tot interiorul acestui domeniu. Prin urmare, conform Teoremei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, avem

$$\int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta + \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k^-} f(\zeta) d\zeta = 0. \quad (9.13)$$

Trecând suma din (9.13) în membrul al doilea și folosind Definiția 9.1.1 obținem (9.12) și teorema este demonstrată. ■

Importanță practică a formulei (9.12) constă în faptul că în multe cazuri este mai simplu să evaluăm reziduurile unei funcții  $f(z)$  în singularitățile situate în interiorul domeniului limitat de un contur  $\Gamma$  decât să calculăm direct integrala funcției  $f(z)$  pe conturul  $\Gamma$ , egalitatea între rezultate fiind asigurată de teorema reziduurilor.

Mai târziu vom prezenta unele aplicații importante ale acestei formule.

Aplicarea teoremei reziduurilor poate deveni laborioasă dacă numărul  $N$  al punctelor singulare este mare. În unele situații această dificultate poate fi înlăturată folosind reziduul funcției  $f$  în punctul de la infinit și o teorema pe care o vom prezenta mai jos.

**Definiția 9.3.1** Fie  $f(z)$  o funcție analitică în exteriorul discului închis  $\overline{B}(0, R_0)$ , cu centrul în origine și raza  $R_0$ , astfel încât punctul de la infinit este pentru  $f(z)$  punct ordinar, pol sau punct singular esențial izolat. **Reziduul funcției  $f(z)$  în punctul de la infinit**, notat cu  $\text{Rez}[f(z), \infty]$ , este numărul complex

$$\text{Rez}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta, \quad (9.14)$$

unde  $C^+$  este un contur arbitrar inclus în exteriorul discului  $\overline{B}(0, R_0)$ , parcurs în sens pozitiv și în exteriorul căruia funcția  $f(z)$  nu conține alte puncte singulare cu excepția eventuală a punctului de la infinit.

Din această definiție rezultă, în particular, că dacă punctul  $z = \infty$  este o singularitate removabilă sau punct ordinar, atunci este posibil ca  $\text{Rez}[f(z), \infty]$  să fie nenul, în timp ce reziduul funcției  $f(z)$  într-un punct singular removabil sau ordinar este întotdeauna egal cu zero.

**Observația 9.3.1** Pentru calcularea  $\text{Rez}[f(z), \infty]$  dezvoltăm în serie Laurent funcția  $f(z)$  în coroana circulară nemărginită cu centrul în origine  $R_0 < |z|$  care să nu conțină singularitățile funcției  $f(z)$  situate la distanță finită. Avem

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

Folosind această dezvoltare și (9.14), deducem  $\text{Rez}[f(z), \infty] = -c_{-1}$ .

Formulele (9.12) și (9.14) fac posibilă demonstrarea teoremei anunțate mai sus.

**Teorema 9.3.2** Dacă funcția  $f(z)$  este analitică în întreg planul complex, cu excepția unui număr finit de puncte singulare izolate  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), care include și  $z = \infty$  ( $z_N = \infty$ ), atunci

$$\sum_{k=1}^N \text{Rez}[f(z), z_k] = 0. \quad (9.15)$$

**Demonstrație.** Să considerăm un contur  $C$  care să conțină în interior toate cele  $N - 1$  singularități  $z_k$  situate la distanță finită. Conform formulei (9.12) din Teorema 9.3.1, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{N-1} \text{Rez}[f(z), z_k]. \quad (9.16)$$

Însă, în baza relației (9.14), integrala din membrul stâng al egalității (9.16) este, cu semn contrar, reziduul funcției  $f(z)$  în punctul de la infinit. Aceasta demonstrează teorema. ■

Teorema 9.3.2 permite, ocazional, simplificarea calculului unor integrale pe un contur, așa cum se constată din exercițiul care urmează.

**Exercițiul 9.3.1** Să se calculeze integrala  $I = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} \sin \frac{\pi}{z} dz$ , unde  $\Gamma$  este elipsa de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , în următoarele cazuri:  $0 < b < 1$ ,  $b > 1$ .

**Soluție.** Funcția  $f$ , cu valorile  $f(z) = \frac{1}{1+z^2} \sin \frac{\pi}{z}$ , are singularitățile:  $z_0 = 0$  punct singular esențial;  $z_1 = i$  și  $z_2 = -i$  poli simpli.

Pentru calculul reziduului funcției  $f$  în origine, dezvoltăm funcția  $f$  în serie Laurent în jurul punctului  $z_0 = 0$ .

Pentru aceasta, folosim dezvoltările Laurent ale celor doi factori ai expresiei funcției în coroana  $0 < |z| < 1$ . Astfel,  $f(z)$  devine

$$f(z) = (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots) \left( \frac{1}{1!} \frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!} \frac{\pi^3}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{\pi^5}{z^5} - \dots \right).$$

Coeficientul termenului în  $\frac{1}{z}$  din produsul acestor serii este seria numerică

$$\frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \dots$$

care este convergentă și are suma  $\text{sh } \pi$ . Așadar,  $\text{Rez}[f(z), 0] = \text{sh } \pi$ .

Pentru calculul reziduurilor în polii simpli  $z_1 = i$  și  $z_2 = -i$ , aplicăm formula (9.8) și găsim:

$$\begin{aligned} \text{Rez}[f(z), i] &= \left( \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{2z} \right) \Big|_{z=i} = \frac{\sin(-i\pi)}{2i} = -\frac{1}{2} \text{sh } \pi; \\ \text{Rez}[f(z), -i] &= \left( \frac{\sin \frac{\pi}{z}}{2z} \right) \Big|_{z=-i} = \frac{\sin(i\pi)}{-2i} = -\frac{1}{2} \text{sh } \pi. \end{aligned}$$

Când  $0 < b < 1$ , doar punctul singular  $z_0 = 0$  se află în domeniul a cărui frontieră este elipsa  $\Gamma$ .

Folosind teorema reziduurilor, avem

$$I = 2\pi i \operatorname{Rez} [f(z), 0] = 2\pi i \operatorname{sh} \pi.$$

Când  $b > 1$ , toate cele trei puncte singulare se află în domeniul limitat de elipsă și prin urmare

$$I = 2\pi i (\operatorname{Rez} [f(z), 0] + \operatorname{Rez} [f(z), i] + \operatorname{Rez} [f(z), -i]) = 0.$$

În al doilea caz se poate obține valoarea integralei  $I$  folosind numai reziduul funcției în punctul de la infinit deoarece  $I = -2\pi i \operatorname{Rez} [f(z), \infty]$ .

Pentru a calcula reziduul funcției  $f(z)$  în punctul de la infinit, dezvoltăm  $f(z)$  în serie Laurent în  $|z| > 1$ . În acest sens, scriem  $f(z)$  în forma

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \sin \frac{\pi}{z}$$

Deoarece fracția  $\frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}}$ , în domeniul considerat, este suma unei serii geometrice cu rația  $-\frac{1}{z^2}$  funcția are dezvoltarea

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) \left( \frac{1}{1!} \frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!} \frac{\pi^3}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{\pi^5}{z^5} - \dots \right).$$

Dar produsul după Cauchy al celor două serii nu are termen în  $\frac{1}{z}$  și deci  $c_{-1} = 0$ , ceea ce implică  $\operatorname{Rez} [f(z), \infty] = 0$ . Regăsim  $I = 0$ . ■

## 9.4 Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor

Teoremele paragrafului precedent își găsesc aplicații nu numai în calculul integralelor din funcții complexe de o variabilă complexă dar și în calculul unor integrale definite din funcții reale de o variabilă reală. Uneori, este mai convenabil să folosim metode ale funcțiilor complexe pentru a găsi valoarea unor astfel de integrale.

În cele ce urmează, vom considera tipuri de integrale definite sau improprii cărora li se pot afla mai ușor valorile folosind teorema reziduurilor.

### 9.4.1 Integrale de forma $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$

Considerăm integrala proprie pe compactul  $[0, 2\pi]$  a unei funcții raționale în argumentele  $\sin \theta$  și  $\cos \theta$ , deci o integrală de forma

$$I = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta) d\theta. \quad (9.17)$$

Acest tip de integrală se reduce la integrala unei funcții complexe dacă se face schimbarea de variabilă  $z = e^{i\theta}$ .

Avem

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad \text{și} \quad \begin{cases} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right) = \frac{z^2 + 1}{2z}. \end{cases}$$

Când  $\theta$  parcurge intervalul  $[0, 2\pi]$ , variabila complexă  $z$  parcurge în sens pozitiv cercul  $|z| = 1$ , ecuația căruia se poate scrie și în forma  $z = e^{i\theta}$ .

Astfel, integrala (9.17) se transformă în

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \mathcal{R} \left( \frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z} \right) \frac{dz}{z}. \quad (9.18)$$

În baza proprietăților generale ale funcțiilor analitice, integrantul din (9.18), care este o funcție rațională de forma

$$\tilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}, \quad (9.19)$$

este funcție analitică în discul închis  $|z| \leq 1$ , cu excepția eventuală a unui număr finit  $N \leq m$  de puncte singulare  $z_k$ , cu  $|z_k| < 1$ , care sunt zerourile numitorului din (9.19).

Prin urmare, după Teorema 9.3.1,

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez} [\tilde{\mathcal{R}}(z), z_k]. \quad (9.20)$$

Punctele  $z_k$  sunt polii funcției  $\tilde{\mathcal{R}}(z)$ .

Dacă  $\alpha_k$  este ordinul polului  $z_k$ , atunci  $\sum_{k=1}^N \alpha_k \leq m$ . Situația  $\sum_{k=1}^N \alpha_k < m$  corespunde cazului în care numitorul funcției  $\tilde{\mathcal{R}}(z)$  are și rădăcini situate în exteriorul discului  $|z| \leq 1$ .



În baza formulei (9.10), valoarea integralei (9.17) este dată de

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^N \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \cdot \left( \frac{d^{\alpha_k-1}}{dz^{\alpha_k-1}} \left[ (z - z_k)^{\alpha_k} \tilde{\mathcal{R}}(z) \right] \right) \Big|_{z=z_k}. \quad (9.21)$$

**Exercițiul 9.4.1** Să se calculeze integralei  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin \theta}$ ,  $a > 1$ .

**Soluție.** Notând  $z = e^{i\theta}$ , se obține egalitatea

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \frac{z^2 - 1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1} dz.$$

Unicul pol simplu al funcției  $\tilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}$ , conținut în discul  $|z| = 1$ , este  $z_1 = i(\sqrt{a^2 + 1} - a)$  și reziduul acestei funcții în acest pol se poate calcula cu formula (9.8), deci  $\text{Rez}[\tilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = \frac{1}{z_1 + ia} = \frac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}$ .

Obținem

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x} = 2\pi i \text{Rez}[\tilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

■

**Exercițiul 9.4.2** Să se calculeze integralele:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta$$

unde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ .

**Soluție.** Determinăm cele două integrale simultan considerând combinația

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta.$$

Efectuând schimbarea de variabilă  $z = e^{i\theta}$ , se obține

$$I_1 + iI_2 = \int_{|z|=1} \frac{z^n}{1 - a \frac{z^2 + 1}{z} + a^2} \cdot \frac{dz}{iz} = i \int_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1 + a^2)z + a} dz.$$

În acest caz,  $\tilde{\mathcal{R}}(z) = i \frac{z^n}{az^2 - (1+a^2)z + a}$ .

Această funcție rațională are un singur pol în discul de rază unitate cu centrul în origine, și anume  $z_1 = a$ , iar reziduul funcției în acest pol, determinat cu ajutorul formulei (9.8), este

$$\text{Rez}[\tilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = i \frac{z_1^n}{2az_1 - (1+a^2)} = i \frac{a^n}{a^2 - 1}.$$

Conform Teoremei reziduurilor,

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i \cdot i \frac{a^n}{a^2 - 1} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}.$$

Separând partea reală și partea imaginară, găsim:

$$I_1 = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}; \quad I_2 = 0.$$

Remarcăm că dacă se dorește determinarea separată a celor două integrale, calculele sunt foarte dificile.

De exemplu, cu schimbarea  $z = e^{i\theta}$ , integrantul lui  $I_1$  este funcția rațională

$$\tilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{i(1 + z^{2n})}{2z^n[az^2 - (1+a^2)z + 1]}$$

și are pe  $z_1 = a$  pol simplu și pe  $z_2 = 0$  pol de ordin  $n$ .

Calculul reziduului acestei funcții în  $z_1$  este ușor de efectuat, în schimb pentru a afla reziduul în punctul  $z_2$  ar trebui găsită derivata de ordin  $(n-1)$  a raportului

$$\frac{1 + z^{2n}}{az^2 - (1+a^2)z + 1},$$

care necesită multe calcule. ■

**Exercițiul 9.4.3** Să se calculeze următoarele integrale:

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}^0. \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta; & \mathbf{2}^0. \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{5 + 4 \sin \theta} d\theta; \\ & \mathbf{3}^0. \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin \theta}{(5 - 4 \cos \theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

**Soluție.** Ne vom ocupa doar de a treia integrală.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin \theta}{(5 - 4 \cos \theta)^2} d\theta = -\frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{(z+i)^2}{(2z-1)^2(z-2)^2} dz.$$

Trebuie să calculăm reziduul funcției  $f(z) = -\frac{1}{2} \frac{(z+i)^2}{(2z-1)^2(z-2)^2}$  în polul dublu  $z_1 = 1/2$  care se află în discul de rază 1 cu centrul în origine. Găsim

$$\text{Rez}[f(z), z_1] = -\frac{1}{8} \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{z+i}{z-2} \right)^2 \right) \Big|_{z=1/2} = -\frac{5i}{27}$$

și integrala are valoarea  $\frac{10\pi}{27}$ . ■

**Exercițiul 9.4.4** Să se calculeze integrala  $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta}$ , unde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ .

**Soluție.** Punând  $z = e^{i\theta}$ , obținem

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a(z^2+1)}{2z}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2 + 2z + a}.$$

Zerourile numitorului  $z_{1,2} = -\frac{1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$  sunt poli simpli pentru funcția de integrat. Deoarece  $z_1 \cdot z_2 = 1$ , numai unul din acești poli se află în discul de rază 1 cu centrul în origine, iar acesta este  $z_1 = -\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}$ .

Conform Teoremei reziduurilor,

$$I = 4\pi \text{Rez} \left[ \frac{1}{az^2 + 2z + a}, z_1 \right] = 4\pi \frac{1}{a(z - z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

■

**Exercițiul 9.4.5** Să se calculeze integrala proprie  $I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2 \cos \theta}{5 + 4 \sin \theta} d\theta$ .

**Soluție.** Cu  $z = e^{i\theta}$ , se obține  $I = \int_C \frac{z^2 + z + 1}{z(2z^2 + 5iz - 2)} dz$ , unde  $C$  este cercul de ecuație  $|z| = 1$ . Integrantul are polii simpli  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = -1/2$ ,

$z_3 = -2i$  și numai primii doi se găsesc în discul  $|z| < 1$ . Reziduurile funcției  $f(z)$  în acești doi poli sunt

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez}[f(z), 0] &= \left[ \frac{z^2 + z + 1}{2z^2 + 5iz - 2} \right] \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2}; \\ \operatorname{Rez}[f(z), -\frac{1}{2}] &= \left[ \frac{z^2 + z + 1}{z(4z + 5i)} \right] \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i,\end{aligned}$$

deci

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{Rez}[f(z), 0] + \operatorname{Rez}\left[f(z), -\frac{1}{2}\right] \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

■

### 9.4.2 Integrale de forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

Vom vedea cum se aplică teoria reziduurilor pentru a evalua integrala improprie convergentă  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ .

Să presupunem că funcția  $f(x)$  este definită pe întreaga axă reală și poate fi prelungită prin analiticitate în semiplanul superior astfel încât funcția obținută să satisfacă unele condiții suplimentare cuprinse într-o teoremă care va fi demonstrată mai jos.

**Lema 9.4.1** *Fie  $f(z)$  o funcție analitică în semiplanul superior  $\operatorname{Im} z > 0$ , cu excepția unui număr finit de puncte singulare izolate. Presupunem că există numerele pozitive  $R_0$ ,  $M$  și  $\delta$  astfel încât pentru toate punctele semiplanului superior care satisfac condiția  $|z| > R_0$  are loc mărghinirea*

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}. \quad (9.22)$$

Atunci

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (9.23)$$

unde conturul de integrare  $C'_R$  este semicercul  $|z| = R$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $R > R_0$ , situat în semiplanul superior al planului complex ( $z$ ).

**Demonstrație.** În baza unei proprietăți a integralelor în complex referitoare la modulul unei integrale dintr-o funcție complexă pe o curbă netedă pe porțiuni, pentru  $R > R_0$ , avem

$$\left| \int_{C'_R} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_{C'_R} |f(\zeta)| ds < \frac{\pi MR}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^\delta} \rightarrow 0, \text{ când } R \rightarrow \infty$$

și aceasta demonstrează lema. ■

**Observația 9.4.1** Dacă ipotezele Lemei 9.4.1 sunt satisfăcute într-un sector de cerc  $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$  din planul complex ( $z$ ), atunci formula (9.23) este adevărată cu precizarea că domeniul de integrare este arcul din cercul  $C'_R$  cuprins în sectorul dat.

**Observația 9.4.2** Ipotezele Lemei 9.4.1 sunt evident satisfăcute dacă funcția  $f(z)$  este analitică într-o vecinătate a punctului de la infinit și acest punct este un zerou de cel puțin ordinul al doilea al funcției.

Într-adevăr, în acest caz, dezvoltarea în serie Laurent a funcției  $f(z)$  în vecinătatea lui  $z = \infty$  este

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \cdots = \frac{\psi(z)}{z^2},$$

unde funcția  $\psi(z)$  este astfel încât  $|\psi(z)| < M$ , ceea ce înseamnă că are loc estimarea (9.22) cu  $\delta = 1$ . ■

**Teorema 9.4.1** Dacă funcția reală de variabilă reală  $f$ , definită pe întreaga axă reală  $(-\infty, \infty)$ , poate fi prelungită prin analiticitate la semiplanul  $\text{Im } z \geq 0$  și dacă prelungirea sa analitică  $f(z)$  satisface condițiile Lemei 9.4.1 și nu are singularități pe axa  $Ox$ , atunci integrala improprie  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  este convergentă și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Rez}[f(z), z_k], \quad (9.24)$$

unde  $z_k$  sunt singularitățile funcției  $f(z)$  din semiplanul superior.

**Demonstrație.** Prin ipoteză, funcția  $f(z)$ , definită în semiplanul superior, are un număr finit de singularități  $z_k$  pentru care  $|z_k| < R_0$ .

Considerăm un contur închis compus din segmentul de dreaptă  $-R \leq x \leq R$  ( $R > R_0$ ) și semicercul  $C'_R$  din semiplanul superior.

Conform Teoremei reziduurilor

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C'_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Rez}[f(z), z_k]. \quad (9.25)$$

Fiind satisfăcute condițiile Lemei 9.4.1, limita termenului al doilea din membrul stâng al relației (9.25) este zero când  $R \rightarrow \infty$ , în timp ce membrul doi este independent de  $R$  pentru  $R > R_0$ .

Rezultă că limita lui (9.25) există și obținem (9.24). ■

**Exercițiul 9.4.6** Să se calculeze integralele improprii

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

**Soluție.** Prelungirile analitice în semiplanul superior ale funcțiilor de integrat satisfac ipotezele Teoremei 9.4.1. Punctele singulare ale acestor funcții, situate în semiplanul superior, de tip pol simplu, sunt

$$z_{1,2} = e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{4}} \quad (k = 0, 1) \implies z_1 = e^{i \frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i \frac{3\pi}{4}}.$$

Prin urmare

$$I_1 = 2\pi i \left( \operatorname{Rez}[f_1(z), z_1] + \operatorname{Rez}[f_1(z), z_2] \right),$$

$$I_2 = 2\pi i \left( \operatorname{Rez}[f_2(z), z_1] + \operatorname{Rez}[f_2(z), z_2] \right).$$

Reziduurile celor două funcții în respectiv cei doi poli simpli se calculează cu (9.8). Avem

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez}[f_1(z), z_1] &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{3\pi}{4}}; \\ \operatorname{Rez}[f_1(z), z_2] &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{\pi}{4}}; \\ \operatorname{Rez}[f_2(z), z_1] &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{\pi}{4}}; \\ \operatorname{Rez}[f_2(z), z_2] &= \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4} \cdot e^{-i \frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Cu aceste reziduuri și ținând cont că  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , se găsește

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

■

**Observația 9.4.3** Dacă  $f(x)$  din egalitatea (9.24) este o funcție pară și satisface ipotezele Teoremei 9.4.1, atunci

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez}[f(z), z_k], \quad (9.26)$$

unde  $z_k$  sunt singularitățile funcției  $f(z)$  din semiplanul superior.

Într-adevăr, dacă  $f(x)$  este funcție pară, atunci

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \quad (9.27)$$

Din (9.24) și (9.27) rezultă (9.26). ■

**Observația 9.4.4** *O teoremă similară Teoremei 9.4.1 are loc în cazul când există o prelungire analitică a funcției  $f(x)$  în semiplanul inferior care să satisfacă ipotezele Lemei 9.4.1.*

**Exercițiul 9.4.7** *Să se determine valorile integralelor improprii de prima speță:*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}; \quad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^8 + 1};$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^6 + 1}; \quad I_5 = \int_0^{\infty} \frac{(x^2 + 2)dx}{(x^4 + 16)^2}; \quad I_6 = \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

### 9.4.3 Integrale de forma $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} \mathcal{R}(x) dx$ , $\alpha \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Fie  $\mathcal{R}(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  o funcție rațională care satisface condițiile:

$$Q(x) \neq 0, \quad (\forall) x \in [0, \infty); \quad \alpha + 1 + \text{gr}(P) < \text{gr}(Q),$$

unde  $\text{gr}(P)$  și  $\text{gr}(Q)$  sunt gradele polinoamelor  $P(x)$  și  $Q(x)$ .

Astfel, integrala  $I$  este convergentă și putem scrie

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^{\rho} x^{\alpha} \mathcal{R}(x) dx.$$

Dorim să vedem cum se aplică teorema reziduurilor pentru calculul acestui tip de integrale improprii de prima speță.

Pentru aceasta, avem nevoie de două leme.

Precizăm că  $S_0$  este sectorul circular cu vârful în  $z_0$  și raza  $R_0$ ,

$$S_0 = \{z = z_0 + re^{i\varphi} \mid 0 < r < R_0, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}, \quad 0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi,$$

Frontiera lui  $S_0$  este o porțiune din cercul de rază  $R_0$  și centrul în punctul  $z_0$  la care se adaugă două raze ale cercului, care fac cu axa  $Ox$  unghiurile  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$ .

**Lema 9.4.2** Fie  $f$  o funcție continuă pe sectorul circular  $S_0$  cu vârful în punctul fixat  $z_0$ . Dacă  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in S_0} [(z - z_0)f(z)] = 0$ , atunci  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , unde  $\gamma \subset S_0$  este un arc de cerc de rază  $\rho$  și cu centrul în punctul  $z_0$ .

**Demonstrație.** Continuitatea funcției  $f$  pe sectorul  $S_0$  asigură existența integralei pe  $\gamma$ . Prin ipoteză  $\lim_{z \rightarrow z_0, z \in S_0} [(z - z_0)f(z)] = 0$ , deci  $(\forall) \varepsilon > 0$ ,  $(\exists) \delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât

$$|(z - z_0)f(z)| < \varepsilon, \quad (\forall) z \in S_0 \quad \text{cu} \quad |z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$

Alegând  $\rho < \delta(\varepsilon)$ , avem

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)f(z)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} L(\gamma),$$

unde  $L(\gamma)$  este lungimea arcului de cerc  $\gamma$ .

Deoarece  $L(\gamma) \leq 2\pi\rho$ , rezultă că  $\rho < \delta(\varepsilon)$  implică  $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| < 2\pi\varepsilon$  și lema este demonstrată. ■

**Lema 9.4.3** Dacă  $f(z)$  este o funcție continuă pe mulțimea

$$S'_0 = \{z = z_0 + r e^{i\varphi} \mid r > R_0, \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2\}$$

și dacă  $\lim_{|z - z_0| \rightarrow \infty, z \in S'_0} [(z - z_0)f(z)] = 0$ , atunci  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , unde  $\gamma \subset S'_0$  este un arc de cerc de rază  $\rho$  și cu centrul în punctul  $z_0$ .

**Demonstrație.** La fel ca mai sus, existența integralei pe orice arc de cerc  $\gamma \subset S'_0$  este asigurată de continuitatea funcției  $f$  pe mulțimea  $S'_0$ . Din ipoteză rezultă că oricare ar fi  $\varepsilon > 0$ , există numărul  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât pentru orice  $z \in S'_0$  cu  $|z - z_0| > \delta(\varepsilon)$ , avem  $|(z - z_0)f(z)| < \varepsilon$ . În particular, pentru  $\rho > \delta(\varepsilon)$ ,  $|(z - z_0)f(z)| < \varepsilon$ ,  $(\forall) z \in \gamma$ .

Din aceleași considerente ca în lema anterioară, avem că  $\rho > \delta(\varepsilon)$  implică

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{(z - z_0)f(z)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon,$$

deci  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 0$ . ■

Considerăm acum funcția multiformă  $z \mapsto z^{\alpha} \mathcal{R}(z)$ , tăietura

$$T = \{z \in \mathbb{C}, z = x + iy \mid y = 0, x \geq 0\}$$



și să notăm  $D = \mathbb{C} \setminus T$ . Alegem una din ramurile acestei corespondențe, definite pe  $D$ , de exemplu  $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , cu valorile

$$f(z) = e^{\alpha(\ln r + i\varphi)} \mathcal{R}(z),$$

unde  $r$  și  $\varphi$  sunt modulul și respectiv argumentul numărului complex  $z$ ; prin urmare  $z = r e^{i\varphi}$ .

Funcția  $f(z)$  astfel introdusă nu are alte puncte singulare pe domeniul  $D$  decât polii funcției raționale  $\mathcal{R}(z)$ .

Fie  $\Delta = \{z = r e^{i\varphi} \mid \varepsilon < r < \rho, 0 < \varphi < 2\pi\}$ , deci coroana circulară cu centrul în origine, cu raza interioară  $\varepsilon$  și cu raza exterioară  $\rho$ , din care s-a scos segmentul  $[\varepsilon, \rho] \subset T$ . Evident,  $\Delta \subset D$ .

Aplicăm teorema reziduurilor funcției  $f$  prelungită prin continuitate pe cele două borduri ale tăieturii  $T$ . Vom lua  $\varepsilon$  suficient de mic și  $\rho$  suficient de mare astfel încât  $\Delta$  să conțină toți polii funcției  $f$ .

Ținând seama că pentru  $\varphi = 0$  avem

$$z = x, \quad r = x, \quad e^{\alpha(\ln x + i\varphi)} = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha,$$

iar pentru  $\varphi = 2\pi$  avem

$$z = x, \quad r = x, \quad e^{\alpha(\ln x + i\varphi)} = e^{\alpha(\ln x + 2\pi i)} = x^\alpha e^{2\pi i \alpha},$$

integrala de-a lungul frontierei  $\partial\Delta$  are valoarea

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = \int_\varepsilon^\rho x^\alpha \mathcal{R}(x) dx + \int_\Gamma f(z) dz + e^{2\pi i \alpha} \int_\rho^\varepsilon x^\alpha \mathcal{R}(x) dx - \int_\gamma f(z) dz, \quad (9.28)$$

unde  $\Gamma$  este cercul de rază  $\rho$  cu centrul în origine, iar  $\gamma$  este un cerc de rază  $\varepsilon$  concentric cu primul din care s-au înlăturat punctele de pe axa  $Ox$ .

Ambele cercuri sunt parcurse în sens pozitiv (semnul minus din fața ultimei integrale se datorează faptului că s-a schimbat orientarea cercului  $\gamma$ ).

Din teorema reziduurilor, rezultă

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez}[f(z), z_k]. \quad (9.29)$$

Să demonstrăm că

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\gamma f(z) dz = 0; \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_\Gamma f(z) dz = 0.$$

Pentru aceasta să verificăm dacă sunt satisfăcute ipotezele Lemei 9.4.2 și Lemei 9.4.3.

Avem

$$|zf(z)| = \frac{|z|^{\alpha+1}|P(z)|}{|Q(z)|}.$$

Dar, prin ipoteză,  $\alpha > -1$ , deci  $\alpha+1 > 0$  și  $\lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = 0$ . De asemenea, deoarece  $\alpha + 1 + \text{gr}(P) < \text{gr}(Q)$ , obținem  $\lim_{z \rightarrow \infty} [zf(z)] = 0$ .

Așadar, se poate aplica Lema 9.4.2 și Lema 9.4.3.

Folosind aceste leme și trecând la limită în relația (9.28), cu luarea în considerație a relației (9.29), obținem

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Rez}[f(z), z_k], \quad (9.30)$$

de unde se poate deduce valoarea integralei  $I$ .

**Exercițiul 9.4.8** Să se calculeze integralele improprii de prima speță:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{a^2 + x^2} dx, \quad a > 0, \quad \alpha \in (-1, 1); \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx.$$

**Soluție.** Ambele integrale se încadrează în tipul studiat mai sus. Pentru  $I_1$ , ramura principală a prelungirii analitice a funcției de integrat este

$$f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}, \quad \text{unde } z = r e^{i\varphi}.$$

Reziduurile funcției  $f(z)$  în polii ei  $z_1 = ia$  și  $z_2 = -ia$  sunt

$$\text{Rez}[f(z), z_1] = \left( \frac{1}{2z} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)} \right) \Big|_{z=z_1} = \frac{a^{\alpha-1}}{2i} \cdot e^{i \frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$\text{Rez}[f(z), z_2] = \left( \frac{1}{2z} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)} \right) \Big|_{z=z_2} = -\frac{a^{\alpha-1}}{2i} \cdot e^{i \frac{3\alpha\pi}{2}}.$$

Conform formulei (9.30), avem

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) I_1 = \pi a^{\alpha-1} \left( e^{i \frac{\alpha\pi}{2}} - e^{i \frac{3\alpha\pi}{2}} \right).$$

Însă,  $1 - e^{2\pi i\alpha} = 1 - \cos 2\pi\alpha - i \sin 2\pi\alpha = -2i \sin \pi\alpha e^{i\pi\alpha}$ , astfel că putem scrie

$$-2i \sin \pi\alpha e^{i\pi\alpha} \cdot I_1 = \pi a^{\alpha-1} \left( e^{i \frac{\alpha\pi}{2}} - e^{i \frac{3\alpha\pi}{2}} \right).$$

Înmulțim în ambii membri cu  $e^{-i\pi\alpha}$  și obținem

$$I_1 \cdot 2i \sin \pi\alpha = \pi\alpha^{\alpha-1} \cdot 2i \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

de unde

$$I_1 = \frac{\pi\alpha^{\alpha-1}}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Pentru calculul integralei  $I_2$  putem aplica teorema reziduurilor funcției

$$g(z) = \frac{\sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}}{1+z^3}, \quad \text{cu } z = r e^{i\varphi},$$

și domeniului  $\Delta$  din Lema 9.4.3. Funcția  $g$  are polii simpli

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Procedând ca mai sus, se obține  $I_2 = \frac{\pi}{3}$ . ■

**Exercițiul 9.4.9** *Să se calculeze integralele*

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} dx; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{x^2+4} dx; \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2} dx.$$

#### 9.4.4 Integrale de forma $\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega x} f(x) dx$ . Lema lui Jordan

Calculul unei importante clase de integrale improprii prin intermediul teoremei reziduurilor se bazează pe lema lui Jordan.

**Lema 9.4.4 (Lema lui Jordan)** *Dacă funcția  $f(z)$  este analitică în semiplanul superior  $\text{Im } z > 0$ , exceptând un număr finit de puncte singulare izolate, și tinde la zero uniform în raport cu  $\arg z$  când  $z \rightarrow \infty$ , atunci pentru  $\omega > 0$*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C'_R} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \quad (9.31)$$

unde  $C'_R$  este un arc din cercul  $|z| = R$  din semiplanul  $\text{Im } z > 0$ .

**Demonstrație.** Ipoteza că  $f(z)$  tinde la zero când  $z \rightarrow \infty$ , uniform în raport cu argumentul lui  $z$ , implică evaluarea

$$|f(z)| < \mu_R, \text{ pentru } |z| = R, \quad (9.32)$$

unde  $\mu_R \rightarrow 0$  când  $R \rightarrow \infty$ . Pentru a folosi (9.32) efectuăm schimbarea de variabilă  $\zeta = R e^{i\varphi}$  și luăm în calcul faptul că

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \text{ pentru } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (9.33)$$

Obținem

$$\left| \int_{C'_R} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| \leq \mu_R \cdot R \int_0^\pi |e^{i\omega\zeta}| d\varphi = \mu_R \cdot R \int_0^\pi e^{-\omega R \sin \varphi} d\varphi. \quad (9.34)$$

Dar,

$$\int_0^\pi e^{-\omega R \sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega R \sin \varphi} d\varphi. \quad (9.35)$$

Folosind (9.33), obținem majorarea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega R \sin \varphi} d\varphi < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\omega R}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{\pi}{2\omega R} (1 - e^{-\omega R}). \quad (9.36)$$

Din (9.34) – (9.36) rezultă

$$\left| \int_{C'_R} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta \right| < \frac{\pi\mu_R}{\omega R} (1 - e^{-\omega R}). \quad (9.37)$$

Trecând la limită în (9.37) pentru  $R \rightarrow \infty$ , obținem (9.31) și lema este demonstrată. ■

Lema lui Jordan se folosește la calculul unor integrale improprii de al doilea tip.

**Teorema 9.4.2** *Dacă funcția  $f(x)$ , definită pe întreaga axă a numerelor reale, poate fi prelungită prin continuitate în semiplanul superior  $\operatorname{Im} z \geq 0$  și prelungirea sa  $f(z)$  este funcție analitică, satisface ipotezele lemei lui Jordan în semiplanul superior și nu are singularități pe axa reală, atunci integrala improprie de prima speță  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx$ ,  $\omega > 0$ , există și este egală cu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez}[e^{i\omega z} f(z), z_k], \quad (9.38)$$

unde  $z_k$  sunt singularitățile funcției  $f(z)$  situate în semiplanul superior.

**Demonstrație.** Punctele singulare  $z_k$ ,  $k \in \overline{1, N}$ , ale prelungirii analitice a funcției  $f$  fiind la distanță finită de origine rezultă că ele satisfac condiția  $|z_k| < R_0$ . Considerăm conturul din semiplanul superior  $\text{Im } z \geq 0$  compus din segmentul  $[-R, R]$  de pe axa reală  $Ox$  și semicercul  $C'_R$  de ecuație  $|z| = R$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ , unde raza acestuia este astfel încât  $R > R_0$ . După teorema reziduurilor,

$$\int_{-R}^R e^{i\omega x} f(x) dx + \int_{C'_R} e^{i\omega \zeta} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Rez}[e^{i\omega z} f(z), z_k]. \quad (9.39)$$

Folosind Lema lui Jordan, deducem că limita pentru  $R \rightarrow \infty$  al celui de al doilea termen din membrul întâi al relației (9.39) este zero, primul termen având limita egală cu integrala din (9.38). ■

**Observația 9.4.5** Dacă  $f(x)$  din (9.38) este funcție pară și satisface ipotezele Teoremei 9.4.2, atunci pentru  $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x dx &= \pi \text{Re} \left( i \sum_{k=1}^N \text{Rez}[e^{i\omega z} f(z), z_k] \right) = \\ &= -\pi \text{Im} \sum_{k=1}^N \text{Rez}[e^{i\omega z} f(z), z_k]. \end{aligned} \quad (9.40)$$

**Observația 9.4.6** Dacă  $f(x)$  este funcție impară și satisface ipotezele Teoremei 9.4.2, atunci pentru  $\omega > 0$

$$\int_0^\infty f(x) \sin \omega x dx = \pi \text{Re} \left( \sum_{k=0}^N \text{Rez}[e^{i\omega z} f(z), z_k] \right). \quad (9.41)$$

**Exercițiul 9.4.10** Să se arate că au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx &= \frac{\pi}{2bc(b^2 - c^2)} \cdot (be^{-ac} - ce^{-ab}); \\ \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx &= \frac{\pi}{2(b^2 - c^2)} \cdot (e^{-ac} - e^{-ab}). \end{aligned} \quad (9.42)$$

**Soluție.** Funcțiile  $f_1(z)$  și  $f_2(z)$  din Observația 9.4.5 și respectiv Observația 9.4.6 sunt:

$$f_1(z) = \frac{1}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)}; \quad f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)}.$$

Pentru ambele funcții,  $N = 2$ ,  $z_1 = ib$  și  $z_2 = ic$ . Reziduurile în  $z_1$  și  $z_2$  ale funcțiilor:

$$\frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)}, \quad \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)}$$

sunt

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez} \left[ \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)} \right] &= \left( \frac{e^{iaz}}{(z + ib)(z^2 + c^2)} \right) \Big|_{z=z_1} = \frac{e^{-ab}}{2ib(c^2 - b^2)}, \\ \operatorname{Rez} \left[ \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)} \right] &= \left( \frac{e^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z + ic)} \right) \Big|_{z=z_2} = \frac{e^{-ac}}{2ic(b^2 - c^2)} \\ \operatorname{Rez} \left[ \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)} \right] &= \left( \frac{ze^{iaz}}{(z + ib)(z^2 + c^2)} \right) \Big|_{z=z_1} = \frac{e^{-ab}}{2(c^2 - b^2)}, \\ \operatorname{Rez} \left[ \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z^2 + c^2)} \right] &= \left( \frac{ze^{iaz}}{(z^2 + b^2)(z + ic)} \right) \Big|_{z=z_2} = \frac{e^{-ac}}{2(b^2 - c^2)}. \end{aligned}$$

Dacă aplicăm formulele (9.40) și (9.41), se obține (9.42). ■

**Exercițiul 9.4.11** Să se calculeze integrala  $I = \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx$ ,  $\omega > 0$ .

**Soluție.** Scriem  $I = \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx$  și alegem funcția ajutătoare  $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z(z^2 + a^2)^2}$ . Conturul de integrare va fi format din două semicercuri concentrice cu centrul în origine, situate în semiplanul superior, primul de rază  $r$  notat cu  $\gamma$ , al doilea de rază  $R > r$ , notat cu  $\Gamma$ , la care se adaugă segmentele de dreaptă  $[-R, -r]$  și  $[r, R]$ . Sensul de parcurs al conturului este cel pozitiv. În interiorul conturului se află polul dublu  $z_1 = ia$  având reziduul

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez} [f(z), z_1 = ia] &= \frac{1}{1!} \left( (z - ia)f(z) \right)' \Big|_{z=ia} = \\ &= \left( \frac{e^{i\omega z}}{z(z + ia)^2} \right)' \Big|_{z=ia} = -\frac{2 + a\omega}{4a^4} \cdot e^{-a\omega}. \end{aligned}$$

Folosind teorema reziduurilor, scriem

$$\begin{aligned} \int_r^R \frac{e^{i\omega x} dx}{x(x^2 + a^2)^2} + \int_{\Gamma} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + a^2)^2} + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\omega x} dx}{x(x^2 + a^2)^2} + \int_{\gamma} \frac{e^{iaz} dz}{z(z^2 + a^2)^2} = \\ = 2\pi i \operatorname{Rez}[f(z), ia]. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Suma integralelor pe cele două segmente de pe axa reală este

$$\int_r^R \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{x(x^2 + a^2)^2} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Pe semicercul  $\Gamma$ , funcția  $g(z) = \frac{1}{z(z^2 + a^2)}$  satisface inegalitatea  $|g(z)| \leq \frac{1}{R(R^2 - b^2)^2}$  și tinde la zero, uniform în raport cu argumentul lui  $z$ , când  $R \rightarrow \infty$ . Întrucât  $\omega > 0$ , potrivit lemei lui Jordan,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\omega z} dz}{z(z^2 + a^2)^2} = 0.$$

În ultima integrală din (9.43) considerăm seria Laurent a funcției  $f(z)$  în jurul punctului  $z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{z} \cdot e^{i\omega z} \left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{-2} = \\ &= \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{z} \left(1 + \frac{i\omega z}{1!} + \frac{(i\omega z)^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - \frac{2}{1!} \frac{z^2}{a^2} + \frac{2 \cdot 3}{2!} \frac{z^4}{a^4} + \dots\right) \end{aligned}$$

pe care o scriem sub forma

$$f(z) = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{a^4} \cdot \varphi(z),$$

unde  $\varphi(z) = i\omega - \left(\frac{\omega^2}{2} + \frac{2}{a^2}\right)z + \dots$  este o funcție analitică într-o vecinătate a originii. Pe semicercul  $\gamma$  avem  $z = re^{i\theta}$ , cu  $\theta \in [\pi, 0]$ , și

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{a^4} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} + \frac{1}{a^4} \int_{\gamma} \varphi(z) dz = \frac{i}{a^4} \int_{\pi}^0 d\theta + \frac{ir}{a^4} \int_{\pi}^0 \varphi(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta,$$

de unde

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = -\frac{i\pi}{a^4}.$$

Trecând la limită în (9.43) pentru  $R \rightarrow \infty$  și  $r \rightarrow 0$ , obținem

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx - \frac{i\pi}{a^4} = 2\pi i \cdot \operatorname{Rez}[f(z), z_1 = ia] = -2\pi i \frac{2 + a\omega}{4a^4} \cdot e^{-a\omega},$$

de unde, după împărțirea cu  $2i$ , deducem

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx - \frac{\pi}{2a^4} = -\pi \frac{2 + a\omega}{4a^4} \cdot e^{-a\omega}.$$

Prin urmare, valoarea integralei date este

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{x(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^4} (2 - (2 + a\omega)e^{-a\omega}).$$

■

**Exercițiul 9.4.12** Folosind metoda de la exercițiul precedent, să se arate că au loc următoarele egalități:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{Integrala lui Dirichlet});$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin \omega x}{x} dx = \pi \left( e^{-a\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad \omega > 0, \quad a > 0;$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b - a), \quad a \geq 0, \quad b \geq 0.$$

**Exercițiul 9.4.13** Să se calculeze integrala  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 6x + 13} dx$ .

**Soluție.** Observăm că

$$I = \Re \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 6x + 13} dx \right)$$

și integrala din membrul drept se încadrează în tipul celor studiate de Teorema 9.4.2, unde  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 6z + 13}$  și  $\omega = 1$ . Singurul punct singular al funcției  $f(z)$  situat în semiplanul superior este polul simplu  $z_1 = 3 + 2i$ . Conform relației (9.41),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 6x + 13} dx = 2\pi i \operatorname{Rez}[e^{iz} f(z), z_1].$$



Calculăm

$$\begin{aligned}\operatorname{Rez}[e^{iz}f(z), z_1] &= \frac{ze^{iz}}{(z^2 - 6z + 13)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{ze^{iz}}{2z - 6} \Big|_{z=z_1} = \\ &= \frac{1}{i4e^2}(3 \cos 3 - 2 \sin 3 + i(2 \cos 3 + 3 \sin 3)).\end{aligned}$$

Rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{\pi}{2e^2}(3 \cos 3 - 2 \sin 3 + i(2 \cos 3 + 3 \sin 3)),$$

de unde

$$I = \frac{\pi}{2e^2}(3 \cos 3 - 2 \sin 3).$$

Odată cu valoarea lui  $I$  mai obținem

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 6x + 13} dx = \frac{\pi}{2e^2}(2 \cos 3 + 3 \sin 3).$$

■

#### 9.4.5 Integrale de forma $I = \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x) \ln x dx$ , cu $\alpha \in (-1, 1)$

În integrala  $I$ ,  $\mathcal{R}(x)$  este o funcție rațională al cărei numitor  $Q(x)$  nu se anulează pe intervalul real  $[0, \infty)$ . Pentru convergența integralei improprie  $I$ , presupunem

$$1 + \alpha + \operatorname{gr}(P) < \operatorname{gr}(Q),$$

unde  $P(x)$  este numărătorul funcției raționale  $\mathcal{R}(x)$ .

Integrala  $I$  se calculează folosind teorema reziduurilor pentru domeniul  $\Delta$  de la calculul integralelor de forma  $\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x) dx$  și funcția  $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ , definită prin

$$f(z) = \mathcal{R}(z)(\ln r + i\varphi)e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}, \quad z = re^{i\varphi}, \quad (9.44)$$

ramura principală pe domeniul  $D$  (determinarea fundamentală) a corespondenței  $z \mapsto \mathcal{R}(z)e^{\alpha \operatorname{Log} z} \operatorname{Log} z$ . Trecând la limită în (9.28), în care  $f(z)$  este funcția (9.44), se obține

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x) \ln x dx - e^{2\pi i \alpha} \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)(\ln x + 2\pi i) dx = \\ = 2\pi i \sum_{k=0}^N \operatorname{Rez}[f(z), z_k],\end{aligned} \quad (9.45)$$

unde  $z_k$  sunt toți polii funcției  $f(z)$ .

Din compararea părților reale și imaginare din cei doi membri ai ultimei egalități, se obține atât  $I$  cât și o integrală de tipul  $\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x) dx$ .

**Exercițiul 9.4.14** Să se calculeze integrala improprie  $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ln x}{x^2 + a^2} dx$ .

**Soluție.** Aplicăm formula (9.45) în care  $\alpha = \frac{1}{2}$  și  $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ , ceea ce înseamnă că funcția  $f(z)$  are expresia

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} e^{\left(\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi)\right)(\ln r + i\varphi)}, \quad z = r e^{i\varphi}.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x} \ln x}{x^2 + a^2} dx - e^{\pi i} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x + 2\pi i)}{x^2 + a^2} dx = \\ = 2\pi i \left( \operatorname{Re} z [f(z), ia] + \operatorname{Re} z [f(z), -ia] \right) \end{aligned} \quad (9.46)$$

Dacă se efectuează calculele în (9.46), se găsește

$$2I + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}} (\pi + 2 \ln a + 2\pi i),$$

din care va rezulta atât valoarea integralei  $I$  cât și a unei alte integrale

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2a}} \left( \frac{\pi}{2} + \ln a \right); \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

■

**Exercițiul 9.4.15** Să se calculeze integralele improprii:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4 + 1}; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx.$$

**Soluție.** Am putea să aplicăm formula (9.45) care presupune calculul reziduurilor funcției  $f(z)$  în cei patru poli simpli. Este însă mai simplu dacă reducem conturul la primul cadran, căci funcția

$$f(z) = \frac{\ln r + i\varphi}{z^4 + 1}, \quad z = r e^{i\varphi}$$

va avea doar un singur pol în domeniul  $\Delta_0$  limitat de contur, și anume  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ . Conturul domeniului  $\Delta_0$  este segmentul  $[\varepsilon, \rho]$  de pe axa  $Ox$ , reunit cu sfertul de cerc  $\Gamma$  de ecuație  $z = \rho e^{i\theta}$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ , cu segmentul de dreaptă  $[\rho, \varepsilon]$  de pe axa  $Oy$  și cu sfertul de cerc  $\gamma$  de ecuație  $z = \varepsilon e^{i\tau}$ , unde  $\tau \in [\pi/2, 0]$ .

Teorema reziduurilor pentru funcția  $f(z)$  și domeniul  $\Delta_0$ , conduce la

$$\int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{\ln x}{x^4 + 1} dx + \int_{\Gamma} f(z) dz + i \int_{\rho}^{\varepsilon} \frac{\ln y + i\frac{\pi}{2}}{y^4 + 1} dx + \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rez}[f(z), z_1]. \quad (9.47)$$

Deoarece  $\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = 0$  și  $\lim_{z \rightarrow \infty} (zf(z)) = 0$ , afirmații ușor de demonstrat în baza Lemelor 9.4.2 și 9.4.3, rezultă:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = 0; \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (9.48)$$

Dacă trecem la limită în (9.47) pentru  $\varepsilon \rightarrow 0$  și  $\rho \rightarrow \infty$  și ținem cont de (9.48), obținem

$$(1-i)I_2 + \frac{\pi}{2} I_1 = 2\pi i \operatorname{Rez}[f(z), z_1].$$

Dar reziduul funcției  $f(z)$  în polul simplu  $z_1$  este

$$\operatorname{Rez}[f(z), z_1] = \left( \frac{\ln r + i\varphi}{4z^3} \right) \Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{16} e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32} i(1+i)$$

și egalitatea (9.47) devine  $I_2 + \frac{\pi}{2} I_1 - i I_2 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} (1+i)$ . de unde găsim

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}; \quad I_2 = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}. \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 9.4.16** Folosind (9.45), să se determine valoarea integralei

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(1+x)^2} dx.$$

**Indicație.** Se consideră funcția complexă multiformă  $f(z) = \frac{\sqrt{z} \operatorname{Log} z}{(1+z)^2}$  în care pentru radical și logaritm se iau determinările principale. Se efectuează integrarea pe frontiera coroanei circulare cu centrul în origine având razele  $\varepsilon$  și  $\rho$  din care se scoate segmentul de dreaptă  $[\varepsilon, \rho]$  de pe axa  $Ox$ . Rezultă  $I = \pi$ . ■

## Capitolul 10

# Serii trigonometrice și serii Fourier

### 10.1 Serii trigonometrice

**Definiția 10.1.1** *Se numește serie trigonometrică, seria de funcții reale*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad (10.1)$$

unde  $\omega$ ,  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$  sunt constante reale, iar  $t$  este o variabilă reală.

Deoarece funcțiile  $\cos x$  și  $\sin x$  sunt periodice de perioadă  $2\pi$ , funcțiile  $\cos \omega t$  și  $\sin \omega t$  au perioada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Verificarea este imediată

$$\cos \omega t = \cos (\omega t + 2\pi) = \cos \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right);$$

$$\sin \omega t = \sin (\omega t + 2\pi) = \sin \omega \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

La fel se arată că funcțiile  $\cos k\omega t$  și  $\sin k\omega t$ ,  $k$  număr natural, au o aceeași perioadă  $T_k = \frac{T}{k} = \frac{1}{k} \frac{2\pi}{\omega}$ .

**Observația 10.1.1** *Cea mai mare dintre perioadele funcțiilor*

$$\cos k\omega t, \quad \sin k\omega t, \quad k \in \mathbb{N},$$

notată cu  $T$ , este perioada seriei trigonometrice. Prin urmare,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Ținând seama de această observație, putem afirma că dacă seria trigonometrică este convergentă într-un punct  $t_0$ , iar suma sa este  $S(t_0)$ , seria va fi convergentă și în punctele  $t_0 + nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , și avem

$$S(t_0 + nT) = S(t_0).$$

De aici rezultă că este suficient să cunoaștem natura seriei într-un interval  $[\alpha, \alpha + T]$  pentru a putea spune care este natura seriei pentru orice  $t$  real.

În ipoteza că  $a_1$  și  $b_1$  nu sunt simultan nuli, suma seriei

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

este o funcție periodică de perioadă  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , definită pe toată axa reală.

Constanta  $\omega$  se numește pulsație.

## 10.2 Seria Fourier a unei funcții periodice

Seriile trigonometrice se întâlnesc în studiul fenomenelor periodice din acustică, electrotehnică, vibrația sistemelor mecanice etc., unde se pune deseori problema reprezentării unei funcții periodice  $f(t)$  printr-o serie trigonometrică

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \quad (10.2)$$

Dacă perioada funcției  $f(t)$  este  $T$ , atunci pulsația este  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Se ridică două probleme:

1. În ipoteza că  $f(t)$  este egală cu suma unei serii trigonometrice, să se determine coeficienții  $a_0$ ,  $a_k$ ,  $b_k$ .
2. Precizarea unor condiții în care  $f(t)$  poate fi dezvoltată în serie trigonometrică de forma (10.2).

Ne vom ocupa întâi de prima problemă. În acest sens presupunem că funcția  $f(t)$  este integrabilă Riemann pe intervalul  $[\alpha, \alpha + T]$  și că seria (10.2) poate fi integrată termen cu termen. Avem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = a_0 \int_{\alpha}^{\alpha+T} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt + b_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t dt \right).$$

Însă,  $\int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt = 0$ ,  $\int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t dt = 0$ ;  $k \in \mathbb{N}^*$ , astfel că dacă folosim aceste rezultate în egalitatea de integrale de mai sus, obținem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = a_0 T. \quad (10.3)$$

Înmulțind ambii membri ai egalității (10.2) cu  $\cos p\omega t$ , unde  $p$  este un număr natural oarecare, și integrând pe intervalul  $[\alpha, \alpha + T]$ , obținem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos p\omega t dt = \frac{T}{2} a_p. \quad (10.4)$$

Pentru determinarea coeficienților  $b_k$  se înmulțește egalitatea (10.2) cu  $\sin p\omega t$ , unde  $p$  este un număr natural oarecare și se integrează apoi termen cu termen pe intervalul  $[\alpha, \alpha + T]$ . Se găsește

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin p\omega t dt = \frac{T}{2} b_p. \quad (10.5)$$

Din (10.3) – (10.5), cu o schimbare de notație, avem

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t dt, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (10.6)$$

Aceste egalități se numesc *formulele lui Euler și Fourier*.

Fie  $f(t)$  o funcție periodică de perioadă  $T$ , integrabilă Riemann pe intervalul  $[\alpha, \alpha + T]$ .

**Definiția 10.2.1** Constantele  $a_0, a_k, b_k$ , determinate de integralele definite (10.6), se numesc **coeficienții Fourier ai funcției  $f(t)$** , iar seria trigonometrică (10.1), cu acești coeficienți, se numește **seria Fourier atașată funcției  $f(t)$**  chiar dacă seria (10.1) nu este convergentă în nici un punct sau, convergentă fiind, suma sa nu este egală cu  $f(t)$  pentru nici o valoare a lui  $t$ .

În formulele (10.6), integralele nu depind de  $\alpha$ , fapt care rezultă din teorema următoare.

**Teorema 10.2.1** Dacă  $F(t)$  este o funcție periodică de perioadă  $T$ , integrabilă pe orice interval mărginit, integrala acestei funcții pe orice interval de lungime egală cu perioada este aceeași,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} F(t) dt = \int_{\beta}^{\beta+T} F(t) dt. \quad (10.7)$$

**Demonstrație.** În egalitatea evidentă

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} F(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt + \int_{\beta}^{\beta+T} F(t) dt + \int_{\beta+T}^{\alpha+T} F(t) dt, \quad (10.8)$$

ultima integrală se mai poate scrie

$$\int_{\beta+T}^{\alpha+T} F(t) dt = \int_{\beta}^{\alpha} F(\theta + T) d\theta = \int_{\beta}^{\alpha} F(\theta) d\theta = \int_{\beta}^{\alpha} F(t) dt, \quad (10.9)$$

ca urmare a faptului că s-a făcut schimbarea de variabilă  $t = \theta + T$  și s-a ținut cont de periodicitatea funcției  $F(t)$ .

Având în vedere (10.9), prima și ultima integrală din membrul al doilea a egalității (10.8), se reduc și obținem (10.7). ■

Fie  $f(t)$  o funcție definită pe un interval  $[a, b]$ , exceptând eventual un număr finit de puncte din acest interval, cu mențiunea că funcția poate fi prelungită dându-i valori arbitrare. În urma acestei operații de prelungire coeficienții Fourier ai funcției rămân neschimbați.

**Definiția 10.2.2** Se spune că  $f(t)$  satisface **condițiile lui Dirichlet** pe intervalul  $[a, b]$  dacă :

1.  $f(t)$  este mărginită și are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate în  $[a, b]$ ;
2. intervalul  $[a, b]$  poate fi împărțit într-un număr finit de subintervale astfel încât, pe fiecare subinterval,  $f(t)$  să fie monotonă.

**Observația 10.2.1** Discontinuitățile funcției  $f(t)$  în intervalul  $[a, b]$  nu pot fi decât de prima speță.

Referitor la cazul în care seria Fourier a unei funcții  $f(t)$  este convergentă și are suma  $f(t)$ , vom da (fără demonstrație) o teoremă în care se prezintă condiții suficiente ce trebuie să le satisfacă funcția.

**Teorema 10.2.2 (Dirichlet)** *Dacă funcția  $f(t)$ , periodică de perioadă  $T$ , satisface condițiile lui Dirichlet pe un interval de lungime perioadă  $[\alpha, \alpha+T]$ , seria sa Fourier este convergentă pentru orice  $t$ .*

*Suma  $S(t)$  a seriei Fourier este egală cu  $f(t)$  în toate punctele în care  $f(t)$  este continuă. Într-un punct de discontinuitate,  $c \in [a, b]$ ,  $S(c)$  este egală cu media aritmetică a celor două limite laterale ale funcției  $f(t)$  în punctul  $c$ ,*

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Determinarea seriei Fourier a unei funcții  $f(t)$  se reduce la calculul coeficienților dați de formulele (10.6). Teorema 10.2.2 constituie un criteriu după care se poate reprezenta o funcție prin seria sa Fourier sau, altfel spus, de a dezvolta o funcție în serie Fourier.

În unele aplicații este necesar să derivăm sau să integrăm funcția  $f(t)$  și seria sa Fourier. Teorema următoare, pe care o dăm tot fără demonstrație, este utilă în acest sens.

**Teorema 10.2.3** *Seria Fourier a unei funcții  $f(t)$  converge uniform către  $f(t)$  pe orice interval închis pe care  $f(t)$  este continuă.*

**Observația 10.2.2** *În condițiile Teoremei 10.2.3, seria Fourier poate fi integrată termen cu termen.*

**Exemplul 10.2.1** *Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică  $f(t)$ , de perioadă  $\pi$ , definită pe intervalul  $(0, \pi)$  prin  $f(t) = e^{-at}$ .*

**Soluție.** Mai întâi prelungim funcția prin periodicitate, noua funcție fiind notată cu același simbol. Dacă presupunem  $a > 0$ , atunci funcția  $f(t)$  este strict descrescătoare pe orice interval  $(k\pi, (k+1)\pi)$ . Există puncte din  $\mathbb{R}$  în care  $f(t)$  nu este definită; acestea sunt de forma  $k\pi$ , unde  $k \in \mathbb{Z}$ . În aceste puncte atribuim funcției  $f(t)$  valoarea

$$f(k\pi) = \frac{1 + e^{-a\pi}}{2}$$

care coincide cu media aritmetică a limitelor laterale în punctul  $k\pi$  a funcției  $f(t)$ . Se vede că funcția  $f(t)$  astfel construită satisface condițiile lui Dirichlet, deci seria sa Fourier este convergentă pentru orice  $t \in \mathbb{R}$  și are suma egală cu  $f(t)$  pentru toate valorile lui  $t$ .



Deoarece  $T = \pi$ ,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ , avem

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2kt + b_k \sin 2kt),$$

coeficienții  $a_0, a_k, b_k$  fiind dați de formulele (10.6). Mai întâi

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-at} dt = \frac{1}{a\pi} (1 - e^{-a\pi}).$$

Apoi, integralele care dau coeficienții  $a_k$  și  $b_k$ ,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-at} \cos 2kt dt, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-at} \sin 2kt dt,$$

pot fi calculate împreună

$$\begin{aligned} a_k - ib_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-(a+2ki)t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{a+2ki} (1 - e^{-(a+2ki)\pi}) = \frac{2}{\pi} \frac{a-2ki}{a^2+4k^2} (1 - e^{-a\pi}), \end{aligned}$$

de unde

$$a_k = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1 - e^{-a\pi}}{a^2 + 4k^2}, \quad b_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(1 - e^{-a\pi})k}{a^2 + 4k^2}.$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcției date este

$$f(t) = \frac{1 - e^{-a\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos 2kt + 2k \sin 2kt}{a^2 + 4k^2} \right).$$

Această serie Fourier este convergentă pe  $\mathbb{R}$  și suma sa este  $f(t)$ . ■

**Exemplul 10.2.2** Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția  $f(t)$ , periodică de perioadă  $2\pi$ , definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

**Soluție.** Pulsația este  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ . Seria Fourier a funcției  $f(t)$  este de forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Coefficienții  $a_0, a_k$  și  $c_k$  se calculează cu formulele (10.6)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi dt + \int_\pi^{2\pi} (-1) dt \right) = \pi - \pi = 0, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ktdt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi \cos ktdt + \int_\pi^{2\pi} (-1) \cos ktdt \right) = 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ktdt = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^\pi \sin ktdt + \int_\pi^{2\pi} (-1) \sin ktdt \right) = \\ &= \left( \frac{1}{k} (1 - \cos k\pi) + \frac{1}{k} (\cos 2k\pi - \cos k\pi) \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1 - (-1)^k}{k}. \end{aligned}$$

Expresia lui  $b_k$  se mai poate scrie în forma

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{pentru } k = 2n \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{2n-1}, & \text{pentru } k = 2n-1. \end{cases}$$

Atunci, seria Fourier a funcției  $f(t)$  este

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \dots \right).$$

Conform Teoremei 10.2.2, această serie este convergentă pentru toate valorile lui  $t$  și suma este egală cu  $f(t)$  pentru orice  $t \neq k\pi$ , unde  $k$  este orice număr întreg.

În punctele  $t = k\pi$  funcția  $f(t)$  nu a fost definită. Dacă luăm  $f(0) = f(\pi) = 0$ , datorită periodicității,  $f(k\pi) = 0$  pentru orice  $k$  întreg, iar suma seriei va fi egală cu  $f(t)$  și în punctele de discontinuitate. Deci, oricare ar fi  $t \in \mathbb{R}$ , avem

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \dots \right).$$

Seria Fourier a funcției  $f(t)$  este o serie trigonometrică numai de sinusuri. ■

**Exemplul 10.2.3** Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică  $F(t)$ , de perioadă  $2\pi$ , definită pe intervalul  $[0, 2\pi)$  prin

$$F(t) = \begin{cases} t, & \text{pentru } t \in [0, \pi] \\ 2\pi - t, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

**Soluție.** Observăm că pentru  $t \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $F'(t) = f(t)$ , unde  $f(t)$  este funcția din exemplul precedent. Integrând seria corespunzătoare lui  $f(t)$  termen cu termen, fie în intervalul  $(0, \pi)$ , fie în intervalul  $(\pi, 2\pi)$ , obținem

$$F(t) = C - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

Deoarece  $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$  și  $\cos(2n-1)t = 0$ , rezultă  $C = \frac{\pi}{2}$ . Deci,

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

Seria Fourier obținută este o serie trigonometrică numai de cosinusuri. ■

**Observația 10.2.3** În cele de mai sus, funcția  $f(t)$  poate fi și una cu valori complexe, deci de forma  $f(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ .

**Teorema 10.2.4** Pentru funcția  $f(t)$  cu pătrat integrabil pe  $[\alpha, \alpha + T]$  are loc egalitatea

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x) dx = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2), \quad (10.10)$$

unde  $a_0, a_n, b_n$  sunt coeficienții Fourier ai funcției  $f(t)$ .

Relația (10.10) se numește *formula lui Parseval*.

**Exercițiul 10.2.1** Să se găsească seria Fourier a funcției periodice  $f(x) = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} e^t$  definită pe intervalul  $(-\pi, \pi]$  de perioadă  $T = 2\pi$ . Ținând seama de seria obținută și folosind formula lui Parseval să se determine sumele seriilor numerice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

**Soluție.** Se constată că

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}.$$

Seria Fourier este

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{1+n^2} \sin nt. \quad (10.11)$$

Pentru a afla suma primei serii numerice luăm în (10.11)  $t = 0$  și obținem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

Suma celei de a doua serii numerice rezultă din formula lui Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 \pi} e^{2t} dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(1+n^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \right],$$

de unde 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$
 ■

### 10.3 Seriile Fourier ale funcțiilor pare și impare

Funcțiile pare și funcțiile impare au proprietatea că seriile lor Fourier iau forme particulare.

**Definiția 10.3.1** O funcție  $F(t)$ , definită pe un interval cu centrul în origine, se numește **funcție pară** dacă  $F(-t) = F(t)$ .

În cazul când  $F(-t) = -F(t)$ , funcția  $F(t)$  se numește **impară**.

**Observația 10.3.1** Graficul unei funcții pare este simetric în raport cu axa ordonatelor, iar graficul unei funcții impare este simetric față de originea reperului.

**Teorema 10.3.1** Dacă  $F(t)$  este o funcție pară și integrabilă pe intervalul  $[-\ell, \ell]$ , atunci

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t) dt = 2 \int_0^{\ell} F(t) dt. \quad (10.12)$$

Dacă  $F(t)$  este impară pe  $[-\ell, \ell]$  și integrabilă pe acest interval,

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t) dt = 0. \quad (10.13)$$

**Demonstrație.** Avem

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t) dt = \int_{-\ell}^0 F(t) dt + \int_0^{\ell} F(t) dt. \quad (10.14)$$

Cu schimbarea de variabilă  $t = -\theta$ , prima din integralele membrului drept a egalității (10.14) devine

$$\int_{-\ell}^0 F(t) dt = - \int_{\ell}^0 F(-\theta) d\theta = \int_0^{\ell} F(-\theta) d\theta = \int_0^{\ell} F(-t) dt.$$

De aici rezultă următoarele: dacă  $F(t)$  este o funcție pară,

$$\int_{-\ell}^0 F(t) dt = \int_0^{\ell} F(t) dt, \quad (10.15)$$

iar dacă  $F(t)$  este impară, atunci

$$\int_{-\ell}^0 F(t) dt = - \int_0^{\ell} F(t) dt. \quad (10.16)$$

Din (10.15) și (10.14) rezultă (10.12) iar (10.13) se obține dacă înlocuim (10.16) în (10.14). ■

În cele ce urmează vom considera că intervalul pe care sunt definite funcțiile pare sau funcțiile impare este de forma  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

**Teorema 10.3.2** Dacă  $f(t)$  este o funcție pară, seria sa Fourier este

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t,$$

unde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Seria Fourier a unei funcții impare  $f(t)$  este

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t,$$

unde

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt.$$

**Demonstrație.** Mai întâi, în formulele (10.6) de calcul a coeficienților, vom lua drept interval de integrare pe  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

Cu această alegere, avem

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt.$$

Dacă  $f(t)$  este o funcție pară,  $f(t) \cos k\omega t$  este pară, iar  $f(t) \sin k\omega t$  este funcție impară.

În baza Teoremei 10.3.1, rezultă

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt, \quad b_k = 0.$$

Dacă  $f(t)$  este funcție impară, atunci funcția  $f(t) \cos k\omega t$  este impară, iar  $f(t) \sin k\omega t$  este funcție pară.

În baza aceleiași teoreme, avem

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt$$

și teorema este complet demonstrată. ■

**Exemplul 10.3.1** Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția  $f(t) = |\sin t|$ .

**Soluție.** Funcția dată este pară, are perioada  $T = \pi$ , este continuă și condițiile lui Dirichlet sunt satisfăcute. Prin urmare seria Fourier a funcției  $f(t)$  este convergentă, este o serie numai de cosinusuri și are suma egală cu  $f(t)$  pentru orice  $t$  real. Avem

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{2}{\pi}, \quad b_k = 0,$$

$$a_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos 2kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(1+2k)t + \sin(1-2k)t) dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos(1+2k)t}{1+2k} + \frac{\cos(1-2k)t}{1-2k} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Deci seria Fourier a funcției  $f(t) = |\sin t|$  este

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} - \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} - \cdots - \frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)} - \cdots \right)$$

sau

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)} \right).$$

Cum era de așteptat, seria Fourier a funcției  $f(t) = |\sin t|$  este o serie trigonometrică numai de cosinusuri. ■

**Exemplul 10.3.2** *Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică de perioadă  $T = 2a$ , unde  $a > 0$ , definită prin*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{dacă } t \in (-a, a) \\ 0, & \text{dacă } t = a. \end{cases}$$

**Soluție.** Funcția dată satisface condițiile lui Dirichlet. În punctele de discontinuitate, funcția ia valoarea dată de media aritmetică a limitelor sale laterale. Pentru toate valorile lui  $t$ , seria Fourier a funcției  $f(t)$  este convergentă și are suma egală cu  $f(t)$ .

Deoarece funcția este impară și  $\omega = \frac{\pi}{a}$  avem dezvoltarea

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \frac{\pi}{a} t,$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{a} \int_0^a t \sin k \frac{\pi}{a} t dt = \frac{2}{a} \left( -\frac{a}{k\pi} t \cos k \frac{\pi}{a} t \right) \Big|_0^a + \\ &+ \frac{2}{a} \frac{a}{k\pi} \int_0^a \cos k \frac{\pi}{a} t dt = \frac{2a}{k\pi} (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Seria Fourier a funcției date este

$$f(t) = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin n \frac{\pi}{a} t.$$

Am obținut o serie trigonometrică numai în sinusuri și aceasta pentru că funcția dată este impară. ■

## 10.4 Forma complexă a seriei Fourier

Fie  $f(t)$  o funcție reală sau complexă, periodică de perioadă  $T$ , integrabilă pe intervalul  $[\alpha, \alpha + T]$ . Seria sa Fourier,

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (10.17)$$

este determinată, coeficienții  $a_0, a_k, b_k$  fiind dați de formulele (10.6).

Folosind formulele lui Euler

$$\cos k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2}, \quad \sin k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i},$$

seria Fourier (10.17) devine

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right). \quad (10.18)$$

Cu notațiile

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k^* = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad (10.19)$$

seria (10.18) se poate scrie

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ik\omega t} + c_k^* e^{-ik\omega t}). \quad (10.20)$$

Folosind (10.19) și (10.6) constatăm că obținem

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt,$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) (\cos k\omega t - i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-ik\omega t} dt,$$

$$c_k^* = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) (\cos k\omega t + i \sin k\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{ik\omega t} dt.$$

Observăm că toți acești coeficienți se pot obține din

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$



pentru  $n = 0$ ,  $n = k$  și  $n = -k$ . Deci seria Fourier (10.20) a funcției  $f(t)$  se mai scrie

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t})$$

sau încă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau) e^{-in\omega\tau} d\tau.$$

Aceasta este *forma complexă a seriei Fourier*.

Dacă  $f(t)$  satisface condițiile lui Dirichlet și dacă în fiecare punct de discontinuitate valoarea funcției este egală cu media aritmetică a limitelor sale laterale în acel punct, atunci

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau) e^{in\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (10.21)$$

**Exercițiul 10.4.1** Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică  $f(t)$ , de perioadă  $2\pi$ , definită pe intervalul  $[-\pi, \pi)$  prin

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi) \\ t + \frac{\pi}{2}, & t \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \\ -t + \frac{\pi}{2}, & (0, \frac{\pi}{2}). \end{cases}$$

**Indicație.** Funcția este pară și se obține:  $a_0 = \frac{\pi}{8}$ ,  $a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos n\frac{\pi}{2}}{n^2}$ .  
Deci

$$f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos t}{1^2} + \frac{2 \cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{2 \cos 6t}{6^2} + \dots \right).$$

Seria obținută conține numai cosinusi deoarece  $f(t)$  este funcție pară. ■

**Exercițiul 10.4.2** Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(\theta) = \frac{\sin \theta}{13 - 12 \cos \theta}.$$

**Indicație.** Se va calcula  $a_k + ib_k$  folosind teorema reziduurilor. Se va obține

$$f(\theta) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \sin k\theta,$$

deci o serie numai de sinusuri, lucru previzibil deoarece funcția  $f(\theta)$  este impară. ■

## Capitolul 11

# Integrala Fourier și transformate Fourier

### 11.1 Forma complexă a integralei Fourier

Să considerăm o funcție neperiodică  $f(t)$ , reală sau complexă, definită pe toată axa reală. Evident, funcția  $f(t)$  nu mai poate fi dezvoltată în serie Fourier. În schimb, în anumite condiții, care vor fi prezentate în teorema următoare,  $f(t)$  poate fi reprezentată printr-o integrală dublă improprie care este oarecum analogă cu seria Fourier.

**Definiția 11.1.1** *Se numește integrala Fourier a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , integrala dublă improprie pe întreg planul  $\mathbb{R}^2$  depinzând de parametrul  $t$*

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(\tau) e^{iu(t-\tau)} du d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{iu(t-\tau)} d\tau. \quad (11.1)$$

**Teorema 11.1.1** *Dacă funcția reală sau complexă  $f(t)$  are proprietățile:*

1. *satisface condițiile lui Dirichlet în orice interval de lungime finită;*
2. *în fiecare punct  $c$  de discontinuitate, valoarea funcției este egală cu media aritmetică a limitelor laterale (finite) în acel punct,*

$$f(c) = \frac{1}{2}[f(c-0) + f(c+0)];$$

3. este **absolut integrabilă** pe intervalul  $(-\infty, \infty)$ , adică integrala improprie de speța întâi  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$  este convergentă,

atunci are loc identitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{iu(t-\tau)} d\tau. \quad (11.2)$$

**Demonstrație.** Vom schița calea pe care, plecând de la forma complexă a seriei Fourier (10.21), se poate ajunge la egalitatea (11.2).

Fie  $F(t)$  o funcție periodică, de perioadă  $2\ell$ , definită prin

$$F(t) = f(t), \quad t \in [-\ell, \ell]. \quad (11.3)$$

Această funcție îndeplinește condițiile lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier.

Vom folosi dezvoltarea sub forma (10.21),

$$F(t) = \frac{1}{2\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\ell}^{\ell} F(\tau) e^{in\omega(t-\tau)} d\tau, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}.$$

sau, ținând seama de (11.3), în forma

$$F(t) = \frac{1}{2\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(\tau) e^{in\omega(t-\tau)} d\tau. \quad (11.4)$$

Egalitatea (11.3) are loc pe un interval oricât de mare se dorește deoarece valoarea pozitivă a lui  $\ell$  poate fi aleasă oricât de mare. Este de așteptat ca din (11.4) să obținem o reprezentare a funcției  $f(t)$  trecând la limită pentru  $\ell \rightarrow \infty$ .

Cu notația  $n\omega = u_n$ , pentru un  $\ell$  dat, integrala definită din (11.4) este o funcție de două variabile

$$\phi(u_n, t) = \int_{-\ell}^{\ell} f(\tau) e^{iu_n(t-\tau)} d\tau.$$

Apoi, ținând seama că  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\ell}$ , avem

$$\frac{1}{2\ell} = \frac{1}{2\pi} \omega, \quad \omega = n\omega - (n-1)\omega = u_n - u_{n-1}$$

și (11.4) devine

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(u_n, t) \cdot (u_n - u_{n-1}).$$

Această serie este asemănătoare cu sumele folosite în definirea integralei Riemann ale funcției  $\phi(u, t)$  pe compactul  $[-\ell, \ell]$ , în care  $t$  se consideră ca parametru. Când  $\ell \rightarrow \infty$ ,  $u_n - u_{n-1} = \omega \rightarrow 0$ . Este plauzibil să considerăm că , trecând la limită pentru  $\ell \rightarrow \infty$ , ultima egalitate devine

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u, t) du,$$

unde

$$\phi(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{iu(t-\tau)} d\tau,$$

deci tocmai formula (11.2) și teorema demonstrată ■

**Definiția 11.1.2** *Egalitatea (11.2) se numește formula lui Fourier.*

**Exemplul 11.1.1** *Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |t| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t = \pm a, \\ 0, & \text{pentru } |t| > a, \end{cases}$$

unde  $a$  este un număr pozitiv. Această funcție se numește **factorul discontinuu al lui Dirichlet**.

**Soluție.** Se observă că toate condițiile din Teorema 11.1.1 sunt satisfăcute, deci se poate aplica formula lui Fourier. Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{iu(t-\tau)} d\tau = \int_{-a}^a e^{iu(t-\tau)} d\tau = -\frac{1}{iu} e^{iu(t-\tau)} \Big|_{\tau=-a}^{\tau=a} = \frac{2}{u} e^{iut} \sin au.$$

Introducând în (11.2), obținem

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au}{u} e^{iut} du.$$

Dacă se înlocuiește  $e^{iut} = \cos ut + i \sin ut$ ,  $f(t)$  se poate scrie ca o sumă de două integrale

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au \cos ut}{u} du + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au \sin ut}{u} du.$$

Cum integrantul primei integrale este funcție pară în  $u$ , iar al doilea este funcție impară în raport cu aceeași variabilă, rezultă

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin au \cos ut}{u} du.$$

■

## 11.2 Forma reală a integralei Fourier

Deoarece

$$e^{iu(t-\tau)} = \cos u(t-\tau) + i \sin u(t-\tau),$$

formula lui Fourier se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u(t-\tau) d\tau + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin u(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Observăm că funcțiile

$$g(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u(t-\tau) d\tau; \quad h(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin u(t-\tau) d\tau$$

au proprietățile

$$g(-u, t) = g(u, t), \quad h(-u, t) = -h(u, t),$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u, t) du = 2 \int_0^{+\infty} g(u, t) du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, t) du = 0$$

și (11.5) se reduce la

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u(t-\tau) d\tau. \quad (11.6)$$

**Definiția 11.2.1** *Relația (11.6) se numește forma reală a formulei lui Fourier.*

**Definiția 11.2.2** *Integrala dublă improprie din membrul drept al formei reale a formulei lui Fourier se numește forma reală a integralei Fourier.*

Denumirile: *forma reală*, respectiv *forma complexă a integralei Fourier*, sunt justificate numai în cazul când  $f(t)$  este o funcție reală; totuși acestea se folosesc și în cazul când  $f(t)$  este o funcție complexă. Această observație este valabilă și pentru seriile Fourier.

**Observația 11.2.1** *Deoarece ultima integrală din (11.5) este egală cu zero, egalitatea (11.2) se poate înlocui prin*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-iu(t-\tau)} d\tau. \quad (11.7)$$

Deoarece  $\cos u(t-\tau) = \cos ut \cos u\tau + \sin ut \sin u\tau$ , egalitatea (11.6) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ut \, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ut \, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Dacă notăm

$$A(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau, \quad B(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau,$$

avem

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (A(u) \cos ut + B(u) \sin ut) \, du.$$

Analogia cu seria Fourier este evidentă.

### 11.3 Integralele Fourier ale funcției pare respectiv impare

Să vedem ce devine integrala Fourier în cazul când  $f(t)$  este o funcție pară, respectiv impară.

**Teorema 11.3.1** Dacă  $f(t)$  este o funcție pară, formula lui Fourier se reduce la

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ut \, du \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau. \quad (11.9)$$

Dacă  $f(t)$  este impară, atunci

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin ut \, du \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau. \quad (11.10)$$

**Demonstrație.** Într-adevăr, dacă  $f(t)$  este o funcție pară, atunci funcția  $f(\tau) \cos u\tau$  este pară în raport cu  $\tau$ , iar  $f(\tau) \sin u\tau$  este impară și avem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau &= 2 \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau &= 0. \end{aligned}$$

Cu aceste relații, egalitatea (11.8) se reduce la (11.9).

Analog se arată că pentru  $f(t)$  funcție impară avem egalitatea (11.10). ■

Pentru a vedea utilitatea formulelor (11.9) și (11.10) în simplificarea calculului, este suficient să se reia Exemplul 11.1.1. Funcția pe care am numit-o factorul discontinuu al lui Dirichlet este o funcție pară.

În exemplul următor vom considera o funcție impară.

**Exemplul 11.3.1** Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

$n$  fiind un număr natural.

**Soluție.** Funcția  $f(t)$  satisface condițiile Teoremei 11.1.1, deci poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier.

Vom folosi formula (11.10). Avem

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau = \int_0^{n\pi} \sin \tau \sin u\tau \, d\tau.$$

Pentru calculul integralei din membrul drept, transformăm produsul de sinusuri în diferență de cosinusuri, integralele astfel apărute fiind imediate. Găsim

$$\int_0^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau = \frac{(-1)^n \sin nu\pi}{u^2 - 1}.$$

Cu aceasta, egalitatea (11.10) dă

$$f(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin n u \pi \sin ut}{u^2 - 1} du.$$

■

## 11.4 Transformata Fourier

Integrala Fourier are aplicații variate. Unele din acestea sunt legate de noțiunea de transformată Fourier.

Fie  $f(t)$  o funcție care poate fi reprezentată prin integrala Fourier (11.2). Pentru aceasta, funcția  $f(t)$  trebuie să satisfacă ipotezele Teoremei 11.1.1. Egalitatea (11.2) se mai scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\tau u} d\tau. \quad (11.11)$$

Dacă notăm

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\tau u} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt,$$

atunci (11.11) se scrie în forma

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iut} du.$$

**Definiția 11.4.1** *Funcțiile*

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{itu} du \quad (11.12)$$

se numesc **una, transformata Fourier a celeilalte**.

Am văzut că integrala Fourier mai poate fi scrisă și sub forma (11.7). Pornind de la aceasta, se obțin funcțiile

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iut} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-iut} du$$

ca transformate Fourier una a celeilalte. Prin urmare cele două funcții au roluri simetrice.



Analog, dacă în egalitatea (11.9) se notează

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos u\tau \, d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt,$$

această egalitate devine

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \cos tu \, du,$$

iar dacă în (11.10) se notează

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin u\tau \, d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt,$$

egalitatea (11.10) se scrie

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \sin tu \, du.$$

**Definiția 11.4.2** *Funcțiile*

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \cos tu \, du \end{aligned} \tag{11.13}$$

se numesc **una, transformata Fourier prin cosinus a celeilalte.**

**Definiția 11.4.3** *Funcțiile*

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin ut \, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \sin tu \, du \end{aligned} \tag{11.14}$$

se numesc **una, transformata Fourier prin sinus a celeilalte.**

Să considerăm, de exemplu, a doua egalitate din (11.12)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{iut} \, du = f(t), \tag{11.15}$$

unde  $f(t)$  este o funcție dată care satisface condițiile Teoremei 11.1.1. Această egalitate este o ecuație în care funcția necunoscută figurează sub semnul de integrare. Soluția ei este dată de prima din egalitățile (11.12).

**Definiția 11.4.4** În general, dacă într-o ecuație funcția necunoscută figurează sub semnul de integrare, se spune că acea egalitate este o **ecuație integrală**.

**Definiția 11.4.5** Ecuația integrală (11.15) se numește **ecuație integrală de tip Fourier**.

Tot ecuații integrale de tip Fourier sunt și ecuațiile:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \cos tu \, du = f(t); \quad (11.16)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \sin tu \, du = f(t), \quad (11.17)$$

cu  $f(t)$  definită pentru  $t > 0$  și îndeplinind condițiile cerute de prima teoremă referitoare la integrala Fourier. Soluțiile acestor ecuații integrale sunt funcțiile  $g(u)$  din (11.13)<sub>1</sub>, respectiv (11.14)<sub>1</sub>.

**Observația 11.4.1** Dacă funcțiile  $g(u)$  și  $f(t)$  sunt definite pe axa reală, relațiile (11.13) cer ca  $g(u)$  și  $f(t)$  să fie funcții pare. De asemenea, relațiile (11.14), cu  $f(t)$  și  $g(u)$  definite pe toată axa reală, nu pot fi satisfăcute decât pentru  $f(t)$  și  $g(u)$  funcții impare. Spre exemplu, dacă funcția  $f(t)$  este definită numai pentru  $t > 0$ , aceasta nu poate fi prelungită pentru  $t \leq 0$  decât într-un singur fel dacă vrem ca (11.13) sau (11.14) să existe. În primul caz se prelungește prin relația  $f(-t) = f(t)$  (deci prin paritate), în al doilea caz prelungirea se face prin relația  $f(-t) = -f(t)$  (deci prin imparitate).

**Exemplul 11.4.1** Să se determine transformatele Fourier prin cosinus și prin sinus ale funcției  $f(t) = e^{-at}$ , unde  $t \in (0, \infty)$  iar  $a > 0$ .

**Soluție.** Pentru ca transformatele Fourier prin sinus și cosinus să funcționeze oricare ar fi  $t$  real, funcția  $f(t)$  se prelungește în intervalul  $(-\infty, 0]$  astfel:

- în cazul transformatei prin cosinus,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t \leq 0; \end{cases}$$

- în cazul transformatei prin sinus,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -e^{at}, & t < 0. \end{cases}$$

În ambele cazuri, funcția  $f(t)$  poate fi reprezentată ca o integrală Fourier.

Fie  $g_c(u)$  transformata Fourier prin cosinus și  $g_s(u)$  transformata Fourier prin sinus,

$$g_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos ut \, dt, \quad g_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin ut \, dt.$$

Aceste integrale se pot calcula simultan, luând

$$\begin{aligned} g_c(u) + ig_s(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-at} (\cos ut + i \sin ut) \, dt = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(a-iu)t} \, dt = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a-iu} (e^{-(a-iu)t}) \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a+iu}{a^2+u^2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$g_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+u^2}, \quad g_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{u}{a^2+u^2}.$$

Introducând aceste funcții în (11.13) și (11.14), se obțin formulele

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{2a} e^{-at}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{u \sin tu}{a^2+u^2} du = \frac{\pi}{2} e^{-at}$$

care se numesc *integralele lui Laplace*. ■

**Exercițiul 11.4.1** Să se calculeze transformata prin cosinus a funcției

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

și din rezultatul obținut să se deducă relația

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ux}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi u e^{-u}}{4}. \quad (11.18)$$

**Soluție.** Transformata Fourier prin cosinus a funcției  $f(x)$  este

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{(1+x^2)^2} dx.$$

Pentru calculul integralei de aici, putem folosi teorema reziduurilor

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos uxdx = \pi \operatorname{Re} \left( i \sum_{k=1}^N \operatorname{Rez} [e^{iuz} f(z), z_k] \right),$$

unde  $z_k$  sunt polii funcției  $f(z)$  situați în semiplanul superior.

Cum unicul punct singular este  $z_1 = i$ , care este pol dublu, avem

$$\operatorname{Rez} [e^{iuz} f(z), z] = \left( \frac{e^{iuz}}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{1+u}{4i} e^{-u}.$$

Rezultă  $F_c(u) = \sqrt{2\pi} \frac{1+u}{4} e^{-u}$ , de unde deducem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{(1+x^2)^2} dx = \pi \frac{1+u}{4} e^{-u}.$$

Membrul stâng al acestei egalități este o integrală improprie simplă depinzând de parametrul  $u$ . Aplicând teorema de derivare a acestui tip de integrală depinzând de un parametru, se obține relația (11.18). ■

**Exercițiul 11.4.2** Să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^{+\infty} g(u) \cos tudu = \begin{cases} 1-t, & \text{pentru } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{pentru } t > 1. \end{cases}$$

**Soluție.** Ecuația dată este de forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \cos tudu = f(t),$$

unde

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-t), & \text{pentru } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{pentru } t > 1. \end{cases}$$

Soluția acestei ecuații este dată de prima egalitate (11.13). Avem

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 f(t) \cos ut \, dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt.$$

Deoarece  $f(t) = 0$  pentru  $t > 1$ , a doua integrală este nulă. Așadar,

$$g(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos u}{u^2}.$$

■

**Exercițiul 11.4.3** Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } |t| \geq 1 \\ -1, & \text{pentru } t \in (-a, 0) \\ 1, & \text{pentru } t \in (0, a), \end{cases}$$

și care ia valorile  $f(0) = 0$ ,  $f(-a) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(a) = \frac{1}{2}$ .

**Indicație.** Funcția este impară. Se obține

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin tu}{u} \sin^2 \frac{au}{2} \, du.$$

Observăm că, până la un factor,  $f(t)$  este o transformată Fourier prin sinus. ■

**Exercițiul 11.4.4** Să se determine funcția  $f(t)$  care satisface ecuația

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos tx \, dt = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \geq 0,$$

unde  $a$  este o constantă reală pozitivă.

**Soluție.** Se aplică a doua formulă din (11.12) și avem

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} \, dx.$$

Integrala se poate calcula fie utilizând teorema reziduurilor fie folosind integralele lui Laplace. Se obține  $f(t) = \frac{1}{a} e^{-at}$ . ■

**Exercițiul 11.4.5** Să se rezolve ecuațiile integrale:

$$2 \int_0^{+\infty} g(u) \sin tudu = \begin{cases} \pi \sin t, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ 0, & \text{pentru } t \geq \pi; \end{cases}$$

$$4 \int_0^{+\infty} h(u) \cos tudu = \begin{cases} 2\pi \cos t, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ 0, & \text{pentru } t > \pi \\ -\pi, & \text{pentru } t = \pi. \end{cases}$$

**Indicație.** Se aplică teoria de la ultimul paragraf și se găsește

$$g(u) = \frac{\sin \pi u}{1 - u^2}, \quad h(u) = \frac{u \sin \pi u}{1 - u^2}.$$

■

**Exercițiul 11.4.6** Să se determine soluția ecuației integrale de tip Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iut} dt = \begin{cases} |u|, & \text{pentru } u \in (-1, 1) \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } u = \pm 1 \\ 0, & \text{pentru } |u| > 1. \end{cases}$$

**Soluție.** Exceptând factorul  $\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$  și schimbând între ele atât variabilele  $u$  și  $t$  cât și funcțiile  $f$  și  $g$ , rezultă că ecuația integrală din enunț este de forma celei de a doua din egalitățile (11.12).

Soluția acestei ecuații integrale este dată de prima egalitate (11.12).  
Avem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 (-u) e^{-iut} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 u e^{-iut} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 u \cos ut du.$$

$$\text{Se obține } f(t) = \frac{2}{\pi t^2} \left( t \cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2}.$$

■

## 11.5 Proprietăți ale transformatei Fourier

Prezentăm mai jos principalele proprietăți ale transformatelor Fourier. Pentru a se urmări mai ușor raționamentele, notăm cu  $F(u)$  transformata Fourier a funcției  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Folosind prima egalitate din (11.12), avem

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt. \quad (11.19)$$

**Definiția 11.5.1** Funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  din (11.19) se numește **original**.

**Teorema 11.5.1** Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este funcție absolut integrabilă, funcția  $F(u)$ , transformata Fourier a funcției  $f(t)$ , este o funcție continuă.

**Demonstrație.** Proprietatea enunțată se verifică imediat cu ajutorul unui criteriu de convergență pentru integrala improprie de prima speță depinzând de parametrul  $u$  din (11.19). ■

**Teorema 11.5.2** Dacă funcțiile  $t^k f(t)$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , unde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sunt absolut integrabile, atunci transformata Fourier a funcției  $f$ , definită de (11.19), este derivabilă de  $n$  ori și

$$F^{(k)}(u) = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t) e^{-iut} dt, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (11.20)$$

**Demonstrație.** Integrala improprie (11.19) depinde de parametrul real  $u$ .

În baza unui criteriu de convergență uniformă al integralelor de acest tip, rezultă că integralele din (11.19) și (11.20), unde  $k \in \overline{1, n-1}$ , li se poate aplica formula de derivare a lui Euler și obținem (11.20). ■

**Teorema 11.5.3** Dacă primele  $r-1$  derivate ale funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tind la zero când  $|t| \rightarrow \infty$  iar  $f^{(r)}(t)$  este absolut integrabilă, atunci

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t) e^{-iut} dt = (iu)^r F(u). \quad (11.21)$$

**Demonstrație.** Să notăm cu  $F_r(u)$  transformata Fourier a funcției  $\frac{d^r f}{dt^r}(t)$

$$F_r(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t) e^{-iut} dt. \quad (11.22)$$

Integrând prin părți în (11.22), ținând cont că

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{d^{r-1} f}{dt^{r-1}}(t) = 0$$

și că funcția complexă  $e^{-iut}$  este mărginită (are modulul egal cu 1), se găsește următoarea relație de recurență

$$F_r(u) = (iu) F_{r-1}(u).$$

Dacă la această relație de recurență adăugăm faptul că  $F_0(u) = F(u)$ , obținem

$$F_r(u) = (iu)^r F(u). \quad (11.23)$$

Egalitatea (11.21) rezultă din (11.22) și (11.23). ■

**Teorema 11.5.4** *Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este absolut integrabilă, iar*

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau = 0, \quad (11.24)$$

*atunci are loc egalitatea*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-iut} dt = \frac{1}{iu} F(u). \quad (11.25)$$

**Demonstrație.** Integrând prin părți în membrul întâi din (11.24) și ținând cont de faptul că

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau) d\tau = f(t),$$

obținem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^t f(\tau) d\tau \right) e^{-iut} dt = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -\frac{1}{iu} e^{-iut} \int_0^t f(\tau) d\tau \right]_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Dacă se ține seama de ipoteze, din (11.26) se obține (11.25). ■

**Observația 11.5.1** *Transformata Fourier a derivatei de ordin  $r$  a funcției originale  $f(t)$  este egală cu produsul dintre funcția complexă  $(iu)^r$  și transformata Fourier  $F(u)$  a funcției  $f(t)$ .*

**Observația 11.5.2** *Transformata Fourier a integralei din funcția  $f(\tau)$  pe intervalul compact variabil  $[0, t]$  este egală cu raportul dintre transformata Fourier  $F(u)$  a funcției  $f(t)$  și funcția complexă  $(iu)$ .*

Analiza ultimelor două observații conduce la ideea reducerii unor operații complicate ale analizei matematice la simple operații algebrice asupra transformatelor funcțiilor, cu inversarea în final a rezultatului după formula

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{itu} du.$$

Această idee stă la baza *calculului operațional*.



**Definiția 11.5.2** Funcția  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ , notată  $f \star g$ , se numește **produsul de convoluție** al funcțiilor  $f$  și  $g$  pe intervalul  $(-\infty, +\infty)$ .

Prin urmare, putem scrie

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (11.27)$$

**Exercițiul 11.5.1** Să se arate că dacă  $F(u)$  și  $G(u)$  sunt transformatele Fourier ale funcțiilor  $f(t)$  și  $g(t)$ , atunci

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du. \quad (11.28)$$

**Soluție.** Avem succesiv

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{iut}du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\tau u}d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{iu(t-\tau)}du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Rezultatul la care am ajuns, împreună cu (11.27), conduce la (11.28). ■

**Observația 11.5.3** Deoarece integrala  $\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du$  nu se modifică când schimbăm între ele funcțiile  $F(u)$  și  $G(u)$  rezultă că  $f \star g = g \star f$ .

**Exercițiul 11.5.2** Folosind relația (11.28), să se obțină egalitatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{-a^2u^2x}e^{iut}du = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+2a\sqrt{x}z)e^{-z^2}dz. \quad (11.29)$$

**Soluție.** În relația (11.28) punem  $G(u) = e^{-a^2u^2x}$ , de unde rezultă că funcția  $g(t)$  corespunzătoare este

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2u^2x}e^{iut}du. \quad (11.30)$$

Dar,  $e^{iut} = \cos ut + i \sin ut$  iar funcția  $e^{-a^2u^2x} \sin ut$  este impară. Atunci, din (6.24) și (11.30) rezultă

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2u^2x} \cos ut du = \frac{1}{a\sqrt{2x}} e^{-\frac{t^2}{4a^2x}}.$$

Folosind această expresie a lui  $g(t)$  în (11.27) și efectuând apoi schimbarea de variabilă  $\frac{\tau - t}{2a\sqrt{x}} = z$ , se obține egalitatea (11.29). ■

**Exemplul 11.5.1 (Coarda elastică)** *Fie o coardă elastică suficient de lungă încât să se poată presupune că are lungime infinită. Sub acțiunea unor factori externi, coarda vibrează. La momentul  $t = 0$  configurația corzii este graficul funcției  $f(x)$  definită pe întreaga axă reală. La momentul  $t > 0$ , datorită vibrațiilor, configurația corzii este alta, să zicem  $u(x, t)$ . Funcția  $u = u(x, t)$  se numește **săgeată**. Presupunem că se cunoaște viteza  $g(x)$  cu care se schimbă forma corzii la momentul  $t = 0$ , deci cunoaștem valoarea în punctul  $(x, 0)$  a derivatei parțiale în raport cu variabila temporară  $t$  a funcției  $u(x, t)$ . Din teoria elasticității se știe că legea după care vibrează coarda este*

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (11.31)$$

*Să se determine poziția corzii la orice moment și în orice punct al ei.*

**Soluție.** Problema pusă se reduce la determinarea acelei soluții  $u(x, t)$  a ecuației (11.31) care satisface *condițiile inițiale*

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (11.32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (11.33)$$

Astfel, avem de rezolvat o *problemă de tip Cauchy pentru ecuația diferențială* (11.31) *cu condiții inițiale* (11.32) și (11.33).

Pentru aceasta, vom înmulți ecuația cu  $e^{-i\xi x}$  după care integrăm în raport cu  $x$  de la  $-\infty$  la  $+\infty$ .

Derivarea parțială în raport  $t$  comută cu integrarea în raport cu  $x$ , astfel că putem scrie

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-i\xi x} dx. \quad (11.34)$$

În membrul drept al relației (11.34) se aplică Teorema 11.5.3, astfel încât se obține ecuația

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 U}{dt^2}(\xi, t) + \xi^2 U(\xi, t) = 0, \quad (11.35)$$

unde funcția  $U(\xi, t)$  este transformata Fourier a funcției  $u(x, t)$ .

În felul acesta, cu ajutorul transformatei Fourier am înlocuit ecuația diferențială cu derivate parțiale (11.31) cu ecuația diferențială ordinară (11.35).

Condițiile inițiale (11.32) și (11.33) se transformă respectiv în

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = F(\xi); \quad (11.36)$$

$$\frac{dU}{dt}(\xi, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx = G(\xi). \quad (11.37)$$

Astfel, avem de rezolvat o problemă de tip Cauchy pentru ecuația diferențială ordinară de ordinul doi, liniară, (11.35) cu condițiile inițiale (11.36) și (11.37).

Un sistem fundamental de soluții al ecuației (11.35) conține funcțiile

$$U_1(\xi, t) = \cos a\xi t, \quad U_2(\xi, t) = \sin a\xi t.$$

Atunci, soluția generală a ecuației (11.35) este

$$U(\xi, t) = C_1 U_1(\xi, t) + C_2 U_2(\xi, t) = C_1 \cos a\xi t + C_2 \sin a\xi t$$

unde constantele de integrare  $C_1$  și  $C_2$  sunt funcții de  $\xi$ . Însă,

$$U(\xi, 0) = C_1(\xi) = F(\xi), \quad \frac{dU}{dt}(\xi, 0) = a\xi C_2(\xi) = G(\xi).$$

Dacă folosim relațiile lui Euler, rezultă că expresia lui  $U(\xi, t)$  este

$$U(\xi, t) = \frac{1}{2} F(\xi) (e^{iat\xi} + e^{-iat\xi}) + \frac{G(\xi)}{2ia\xi} (e^{iat\xi} - e^{-iat\xi}). \quad (11.38)$$

Aplicând transformarea Fourier inversă funcției  $U(\xi, t)$ , obținem

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{ix\xi} d\xi. \quad (11.39)$$

Înlocuind în (11.39) pe  $U(\xi, t)$  din (11.38) și ținând cont de rezultatele

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{i(x \pm at)\xi} d\xi = f(x \pm at), \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) e^{iu\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} g(u) du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) \left( \int_{x-at}^{x+at} e^{i\xi u} du \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\xi)}{i\xi} \left( e^{i(x+at)\xi} - e^{i(x-at)\xi} \right) d\xi, \end{aligned}$$

găsim

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(u) du,$$

ceea ce arată că problema considerată are soluție unică. ■

# Bibliografie

- [1] Adams, Robert, A. – *Calculus. A complete Course*, Forth ed., Addison–Wesley, 1999
- [2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986.
- [3] Brânzănescu, V., Stănăşilă, O. – *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicații*, Editura ALL, București, 1994.
- [4] Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. III*, Editura Tehnică, București 1967.
- [5] Budak, B., M., Fomin, S., V. – *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscou, 1973.
- [6] Chiorescu, Gh. – *Matematici speciale. Culegere de aplicații în mecanică*, Editura "Gh. Asachi" Iași, 1995.
- [7] Crstici, B. (coordonator) – *Matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [8] Ciobanu, Gh., Chiorescu, Gh., Sava, V. – *Capitole de matematici speciale*, Rotaprint, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iași, Facultatea de Electronică și Telecomunicații, Catedra de Matematică, 1998.
- [9] Craiu, M., Roșculeț, M., N. – *Ecuatii diferențiale aplicative. Probleme de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [10] Enescu, I., Sava, V. – *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Iași, Facultatea de Mecanică, Rotaprint, 1981.

- [11] Evgrafov, M., Béjanov, K., Sidorov, Y., Fédoruk, M., Chabounine, M. – *Recueil de problèmes sur la theorie des fonctions analytiques*, Deuxième édition, Éditions Mir, Moscou, 1974.
- [12] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. II*, Editura Tehnică, București 1966
- [13] Nicolescu, L., J., Stoka, M., I. – *Matematici pentru ingineri*. Vol. I, Editura Tehnică, București, 1969.
- [14] Radu, C., Drăgușin, C., Drăgușin, L. – *Aplicații de algebră, geometrie și matematici speciale*, Editura Didactică și Pedagogică, București – 1991.
- [15] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome II*, Éditions Mir – Moscou, 1972.
- [16] Smirnov, V. – *Cours de mathématiques supérieures, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou, 1972
- [17] Șabac, I., Gh. – *Matematici speciale*, Vol. I, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [18] Șabac, I., Gh. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965.
- [19] Șabac, I., Gh., Cocârlan, P., Stănășilă, O., Topală, A. – *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [20] Sveshnikov, A., Tikhonov, A. – *The theory of functions of a complex variable*, Mir Publishers, Moscou, 1978.
- [21] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company 1988
- [22] Zeldovitch, I., Mychkis, A. – *Éléments de mathématiques appliquées*, Éditions Mir – Moscou, 1974.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se reducă sistemul de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = x, \end{cases}$$

la o singură ecuație de ordin superior și să se gasească apoi soluția sa generală.

2. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2 \mathbf{i} + x^2y \mathbf{j} + (x^2 + y^2)z \mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = 1. \end{cases}$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)^2} dx.$$

4. În planul complex la distanță finită, funcția  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  are singularitățile  $-1$  (pol simplu) și  $1$  (pol triplu). Se cere dezvoltarea funcției în serie Laurent în jurul punctului  $z_0 = 1$ .

5. Seria Fourier a unei funcții periodice.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1) \mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x - z = a^2 \\ x^2 + y^2 = a^2 - 1 \end{cases}.$$

2. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x \quad \text{și} \quad f(0) = i$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor funcția  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  într-o vecinătate a lui  $z_0 = 0$ .
5. Divergența unui câmp vectorial.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

## Matematici Speciale

### Examen

1. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi, liniar și omogen

$$\begin{cases} y_1' &= -9y_1 - 12y_2 - 5y_3, \\ y_2' &= 5y_1 + 6y_2 + 3y_3, \\ y_3' &= y_1 + 4y_2 + y_3. \end{cases}$$

**Indicație.** Se va utiliza metoda eliminării. Se ajunge la ecuația diferențială liniară și omogenă de ordinul trei cu coeficienți constanți  $y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0$ , căreia i se va determina soluția generală.

2. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + (x^2 + y^2 + z^2) \mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x &= 1 \\ z &= y^2 \end{cases}$$

3. Să se arate că dacă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este olomorfă într-un domeniu  $D$ , atunci funcția  $\psi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ , unde

$$U(x, y) = e^{v(x, y)} \cos u(x, y), \quad V(x, y) = -e^{v(x, y)} \sin u(x, y),$$

este olomorfă pe  $D$ .

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

5. Rotorul unui câmp vectorial.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.



Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniare de ordinul doi cu coeficienți constanți, neomogenă

$$y'' - 9y' + 20y = x^2 \cdot e^{4x}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condițiile inițiale  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = -3$ .

2. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z - x^2 \sin y) \mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} x = y^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică  $f(t)$ , de perioadă  $\pi$ , definită pe intervalul  $(0, \pi)$  prin  $f(t) = e^{-at}$ , unde  $a$  este o constantă reală pozitivă.
5. Domeniul de convergență a unei serii Laurent.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se rezolve sistemul diferențial liniar și neomogen

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + \cos x. \end{cases}$$

Răspuns:

$$\begin{cases} y_1 &= e^{x/2} \left( C_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) - \sin x \\ y_2 &= \frac{1}{2} e^{x/2} \left( (C_1 + C_2\sqrt{3}) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_2 - C_1\sqrt{3}) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) - \cos x. \end{cases}$$

2. Pentru funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  se cunoaște partea sa reală

$$u(x, y) = \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2) - y \arctg \frac{y}{x}, \quad f(z_0) = 0.$$

Să se determine  $f(z)$  știind că este funcție olomorfă.

Răspuns:  $f(z) = z \ln z$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0.$$

4. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \cosh x \mathbf{i} + y \sinh x \mathbf{j} + \frac{z}{2} \sinh x \mathbf{k},$$

care trece prin curba

$$(\Gamma) : \begin{cases} y &= a \cosh x \\ z &= 0. \end{cases}$$

5. Sisteme diferențiale sub formă simetrică.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine acea soluție a ecuației diferențiale

$$y'' - 2y' + 2y = e^x(2 \cos x - 4x \sin x)$$

care satisface condițiile inițiale  $y(0) = 0$  și  $y'(0) = 1$ .

**Indicație:** Se arată că soluția generală a ecuației diferențiale date este  $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x + x^2 \cos x$ , după care se determină constantele arbitrare din condițiile inițiale.

2. Să se demonstreze că dacă funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este olomorfă pe un domeniu  $D$  din planul complex, atunci funcția reală de două variabile reale

$$\varphi(x, y) = \left( e^{v(x, y)} + e^{-v(x, y)} \right) \sin u(x, y)$$

este armonică pe  $D$ , deci să se arate că  $\nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ .

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$$

4. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

$n$  fiind un număr natural,  $n \geq 1$ .

5. Forma complexă a seriei Fourier.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Se dă câmpul de forță definit pe  $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că  $\mathbf{F}$  este câmp vectorial irotational și să se determine funcția de forță.

2. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + x + y \quad \text{și} \quad f(0) = 0.$$

$$\text{Răspuns: } f(z) = (1 + i)z + ze^z.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

4. Să se determine funcția  $f(t)$  care satisface ecuația integrală Fourier

$$\int_0^\infty f(t) \cos tx \, dt = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \geq 0,$$

unde  $a$  este o constantă pozitivă.

5. Sisteme de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală. Legătura cu ecuațiile diferențiale de ordinul  $n$ . Integrale prime. Soluție generală.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se găsească soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

2. Să se demonstreze că au loc identitățile

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{u}) = \varphi(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\nabla \varphi)$$

$$\nabla \times (\varphi \mathbf{u}) = \varphi(\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times (\nabla \varphi),$$

unde  $\nabla$  este operatorul lui Hamilton,  $\nabla \cdot$ ,  $\nabla \times$  sunt divergența și rotorul câmpurilor vectoriale tipărite după semnul „ $\cdot$ ” respectiv „ $\times$ ” care sunt definite pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$ , cu valori în  $\mathbb{R}^3$ , iar  $\nabla \varphi$  este gradientul câmpului scalar  $\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

3. Folosind metodele de calcul ale unor integrale reale cu ajutorul teoriei reziduurilor, să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin \omega x}{x} dx = \pi \left( e^{-a\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad \omega > 0, \quad a > 0.$$

4. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția  $f(t)$ , periodică de perioadă  $2\pi$ , definită prin

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

5. Funcția exponențială în complex

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale sub formă normală

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z}{(z-y)^2} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

2. Să se demonstreze identitatea

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

unde  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$  este operatorul lui Hamilton,  $\nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}$  este rotorul câmpului vectorial  $\mathbf{u}$ ,  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$  este divergența produsului vectorial al vectorilor  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$ , iar punctul dintre doi vectori reprezintă produsul scalar al acelor vectori.

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

4. Să se afle transformata Fourier prin cosinus a funcției  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$  și din rezultatul obținut să se deducă relația

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ux}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi u e^{-u}}{4}.$$

5. Derivata după o direcție a unui câmp scalar sau vectorial. Gradientul unui câmp scalar.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

## Matematici Speciale

### Examen

1. Să se determine regiunile planului complex unde funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

este olomorfă. În fiecare regiune găsită, să se determine derivata funcției  $f(z)$ .

2. Să se calculeze integrala complexă

$$\int_C z e^z dz,$$

unde curba  $C$  este segmentul de dreaptă având extremitățile în origine și în punctul  $z = \frac{\pi}{2}i$ .

3. Fie funcția complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Să se dezvolte  $f(z)$  în serie de puteri ale lui  $z$  pe domeniul  $1 < |z| < 2$ .

4. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația diferențială

$$y'' - 2y' + 10y = 0,$$

cu condițiile inițiale  $y(\pi/6) = 0$ ,  $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$ .

5. Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x \quad \text{și} \quad f(0) = i.$$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} (z - 2i)^n.$$

3. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția periodică de perioadă  $T = \pi$   
 $f(t) = |\sin t|$ .

4. Se consideră ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordin 1

$$2x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + z^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Se cere să se determine soluția generală și să se rezolve problema Cauchy cu condiția inițială  $u(x, y, 1) = x + y$ .

5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare și omogene. Matrice fundamentală a unui sistem omogen. Determinantul lui Wronski. Soluția generală a unui sistem omogen de ecuații diferențiale.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.



Sesiunea ianuarie–februarie 2011

## Matematici Speciale

### Examen

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că partea sa reală este

$$u(x, y) = e^x \sin y + \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

iar valoarea funcției în punctul  $z_0 = 1$  este  $f(z_0) = 2 - ie$ .

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1}{5 + 3 \sin x}.$$

Indicație: se va alege ca interval de lungime perioada  $T = 2\pi$  intervalul  $[-\pi, \pi]$ .

3. Se consideră ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordin 1

$$xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

- a) Să se determine soluția generală;  
b) Să se rezolve problema Cauchy cu datele

$$\begin{cases} x &= a \\ 2ayz &= a^2 + 2. \end{cases}$$

4. Să se arate că au loc identitățile:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \text{rot}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = \text{div}(\text{rot } \mathbf{v}) = 0.$$

5. Seriile trigonometrice Fourier a unei funcții pare și a unei funcții impare.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(i-z)^3} dz,$$

unde  $\Gamma$  este cercul de rază  $a$  cu centrul în origine și  $a \neq 1$ . Discuție după  $a$ .

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcția

$$f : [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in [-\ell, 0] \\ x, & \text{pentru } x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

3. Se dă câmpul de forțe

$$F(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotational și să se determine funcția de forță.

4. Folosind metoda eliminării, să se determine soluția generală a sistemului liniar de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x' &= -x + y + z + e^t \\ y' &= x - y + z + e^{3t} \\ z' &= x + y + z + 4 \end{cases}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condițiile inițiale

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0.$$

5. Serii de puteri în complex. Teorema lui Abel. Raza de convergență a unei serii de puteri.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 9)^2},$$

unde curba  $\Gamma$  este, pe rând, unul din discurile

$$\Gamma : \begin{cases} 1) & |z - 2i| = 2; \\ 2) & |z + 2i| = 2; \\ 3) & |z| = 4. \end{cases}$$

2. Să se dezvolte în serie trigonometrică Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad \alpha \neq 0.$$

Indicație: se va alege ca interval  $[\alpha, \alpha + T]$  intervalul  $[-\pi, \pi]$ .

3. Să se integreze ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordin 1, cuasiliniară

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = z + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{z}.$$

4. Să se arate că au loc egalitățile:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{v};$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \nabla \times \mathbf{u} + \nabla \times \mathbf{v},$$

unde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sunt câmpuri vectoriale diferențiabile pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla$  este operatorul lui Hamilton,  $\nabla \cdot$  este divergența și  $\nabla \times$  este rotorul câmpului vectorial scris alăturat.

5. Dezvoltarea unei funcții analitice într-o serie Laurent.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se dezvolte în serie de puteri funcția  $f(z) = \frac{3z+2}{z(z-1)^2}$

a) în jurul punctului  $z_0 = 1$ ;

b) în jurul punctului  $z_0 = 0$ .

2. Utilizând teorema reziduurilor, să se arate că

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2} dz = 0,$$

unde  $\Gamma$  este cercul de rază arbitrară  $R > 0$  cu centrul în origine.

3. Folosind transformarea Fourier, să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^{\infty} \varphi(u) \cos xu \, du = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

4. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția **factorul discontinuu al lui Dirichlet**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |t| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t = \pm a, \\ 0, & \text{pentru } |t| > a, \end{cases}$$

unde  $a > 0$  este un număr constant.

5. Integrale reale de forma  $I = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ , unde  $\mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta)$  este o funcție rațională în  $\sin \theta$  și  $\cos \theta$ , rezolvate cu ajutorul teoremei reziduurilor.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se calculeze derivata câmpului scalar

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

după direcția de parametri  $(2, -1, 2)$  în punctul  $M_0(1, 2, 3)$ .

2. Să se afle raza de convergență a seriei de puteri în complex

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala improprie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \mathbf{k}.$$

5. Câmpuri scalare. Suprafețe de nivel. Curbe de nivel.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se găsească punctele din planul complex în care funcția

$$f(z) = z^2 + i\bar{z}^2 + 4z + 6\bar{z} + 8$$

este monogenă. În punctele găsite, să se calculeze derivat funcției.

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (xy - 2z^2)\mathbf{i} + (4xz - y^2)\mathbf{j} + (yz - 2x^2)\mathbf{k}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0.$$

4. Să se determine funcția  $\varphi(x)$  astfel încât câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(P) = 2x\varphi(x)\mathbf{i} - y\varphi(x)\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$

să fie solenoidal.

Răspuns: Din condiția ca  $\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = 0$  rezultă ecuația diferențială liniară

$$\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = -3x,$$

care se integrează cu formula  $\varphi(x) = e^{-\int P(x)dx} \left( C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right)$ ,

unde  $P(x) = \frac{1}{2x}$  și  $Q(x) = -3x$ . Se obține  $\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{6x^2}{5}$ .

5. Serii de funcții de o variabilă complexă, uniform convergente. Criteriul lui Weierstrass, criteriul lui Cauchy și proprietățile de continuitate, integrabilitate și derivabilitate a sumei  $f(z)$  a unei serii de funcții  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$  uniform convergentă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{C}$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Se dă câmpul scalar  $\varphi(x, y, z) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^2}$ , unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Să se calculeze unghiul dintre gradientul acestui câmp în punctul  $A(2, 1, 1)$  și gradientul aceluiași câmp în punctul  $B(0, 1, -1)$ .

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (xz - y)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (1 - z^2)\mathbf{k}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} dx.$$

4. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  când se cunosc partea imaginară

$$v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

și valoarea sa în punctul  $z_0 = 1$  care este  $f(z_0) = 0$ .

5. Proprietăți ale transformatei Fourier.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasilineară

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluția generală și să se rezolve problema lui Cauchy cu condiția inițială

$$z(2, y) = 1 + y^2 \iff \begin{cases} x &= 2, \\ z &= 1 + y^2. \end{cases}$$

2. Fie funcția complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Să se dezvolte  $f(z)$  în serie de puteri ale lui  $z$  pe domeniul  $1 < |z| < 2$ .

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2} dx.$$

4. Să se calculeze rotorul câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(P) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(P) + \operatorname{grad} (z^2),$$

unde  $\mathbf{u}(P) = x \mathbf{i} + 2yz \mathbf{j} + (x^2 + z^2) \mathbf{k}$ , și să se arate că el este irotațional, deci că  $\operatorname{rot} \mathbf{v}(P) = \mathbf{0}$ .

5. Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.



Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația cu derivate parțiale liniară și omogenă

$$z \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)^2 \frac{\partial u}{\partial y} + x \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

cu condiția inițială  $u(x, 0, z) = 2z(z - x)$ .

2. Să se determine funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , olomorfă în întreg planul complex la distanță finită, știind că :

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy; \quad f(0) = 0.$$

3. În planul complex la distanță finită, funcția  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  are singularitățile  $-1$  (pol simplu) și  $1$  (pol triplu). Se cere dezvoltarea în serie Laurent a acestei funcții în exteriorul discului închis

$$\overline{B}(1, 2) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 2\}.$$

4. Se consideră câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(P) = xz \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + u(x, y) \mathbf{k}.$$

Să se determine funcția necunoscută  $u = u(x, y)$  astfel încât  $\mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v} = 0$ .

5. Sisteme de  $n$  ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală și legătura lor cu ecuațiile diferențiale de ordinul  $n$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se determine soluția generală  $\{y(x), z(x)\}$  a sistemului de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi

$$\begin{cases} y' &= z; \\ z' &= -y \end{cases}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu condițiile inițiale

$$y(\pi/3) = 1, \quad z(\pi/3) = -1.$$

2. Se cere: integrala generală a ecuației diferențiale de ordinul întâi cuasiliniare

$$xy^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x^2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z;$$

suprafață integrală care conține curba

$$\begin{cases} y &= 1, \\ z &= x \sin(x^2 - 1). \end{cases}$$

3. Scrieți rotorul câmpului vectorial  $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ , arătați că

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$$

este un câmp irotational pe  $\mathbb{R}^3$  și determinați-i funcția de forță.

4. Calculul integralelor reale de forma  $I = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$  cu ajutorul teoremei reziduurilor și rezolvarea efectivă a integralei

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin \theta}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad |a| > 1.$$

**Răspuns:**  $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$

5. Funcția exponențială în complex.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Să se determine suprafața de câmp a câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)z\mathbf{k},$$

care trece prin curba  $\Gamma$  de ecuații

$$\Gamma: \begin{cases} x = 2y, \\ z = 1. \end{cases}$$

2. Să se determine punctele  $z = x + iy$  în care funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$$

este monogenă și să se calculeze derivata funcției în punctele găsite.

3.
  - Să se scrie formula de evaluare a reziduului unei funcții complexe de variabilă complexă  $f(z)$  într-un pol simplu  $z_0$  al ei și într-un punct multiplu  $z_0$  de multiplicitate  $p$ .
  - Folosind formulele cerute mai sus, să se determine reziduurile funcției

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}.$$

4.
  - Integrale de forma  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  calculate cu ajutorul teoremei reziduurilor;

- Să se calculeze integrala improprie  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ .

5. Seria Fourier a unei funcții periodice.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici Speciale

Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se determine soluția generală a sistemului

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

2. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \mathbf{k}.$$

3. Fie variabila complexă  $z = x + iy$  și  $\bar{z} = x - iy$  conjugata complexă a acesteia. Să se determine punctele  $z$  în care funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3z + 2\bar{z},$$

este monogenă și să se calculeze  $f'(z)$  în punctele determinate.

4. Să se calculeze integrala

$$I = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} \sin \frac{\pi}{z} dz,$$

unde  $\Gamma$  este o elipsă de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

în următoarele cazuri:  $0 < b < 1$ ,  $b > 1$ .

5.
  - Dezvoltarea unei funcții analitice într-o serie Laurent.
  - Să se dezvolte în serie Laurent funcția

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

în coroana circulară  $0 < |z| < 1$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul acordat tezei. Timpul de lucru este 2 ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

2. Să se calculeze integrala complexă  $I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)} dz$ , unde conturul  $C$  este cercul  $|z-3i| = r$ , cu raza  $r > 0$  diferită de 1 și de 3, parcurs în sens direct trigonometric. Discuție după  $r$ .

3. Folosind formulele integrale ale lui Cauchy, să se calculeze integrala

$$\int_C \frac{z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz,$$

unde conturul  $C$  este cercul de ecuație  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ , parcurs în sens direct trigonometric.

4. Se consideră câmpul scalar  $\varphi(x, y, z) = \frac{yz}{x}$  definit pe un domeniu tridimensional inclus în semispațiul  $x > 0$ . Se cere:

- (a) ecuația suprafeței de nivel care trece prin punctul  $M(1, 1, 1)$ ;
- (b) versorul normalei la suprafața de nivel determinată la punctul precedent;
- (c) derivatele câmpului scalar  $\varphi$ , în punctul  $M(1, 1, 1)$ , după direcțiile date de versorii vectorilor  $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}$  și  $\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

5. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui  $z$  (serie Laurent) funcția complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

în coroana circulară cu centrul în origine  $1 < z < 2$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple și se găsește

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-3}.$$

Fiecare fracție simplă se dezvoltă în serie Laurent.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Folosind metoda eliminării, să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} x' + y - z = 0 \\ y' - z = 0 \\ z' + x - z = \cos t. \end{cases}$$

**Indicație.** Aplicând teoria, se ajunge la ecuația diferențială liniară de ordinul trei, cu coeficienți constanți și neomogenă  $z''' - z'' + z' - z = -\cos t$  căreia i se află soluția generală.

2. Să se rezolve sistemul simetric  $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$ .

**Indicație.** Prima integrală primă se determină din primele două rapoarte. A doua se determină din ultimele două rapoarte. Pe parcurs se înlocuiește  $y$  ca funcție de  $x$  și constanta arbitrară  $C_1$ . În final,  $C_1$  se înlocuiește cu expresia obținută din prima integrală primă.

3. Se consideră câmpul vectorial  $\mathbf{v}(P) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + u(x, y)\mathbf{k}$ , unde  $x, y, z$  sunt coordonatele punctului  $P \in \mathbb{R}^3$ , iar  $u(x, y)$  este o funcție necunoscută definită pe  $\mathbb{R}^2$ . Să se determine funcția  $u = u(x, y)$  astfel încât  $\mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} = 0$ .

4. Se dă funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = z^2 + i\bar{z}^2 + 4z + 6\bar{z} + 8,$$

unde  $z = x + iy$ , iar  $\bar{z} = x - iy$ . Să se afle punctele în care funcția este monogenă (derivabilă) și să se calculeze derivata ei în aceste puncte.

5. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala definită

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos x}{(17 + 8 \cos x)^2} dx.$$

**Indicație:** Funcția de integrat fiind pară, integrala se poate extinde la un interval simetric față de origine  $I = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos x}{(17 + 8 \cos x)^2} dx = \frac{1}{2} J$ . Integrala  $J$  se calculează cu ajutorul teoriei reziduurilor folosind în prealabil schimbarea de variabilă  $z = e^{ix}$ . Integrala  $J$  devine una complexă pe cercul  $|z| = 1$  având funcția de integrat  $f(z) = \frac{2}{i} \frac{z^2 + 1}{(4z^2 + 17z + 4)^2}$  cu polii dubli  $z_1 = -1/4 \in D : |z| < 1$  și  $z_2 = -4$  care nu aparține lui  $D$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară și neomogenă

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

**Indicație.** Se determină întâi soluția generală  $y_o$  a ecuației omogene asociate și apoi, folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange, se determină o soluție particulară  $y_p$  a ecuației date.

**Răspuns:**  $y = y_o + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}(1 - e^{-x}) \ln(e^x + 1) + e^x$ .

2. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_3. \end{cases}$$

3. Să se arate că  $\mathbf{v}(P) = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$  este un câmp irotațional și să se determine potențialul lui scalar.

**Indicație.** Se arată că  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$  și apoi se determină potențialul scalar  $\varphi(P)$  integrând expresia diferențială  $\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  pe un drum paralel cu axele de coordonate cu extremitățile punctul fix  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  și punctul variabil  $P(x, y, z)$ .

**Răspuns.**  $\varphi(P) = xy + yz + zx + C$ , unde  $C$  este o constantă arbitrară.

4. Să se determine funcția olomorvă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că  $v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}$  și  $f(1) = 0$ .

**Răspuns:**  $f(z) = z + \frac{1}{z}$ , cunoscută sub numele de *transformarea lui Jukowski*.

5. Funcția exponențială în complex.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore.

## Sesiunea ianuarie-februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că

$$v(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3$$

și că valoarea funcției în  $z_0 = 0$  este  $f(0) = 0$ .

**Răspuns:**  $f(z) = (1 - 2i)z^3$ .

2. Să se calculeze reziduurile funcției  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$  în toate punctele singulare.

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z^{100} e^{i\pi z}}{z^2 + 1} dz,$$

unde conturul  $C$  este elipsa de semiaxe  $a = 1$  și  $b = 2$  de ecuație  $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

**Răspuns:**  $I = -2\pi \cosh \pi$ .

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția periodică  $f(t)$ , de perioadă  $\pi$ , definită pe intervalul  $(0, \pi)$  prin  $f(t) = e^{-at}$ , unde  $a > 0$  este o constantă.

**Răspuns:**  $f(t) = \frac{1 - e^{-a\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos 2kt + 2k \sin 2kt}{a^2 + 4k^2} \right)$ .

5. Definiția integralei Fourier și forma complexă a integralei Fourier.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.



## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția ecuației diferențiale liniară, neomogenă și cu coeficienți constanți

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

care satisface condițiile inițiale  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Indicație:** Se determină întâi soluția generală  $y_0$  a ecuației omogene asociate și apoi, folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange, se determină o soluție particulară  $y_p$  a ecuației date. Se găsește

$$y = y_0 + y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Constantele  $C_1$  și  $C_2$  se determină din condițiile inițiale.

**Răspuns:**  $y = \sin x - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ .

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă

$$xz \frac{\partial u}{\partial x} - yz \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2},$$

unde  $a$  și  $b$  sunt două numere reale pozitive diferite.

**Indicație.**  $I = \frac{1}{2}J$ , unde  $J = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2(x^2 + b^2)^2}$ , iar aceasta integrală se calculează cu teoria reziduurilor.

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(P) = (x^2 \operatorname{div} \mathbf{r})\mathbf{i} + 3\operatorname{rot}[(z + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}] + \operatorname{grad}(z^3).$$

5. Relațiile Cauchy–Riemann de olomorfie ale unei funcții complexă de variabilă complexă.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se integreze ecuația diferențială  $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$ .
2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă

$$(x - a)\frac{\partial u}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial u}{\partial y} + (z - c)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că  $\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{2x}{z}\mathbf{i} + \frac{2y}{z}\mathbf{j} - \frac{x^2 + y^2}{z^2}\mathbf{k}$  este câmp vectorial irotațional și să se determine potențialul scalar.

**Răspuns.**  $\mathbf{v}(P) = \text{grad } \varphi(P)$ , unde  $\varphi(P) = \frac{x^2 + y^2}{z} + C$ .

4. Să se determine soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația

$$2x\frac{\partial z}{\partial x} - 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

cu condiția inițială  $z(2, y) = y^2 + 1$ .

**Răspuns:** Integrala primă este  $x^3y^2 = C$  și soluția căutată este  $z = \frac{1}{8}x^3y^2 + 1$ .

5. Să se deducă seria Taylor a funcției  $f(z) = e^z$  în vecinătatea originii.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$  și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele inițiale  $y(0) = 0$  și  $y'(0) = 1$ .

**Indicație:** Soluția particulară se caută de forma  $y_p = Ax^2e^{3x}$ , unde  $A$  este constantă ce se determină din condiția ca  $y_p$  să fie soluție a ecuației date.

2. Să se determine soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se determine funcția derivabilă  $\varphi(x)$  astfel încât câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(P) = 2x\varphi(x)\mathbf{i} - y\varphi(x)\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$

să fie solenoidal.

**Indicație.** Se impune condiția  $\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$ .

**Răspuns:**  $\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{6x^2}{5}$ .

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{|z|=3/2} \frac{z^3 \cdot e^z}{(z-1)^2(z^2 + iz + 2)} dz.$$

5. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 3$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple. Se obține

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3}$$

după care se folosește seria geometrică cu rația  $q$ , unde  $|q| < 1$ .

**Răspuns:**  $f(z) = -\frac{1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-3)^n$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă și cu coeficienți constanți

$$y'' + 6y' + 8y = 2 \sin x + 3 \cos x.$$

**Indicație:** Soluția particulară se caută de forma  $y_p = A \cos x + B \sin x$ .

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă

$$xy \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} + z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 0$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple. Se obține

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-3},$$

se pune în evidență binomul  $z-3$ , după care se folosește seria geometrică cu rația  $q$ , unde  $|q| < 1$ .

**Răspuns:**  $f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$ .

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4 \cos x} dz.$$

**Indicație.** Este o integrală de forma  $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx$ , unde  $\mathcal{R}$  este o funcție rațională. Se face schimbarea de variabilă  $z = e^{ix}$ .

**Răspuns:**  $I = \pi/4$ .

5. Să se determine seria Laurent a ramurii principale a funcției complexe de variabilă complexă  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$  în coroana circulară  $1 < |z| < \infty$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți

$$y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele inițiale  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

**Indicație:** Soluția particulară se caută de forma  $y_p = Axe^{3x}$ , unde  $A$  este constantă ce se determină din condiția ca  $y_p$  să fie soluție a ecuației date.

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și omogenă

$$(x - y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 2$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple, punându-se în evidență în același timp binomul  $z - 2$ . Se obține

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1 + (z - 2)} + \frac{2}{z - 2} + \frac{1}{1 - (z - 2)}$$

după care se folosește seria geometrică cu rația  $q$ , unde  $|q| < 1$ .

**Răspuns:**  $f(z) = \frac{2}{z - 2} + 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (z - 2)^{2n}$ .

4. Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(P) = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} + z(x^2 + y^2) \mathbf{k}$$

și suprafața de câmp care trece prin curba  $(\Gamma) : \begin{cases} x = 2y \\ z = a, \end{cases}$  unde  $a \in \mathbb{R}$ .

5. Să se demonstreze că funcția complexă  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  are în punctul  $z_0 = 0$  un punct singular esențial neizolat.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți

$$y'' - 7y' + 12y = xe^{3x}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele inițiale  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

**Indicație:** Soluția particulară se caută de forma  $y_p = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$ , unde  $A$  și  $B$  sunt constante reale.

2. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasi–liniară neomogenă

$$(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 1$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple, punându-se în evidență în același tipm binomul  $z - 1$ . Se obține

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z-1} - \frac{2}{1-(z-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}}$$

după care se folosește seria geometrică cu rația  $q$ , unde  $|q| < 1$ .

**Răspuns:**  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - 2 \right) (z-1)^n$ .

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{2 + \cos x} dx.$$

**Indicație.** Este o integrală de forma  $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin x, \cos x) dx$ , unde  $\mathcal{R}$  este o funcție rațională. Se face schimbarea de variabilă  $z = e^{ix}$ .

5. Serii de funcții de o variabilă complexă uniform convergente. Proprietăți.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți

$$y'' + 11y' + 30y = e^{3x}$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele inițiale  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

**Indicație:** Soluția particulară se caută de forma  $y_p = Ae^{3x}$ , unde  $A$  este constantă ce se determină din condiția ca  $y_p$  să fie soluție a ecuației date.

2. Să se găsească suprafața integrală a ecuației cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară și neomogenă

$$xy \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

care trece prin curba  $(C_a)$  de ecuații

$$(C_a) : \begin{cases} x &= a \\ 2ayz &= a^2 + 2, \end{cases}$$

unde  $a$  este o constantă reală arbitrară și pozitivă.

3. Să se arate că dezvoltarea în serie Taylor a funcției  $\cos z$  este

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

4. Să se arate că  $\mathbf{v}(P) = \mathbf{v}(x, y, z) = yz(2x+y+z)\mathbf{i} + zx(x+2y+z)\mathbf{j} + xy(x+y+2z)\mathbf{k}$  este un câmp vectorial irotațional și să se determine potențialul lui scalar.

**Indicație.** Se arată că  $\text{rot } \mathbf{v}(P) = \mathbf{0}$  și se determină funcția scalară  $\varphi(P)$  cu proprietatea  $\mathbf{v}(P) = \text{grad } \varphi(P)$ .

**Răspuns:** Funcția potențial are expresia

$$\varphi(P) = \int_{P_0P} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^x v_1(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y v_2(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt.$$

Se găsește  $\varphi(x, y, z) = xyz(x + y + z) + C$ , unde  $C$  este o constantă reală.

5. Funcțiile circulare și funcțiile hiperbolice în complex.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale liniară, neomogenă, cu coeficienți constanți

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$$

și apoi să se rezolve problema lui Cauchy cu datele inițiale  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ .

**Indicație:** Ecuația caracteristică a ecuației diferențiale omogene  $y'' - 2y' + 2y = 0$  are rădăcinile complex conjugate  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ . Soluția generală a ecuației omogene asociate este  $y_0 = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$ . Soluția generală a ecuației date este  $y = y_0 + y_p$ , unde  $y_p$  este o soluție particulară a ecuației date. Soluția particulară se caută de forma  $y_p = x(A \cos x + B \sin x)e^x$ , unde  $A$  și  $B$  sunt constante care se determină din condiția ca  $y_p$  să fie soluție a ecuației date. Se determină apoi soluția problemei lui Cauchy.

2. Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasiliniară  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$  cu condiția inițială  $z(2, y) = 1 + y^2$ .
3. Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)2^n} (z-1+i)^n$$

și să se reprezinte grafic discul de convergență.

**Răspuns:** Raza de convergență este  $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

**Răspuns:**  $I_1 = I_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ .

5. Expresia derivatelor unei funcții olomorfe.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.



Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se găsească soluția problemei lui Cauchy a ecuației  $y'' - 2y' + 10y = 0$  cu condițiile inițiale  $y(\pi/6) = 0$ ,  $y'(\pi/6) = e^{\pi/6}$ .
2. Să se determine constantele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția

$$f(z) = (\cosh y + a \sinh y) \cos x + i(\cosh y + b \sinh y) \sin x$$

să fie olomorfă în întreg planul complex la distanță finită și apoi să se calculeze  $f'(z)$ .

**Răspuns:**  $a = b = -1$ . Funcția are forma  $f(z) = \cos z + i \sin z = e^{iz}$ , de unde găsim  $f'(z) = ie^{iz}$ .

3. Să se găsească soluția generală a sistemului simetric

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

**Indicație:** Se determină două integrale prime independente funcțional.

4. Să se determine forma trigonometrică a numărului complex  $z = \sqrt{3} + i$ .

**Indicație.** Se determină modulul și argumentul numărului  $z$ . Se găsește  $|z| = 2$  și  $\text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$ .

**Răspuns:**  $z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ .

5. Serii Taylor.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

### Examen

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , unde  $z = x + iy$ , știind că partea imaginară este

$$v(x, y) = (x \sin y + y \cos y)e^x + x + y$$

și că valoarea funcției în  $z_0 = 0$  este  $f(z_0) = 0$ .

**Indicație:** Se folosesc condițiile Cauchy–Riemann și independența de drum a unei integrale curbilinii și se găsește

$$u(x, y) = (x \cos y - y \sin y)e^x + x - y.$$

Pentru a pune în evidență variabila  $z$  se face  $y = 0$  și se trece  $x$  în  $z$ .

**Răspuns:**  $f(z) = z(e^z + 1 + i)$ .

2. Folosind definiția, să se arate că funcția complexă

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

este monogenă în orice punct  $z \in \mathbb{C}$  și  $f'(z) = 2z$ .

**Indicație.** Se studiază existența limitei  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ .

3. Să se determine punctele singulare la distanță finită ale funcției

$$f(z) = \frac{z^8 + 1}{(z^2 + 4)^3}$$

și să se precizeze comportarea ei în punctul de la infinit.

4. Să se calculeze integrala curbilinie în complex  $I = \int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0}$ , unde curba  $C_r$  este cercul de rază  $r$  cu centrul în punctul  $z_0$  parcurs în sens trigonometric.

5. Câmpuri vectoriale. Linii și suprafețe de câmp.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2011

Matematici speciale

Examen

1. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' - 3y' + 2y = (3x - 2)e^x.$$

**Indicație.** Soluția generală este de forma  $y = y_0 + y_p$  unde  $y_0$  este soluția generală a ecuației omogene asociată și  $y_p$  este o soluție particulară a ecuației date. Soluția particulară se caută în forma  $y_p = x(Ax + B)e^x$ .

**Răspuns.**  $y = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{x}{2}(3x + 2)e^x$ .

2. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , unde  $z = x + iy$ , știind că partea imaginară este

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x$$

și că valoarea funcției în  $z_0 = 0$  este  $f(z_0) = i$ .

**Indicație:** Se folosesc condițiile Cauchy–Riemann și independența de drum a unei integrale curbilinii și se găsește

$$v(x, y) = -y^3 + 3x^2y - x^2 + y^2 - y + 1,$$

Pentru a pune în evidență variabila  $z$  se face  $y = 0$  și se trece  $x$  în  $z$ .

**Răspuns:**  $f(z) = z^3 - iz^2 - z + i$ .

3. Să se dezvolte în serie Taylor funcția  $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$  în vecinătatea punctului  $z_0 = 1$ .

4. Să se determine reziduurile funcției  $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^n}$ , unde  $n > 1$  este un număr natural.

**Răspuns:** Există doi poli multipli de ordinul  $n$  :  $z_1 = i$ ;  $z_2 = -i$ . Reziduurile în aceste puncte sunt  $\text{Rez}[f(z), z_1] = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2} = -\text{Rez}[f(z), z_2]$ .

5. Proprietăți ale transformatei Fourier.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , unde  $z = x + iy$ , știind că partea imaginară este

$$v(x, y) = (x \sin y + y \cos y)e^x$$

și că valoarea funcției în  $z_0 = 0$  este  $f(z_0) = 0$ .

**Răspuns:**  $f(z) = ze^z$ .

2. Să se determine reziduurile funcției complexe inclusiv în  $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

**Indicație.** Constatăm că  $z_1 = 0$  este pol triplu, iar  $z_2 = 1$  și  $z_3 = -1$  sunt poli simpli.

**Răspuns:**  $\text{rez}[f(z), z_1] = 1$ ;  $\text{rez}[f(z), z_2] = -\frac{1}{2}$ ;  $\text{rez}[f(z), z_3] = -\frac{1}{2}$ . Pentru calculul reziduului în punctul de la infinit aplicăm rezultatul: *suma tuturor reziduurilor este zero*.

3. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta.$$

**Indicație.** Aceste integrale se determină simultan considerând combinația

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta.$$

Se efectuează schimbarea de variabilă  $z = e^{i\theta}$  și ultima integrală devine

$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1 + a^2)z + a} dz$$

care se calculează folosind teorema reziduurilor.

**Răspuns:**  $I_1 = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}$ ,  $I_2 = 0$ .

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(t)$ , periodică de perioadă  $2\pi$ ,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

5. Domeniul de convergență al unei serii Laurent.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

## Sesiunea ianuarie-februarie 2011

### Matematici speciale

#### Examen

1. Fie câmpurile scalare  $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $\psi(x, y, z) = \|\mathbf{c} \times \mathbf{r}\|$ , unde  $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  și  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial  $\mathbf{w}(x, y, z) = \text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi$  și suprafața de câmp care trece prin curba  $\Gamma : x = y, x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y - 2z = 0$ .

**Răspuns:** Liniile de câmp sunt  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \\ x + y + z = C_2 \end{cases}$  iar suprafața de câmp este sfera  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 3 = 0$ .

2. Să se determine funcția complexă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , unde  $z = x + iy$ , știind că partea reală este  $u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}$  și  $f(1) = 0$ .

**Indicație.** Folosind formula  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$ , se determină  $f'(z)$ . Pentru a găsi expresia sa în funcție de  $z$ , se face  $y = 0$  și se trece  $x$  în  $z$ . Rezultă  $f'(z) = -\frac{2}{(1+z)^2}$ . **Răspuns.**  $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ .

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f$  de perioadă  $2\pi$ , definită pe intervalul  $(-\pi, \pi)$ , prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{pentru } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

**Răspuns:**  $a_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}$ ,  $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ .

4. Folosind teorema reziduurilor, să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{|z|=3} \frac{1}{z^3(z^2 - 1)(z - 4)} dz.$$

**Răspuns.**  $I = -\frac{\pi i}{480}$ .

5. Serii de puteri în complex. Teorema lui Abel.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este două ore.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția

$$z = xy \ln(x^2 - y^2)$$

satisface egalitatea

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2(z + xy).$$

2. Să se determine extremele locale ale funcției reale de două variabile reale

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C (x^2 + y^2)(\ln z) ds$$

unde curba  $(C)$  este reprezentată parametric prin ecuațiile

$$(C) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

4. Utilizând o schimbare de variabile adecvată să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$$

unde domeniul  $D$  este coroana circulară  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$ .

5. Calculul integralelor duble pe domenii simple în raport cu axa  $Ox$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivata funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x, y, z) = e^{\frac{z}{x}} \sin y$$

în punctul  $M_0(3, 0, -1)$  după direcția versorului vectorului  $\mathbf{v} = (2, -5, 7)$ .

2. Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru cu limitele de integrare variabile, să se determine funcția  $J(y)$  definită ca o integrală depinzând de parametrul  $y$

$$J(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{1 + x^2} dx.$$

**Indicație.** Se aplică teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru cu limitele de integrare variabile de forma  $J(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ . Derivata funcției  $J(y)$  este

$$J'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

3. Evaluați integrala de suprafață de tipul întâi

$$I = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2 + z) d\sigma$$

unde  $(\mathcal{S})$  este porțiunea din paraboloidul de rotație cu vârful  $V(0, 0, 4)$  punct de maxim, de ecuație  $z = 4 - x^2 - y^2$ , situată în semispațiul superior  $z \geq 0$ .

4. În expresia diferențială  $E(x, y) = x y' + x \cos \frac{y}{x} - y + x$ , funcția  $y = y(x)$  este derivabilă. Ce devine această expresie dacă se efectuează schimbarea de variabilă  $\frac{y}{x} = z$ , unde noua funcție este  $z = z(x)$ ?

5. Funcția reală de mai multe variabile reale definită implicit de ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Să se arate că derivatele parțiale mixte de ordin 2 ale acestei funcții în punctul  $(0, 0)$  nu sunt egale.

**Răspuns:**  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1.$

2. Integrala dublă  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  este prezentată ca iterația de integrale simple în forma  $I = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} f(x, y) dx$ . Să se precizeze și să se figureze grafic domeniul de integrare  $D$  și apoi să se prezinte  $I$  ca iterație de integrale simple în cealaltă ordine.

**Răspuns:**  $I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$

3. Să se calculeze direct și folosind formula integrală a lui Green, integrala curbilinie  $I = \int_C -x^2 y dx + xy^2 dy$ , unde  $C$  este cercul  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  parcurs în sens invers acelor de ceasornic.

**Răspuns:**  $I = \frac{\pi R^4}{2}.$

4. Să se determine volumul elipsoidului care are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

**Răspuns:**  $I = \frac{4\pi abc}{3}.$

5. Aplicațiile în mecanică și geometrie ale integralei de suprafață de speța întâi.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivatele parțiale de ordin 1, 2, 3 pentru  $f(x, y, z) = xye^z$ .
2. Să se determine extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y, z) = xyz$ , definită pe mulțimea deschisă  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y \geq z > 0\}$ , știind că variabilele sale sunt supuse legăturilor

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

**Indicație.** Se va arăta că funcția lui Lagrange,

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z),$$

are punctele staționare:

$$(2, 2, 1; \lambda_1 = 4, \mu_1 = -2); \quad (7/3, 4/3, 4/3; \lambda_2 = 16/9, \mu_2 = -4/3),$$

iar  $M_1(2, 2, 1)$ ,  $M_2(7/3, 4/3, 4/3)$  sunt puncte de minim și maxim condiționat.

3. Calculați integrala curbilinie de prima speță  $I = \int_C \sqrt{y(2-y)} ds$ , unde  $C : x = t - \sin t; y = 1 - \cos t$ , iar  $t \in [0, \pi/2]$ . **Răspuns:**  $I = 4/(3\sqrt{2})$ .
4. Folosind coordonatele polare generalizate în plan, să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt[3]{5 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}},$$

unde  $D$  este coroana eliptică  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 4\}$  limitată de elipsele omofocale:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ;  $\frac{x^2}{(2a)^2} + \frac{y^2}{(2b)^2} - 1 = 0$ , iar  $a > 0$ ,  $b > 0$  sunt semiaxe elipsei interioare.

5. Integrala triplă și aplicațiile ei în mecanică și geometrie.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $z = y \cdot \sin(x^2 - y^2)$  satisface egalitatea

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine valorile extreme ale funcției reale de două variabile reale

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

3. Derivând în raport cu parametrul  $y$ , să se calculeze integrala

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(y^2 - \sin^2 \theta) d\theta, \quad y > 1.$$

**Indicație.** În integrala obținută după derivarea lui  $J(y)$  se face substituția  $\operatorname{tg} \theta = t$ .

4. Scrieți formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip în plan

$$I = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

pe o curbă  $C$  de ecuații parametrice:  $x = \varphi(t)$ ;  $y = \psi(t)$ , unde  $t \in [a, b]$  și calculați integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_C xy dx + (x^2 - y) dy,$$

unde  $C$  este curba plană de ecuații parametrice  $C : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3, \end{cases}$  iar  $t \in [0, 1]$ .

5. Să se definească domeniul plan  $D_y$ , simplu în raport cu axa  $Oy$ , să se scrie formula de calcul a integralei duble

$$I = \iint_{D_y} f(x, y) dx dy$$

și apoi determinați valoarea integralei duble  $I = \iint_D xy dx dy$ , unde  $D$  este domeniul plan limitat de parabola  $y = x^2$  și de dreapta  $y = 2x + 3$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Arătați că funcția  $z = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$  verifică egalitatea (ecuația lui Laplace)  
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

2. Să se arate că integrala improprie de prima speță  $I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$  este convergentă și să i se determine valoarea.

**Indicație.** Se aplică criteriul de convergență în  $\alpha$ .

R:  $I = \ln 2$ .

3. Folosind integrala dublă, să se determine volumul  $V$  al corpului mărginit de paraboloidul de rotație de ecuație  $z = 6 - x^2 - y^2$ , cu axa de rotație axa  $Oz$  și vârful (punct de maxim) în  $A(0, 0, 6)$ , și de conul circular  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Indicație.** Corpul ocupă un domeniu simplu în raport cu axa  $Oz$  pentru că

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 6 - x^2 - y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D_{xy}\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția sa pe planul  $Oxy$ . Această proiecție este discul de rază 2 cu centrul în origine  $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ . Pentru calculul integralei duble se folosesc coordonatele polare  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ .

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz,$$

unde  $V$  este domeniul tridimensional mărginit de elipsoidul de semiaxe  $a > 0, b > 0, c > 0$  de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ .

**Indicație.** Volumul este dat de  $\text{Vol} V = \iiint_V dx dy dz$ . Se trece la coordonatele sferice (polare) generalizate.

**Răspuns:**  $I = \frac{4\pi abc}{5}$ .

5. Integrala curbilinie de speța întâi (de primul tip) și aplicațiile ei în mecanică (firul material) și geometrie (lungimea unui arc de curbă).

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția

$$w = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad \text{unde } f \in C^2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^2,$$

satisface egalitatea

$$x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

2. Să se determine extremele condiționate ale funcției reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x + 2y - 2z$$

cu legătura  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$ .

3. Să se arate că integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_C e^{(-x^2+y^2)} (\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy)$$

luată pe o curbă ( $C$ ) închisă, netedă pe porțiuni, este nulă.

4. Utilizând o schimbare de variabile adecvată să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D (4x - 3 - x^2 - y^2) dx dy$$

unde domeniul  $D$  este discul închis (bila închisă din  $\mathbb{R}^2$ )

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4x + 3 \leq 0\}.$$

**Indicație.** Se scrie  $D$  în forma  $(x-2)^2 + y^2 - 1 \leq 0$  și se face schimbarea de variabile  $x-2 = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Se găsește  $I = \pi/2$ .

5. Spațiul euclidian (prehilbertian)  $\mathbb{R}^n$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcției reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

2. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

iar  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$  este o funcție reală de două variabile reale, diferențiabilă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

3. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

unde domeniul  $D$  este coroana circulară definită prin

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

4. Să se determine aria suprafeței  $S$  tăiată din paraboloidul hiperbolic

$$(S) : z = xy$$

de cilindru circular

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

5. Formula de calcul a integralei triple pe domenii simple în raport cu axa  $Oz$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$  verifică egalitatea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

2. Să se arate că funcția reală de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z} \ln x + x \cdot \arctg\left(\frac{y+z}{x}\right),$$

verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = f(x, y, z) + \frac{xy}{z}.$$

3. Să se afle extremele condiționate ale funcției obiectiv

$$f(x, y, z) = x - 2y + 2z,$$

cunoscând că variabilele sale satisfac legătura

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

4. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \ln z \cdot ds,$$

unde arcul de curbă în spațiu  $C$  are ecuațiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = e^t \cdot \cos t, \\ y = e^t \cdot \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

5. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

unde domeniul  $V$  este mărginit de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Teorema de existență și unicitate a unei funcții reale de o variabilă reală definită implicit de ecuația  $F(x, y) = 0$ , unde  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Să se arate că funcția  $z = (x^2 + y^2) \arctg \frac{y}{x}$  verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z.$$

3. Determinați extremele locale ale funcției reale de trei variabile reale

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 y + yz + 32x - z^2.$$

4. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

unde  $D$  este mulțimea din planul  $Oxy$  definită de

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\},$$

iar  $a > 0$  și  $b > 0$  sunt semiaxele elipsei care constituie frontiera domeniului  $D$ .

5. Calculați integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

unde domeniul de integrare  $V$  este mulțimea din spațiul euclidian tridimensional  $Oxyz$  mărginită de suprafețele: paraboloidul de rotație cu axa de rotație  $Oz$  și vârful în origine, de ecuație  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ; și de planul  $z = 2$ , paralel cu planul  $Oxy$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

## Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

2. Să se arate că derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției reale

$$z(x, y) = \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x}$$

satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x y \frac{\partial z}{\partial y} = y z.$$

3. Să se verifice dacă integrala curbilinie

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

este independentă de drum pe  $\mathbb{R}^3$  și apoi să se calculeze valoarea sa aplicând formula lui Leibniz–Newton.

4. Calculați integrala triplă

$$I = \iiint_V y \, dx dy dz$$

unde  $V$  este tetraedrul din primul octant limitat de planele de coordonate și de planul  $x + y + z - 2 = 0$ .

5. Aplicații ale integralei duble în geometrie (aria unui domeniu plan) și în mecanică (masa, centrul de greutate și momente de inerție ale unei plăci plane).

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând de două ori integrarea prin părți, să se calculeze integrala improprie de speța întâi

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx,$$

unde  $a$  este un număr real pozitiv iar  $b \in \mathbb{R}$ .

2. Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

3. Să se determine elementul de arc  $ds$  și să se calculeze lungimea curbei

$$(C) \quad \begin{cases} x &= a e^{-t} \cos t \\ y &= a e^{-t} \sin t \\ z &= b e^{-t}, \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$

unde  $a, b$  sunt constante reale.

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

unde domeniul de integrare  $V$  este situat în semispațiul superior  $z \geq 0$ , conține o porțiune din semiaxa pozitivă  $Oz$  și este delimitat de sferele:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

și de conul cu vârful în origine de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

5. Aplicații ale integralelor duble în mecanică: masa, centrul de greutate, momente de inerție și momente statice ale unei plăci plane; fluxul luminos incident pe o placă; debitul unui fluid prin secțiunea transversală a unui canal; volumul unui cilindroid

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parțiale ale funcției reale

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \sin \frac{x}{y}$$

satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y).$$

2. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde domeniul  $D$  este definit prin

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}.$$

3. Să se calculeze masa plăcii plane materiale omogene de densitate egală cu unitatea și configurația coroana eliptică mărginită de elipsele:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4 = 0$$

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

unde  $V$  este coroana sferică cuprinsă între sferele

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

5. Aria unei porțiuni de suprafață determinată cu ajutorul integralei duble.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Arătați că funcția  $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln \frac{x - y}{x + y}$  verifică egalitatea

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

2. Determinați punctele din  $\mathbb{R}^2$  în care, local, funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 2$$

are valori extreme.

3. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speță (de primul tip)

$$I = \int_{AB} (x + y + z) ds,$$

unde arcul de curbă în spațiu  $AB$  are ecuațiile parametrice

$$AB : \begin{cases} x &= a \cos t \\ y &= a \sin t \\ z &= bt, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

iar  $a$  și  $b$  sunt constante reale pozitive.

4. Folosind schimbarea de variabile ”trecerea la coordonatele polare  $\rho$  și  $\theta$ ,” să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy,$$

unde  $D \subset \mathbb{R}^2$  este coroana circulară de raze 1 și  $e$ , cu centrul în origine, adică

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}.$$

5. Derivata după o direcție  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ , cu  $\|\mathbf{s}\| = 1$ , a unei funcții reale de mai multe variabile reale (sau de variabila vectorială  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ )  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $D$  este un domeniu din  $\mathbb{R}^n$ , într-un punct  $\mathbf{a} \in D$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012  
Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parțiale ale funcției reale

$$z = y \sin(x^2 - y^2)$$

satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},$$

definită în primul octant  $x > 0, y > 0, z > 0$ .

3. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

unde  $D$  este coroana circulară

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\}.$$

4. Să se calculeze integrala de suprafață de speța întâi

$$I = \iint_S (xy + yz + zx) d\sigma,$$

unde  $S$  este porțiunea din conul cu vârful în origine și axa de rotație  $Oz$

$$(\mathcal{S}) : z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

decupată de cilindrul circular

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  ce se sprijină pe cercul din planul  $xOy$  cu centrul pe  $Oy$  în punctul  $(0, a, 0)$  și raza egală cu  $a > 0$ .

5. Derivabilitatea și derivate parțiale de ordinul întâi ale unei funcții reale de mai multe variabile reale

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

## Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că derivatele parțiale ale funcției reale  $z = y \cos(x^2 - y^2)$  satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y) = xy$  cu legătura  $F(x, y) = 2x + 3y - 5 = 0$ .

3. Să se calculeze integrala dublă  $I = \iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , unde  $D$  este coroana circulară  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}\}$ .

4. Să se calculeze integrala de suprafață de speța a doua

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

unde  $S$  este fața exterioară a emisferei  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  situată în semispațiul superior  $z \geq 0$ .

**Indicație.** Versorul  $\mathbf{n}$  al normalei exterioare emisferei într-un punct  $M(x, y, z)$  este coliniar și de același sens cu vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  al punctului  $M$ , a cărui mărime este raza sferei. Deci  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}$ , ceea ce arată că  $\cos \alpha = \frac{x}{a}$ ,  $\cos \beta = \frac{y}{a}$ ,  $\cos \gamma = \frac{z}{a}$ . Ținând cont că  $dy dz = \cos \alpha d\sigma$ ,  $dz dx = \cos \beta d\sigma$ ,  $dx dy = \cos \gamma d\sigma$ , rezultă că  $I$  se reduce la integrala de suprafață de speța întâi

$$I = \frac{1}{a} \iint_S (x^3 + y^3 + z^3) d\sigma,$$

unde  $d\sigma$  este elementul de arie al emisferei, a cărei ecuație poate fi scrisă în forma carteziană explicită  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Integrala dublă la care se reduce  $I$  se va calcula folosind coordonatele polare în plan:  $x = \rho \cos \theta$ ;  $y = \rho \sin \theta$ .

**Răspuns:**  $I = \frac{\pi a^4}{2}$ .

5. Derivate parțiale de ordin superior ale unei funcții reale de mai multe variabile reale.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Derivabilitate parțială și derivate parțiale de ordin superior ale unei funcții reale de mai multe variabile reale.
2. Arătați că funcția  $\omega(x, y, z) = f(x \cdot y, x^2 + y^2 - z^2)$ , unde  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  este o funcție reală de două variabile reale, satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$xz \frac{\partial \omega}{\partial x} - yz \frac{\partial \omega}{\partial y} + (x^2 - y^2) \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că dacă  $a$  și  $b$  sunt constante reale pozitive, atunci integrala improprie de speța întâi  $I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$  are valoarea  $I = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}$ .
4. Calculați integrala triplă

$$I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz,$$

unde domeniul de integrare  $V$  este definit de

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}\},$$

proiecția sa pe planul  $Oxy$  este discul  $D$  cu centrul în origine și rază  $a\sqrt{2}$ , iar  $a$  este o constantă reală pozitivă.

$$\textbf{Răspuns: } I = \frac{5\pi a^4}{3}.$$

5. Să se determine extremele locale ale funcției reale de trei variabile reale

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze diferențialele  $df(x, y)$  și  $d^2f(x, y)$  pentru funcția  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ , unde  $y \neq 0$ .
2. Să se arate că funcția  $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$  satisface egalitatea

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3. Determinați punctele de extrem local ale funcției reale de trei variabile reale

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4.$$

4. Scrieți formula de calcul a integralei curbilinii de primul tip în spațiu

$$I = \int_C f(x, y, z) ds$$

și calculați integrala curbilinie de primul tip  $I = \int_C (x^2 + y^2) \ln z \, ds$ , unde  $C$  este curba din spațiu de ecuații parametrice

$$C : \begin{cases} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t, \\ z &= e^t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

5. Folosind coordonatele polare în plan și formula schimbării de variabile în integrala dublă, să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy,$$

unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  este discul închis cu centrul în origine și rază  $R > 0$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$  verifică relația

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

2. Să se calculeze aria domeniului  $D$ , din planul  $Oxy$ , mărginit de curbele:

$$\begin{aligned} xy &= a; & xy &= b; & b > a > 0 \\ y &= \alpha x; & y &= \beta x, & \beta > \alpha > 0, \end{aligned}$$

situat în primul cadran al sistemului de coordonate  $Oxy$ .

**Indicație.** În integrala dublă  $I = \iint_D dx dy$ , care dă aria domeniului  $D$ , se efectuează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases} \implies \begin{cases} x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y &= \sqrt{uv}. \end{cases}$$

3. Arătați că funcția  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cos \frac{y}{x}$  este omogenă, precizați gradul de omogeneitate  $m$  și verificați identitatea lui Euler

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = m f(x, y).$$

**Indicație.** Se arată că  $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$ , se precizează gradul de omogeneitate  $m$  și se verifică apoi identitatea.

4. Să se determine punctele de extrem local ale funcției

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 3y.$$

5. Integrale improprii

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n}}.$$

2. Să se arate că derivatele parțiale ale funcției reale

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x}$$

satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y).$$

3. Să se calculeze derivata funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x, y, z) = e^{\frac{z}{x}} \sin y$$

în punctul  $M(3, 0, -1)$  după direcția versorului vectorului  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

4. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

unde  $D$  este coroana circulară

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}\}$$

mărginită de cercurile concentrice cu centrul în origine de raze  $\pi/4$  și  $\pi/3$ .

5. Schimbarea de variabile în integrala triplă.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se scrie formula lui Mac Laurin, cu restul lui Lagrange de ordinul  $2n$ , pentru funcția  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ,  $f(t) = \sin t$ .
2. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speță  $I = \int_C y e^{-x} ds$ , unde curba plană  $C$  are ecuațiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 1, \end{cases}$$

iar parametrul  $t$  ia valori în intervalul  $[0, 1]$ .

$$\textbf{Răspuns: } I = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

3. Să se calculeze integrala triplă  $I = \iiint_V (x+y+z) dx dy dz$ , unde  $V$  este domeniul tridimensional mărginit de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ .  
**Răspuns:**  $I = 0$ .
4. Verificați că forma diferențială

$$\omega = (3x^2y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy$$

este o expresie diferențială exactă și determinați o primitivă a sa.

**Indicație.** Dacă expresia diferențială  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  are funcțiile  $P$  și  $Q$  definite pe un domeniu simplu conex  $D \subset \mathbb{R}^2$  și admit derivate parțiale, prima în raport cu  $y$  și a doua în raport cu  $x$ , atunci  $\omega$  este diferențială exactă pe  $D$  dacă  $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ , iar o primitivă a sa (o funcție diferențiabilă  $U(x, y)$  cu proprietatea  $dU(x, y) = \omega$ ) are expresia

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt.$$

5. Scimbarea de variabile în integrala dublă.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Arătați că funcția  $z = y \ln(x^2 - y^2)$  satisface egalitatea

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Să se determine elementul de arc  $ds$  și lungimea curbei

$$C : \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^2 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^2 t, \\ z = \sin 2t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip în spațiu

$$I = \int_C z \sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz,$$

unde curba  $C$  pe care se integrează are ecuațiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2],$$

iar  $a$  și  $b$  sunt constante reale pozitive.

4. Calculați integrala dublă  $I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$ , unde  $D$  este coroana circulară  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$

5. Să se calculeze integrala de suprafață de tipul al doilea

$$I = \iint_S x^3 y^2 dy dz + x^2 y^3 dz dx + 3z dx dy,$$

unde  $S$  este fața exterioară a domeniului  $V$  mărginit de paraboloidii:

$$(\Sigma_1) : z = x^2 + y^2; \quad (\Sigma_2) : z = 6 - x^2 - y^2.$$

**Indicație.** Cel de al doilea paraboloid are vârful  $A(0, 0, 6)$  ca punct de maxim. Se poate aplica formula integrală Gauss–Ostrogradski

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

unde  $V \subset \mathbb{R}^3$  este domeniul mărginit de  $S = (\Sigma_1) \cup (\Sigma_2)$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică:

1. Să se arate că funcția  $z = y \sin(x^2 - y^2)$  verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

2. Determinați extremele condiționate ale funcției  $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$  cu legătura  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

**Indicație.** Se va arăta mai întâi că funcția lui Lagrange  $\mathcal{L} = f + \lambda F$  are punctele critice  $(4/5, 3/5; 5/2)$  și  $(-4/5, -3/5; -5/2)$  și apoi că  $M_1(4/5, 3/5)$  și  $M_2(-4/5, -3/5)$  sunt puncte de extrem condiționat ale funcției scop  $f$ . **Răspuns:**  $f_{\min} = f(4/5, 3/5) = 1$ ;  $f_{\max} = f(-4/5, -3/5) = 11$ .

3. Să se calculeze integrala curbilinie  $I = \int_C -x^2 y dx + xy^2 dy$ , unde  $C$  este cercul  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  parcurs în sens direct trigonometric.

**Indicație.** Se folosește reprezentarea parametrică a cercului  $x = R \cos t$  și  $y = R \sin t$ , unde parametrul  $t$  ia valori între  $0$  și  $2\pi$ . **Răspuns:**  $I = \pi R^4/2$ .

4. Calculați integrala de suprafață de speța întâi  $I = \iint_S (x + y + z) d\sigma$ , unde  $S$  este porțiunea din conul cu vârful în origine ale cărui generatoare fac unghi de  $45^\circ$  cu axa  $Oz$ , de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , cuprinsă între planele  $z = 0$  și  $z = h > 0$ .

$$\text{R: } I = 2\pi h^3 \sqrt{2}/3.$$

5. Să se calculeze volumul acelei părți a corpului delimitat de sferele concentrice:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \quad 0 < a < b$$

și de conul circular  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  care conține o parte din semiaxa pozitivă  $Oz$ .

**Indicație.**  $\text{Vol} = \iiint_V dx dy dz$ . Această integrală se calculează folosind schimbarea de variabile. Se trece la coordonate sferice. Atenție! parametrul  $\theta$  (colatitudinea) ia valori în intervalul  $[0, \pi/4]$ .

**Răspuns.**  $\text{Vol} = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)(2 - \sqrt{2})$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând de două ori integrarea prin părți, să se calculeze integrala improprie de speța întâi

$$I = \int_0^{\infty} e^{-3x} \sin 2x dx.$$

2. Folosind teorema de derivabilitate a integralelor depinzând de parametru, să se evalueze integrala

$$\Phi(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(yx)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

**Indicație.** Dacă funcția continuă  $f(x, y)$  admite derivată parțială continuă în raport cu  $y$ , atunci integrala depinzând de parametrul  $y$

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y) dy$$

este derivabilă și  $\Phi'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  (formula de derivare a lui Leibniz).

3. Să se determine elementul de arc  $ds$  și să se calculeze lungimea curbei

$$(C) \quad \begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2} \ln \cos t, \\ z = \operatorname{tg} t - t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

4. Utilizând coordonatele polare, să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D xy e^{x^2+y^2} dx dy$$

unde  $D$  este sfertul discului de rază 1 cu centrul în origine conținut în primul cadran al planului raportat la reperul cartezian  $xOy$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

5. Diferențiale de ordin superior ale unei funcții reale de mai multe variabile reale

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Funcția reală de mai multe variabile reale definită implicit de ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0.$$

2. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speță  $I = \int_C -ydx + xdy$ , unde curba  $C$  este elipsa de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t \end{cases}$$

parcursă în sensul creșterii parametrului  $t \in [0, 2\pi]$ , iar  $a > 0$  și  $b > 0$  sunt semiaxele elipsei.

3. Fie funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pornind de la definiția derivatelor parțiale de ordinul întâi, să se calculeze

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right); \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Să se determine extremele locale ale funcției

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2y + yz + 32x - z^2.$$

5. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speță  $I = \int_C y e^{-x} ds$ , unde curba  $C$  are ecuațiile parametrice

$$C : \begin{cases} x &= \ln(1 + t^2) \\ y &= 2 \operatorname{arctg} t - t + 1, \end{cases}$$

iar parametrul curbaei  $t$  variază între 0 și 1.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze derivata funcției reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = x^2 - y^2$$

în punctul  $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$  după direcția  $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{j}$ .

2. Să se arate că funcția reală de două variabile reale  $z = z(x, y)$ ,

$$z(x, y) = xy + x \cdot \arctg \frac{y}{x},$$

definită pe un domeniu plan  $D$  care nu intersectează axa  $Oy$ , satisface ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip

$$I = \int_{\mathcal{C}} (y + 2z)dx + (z + 2x)dy + (x + 2y)dz,$$

unde  $(\mathcal{C})$  este cercul de intersecție al sferei de rază  $R > 0$  cu centrul în origine de ecuație  $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$  cu planul  $x + y + z - R = 0$ , parcurs în sens invers acelor de ceasornic dacă se privește dinspre partea pozitivă a axei  $Ox$ .

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dx dy dz$$

unde domeniul  $V$  este mărginit de paraboloidul de rotație  $z = x^2 + y^2$  și de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  și conține o parte din porțiunea nenegativă a axei  $Oz$ .

5. Integrale depinzând de parametru.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $u(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$  verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$ .

2. Să se scrie formula lui Taylor cu restul de ordin  $N = 2$  sub forma lui Lagrange, în punctul  $t_0 = 1$ , pentru funcția  $f(t) = (2t + 3) \cdot e^{2t}$ .

**Indicație.** Formula care trebuie aplicată este

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{f''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(t - t_0)^3,$$

unde ultimul termen reprezintă restul de ordin doi sub forma lui Lagrange, iar  $\xi_2 = t_0 + \theta(t - t_0)$ , cu  $\theta \in (0, 1)$ .

**Răspuns:**  $(2t + 3) \cdot e^{2t} = 5e^2 + 12e^2(t - 1) + 14e^2(t - 1)^2 + \frac{8}{3}(\xi + 3)e^{2\xi}(t - 1)^3$ .

3. Să se determine valoarea integralei improprii de speță a doua

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

**Indicație.** Se face substituția  $\sqrt{1-x} = t \implies x = 1 - t^2 = \varphi(t)$ .

**Răspuns:**  $I = \frac{\pi}{2}$ .

4. Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C (x + y + z) ds, \quad C : \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

5. Calculați integrala dublă  $I = \iint_D xy dx dy$ , unde  $D$  este domeniul mărginit de parabola  $y = x^2$  și de dreapta  $y = 2x + 3$ .

Indicație. Se arată că  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 3, x^2 \leq y \leq 2x + 3\}$ , deci este un domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$  și se aplică formula de calcul.

**Răspuns:**  $I = 331/6$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Calculați derivatele parțiale de ordin 1, 2, 3 pentru funcția reală de trei variabile reale  $f(x, y, z) = y \ln(x^2 + z^2 + 1)$ .
2. Să se studieze existența și derivabilitatea funcției  $z = z(x, y)$ , definită implicit de ecuația

$$3xyz + x^2z^2 - 5(x + y) = 0$$

și condiția  $z(1, -2) = 1$ . Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul 1 și 2 ale funcției  $z$  în punctul  $(1, -2)$ .

$$\begin{aligned} \text{R: } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -2) &= -\frac{9}{4}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, -2) = -\frac{1}{2}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, -2) &= \frac{13}{8}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1, -2) = -\frac{5}{2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, -2) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1, -2) = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3. Să se aplice formula lui Leibniz–Newton pentru calculul integralei curbilinii

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}(xdx + ydy + zdz).$$

$$\text{Răspuns: } I = \sqrt{51} - 1.$$

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz,$$

$$\text{unde } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 4z \leq 0, \ x^2 + y^2 \leq z^2\}.$$

$$\text{Răspuns: } I = 0.$$

5. Integrale improprii.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția reală de două variabile reale

$$z = xy + x \sin \frac{y}{x}$$

satisface egalitatea

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

2. Se dă expresia diferențială

$$\omega = \left( \frac{z}{x^2 y} - \frac{z}{x^2 + z^2} \right) dx + \frac{z}{xy^2} dy + \left( \frac{x}{x^2 + z^2} - \frac{1}{xy} \right) dz$$

definită pe un domeniu tridimensional  $D$  simplu conex care nu intersectează planele de coordonate  $Oyz$  și  $Ozx$ .

Să se arate că expresia diferențială  $\omega$  este o diferențială exactă și să se determine funcțiile primitive ale sale.

3. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene  $\mathcal{P} = \{D, \rho\}$ , unde densitatea  $\rho$  este constantă și egală cu unitatea, iar configurația  $D$  a plăcii este domeniul plan

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0, a > 0\}.$$

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V (x^2 y^2 + 3) dx dy dz$$

unde  $V$  este domeniul tridimensional  $V$  mărginit de paraboloidii de rotație

$$(\Sigma_1) : z = x^2 + y^2; \quad (\Sigma_2) : z = 6 - x^2 - y^2.$$

5. Diferențiabilitate și diferențiala de ordinul întâi ale unei funcții reale de mai multe variabile reale.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția reală de două variabile reale

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

unde  $D$  este o mulțime deschisă din  $\mathbb{R}^2$  care nu conține puncte ale axei  $Oy$ , verifică ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al doilea

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2f(x, y), \quad (\forall) (x, y) \in D,$$

2. Să se determine elementul de arc  $ds$  și să se calculeze lungimea curbei

$$(C) \quad \begin{cases} x = a e^{-t} \cos t \\ y = a e^{-t} \sin t \\ z = b e^{-t}, \end{cases} \quad t \in [0, +\infty)$$

unde  $a, b$  sunt constante reale.

3. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{1 + b^2 x^2 + a^2 y^2},$$

unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\}$ .

**Indicație.** Folosiți coordonatele polare generalizate în plan:  $x = a\rho \cos \theta$ ,  $y = b\rho \sin \theta$ , cu  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  și cu jacobianul  $J = ab\rho$ .

4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

unde domeniul de integrare  $V$ , este situat în semispațiul superior  $z \geq 0$ , conține o porțiune din semiaxa pozitivă  $Oz$  și este mărginit de sferele:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

și de conul cu vârful în origine de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

5. Extreme locale ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale. Teorema lui Fermat. Condiții suficiente de extrem.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze valoarea integralei improprii de prima speță

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)(x+b)},$$

unde  $a > 0, b > 0$  sunt constante date.

2. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

unde domeniul  $D$  este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{16} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\}.$$

3. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \cdot \cos\left(\frac{y}{xz}\right).$$

4. Să se determine aria suprafeței  $S$  tăiată din paraboloidul hiperbolic

$$(S) : z = xy$$

de cilindru circular

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

5. Sisteme de funcții reale de mai multe variabile reale definite implicit.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul integral al lui Cauchy, să se studieze natura seriei cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}},$$

unde  $\alpha$  este un parametru real. Discuție după  $\alpha$ .

2. Să se arate că derivatele parțiale ale funcției reale

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \sin \frac{x}{y}$$

satisfac ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f(x, y).$$

3. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

unde domeniul  $D$  este

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{36} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{9}\}.$$

4. Să se calculeze momentul de inerție față de axa  $Ox$  a solidului omogen de densitate egală cu unitatea și configurația interiorul semisferei de ecuație

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

5. Independența de drum a integralelor curbilinii

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze următoarea limită

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x}{5x+3} \right)^{2x+3}.$$

2. Să se calculeze derivatele parțiale și diferențiale de ordinul întâi ale funcției

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + y^2} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

în punctul  $(-3, 4)$ .

3. Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2.$$

4. Să se calculeze următoarea integrală dintr-o funcție rațională

$$\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}.$$

5. Să se calculeze integrala curbilinie de prima speță  $\int_{(C)} (2a - y)dx - (a - y)dy$ , unde curba  $C$  este bucla de cicloidă

$$(C) \quad \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

**Indicație.** Se aplică formula de calcul a unei integrale curbilinii de speța a doua în plan

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left( P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t) \right) dt.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se calculeze următoarea limită:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 2x - 15}.$$

2. Să se calculeze diferențialele de ordinul întâi și doi ale funcției reale de două variabile reale

$$f(x, y) = (1 + x^2 + y^2) \operatorname{arctg}(xy) + \ln \operatorname{arctg}(x^2 + y^2),$$

în punctul de coordonate  $(1, -1)$ .

3. Să se determine punctele de extrem ale funcției reale de două variabile reale

$$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 6x + 6y,$$

definită în întreg planul  $\mathbb{R}^2$ .

4. Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip

$$\int_{(C)} \sqrt{1 - x^2} dx + x dy,$$

unde curba  $(C)$  este reprezentată parametric de ecuațiile

$$(C) \quad \begin{cases} x = \cos t, \\ y = 5 \sin t, \end{cases}$$

iar parametrul  $t$  ia valori în intervalul  $[0, 2\pi]$ .

**Indicație.** *Se vor folosi formulele trigonometrice*

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

5. Să se calculeze următoarea integrală dintr-o funcție rațională

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 4}.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Sistemul  $\begin{cases} x + y + u^2 + v^2 = 1 \\ xy + u^3 + v^3 = 2 \end{cases}$  definește implicit pe  $u$  și  $v$  ca funcții de  $x$

și  $y$ . Să se determine derivatele parțiale de ordinul întâi  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$  și  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

**Indicație.** Se derivează pe rând cele două ecuații în raport cu  $x$  și apoi cu  $y$ , ținându-se cont că  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$ .

2. Arătați că funcția reală de două variabile reale

$$u(x, t) = \sin x \cdot e^{(-k^2 t)},$$

unde  $k$  este o constantă reală cunoscută, denumită **constantă de difuzie**, satisface ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea a **propagării căldurii**

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

3. Să se calculeze integrala dublă  $I = \iint_D \frac{dx dy}{(4 + x^2 + y^2)^2}$ , unde  $D$  este discul închis  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Indicație.** Se va trece la coordonate polare în plan.

**Răspuns:**  $I = \frac{9\pi}{800}$ .

4. Folosind integrala triplă, să se găsească volumul solidului mărginit de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2$  și conul  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ , situat în exteriorul conului.

**Indicație:** Sfera are centrul în punctul  $(0, 0, 2R)$  și raza  $R$ , iar conul este cu vârful în origine și axa de rotație, axa  $Oz$ . Curbele de intersecție ale conului cu sfera sunt două cercuri care se proiectează pe planul  $Oxy$  după cercurile  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  și  $x^2 + y^2 - \frac{9R^2}{25} = 0$ . Corpul este simplu în raport cu  $Oz$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, 2R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția corpului pe planul  $Oxy$  care este coroana circulară  $\frac{9R^2}{25} \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ . Integrala dublă obținută se calculează utilizând coordonatele polare.

5. Diferențiabilitatea și diferențiala de ordinul întâi ale unei funcții reale de variabilă vectorială.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(a+1)(2a+1)\dots(na+1)},$$

unde  $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}$ . Discuție după parametrul  $a$ .

**Indicație.** Se aplică criteriul raportului (*a lui D'Alembert*). Se găsește că limita este  $\frac{e}{a}$ , care se compară cu 1.

2. Să se arate că funcția

$$f(x, y) = x^n \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2}$$

verifică ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = n \cdot f(x, y).$$

3. Să se determine extremele funcției  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10$ .

4. Să se calculeze integrala improprie  $I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$ , arătând mai întâi că este convergentă.

**Indicație.** Convergența se arată utilizând **criteriul în  $\alpha$** . Se găsește  $\alpha = 1/2$ , deci mai mic ca 1, ceea ce arată că integrala improprie  $I$  este convergentă. Valoarea sa se calculează folosind, de exemplu, substituția  $x = \sin t$ .

5. Să se calculeze integrala de suprafață de prima speță

$$I = \iint_S (x + y + z) d\sigma,$$

unde  $S$  este porțiunea din sfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$  aflată deasupra planului  $z = 3$ .

**Indicație.** Arătați întâi că suprafața este **calota sferică**  $z = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , care se proiectează pe planul  $Oxy$  în discul  $D$  cu centrul în origine, de rază  $R = \sqrt{3}$ . Utilizați formula de calcul a unei integrale de suprafață de speța întâi de forma  $I = \iint_S F(x, y, z) d\sigma$ , când suprafața  $S$  este dată cartezian explicit prin ecuația  $z = f(x, y)$ , cu  $(x, y) \in D \subset Oxy$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $f(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2} - \ln y + \ln \sqrt{1 + x^2}$ , definită în semiplanul  $y > 0$ , verifică relația

$$(1 + x^2) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

2. Să se determine extremele locale ale funcției reale de două variabile reale

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - e^{x \cdot y}.$$

3. Să se calculeze  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$  și  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y)$ , dacă  $z = z(x, y)$  este definită implicit de ecuația

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

4. Știind că  $\int_0^\infty e^{-\lambda^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}$  și determinând întâi funcția

$$F(x) = \int_a^b 2ye^{-x^2 y^2} dy,$$

să se calculeze integrala improprie depinzând de doi parametri

$$J(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2 x^2} - e^{-b^2 x^2}}{x^2} dx,$$

utilizând teorema de integrabilitate a unei integrale improprii depinzând de parametru.

5. Să se calculeze integrala triplă  $I = \iiint_V x^2 y^2 z \, dx dy dz$ , unde domeniul  $V$  este mulțimea punctelor din spațiu  $\mathbb{R}^3$  mărginită de paraboloidii de rotație  $z = x^2 + y^2$  și  $z = 4 - x^2 - y^2$ .

**Indicație.** Deoarece domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$ , integrala triplă se scrie ca o iterație de două integrale, una dublă și alta simplă, depinzând de parametri  $x$  și  $y$ , și anume

$$I = \iint_D x^2 y^2 \, dx dy \int_{x^2 + y^2}^{4 - x^2 - y^2} z \, dz,$$

unde  $D$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$ , adică discul  $x^2 + y^2 \leq 2$ .  $\implies I = \frac{2\pi}{3}$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcției  $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x} + yz$ , definită pe semispațiul  $x > 0$ .

**Răspuns.** *Un singur punct staționar care este punct de tip **sa**.*

2. Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$F(x - az, y - bz) = 0,$$

unde  $F(u, v)$  este o funcție diferențiabilă, verifică relația  $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ .

**Indicație.** În egalitatea  $F(x - az(x, y), y - bz(x, y)) = 0$  se derivează compus față de  $x$ , după care se scoate  $\frac{\partial z}{\partial x}$ . Raționamentul se repetă, derivând în raport cu  $y$ , de unde va rezulta  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Valorile găsite pentru derivate trebuie să verifice relația din enunț.

3. Determinând mai întâi funcția  $J(y) = \int_0^\infty e^{-xy} dx$ , unde  $y > 0$ , să se obțină valoarea integralei  $I = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$ , utilizând teorema de derivabilitate a unei integrale depinzând de parametru.

4. Să se calculeze integrala dublă  $I = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , unde  $D$  este definit de inecuațiile:  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ;  $x - y \leq 0$ .

**Indicație.** Prima inecuație reprezintă discul închis cu centrul pe  $Ox$ , în punctul  $C(1, 0)$ , având raza 1. Frontiera discului trece prin origine. A doua inecuație reprezintă semiplanul de deasupra primei bisectoare a reperului  $Oxy$ . Astfel, domeniul  $D$  arată ca o lentilă. **Desenați-o!** Pentru calculul integralei, treceți la coordonate polare  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Lentila se transformă în domeniul  $\Omega = \{(\rho, \theta) \mid \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$ . Jacobianul transformării este  $\rho$ , iar integrala devine  $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 \cos \theta d\rho$  etc.

5. Calculați integrala de suprafață  $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , unde suprafața  $S$  este conul  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  cuprins între planele  $z = 0$  și  $z = 1$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

**Indicație.** Se aplică criteriul raportului și se găsește  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3n+2}{4n+1}$ , care la limită conduce la dubiu. Se aplică apoi criteriul lui Raabe.

2. Să se arate că funcția  $f(x, y) = x^n e^{\frac{y}{x}} + y^n \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$  verifică ecuația

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - nf(x, y) = 0.$$

3. Determinați extremele locale ale funcției  $f(x, y, z) = x + y^2 + 3z^3 - \ln(x + y + z)$ .

**Indicație.** Arătați mai întâi că funcția are punctele staționare

$$M_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{și} \quad M_2\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$$

iar apoi studiați-le natura pentru a vedea dacă sunt sau nu puncte de extrem.

4. Arătați că funcția  $F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin y) dy$  verifică relația

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} F(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \text{unde } a > 0.$$

**Indicație.** Se introduce  $F(x)$ , se aplică teorema de integrabilitate a integralelor depinzând de parametru și se ține cont că o integrală de forma  $\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$  are valoarea  $\frac{a}{a^2 + b^2}$ , unde constanta  $b$  este aici  $\sin y$ .

5. Să se calculeze integrala dublă  $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^n} \, dx dy$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ , iar domeniul  $D$  este coroana circulară definită prin inecuațiile  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

**Indicație.** Se trece la coordonatele polare în plan  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Se vede că  $\rho \in [\pi, 2\pi]$ , iar  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Jacobianul transformării este  $\rho$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se determine extremele locale ale funcției reale  $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$ .

**Indicație.** Arătați că  $f$  are un singur punct staționar, și anume  $M_0(2, 2)$ , care este un punct de minim local strict.

2. Să se arate că funcția  $f(x, y, z) = \frac{y}{x} \arcsin \frac{x}{y} + e^{xy-2z}$  verifică ecuația

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + xy \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Să se determine extremele condiționate (cu legături) ale funcției  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$  știind că coordonatele  $x, y, z$  sunt legate prin relația  $F(x, y, z) = 0$ , unde  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ .

**Indicație.** Se introduce funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

căreia  $i$  se determină extremele locale.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de speța a doua

$$I = \int_{(AB)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz,$$

unde  $(AB)$  este un arc de curbă care unește punctul  $A(1, -1, 0)$  cu punctul  $B(2, 2, 3)$ .

**Indicație.** Din enunț rezultă că integrala nu depinde de drum. **Verificați aceasta!** Determinați apoi o primitivă  $U(x, y, z)$  a expresiei diferențiale  $\omega = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz$ . Atunci  $I = U(B) - U(A)$ .

5. Să se calculeze integrala triplă  $I = \iiint_V xy \, dx dy dz$ , unde  $V$  este mulțimea de puncte din spațiu definită de inegalitățile

$$V : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq x \\ z \geq 0. \end{cases}$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n}, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Indicație.** *Aplicați criteriul raportului. Se dă peste caz de dubiu. Se studiază apoi cu criteriul lui Raabe. La limită se găsește  $2 - a$ , care se compară cu 1.*

2. În ecuația cu derivate parțiale  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , să se treacă la noile variabile

$$\text{independente } u \text{ și } v \text{ știind că } \begin{cases} u = y - ax \\ v = y + ax, \quad a > 0. \end{cases}$$

**Indicație.** *Se folosește regula lanțului de derivare a unei funcții compuse. Se ajunge la  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$  a cărei soluție generală este  $z = f(u) + g(v)$ , din care deducem că  $z(x, y) = f(y - ax) + g(y + ax)$ , unde  $f$  și  $g$  sunt funcții arbitrare.*

3. Folosind derivabilitatea integralelor depinzând de parametru, să se determine

$$J(y) = \int_0^{\infty} \frac{\arctg(xy)}{x(1+x^2)} dx.$$

**Indicație.** *Se derivează  $J(y)$  folosind teorema de derivare a unei integrale depinzând de parametru. Se obține integrala  $J'(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} dx$ , care se calculează descompunând integrantul în fracții simple, obținându-se expresia lui  $J'(y)$ . Se integrează apoi expresia lui  $J'(t)$  între limitele 0 și  $y$ .*

4. Să se calculeze integrala dublă  $I = \iint_D (x+y) dx dy$ , unde domeniul  $D$  este mărginit de curbele  $y^2 = 2x$  și  $x+y=2$ .

**Indicație.**  *$D$  este un sector de parabolă.  $D$  este simplu în raport cu axa  $Ox$ . Proiecția lui  $D$  pe axa  $Oy$  este compactul  $[-4, 2]$ .*

5. Să se calculeze volumul corpului  $V$  limitat de suprafețele:

$$z = x^2 + y^2; \quad z = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad x + y = 1.$$

**Indicație.** *Vol  $V = \iiint_V dx dy dz$ , unde  $V$  este simplu în raport cu  $Oz$ ,*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, \quad 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

*iar  $D_{xy}$  este domeniul mărginit de drepte:  $x = 0; y = 0; x + y - 1 = 0$ .*

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (n+n)}.$$

2. Să se arate că funcția  $f(x, y, z) = e^{\frac{x^3}{y}} + x^4 - \frac{x^6 z}{y^2}$  este o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + 3y \frac{\partial f}{\partial y} + 4 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y; z) = 0$ , unde  $F(x, y; z) = (y + z) \sin z - y(x + z)$ , verifică relația  $z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ .

4. Să se arate că integrala improprie  $I = \int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} dx$  este convergentă și apoi să se determine valoarea sa.

5. Să se calculeze elementul de arc  $ds$ , precum și lungimea  $L$ , ale curbei

$$C : \begin{cases} x = t \\ y = \arcsin t \\ z = \frac{1}{4} \ln \frac{1-t}{1+t}, \quad t \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Utilizând formula lui Gauss–Ostrogradski (G–O), să se calculeze integrala de suprafață de speța a doua  $I = \iint_S xyz(x dydz + y dzdx + z dxdy)$ , unde  $S$  este porțiunea din primul octant a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Indicație.** Pe pereții octantului de sferă, situați în planele de coordonate, integrantul este nul, deci integralele de suprafață pe cele trei sferturi de disc vor fi nule, ca atare suprafeței  $S$  i se poate adăuga cele trei sferturi de disc încât să devină o suprafață închisă. Acum se aplică formula G – O și se ajunge la integrala triplă  $I = \iiint_V 6xyz dx dy dz$ , unde  $V$  este partea din primul octant a bilei cu centrul în origine de rază  $a$ . Se trece apoi la coordonate sferice.

2. Să se determine extremele locale ale funcției  $f(x, y) = 2x^2 + y - \ln \frac{x}{y^2}$ .
3. Să se calculeze derivatele parțiale  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0)$  și  $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)$  ale funcției  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $z^2 - x e^y - y e^z - z e^x = 0$ .
4. Să se calculeze integrala curbilinie de speța a doua  $I = \int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ , unde curba  $C$  este sfertul de astroidă cu brațe egale ale cărei ecuații parametrice sunt

$$C : \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

5. Să se calculeze integrala de suprafață de speța întâi  $I = \iint_S xz d\sigma$ , unde  $S$  este porțiunea din conul circular cu vârful în origine și axă de rotație axa  $Oz$ , de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , decupată de cilindrul circular de ecuație  $x^2 + y^2 - 2x = 0$ .

**Indicație.** Cilindrul are generatoarele paralele cu axa  $Oz$  și curba directoare cercul din planul  $Oxy$ , cu centrul în punctul  $C(1, 0, 0)$  și raza 1. Cilindrul decupează porțiunea  $S$  din conul  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , care se proiectează în planul  $Oxy$  pe discul  $D$  definit de inecuația  $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ . Se aplică formula de calcul a unei integrale de suprafață de speța întâi  $I = \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$ , unde  $p$  și  $q$  sunt notațiile lui Monge pentru derivatele parțiale de ordinul întâi:  $p = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ ;  $q = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.



Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Să se arate că funcția  $f(x, y) = x \ln \frac{x-y}{x+y} + y e^{\frac{x}{y}}$  este soluție a ecuației

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

2. Să se determine extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$  cu legătura  $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ .

3. Să se calculeze integrala improprie de speța a doua  $I = \int_1^2 \frac{x}{(x+3)\sqrt{x-1}} dx$ , arătând mai întâi că este convergentă.

4. Să se calculeze integrala curbilinie de speța întâi  $I = \int_C y e^{-x} ds$ , unde  $C$  este curba plană

$$C : \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\arctg t - t, \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

5. Să se afle volumul corpului  $V$  mărginit de suprafețele  $z = x^2 + y^2$  și  $z = x$ .

**Indicație.** Prima suprafață este paraboloid de rotație cu axa de rotație  $Oz$ , iar a doua este planul bisector al unghiului diedru format de planele  $Oxy$  și  $Oyz$ , ambele delimitând corpul  $V$ , al cărui volum este integrala triplă  $I = \iiint_V dx dy dz$ . Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$ , deci  $I$  este o iterație de integrale, una simplă depinzând de doi parametri  $x$  și  $y$  și cealaltă, dublă, pe proiecția corpului  $V$  pe planul  $Oxy$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze convergența seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n(n^2 + n + 1)^n}{n^{2n}}.$$

Discutați natura seriei după valorile pozitive ale parametrului  $a$ .

**Indicație.** Se aplică criteriul radicalului. La limită, se găsește  $a$ . Se compară  $a$  cu 1.

2. Să se arate că funcția  $f(x, y, z) = \sqrt{y^3 + 3xyz} + xy e^{xy}$  este soluție a ecuației

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} - xy \frac{\partial f}{\partial y} + y^2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

3. Determinați extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y) = x^2 + y^2 - y + x$ , cu legătura  $F(x, y, z) = 0$ , unde  $F(x, y) = x + y - 1$ .
4. Folosind teorema de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, să se calculeze funcția  $J(y)$  definită ca o integrală improprie care depinde de parametrul  $y$ ,

$$J(y) = \int_0^{\infty} \frac{\arctg(y \sin x)}{\sin x} dx.$$

5. Calculați integrala dublă  $I = \iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , unde domeniul  $D$  este definit de inecuațiile:

$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1; \\ x + y \geq 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$$

**Indicație.** Figurați grafic domeniul  $D$ , ținându cont că prima inecuație reprezintă discul închis de rază 1 cu centrul în origine, a doua este regiunea superioară limitată de a doua bisectoare a reperului de coordonate  $Oxy$ , iar ultima inecuație este semiplanul superior. Intersecția acestor regiuni determină domeniul  $D$ . Se trece la coordonate polare în plan:  $x = \rho \cos \theta$ ;  $y = \rho \sin \theta$ , unde  $\rho \in [0, 1]$ , iar  $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ . **Justificați aceste afirmații!** Găsiți valoarea integralei.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

Sesiunea ianuarie–februarie 2012

Examen de Analiză Matematică

1. Seria geometrică. Discuția naturii sale în raport cu rația  $q$ .

Scrieți seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} \right)$  ca suma a două serii geometrice, precizați-le rațiile, aflați-le sumele, și calculați apoi suma seriei inițiale.

2. Demonstrați că funcția  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 24$  are un minim local strict în punctul staționar  $M_0(5, 6)$ .

3. Ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde  $F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$ , iar  $\Phi(u, v)$  este o funcție diferențiabilă, definește implicit funcția reală de două variabile reale  $z = z(x, y)$ .

Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi ale sale precum și diferențiala de ordinul întâi  $dz(x, y)$ .

4. Arătați că integralele improprii de speța a doua

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx \quad \text{și} \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$$

sunt convergente și apoi demonstrați că  $I = J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

5. Să se scrie integrala dublă  $I = \iint_D f(x, y) \, dx dy$ , unde  $D$  este domeniul mărginit de curbele:  $y = \sqrt{2ax - x^2}$ ;  $y = \sqrt{2ax}$ ;  $x = 2a$ , cu  $a > 0$ , constantă, ca o iterație de integrale simple, descompunând în prealabil pe  $D$  ca o reuniune de trei domenii simple în raport cu axa  $Ox$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Folosind criteriul raportului și apoi criteriul lui Raabe, să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

2. Să se determine extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$  știind că între variabilele sale există legătura  $F(x, y) = 0$ , unde

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

3. Să se scrie integrala dublă  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ , unde  $D$  este domeniul mărginit de curbele:  $y = \sqrt{2ax - x^2}$ ;  $y = \sqrt{2ax}$ ;  $x = 2a$ , cu  $a > 0$ , constantă, ca o iterație de integrale simple, considerând că  $D$  este simplu în raport cu axa  $Oy$ .

4. Să se calculeze integrala triplă  $I = \iiint_V (x^2 + y^2)z dx dy dz$ , unde domeniul  $V$  este mărginit de paraboloidul  $z = x^2 + y^2$  și de sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 6$  și conține o parte din porțiunea nenegativă a axei  $Oz$ .

**Indicație.** Domeniul de integrare este simplu în raport cu axa  $Oz$  căci se poate scrie ca

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D_{xy}, x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}\},$$

unde  $D_{xy}$  este proiecția lui  $V$  pe planul  $Oxy$

$$D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale triple pe un domeniu simplu în raport cu axa cotelor, obținem

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)z dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)z^2 \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dx dy.$$

Mai departe se trece la coordonate polare.

$$\textbf{Răspuns: } I = \frac{8\pi}{3}.$$

5. Formula integrală Riemann–Green.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie-februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei numerice cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} \left( \frac{n^2+1}{n^2-1} \right)^{n^3}$ .

**Indicație.** Se aplică criteriul radicalului. La limită se va da peste nedeterminarea  $1^\infty$  care se va înlătura folosind o limită fundamentală, cea care are limita numărul  $e$ . Se găsește că limita este  $\frac{e^2}{9}$ . **Interpretați!**

2. Determinați punctele de extrem local ale funcției

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 8z - 5.$$

**Indicație.** Se arată că  $f$  are un singur punct critic  $M_0(0, 2, -4)$ , căruia va trebui să-i precizați natura.

3. Să se găsească diferențiala de ordinul întâi a funcției  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0.$$

**Indicație.** Se scrie că  $z(x, y)$  verifică ecuația și apoi se diferențiază egalitatea folosind regulile de diferențiere. **Răspuns:**  $dz = -\frac{\sin 2x dx + \sin 2y dy}{\sin 2z}$ .

4. Calculați integrala de suprafață de tipul întâi  $I = \iint_S (x^2 + y^2 + z) d\sigma$ , unde  $(S)$

este porțiunea din suprafața  $z = 4 - x^2 - y^2$  situată în semispațiul superior.

**Indicație.** Elementul de arie este  $d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ . Integrala se calculează cu formula  $I = 4 \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$ , unde  $D$  este discul din planul  $Oxy$ , de rază 2 cu centrul în origine. Se folosesc coordonatele polare  $\rho$  și  $\theta$ , unde  $x = \rho \cos \theta$  și  $y = \rho \sin \theta$ . **Răspuns.**  $I = 2\pi(17\sqrt{17} - 1)/3$ .

5. Să se calculeze integrala triplă  $I = \iiint_{I_3} \frac{dx dy dz}{(x + y + z)^2}$ , unde  $I_3$  este intervalul

tridimensional închis (paralelipipedul)  $I_3 = [1, 3] \times [0, 1] \times [0, 2]$ .

**Indicație.** Integrala este o iterație de trei integrale simple și anume

$$I = \int_1^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 \frac{dz}{(x + y + z)^2} = \int_1^3 dx \int_0^1 \left( \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x + y + 2} \right) dy.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})^n$ .

**Indicație.** *Aplicați criteriul radicalului. La limită se obține 0. Interpretați!*

2. În ecuația cu derivate parțiale de ordinul întâi  $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$ , schimbați variabilele independente  $x, y$  și funcția necunoscută  $z = z(x, y)$ , conform relațiilor:  $u = x; v = \frac{1}{y}; w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}$ . Noua funcție necunoscută este  $w = w(u, v)$ .

**Răspuns:**  $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$ .

3. Determinați valoarea integralei curbiliinii de speța întâi  $I = \int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2}$ , unde  $C$  este bucla de elice cilindrică de ecuații parametrice  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ , iar  $t \in [0, 2\pi]$ .

**Răspuns:**  $I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \cdot \arctg \frac{2\pi b}{a}$ .

4. Calculați integrala dublă  $I = \iint_D (x - y) dx dy$ , unde domeniul  $D$  este mărginit de curbele: parabola  $y = 2 - x^2$ ; dreapta  $y = 2x - 1$ .

**Indicație.** *Se figurează grafic  $D$  și se află proiecția sa ortogonală pe axa  $Ox$ .*

*Domeniul  $D$  fiind simplu în raport cu  $Oy$ , rezultă că  $I = \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y) dy$ ,*

*de unde se determină valoarea integralei duble  $I$ .* **Răspuns:**  $I = \frac{64}{15}$ .

5. Utilizând formula integrală Gauss–Ostrogradski, calculați integrala de suprafață de speța a doua  $I = \iint_S xy^2 dy dz + z^3 dz dx + x^2 z dx dy$ , unde  $S$  este fața exterioară a elipsoidului de ecuație  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 - 1 = 0$ .

**Indicație.** *Formula integrală Gauss–Ostrogradski este*

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

*unde  $V$  este corpul mărginit de elipsoid. Se obține  $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$  care se calculează folosind coordonatele polare generalizate în spațiu:  $x = 2\rho \cos \theta \sin \varphi; y = 3\rho \sin \theta \sin \varphi; z = \rho \cos \varphi$ .*

**Răspuns:**  $I = \frac{104\pi}{5}$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## Sesiunea ianuarie–februarie 2012

### Examen de Analiză Matematică

1. Să se studieze natura seriei numerice  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ .

**Indicație.** *Aplicând criteriul raportului, se dă peste caz de dubiu. Se folosește apoi la criteriul lui Raabe.*

2. Transformați ecuația cu derivate parțiale  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$  introducând noile variabile independente  $u, v$  și noua funcție necunoscută  $w = w(u, v)$  prin relațiile:  $u = x^2 + y^2$ ;  $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;  $w = \ln z - (x+y)$ .

**Indicație.** *Diferențiați relațiile date, înlocuiți-le în  $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$  și exprimați  $dz$ . Pe de altă parte,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ . Identificând coeficienții lui  $dx$  și  $dy$ , se obțin derivatele  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  și ecuația devine  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$ .*

3. Studiați natura integralei improprie de a doua speță cu ambele limite de integrare puncte singulare  $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ , arătați că este convergentă și determinați-i valoarea.

**Indicație.** *Pentru natură, se folosește criteriul în  $\alpha$ . Pentru calculul valorii integralei, efectuați substituția  $x = a \sin^2 t + b \cos^2 t$ . Se ajunge la  $I = 2 \int_0^{\pi/2} dt$ . Deci,  $I = \pi$ .*

4. Să se afle elementul de arc  $ds$  și lungimea  $L$  a curbei în spațiu

$$C: \quad x = a e^{-t} \cos t, \quad y = a e^{-t} \sin t, \quad z = b e^{-t}, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Indicație.** *Folosiți  $ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ .*

**Răspuns:**  $ds = \sqrt{2a^2 + b^2} e^{-t} dt$ ;  $L = \sqrt{2a^2 + b^2}$ .

5. Să se calculeze volumul corpului din semispațiul  $z > 0$ , mărginit de sferile:  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ ;  $x^2 + y^2 + z^2 - b^2 = 0$  și de conul  $x^2 + y^2 = z^2$ .

**Indicație.** *Volumul lui  $V$  este dat de integrala triplă  $\text{Vol } V = \iiint_V dx dy dz$ . Se trece la coordonatele sferice  $x = \rho \cos \theta \sin \varphi$ ,  $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = \rho \cos \varphi$ .*

**Răspuns:**  $\text{Vol } V = \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)(2 - \sqrt{2})$ .

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii iar ordinea de abordare a lor este aleatorie. Timpul de lucru este 2 ore. Fiecare subiect se notează cu note de la 1 la 10. Media pe teză este media aritmetică a celor cinci note.

## MC.15 – AUTOEVALUARE





# Cuprins

<b>1</b>	<b>MC.01 – Noțiuni fundamentale de teoria mulțimilor</b>	<b>5</b>
1.1	Exerciții rezolvate . . . . .	5
1.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	8
1.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	9
<b>2</b>	<b>MC.02 – Șiruri și serii numerice</b>	<b>11</b>
2.1	Exerciții rezolvate . . . . .	11
2.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	15
2.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	16
<b>3</b>	<b>MC.03 – Elemente de teoria spațiilor metrice</b>	<b>19</b>
3.1	Exerciții rezolvate . . . . .	19
3.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	24
3.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	25
<b>4</b>	<b>MC.04 – Limite și continuitate</b>	<b>27</b>
4.1	Exerciții rezolvate . . . . .	27
4.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	33
4.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	36
<b>5</b>	<b>MC.05 – Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor reale</b>	<b>37</b>
5.1	Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă reală . . . . .	37
5.1.1	Exerciții rezolvate . . . . .	37
5.1.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	40
5.1.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	42
5.2	Diferențiabilitatea și derivabilitatea parțială ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale . . . . .	42
5.2.1	Exerciții rezolvate . . . . .	42
5.2.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	46
5.2.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	48
5.3	Teoria diferențiabilității și derivabilității funcțiilor vectoriale de argument vectorial . . . . .	48
5.3.1	Exerciții rezolvate . . . . .	48
5.3.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	52
5.3.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	54
<b>6</b>	<b>MC.06 – Aplicații: extreme; funcții definite implicit; extreme condiționate</b>	<b>57</b>
6.1	Exerciții rezolvate . . . . .	57
6.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	64
6.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	66
<b>7</b>	<b>MC.07 – Integrale improprii</b>	<b>67</b>
7.1	Exerciții rezolvate . . . . .	67
7.2	Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	72
7.3	Întrebări de autoevaluare . . . . .	74

<b>8 MC.08 – Integrale depinzând de un parametru</b>	<b>75</b>
8.1 Exerciții rezolvate . . . . .	75
8.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	79
8.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	80
<b>9 MC.09 – Integrale curbilinii</b>	<b>83</b>
9.1 Exerciții rezolvate . . . . .	83
9.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	86
9.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	87
<b>10 MC.10 – Integrala dublă</b>	<b>89</b>
10.1 Exerciții rezolvate . . . . .	89
10.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	94
10.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	96
<b>11 MC.11 – Integrale de suprafață</b>	<b>97</b>
11.1 Exerciții rezolvate . . . . .	97
11.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	100
11.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	102
<b>12 MC.12 – Integrala triplă</b>	<b>105</b>
12.1 Exerciții rezolvate . . . . .	105
12.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	109
12.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	110
<b>13 MC.13 – Elemente de teoria câmpurilor</b>	<b>111</b>
13.1 Exerciții rezolvate . . . . .	111
13.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri . . . . .	115
13.3 Întrebări de autoevaluare . . . . .	117
<b>Index de noțiuni</b>	<b>119</b>
<b>Bibliografie</b>	<b>121</b>

# Capitolul 1

## MC.01 – Noțiuni fundamentale de teoria mulțimilor

### 1.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 1.1.1.** Fie  $A, B \subset \mathbb{R}$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se consideră mulțimile:

$$\begin{cases} \lambda A &= \{\lambda x \mid x \in A\}; \\ A + B &= \{x + y \mid x \in A, y \in B\}; \\ A \cdot B &= \{xy \mid x \in A, y \in B\}. \end{cases}$$

Să se arate că dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi mărginite atunci  $\lambda A$ ,  $A + B$  și  $A \cdot B$  sunt mărginite și, în plus,

$$a_1) \quad \inf(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \inf A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0 \\ \lambda \sup A, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$a_2) \quad \sup(\lambda A) = \begin{cases} \lambda \sup A, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda = 0 \\ \lambda \inf A, & \lambda < 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \inf A + \inf B = \inf(A + B) \leq \sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$c) \quad \text{dacă } A, B \subset [0, \infty) \text{ atunci } (\inf A)(\inf B) = \inf(A \cdot B) \leq \sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B).$$

**Soluție.**  $a_1)$ . Considerăm  $\lambda > 0$  și fie  $\alpha = \inf A$ . Folosind caracterizarea marginii inferioare cu inegalități, avem:

- $\forall x \in A$  cu  $\alpha \leq x \implies \lambda\alpha \leq \lambda x$ ;
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon$  astfel încât  $x_\varepsilon < \alpha + \frac{\varepsilon}{\lambda} \implies \lambda x_\varepsilon < \lambda\alpha + \varepsilon$ ,

de unde deducem  $\lambda\alpha = \inf(\lambda A)$ .

Dacă  $\lambda = 0$  atunci  $\lambda A = \{0\}$  și  $\inf(\{0\}) = 0$ .

În cazul  $\lambda < 0$ , folosind iarăși caracterizarea cu inegalități a marginii inferioare  $\alpha = \inf A$ , avem:

- $\forall x \in A, \alpha \leq x \implies \lambda\alpha \geq \lambda x$ ;

- $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon$  astfel încât  $x_\varepsilon < \alpha - \frac{\varepsilon}{\lambda} \implies \lambda x_\varepsilon > \lambda\alpha - \varepsilon$

din care rezultă  $\lambda\alpha = \sup(\lambda A)$ .

Demonstrația pentru **a<sub>2</sub>**) este similară.

**b).** Fie  $m_A = \inf A$  și  $m_B = \inf B$ . Deci  $m_A \leq a, \forall a \in A$  și  $m_B \leq b, \forall b \in B$  adică  $m_A + m_B \leq a + b$ . Apoi  $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A$  astfel încât  $a_\varepsilon < m_A + \frac{\varepsilon}{2}$  și  $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B$  astfel încât  $b_\varepsilon < m_B + \frac{\varepsilon}{2}$  din care deducem  $a_\varepsilon + b_\varepsilon < m_A + m_B + \varepsilon$ . Cum  $\forall \varepsilon > 0$  a fost ales arbitrar de mic rezultă că  $\inf A + \inf B = \inf (A + B)$ .

La fel se demonstrează că  $\sup A + \sup B = \sup (A + B)$ .

**c).** Fie  $\alpha = \sup A$  și  $\beta = \sup B$ . Dacă  $\alpha \cdot \beta = 0$  atunci  $A = \{0\}$  sau  $B = \{0\}$  și atunci  $\sup(A \cdot B) = (\sup A)(\sup B)$ .

Dacă  $\alpha \cdot \beta > 0$  și  $x$  este element arbitrar al mulțimii  $A \cdot B$ , atunci  $x = a \cdot b$ , unde  $0 \leq a \leq \alpha$  și  $0 \leq b \leq \beta$  implică

$$0 \leq x \leq \alpha \cdot \beta, \quad \forall x \in A \cdot B,$$

deci prima inegalitate ce caracterizează marginea superioară a mulțimii  $A \cdot B$  este îndeplinită.

Fie acum  $\varepsilon > 0$  cu  $\varepsilon < 2\alpha \cdot \beta$ . Atunci există  $a_\varepsilon \in A$  și  $b_\varepsilon \in B$  astfel încât  $a_\varepsilon > \alpha - \frac{\varepsilon}{2\beta}$  și  $b_\varepsilon > \beta - \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ . Produsul acestor numere  $x_\varepsilon = a_\varepsilon \cdot b_\varepsilon$  are proprietatea

$$x_\varepsilon > \alpha \cdot \beta - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\alpha \cdot \beta} > \alpha \cdot \beta - \varepsilon$$

care arată că și cea de a doua inegalitate care caracterizează marginea superioară a mulțimii  $A \cdot B$  este îndeplinită. Prin urmare  $\alpha \cdot \beta = \sup(A \cdot B)$ , adică

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Cealaltă parte a demonstrației este identică. ■

**Exercițiul 1.1.2.** Fie  $a \in \mathbb{R}$  fixat. Să se arate că pentru orice număr  $q \geq 1$  întreg există  $p \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ . Folosind acest rezultat să se demonstreze că orice număr real este limita unui șir de numere raționale.

**Soluție.** Fie  $q \in \mathbb{N}^*$ , fixat. Intervalele de forma  $\left[\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q}\right)$ , cu  $p \in \mathbb{Z}$  determină o **partiție** a mulțimii numerelor reale. Alegem atunci  $p$  astfel încât  $\frac{p}{q} \leq a < \frac{p+1}{q}$ , deci  $\left|a - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ . Dacă punem  $q = n$  și notăm  $\frac{p}{q} = r_n$  rezultă  $|a - r_n| < \frac{1}{n}$  deci  $r_n \rightarrow a$ . ■

**Exercițiul 1.1.3.** Fie  $f : X \rightarrow Y$  o aplicație. Atunci avem

a)  $f$  **injectivă**  $\iff \forall A_1, A_2 \subseteq X$  cu  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$  rezultă  $A_1 \subseteq A_2$ ;

b)  $f$  **surjectivă**  $\iff \forall B_1, B_2 \subseteq Y$  cu  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$  rezultă  $B_1 \subseteq B_2$ .

**Soluție.** a). "  $\implies$  ". Fie  $A_1, A_2 \subseteq X$  fixate și  $f(A_1) \subseteq f(A_2)$ . Atunci

$$\forall x_1 \in A_1 \implies f(x_1) \in f(A_1) \subseteq f(A_2), \quad \text{deci} \quad \exists x_2 \in A_2 \quad \text{cu} \quad f(x_1) = f(x_2)$$

și cum  $f$  este injectivă rezultă  $x_1 = x_2$ , adică  $A_1 \subseteq A_2$ .

"  $\Leftarrow$  ". Fie  $x_1, x_2 \in X$  cu  $f(x_1) = f(x_2)$ . Atunci  $f(\{x_1\}) \subseteq f(\{x_2\})$  deci  $\{x_1\} \subseteq \{x_2\}$ , adică  $x_1 = x_2$ . Prin urmare  $f$  este funcție injectivă.

b). "  $\Rightarrow$  ". Fie  $B_1, B_2 \subseteq Y$  fixate și  $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ . Atunci

$$\forall y_1 \in B_1, \exists x_1 \in X \text{ cu } f(x_1) = y_1 \text{ deci } x_1 \in f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$$

și atunci  $y_1 = f(x_1) \in B_2$  adică  $B_1 \subseteq B_2$ .

"  $\Leftarrow$  ". Fie  $y \in Y$  fixat. Presupunem că  $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ . Atunci  $\forall y_1 \in f(X)$  avem  $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(\{y_1\})$  deci  $\{y\} \subset \{y_1\}$  adică  $y = y_1$ . De aici,  $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ , ceea ce este absurd. ■

**Exercițiul 1.1.4.** Fie aplicația  $f : X \rightarrow Y$  și mulțimile arbitrare  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ . Atunci

$$a) \quad f\left(f^{-1}(B)\right) = B \iff B \subseteq f(X)$$

$$b) \quad f(A) \cap B = f\left(A \cap f^{-1}(B)\right).$$

**Soluție.** a) "  $\Rightarrow$  ".  $f(f^{-1}(B)) = B \implies B \subset f(f^{-1}(Y)) = f(X)$ .

"  $\Leftarrow$  ". Fie  $y \in B$  fixat. Deoarece  $B \subseteq f(X)$ ,  $\exists x \in X$  cu  $f(x) = y$ , deci  $x \in f^{-1}(B)$  și atunci

$$y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right).$$

Așadar  $B \subseteq f\left(f^{-1}(B)\right)$  și cum incluziunea reciprocă este întotdeauna adevărată, avem că egalitatea de la punctul a) este adevărată..

b).  $y \in f(A) \cap B \iff y \in f(A)$  și  $y \in B \iff y \in B$  și  $\exists x \in A$  cu  $f(x) = y \iff \exists x \in A \cap f^{-1}(B)$  cu

$$f(x) = y \iff y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right).$$

■

**Exercițiul 1.1.5.** Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  au proprietățile  $a_i \cdot a_j \geq 0$  și  $a_i \geq -1$ , atunci

$$\prod_{k=1}^n (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1.1)$$

Ce devine această inegalitate dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = x$ , unde  $x \in [-1, \infty)$  și  $n$  număr natural arbitrar?

**Soluție.** Folosim metoda inducției matematice.

Pentru  $n = 2$  inegalitatea (1.1) este evidentă.

Presupunem că (1.1) este adevărată pentru  $n$  și o demonstrăm pentru  $n + 1$ . Avem

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) &= \left( \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \right) (1 + a_{n+1}) \geq \left( 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right) (1 + a_{n+1}) = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k a_{n+1} \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k. \end{aligned}$$

Așadar,

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_k. \quad (1.2)$$

Inegalitatea (1.2) demonstrează că (1.1) este verificată pentru  $n + 1$ .

Conform metodei inducției matematice rezultă că (1.1) este adevărată oricare ar fi numărul natural  $n$  și oricare ar fi numerele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  care satisfac ipotezele din enunț.

Dacă  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = x$ , unde  $x \in [-1, \infty)$ , inegalitatea (1.1) devine

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

și este cunoscută sub numele **inegalitatea lui Bernoulli**. ■

## 1.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 1.2.1.** Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$  sunt astfel încât  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ , atunci

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

**Indicație.** Plecând de la inegalitatea evidentă  $(1 - a_i)^2 \geq 0$  obținem  $(1 + a_i)^2 \geq 4a_i$  de unde, după extragerea rădăcinii pătrate în ambii membri, deducem că inegalitatea  $1 + a_i \geq 2\sqrt{a_i}$  are loc pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Efectuând produsul tuturor acestor inegalități, deducem

$$\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \dots a_n}$$

din care, dacă se ține cont că  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , se obține inegalitatea din enunț. ■

**Exercițiul 1.2.2.** Fie aplicația  $f : X \rightarrow X$  cu proprietatea  $f \circ f = i_X$ , unde  $i_X$  este funcția identitate pe mulțimea oarecare  $X$ .

Să se arate că  $f$  este funcție bijectivă.

**Indicație.** Arătați că  $f$  este funcție surjectivă și funcție injectivă. ■

**Exercițiul 1.2.3.** Să se arate că oricare  $n$  numere reale supraunitare  $a_1, a_2, \dots, a_n$  satisfac inegalitatea

$$\frac{(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n)}{1 + a_1 a_2 \dots a_n} \leq 2^{n-1}.$$

**Indicație.** Utilizând inegalitatea evidentă

$$a_{n+1} - 1 \leq a_1 a_2 \dots a_n (a_{n+1} - 1)$$

se arată prin calcul că

$$\frac{(1 + a_{n+1})(1 + a_1 a_2 \dots a_n)}{1 + a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}} \leq 2.$$

**Răspuns.** Inegalitatea cerută rezultă prin folosirea metodei inducției matematice după  $n$ . ■

**Exercițiul 1.2.4.** Să se arate că orice  $n$  numere reale pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  satisfac inegalitățile:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2}; \\ 2^\circ. \quad & n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2}}. \end{aligned}$$

**Indicație.** Utilizați inegalitatea Cauchy – Buniakowski – Schwarz

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \cdot b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right)$$

și alegeți apoi valori pentru  $b_k$ . ■

**Exercițiul 1.2.5.** Să se afle *marginea superioară* și *marginea inferioară* pentru fiecare dintre submulțimile din  $\mathbb{R}$ :

$$A_1 = \left\{ \frac{3^k + 1}{3^k + 2} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}; \quad A_2 = \left\{ (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3} \right\}_{n \in \mathbb{N}}; \quad A_3 = \left\{ \sin \frac{n}{n+5} \right\}_{n \in \mathbb{N}}; \quad A_4 = \left\{ \frac{n + (-1)^n n}{3n + 2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Indicație.** Se determină toate subsirurile convergente din fiecare mulțime. ■

$$\text{Răspuns.} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \inf A_1 = \frac{1}{2}, & \sup A_1 = 1; \\ \inf A_2 = -\frac{1}{2}, & \sup A_2 = 1; \\ \inf A_3 = 0, & \sup A_3 = \sin 1; \\ \inf A_4 = 0, & \sup A_4 = \frac{2}{3}. \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

### 1.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care sunt operațiile obișnuite ce pot fi efectuate cu două sau mai multe mulțimi? Enumerați câteva proprietăți ale acestor operații. ■

2°. Fie  $A$  o mulțime arbitrară. Definiți următoarele noțiuni: **relație de echivalență** pe mulțimea  $A$ ; **clase de echivalență pe mulțimea  $A$** ; **relație de ordine pe mulțimea  $A$** .

Când o mulțime este **total ordonată**? ■

3°. Când spunem că o submulțime  $A$  din  $\mathbb{R}$  este o **mulțime mărginită**?

Cum se caracterizează cu ajutorul inegalităților noțiunile  $\inf A$  și  $\sup A$ , unde  $A \subset \mathbb{R}$ ? ■

4°. Enumerați operațiile algebrice definite pe  $\mathbb{R}$  care pot fi extinse pe mulțimea  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Care sunt operațiile ce nu pot fi extinse pe  $\overline{\mathbb{R}}$  (**cazurile de nedeterminare**)? ■

5°. Care este **axioma lui Arhimede** referitoare la mulțimea numerelor reale? ■





## Capitolul 2

# MC.02 – Șiruri și serii numerice

### 2.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 2.1.1.** (Numărul  $e$ ) Să se arate că șirurile de numere reale  $(a_n)_{n \geq 1}$  și  $(b_n)_{n \geq 1}$ , unde

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sunt strict monotone. Primul șir este strict crescător și majorat, iar al doilea este strict descrescător și minorat, deci ambele sunt convergente.

Limitele acestor șiruri sunt egale cu numărul  $e$  aparținând intervalului  $(2, 3)$  și o valoare aproximativă a acestuia este  $e \simeq 2,718281828459$ .

**Soluție.** Ținând cont de **inegalitatea lui Bernoulli**<sup>1</sup>

$$(1+x)^n > 1+nx, \quad \forall x \in (-1, +\infty) - \{0\}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2,$$

rezultă

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1.$$

Prin urmare  $a_{n+1} > a_n$ , ceea ce arată că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este șir strict crescător.

Folosind din nou inegalitatea lui Bernoulli deducem  $b_n > b_{n+1}$ , deci șirul  $(b_n)$  este strict descrescător.

Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  avem

$$0 < b_n - a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{b_n}{n} < \frac{b_1}{n}.$$

Trecând la limită în aceste inegalități deducem că șirurile  $(a_n)$  și  $(b_n)$  au limitele egale.

Convenim ca limita comună a acestor șiruri să fie notată cu  $e$ . Au loc estimările:

$$2 = a_1 < e < b_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625} = 2,985984 < 3;$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dacă în ultima estimare logaritmăm, obținem inegalitățile

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.1)$$

<sup>1</sup>Bernoulli, Jean (1667 – 1748), matematician elvețian

care sunt utilizate în studiul convergenței șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$ , cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

a cărui limită este **constanta lui Euler**  $C$ .

O valoare aproximativă cu șase zecimale exacte a constantei lui Euler este  $C \approx 0,577216$ . ■

**Exercițiul 2.1.2.** Să se arate că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ ,  $|a| > 1$  este convergentă, să se calculeze suma ei și apoi să se deducă suma seriei  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ .

**Soluție.** Termenul general al primei serii este  $a_n = \frac{n}{a^n}$ . Criteriul radicalului în formularea cu limită aplicat seriei valorilor absolute  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|a|^n}$  ne dă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|a|^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{|a|} = \frac{1}{|a|} < 1,$$

deci seria este absolut convergentă.

Fie acum funcția  $f(x) = \frac{x}{a} + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{a}\right)^n$ . Se observă că  $f'(1) = s_n$ , unde  $s_n$  este suma parțială a seriei. Dar  $f(x)$  este suma unei progresii geometrice cu  $n$  termeni, cu primul termen  $\frac{x}{a}$  și rația  $\frac{x}{a}$ , a cărei sumă este

$$f(x) = \frac{x}{a} \frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{x}{a-x} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n\right)$$

și atunci

$$f'(x) = \frac{a}{(x-a)^2} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^n\right) + \frac{x}{x-a} n \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \frac{1}{a}$$

de unde, luând  $x = 1$ , deducem

$$f'(1) = \frac{a}{(a-1)^2} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) + \frac{1}{1-a} \frac{n}{a^n} = s_n \rightarrow \frac{a}{(a-1)^2}$$

care este suma primei serii, deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n} = \frac{a}{(a-1)^2}.$$

Pentru determinarea sumei celeilalte serii observăm că se poate scrie ca diferență de două serii

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4 - 1 = 3,$$

cu mențiunea că prima serie este de două ori seria inițială în care  $a = 2$ , iar ultima este o serie geometrică cu rația  $\frac{1}{2}$  și primul termen de asemenea egal cu  $\frac{1}{2}$ . ■

**Exercițiul 2.1.3.** Să se studieze convergența următoarelor serii numerice cu termeni pozitivi:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right); \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{an+b}{cn+d} \right)^n, \quad a, c > 0; \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, \quad a > 0; \\ \text{d)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{b(b+1)(b+2)\dots(b+n)} \alpha^n, \quad a, b, \alpha > 0. \end{aligned}$$

**Soluție.** **a)** Studiind funcția  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$  constatăm că este strict crescătoare și  $f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f(0)$ , de unde deducem  $\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} < \frac{6}{n^3}$ . Seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  este convergentă (serie armonică generalizată cu  $\alpha = 3$ ) și atunci aplicând primul criteriu de comparație rezultă că seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$  este convergentă.

**b)** Se aplică criteriul rădăcinii în formularea cu limită. Pentru  $a < c$  seria este convergentă, pentru  $a > c$  seria este divergentă, iar pentru  $a = c$  termenul general al seriei nu tinde la zero, prin urmare seria este divergentă.

**c)** Se aplică criteriul logaritmic, ajungându-se la limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a^{-\ln n}}{\ln n} = \ln \frac{1}{a}.$$

Pentru  $a < \frac{1}{e}$  seria este convergentă, pentru  $a > \frac{1}{e}$  seria este divergentă, iar dacă  $a = \frac{1}{e}$  atunci seria dată devine  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  care se știe că este divergentă fiind seria armonică.

**d)** Raportul termenilor  $a_{n+1}$  și  $a_n$  ai seriei are limita  $\alpha$ . Seria este convergentă pentru  $0 < \alpha < 1$ , divergentă pentru  $\alpha > 1$ , iar pentru  $\alpha = 1$  folosind criteriul lui Raabe obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = b - a - 1$$

din care deducem că seria corespunzătoare este convergentă pentru  $b > a + 2$  și divergentă pentru  $b < a + 2$ .

Dacă  $b = a + 2$  seria devine  $a(a+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(a+n+1)(a+n+2)}$ , comparabilă cu seria armonică  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , care este o serie divergentă. În concluzie, pentru  $\alpha = 1$  și  $b = a + 2$  seria din enunț este divergentă. ■

**Exercițiul 2.1.4.** Să se studieze natura seriilor

$$\begin{aligned} \text{a).} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+3}{2n+1} \right)^{n \ln n}; \quad \text{b).} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n} (n!)^3}{(3n)!}; \\ \text{c).} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}; \quad \text{d).} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt{(n+1)(n+a)} - n \right)^n, \quad a > -1. \end{aligned}$$

**Soluție.** **a).** Aplicăm criteriul radicalului. Se observă că  $\sqrt[n]{a_n} = \left( \frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}$ , iar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$ , deci seria este convergentă.

b). Termenul general al seriei este  $a_n = \frac{4^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$ , raportul a doi termeni consecutivi dă

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{64}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)}.$$

Trecând la limită în ultima egalitate, obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{64}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)} = \frac{64}{27}.$$

Deoarece această limită este supraunitară, conform **criteriului raportului** sau **criteriul lui D'Alembert** rezultă că seria este divergentă.

c). Folosim criteriul de comparație de prima speță. Termenul general al seriei se scrie în forma

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n(n+1)}.$$

Însă,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ , iar  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$  deci  $a_n < \frac{e}{n^2}$ .

Cum seria  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  este convergentă fiindcă este **seria lui Riemann** pentru  $\alpha = 2$ , din criteriul de comparație de speța întâi rezultă că seria este convergentă.

d). Aplicăm criteriul radicalului. Găsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n+1)(n+a)} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+a) - n^2}{\sqrt{(n+1)(n+a)} + n} = \frac{a+1}{2},$$

de unde deducem:

- $-1 < a < 1 \implies$  seria este convergentă;
- $a \geq 1 \implies$  seria este divergentă.

■

**Exercițiul 2.1.5.** *Discutați în raport cu parametrul real  $\lambda$  natura seriei numerice cu termeni pozitivi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , unde*

$$a_n = (2n+1) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda-n+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n+1)} \right]^2.$$

**Soluție.** Avem:

$$a_{n+1} = (2n+3) \left[ \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda-n+1)(\lambda-n)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n+1)(\lambda+n+2)} \right]^2; \quad D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \left( \frac{\lambda-n}{\lambda+n+2} \right)^2.$$

Din ultima egalitate rezultă  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1$ , adică dubiu. În această situație aplicăm criteriul lui Raabe. Ca atare, determinăm expresia

$$R_n = n \left( \frac{1}{D_n} - 1 \right) = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{(8\lambda+6)n^3 + 2(8\lambda+6)n^2 - 2(\lambda^2 - 2\lambda - 2)}{(2n+3)(\lambda-n)^2}$$

și apoi limita sa la infinit. Găsim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8\lambda+6)n^3 + 2(8\lambda+6)n^2 - 2(\lambda^2 - 2\lambda - 2)}{(2n+3)(\lambda-n)^2} = 4\lambda + 3,$$

de unde începe discuția:

- $4\lambda + 3 > 1 \Rightarrow \lambda > -\frac{1}{2} \Rightarrow$  seria este convergentă;
- $4\lambda + 3 < 1 \Rightarrow \lambda < -\frac{1}{2} \Rightarrow$  seria este divergentă;
- $\lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow$  seria devine  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}$ , care este divergentă fiindcă este comparabilă cu seria armonică.

■

## 2.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 2.2.1.** Utilizând criteriul general de convergență al lui Cauchy să se arate că următoarele șiruri  $(a_n)_{n \geq 1}$  sunt convergente:

$$a). \quad a_n = \frac{\sin a}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2a}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\sin na}{n(n+1)}; \quad b). \quad a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

**Indicație.** În diferența  $a_{n+p} - a_n$  se descompun în fracții simple fracțiile  $\frac{1}{k(k+1)}$  și  $\frac{1}{4k^2 - 1}$ .

■

**Răspuns.** Ambele șiruri sunt convergente.

■

**Exercițiul 2.2.2.** Să se studieze natura seriei cu termeni oarecare

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(a-5)^n}{n \cdot 3^n}$$

în funcție de parametrul  $a \in \mathbb{R}$ .

**Indicație.** Se studiază seria valorilor absolute.

■

**Răspuns.** Pentru  $a \in (2, 8)$  seria este absolut convergentă. Pentru  $a \in (-\infty, 2] \cup (8, +\infty)$  seria este divergentă, iar pentru  $a = 8$  seria este simplu convergentă.

■

**Exercițiul 2.2.3.** Să se studieze convergența următoarelor serii cu termeni oarecare:

$$a). \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cos nx}{n!}, \quad a, x \in \mathbb{R}; \quad b). \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{\sqrt{n}}.$$

**Indicație.** **a).** Se utilizează criteriul de comparație de speța întâi, seria majorantă fiind  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{n!}$  a cărei convergență se studiază folosind criteriul raportului. **b).** Se aplică criteriul lui Dirichlet.

■

**Răspuns.** **a).** Seria este absolut convergentă. **b).** Seria este convergentă.

■

**Exercițiul 2.2.4.** Să se studieze convergența următoarelor serii cu termeni oarecare:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}; \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2-1}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

**Indicație.** Pentru studiul naturii primelor două serii se aplică criteriul lui Leibniz de convergență a unei serii alternante. Celei de a treia serie, i se studiază absoluta convergență. ■

**Răspuns.** Primele două serii sunt convergente, dar nu și absolut convergente. A treia serie este:

- absolut convergentă pentru  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ;
- semi-convergentă pentru  $x \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$ ;
- divergentă pentru restul valorilor lui  $x$ , deoarece termenul general nu tinde la zero.

**Exercițiul 2.2.5.** Să se studieze convergența seriilor cu termeni pozitivi:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3n)} \cdot \frac{1}{n+3};$$

$$(c) \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln \ln n}\right)^{\ln n}; \quad (d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9^n} \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^3}.$$

**Indicație.** Se aplică:

- pentru punctul (a), criteriul raportului;
- pentru punctul (b), criteriul lui Raabe;
- pentru punctul (c), criteriul logaritmic;
- pentru punctul (d), criteriul radicalului.

**Răspuns.** Toate seriile sunt convergente. ■

## 2.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Enumerați proprietățile șirurilor numerice convergente. ■

**2°.** Definiți noțiunea de **șir numeric fundamental** și enunțați **criteriul general de convergență (Cauchy)** al unui **șir numeric**. ■

**3°.** Justificați **convergența (divergența)** atât pentru **seria geometrică** cât și pentru **seria armonică generalizată (seria lui Riemann)**. ■

**4°.** Absoluta convergență a unei serii numerice implică convergența sa?

Dacă răspunsul la întrebare este **da**, demonstrați afirmația. ■

**5°.** Cum se numește o serie numerică convergentă care nu este absolut convergentă? Ce se poate spune despre

seria numerică alternantă  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .? ■





## Capitolul 3

# MC.03 – Elemente de teoria spațiilor metrice

### 3.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 3.1.1.** *Să se arate că aplicațiile*

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

$$d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_1(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

*sunt metrice echivalente pe  $\mathbb{R}$  și că nu există  $a, b \in \mathbb{R}$ , cu  $0 < a \leq b$ , astfel încât să aibă loc inegalitățile*

$$a d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq b d(x, y). \quad (3.3)$$

**Soluție.** Prima aplicație este **metrica Euclidiană** din [IR](#). Folosind proprietățile funcției modul se arată simplu că  $d_1$  este o metrică pe  $\mathbb{R}$ , diferită de metrica  $d$ .

Prin urmare, perechile  $(\mathbb{R}, d)$  și  $(\mathbb{R}, d_1)$  sunt spații metrice diferite.

Reamintim definiția a două **metrice echivalente pe o aceeași mulțime nevidă  $X$** .

**Definiția 3.1.1.** *Metricele  $d$  și  $d_1$  pe mulțimea nevidă  $X$  se numesc **echivalente** și se scrie  $d \sim d_1$  dacă, oricare ar fi punctul  $x_0 \in X$ , avem*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_1}(x_0, \varepsilon); \quad (3.4)$$

$$\forall \lambda > 0 \quad \exists \mu(\lambda) > 0 \quad \text{astfel încât} \quad B_{d_1}(x_0, \mu(\lambda)) \subset B_d(x_0, \lambda). \quad (3.5)$$

În Definiția 3.1.1  $B_d(x_0, \lambda)$  reprezintă **bila deschisă** cu centrul în punctul  $x_0$  și rază  $\lambda > 0$ , mai precis

$$B_d(x_0, \lambda) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \lambda\}.$$

Fie  $x_0 \in X$ , punct fixat arbitrar din  $\mathbb{R}$ . Evident,  $d_1(x, x_0) \leq d(x, x_0)$  oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , astfel că pentru a avea incluziunea  $B_d(x_0, \delta(\varepsilon)) \subset B_{d_1}(x_0, \varepsilon)$  din Definiția 3.1.1 putem lua  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ .

Pe de altă parte, din (3.2) se observă că  $d_1(x, x_0) < 1$  oricare ar fi  $x$  și  $x_0$  din  $\mathbb{R}$ , ceea ce conduce la afirmația că dacă  $\rho \geq 1$  și  $x_0 \in \mathbb{R}$ , atunci bila deschisă cu centrul în  $x_0$  de rază  $\rho$  din spațiul metric  $(\mathbb{R}, d_1)$  este întreg spațiul, adică  $B_{d_1}(x_0, \rho) = \mathbb{R}$ . Dacă însă  $0 < \rho < 1$ , atunci

$$x \in B_{d_1}(x_0, \rho) \implies \frac{|x - x_0|}{1 + |x - x_0|} < \rho \implies |x - x_0| < \frac{\rho}{1 - \rho} \implies x \in B_d\left(x_0, \frac{\rho}{1 - \rho}\right),$$

ceea ce înseamnă că  $B_{d_1}(x_0, \rho) \subset B_d\left(x_0, \frac{\rho}{1 - \rho}\right)$ .

Pentru a avea satisfăcută și cea de a doua incluziune din Definiția 3.1.1 luăm  $\mu(\lambda)$  astfel încât  $\frac{\mu(\lambda)}{1 - \mu(\lambda)} = \lambda$  din care rezultă  $\mu(\lambda) = \frac{\lambda}{1 + \lambda}$ .

Prin urmare cele două metrice sunt echivalente.

Deși metricele  $d$  și  $d_1$  sunt echivalente, prima parte a inegalității (3.3) nu poate avea loc căci  $d_1(x, x_0) < 1$ ,  $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$  conduce la inegalitățile  $d(x, x_0) \leq \frac{1}{a} d_1(x, x_0) < \frac{1}{a}$ , din care rezultă  $d(x, x_0) < \frac{1}{a}$ ,  $\forall x, x_0 \in \mathbb{R}$ , care evident este falsă. ■

**Exercițiul 3.1.2.** Fie șirul de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  al cărui termen general este dat de **relația de recurență**  $x_n = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x_{n-1}$ , unde  $x_0 \in \mathbb{R}$  este arbitrar fixat. Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Soluție.** Presupunem că există limita  $u$  a șirului  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Trecând la limită în relația de recurență și ținând cont de continuitatea funcției cosinus (limita cosinusului este egală cu cosinusul limitei) observăm că  $u$  trebuie să fie o rădăcină a ecuației  $u = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos u$ , adică  $u$  este un **punct fix** al aplicației (funcției)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos x. \quad (3.6)$$

Observația de mai sus ne sugerează să considerăm **spațiul metric Euclidian**  $\mathbb{R}$  cu metrica  $d(x, y) = |x - y|$  și funcția (3.6) pentru care calculăm distanța între două valori ale sale. Avem

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} |\cos x - \cos y|.$$

Transformând diferența de cosinusuri în produs, obținem

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left| 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \right|.$$

Dar:

$$\left| \sin \frac{x+y}{2} \right| \leq 1; \quad \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq \frac{x-y}{2}.$$

Cu ajutorul acestor majorări

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

care arată că  $f$  este o **contracție pe spațiul metric**  $(\mathbb{R}, d)$ .

Metrica  $d(x, y) = |x - y|$  provine din **norma Euclidiană** pe  $\mathbb{R}$  care este funcția modul  $|\cdot|$ , iar perechea  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  este **spațiu Banach**. Conform **principiului contracției** (**teorema de punct fix a lui Banach**) există un punct unic  $u = \frac{\pi}{6}$  astfel încât  $f(u) = u$ .

Șirul de numere reale  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este chiar șirul aproximațiilor succesive corespunzător funcției  $f$  și punctului inițial  $x_0$ .

Așadar,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{6}$ . ■

**Exercițiul 3.1.3.** Se consideră șirul de vectori  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}$  din spațiul metric  $(\mathbb{R}^3, d)$ , unde  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  este **metrica Euclidiană** pe  $\mathbb{R}^n$  și

$$\mathbf{x}_n = \left( \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n, \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}, n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \right),$$

Să se determine parametrul real  $\lambda$  astfel încât limita șirului să fie la distanță minimă în  $(\mathbb{R}^3, d)$  față de punctul  $\mathbf{a}(\lambda) = \left(1, \frac{1}{32}e^{-\lambda}, \ln a\right)$ .

**Soluție.** Se folosește proprietatea *limita unui șir de vectori dintr-un spațiu vectorial finit dimensional, care este și spațiu metric, este egală cu vectorul care are coordonatele limitele șirurilor coordonate*.

Pentru limita primului șir de coordonate se folosește numărul  $e$  și avem  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^\lambda$ .

Al doilea șir de coordonate are termenul general de forma

$$x_{n2} = \sqrt[n]{a_n}.$$

Limita acestui șir se determină folosind proprietatea:

$$\text{dacă există } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = x_{20} \in \mathbb{R}, \text{ atunci avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = x_{20}.$$

Pentru limita celui de al treilea șir de coordonate se folosește **limita fundamentală**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

unde  $a$  este un număr real pozitiv dat. Aplicând **definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct** și luând ca șir convergent la zero șirul cu termenul general  $x_n = \frac{1}{n}$ , găsim că limita celui de al treilea șir de coordonate este  $\ln a$ .

Prin urmare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \left(e^\lambda, \frac{1}{32}, \ln a\right) = \mathbf{x}_0.$$

**Distanța Euclidiană** între punctele  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{x}_0$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{x}_0) = \frac{|e^\lambda - 1|}{32e^\lambda} \sqrt{(32e^\lambda)^2 + 1}$$

este minimă dacă  $\lambda = 0$ . Prin urmare limita șirului de vectori  $\mathbf{x}_n$  este  $\mathbf{a}(0)$ . ■

**Exercițiul 3.1.4.** Șirul de funcții reale de o variabilă reală

$$(f_n)_{n \geq 1}, \quad f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^2 + nx + n^2}{x^2 + n^2}$$

este **uniform convergent** la funcția

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \quad \forall x \in [0, 1],$$

iar șirul de funcții

$$(f_n)_{n \geq 1}, \quad f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^2 + nx + n^2}{x^2 + n^2}$$

nu este uniform convergent la funcția limită

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

**Soluție.** Convergența uniformă a unui șir de funcții este convergența în **metrica lui Cebășev**  $\rho$

$$\rho(f_n, f) = \sup_{x \in [0, 1]} d(f_n(x), f(x)) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|.$$

Însă,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2 + nx + n^2}{x^2 + n^2} - 1 \right| = \frac{nx}{x^2 + n^2} = \varphi(x), \quad x \in [0, 1].$$

Prin urmare trebuie determinată **marginea superioară** a funcției

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{nx}{x^2 + n^2}.$$

Pentru a afla marginea superioară a funcției  $\varphi$  calculăm

$$\varphi'(x) = \frac{n^3 - nx^2}{(x^2 + n^2)^2}, \quad x \in [0, 1],$$

de unde deducem posibilitatea ca valorile extreme ale funcției  $\varphi$  să se atingă în  $x = \pm n$ . Dacă  $n > 1$ , punctele  $x = \pm n$  nu aparțin compactului  $[0, 1]$  și deci valoarea maximă se va atinge în extremitățile segmentului  $[0, 1]$ .

Cum  $f(0) = 0$  și  $f(1) = \frac{n}{1 + n^2}$

$$\rho(f_n, f) = \frac{n}{1 + n^2}.$$

Deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$ , rezultă că primul șir de funcții din enunțul exercițiului este uniform convergent, iar limita sa, după cum se vede, este funcția din enunț.

În cazul celui de al doilea șir de funcții, deoarece  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , **limita punctuală** este funcția reală de variabilă reală (3.7).

Mai trebuie arătat că șirul numeric cu termenul general  $\rho(f_n, f)$  nu este convergent la zero.

Pentru aceasta observăm că funcția  $x \mapsto |f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{x^2 + n^2}$  are valorile extreme  $-\frac{1}{2}$  și  $\frac{1}{2}$ , acestea fiind valorile funcției în  $x = -n$  și respectiv  $x = n$ .

Trebuie arătat că șirul cu termenul general  $\rho(f_n, f)$  nu converge la zero. Într-adevăr,

$$\rho(f_n, f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} d(f_n(x), f(x)) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} \frac{nx}{x^2 + n^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0,$$

deci convergența punctuală  $f_n \xrightarrow[p]{R} f$  nu este uniformă. ■

**Exercițiul 3.1.5.** Să se arate că aplicația

$$\|\cdot\| : C([1, e]) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \|f\| = \sqrt{\int_1^e f^2(x) \ln x \, dx}, \quad f \in C([1, e]) \quad (3.8)$$

este o normă pe spațiul vectorial real  $C([1, e])$  al funcțiilor reale continue pe compactul  $[1, e]$  și să se calculeze norma funcției  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [1, e]$ .

**Soluție.** Pentru ca raționamentul de mai jos să poată fi urmărit reamintim definiția unei **norme pe un spațiu vectorial real**.

**Definiția 3.1.2.** Aplicația  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  se numește **normă** pe spațiul liniar real  $V$  dacă satisface următoarele proprietăți:

- (N<sub>1</sub>)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- (N<sub>2</sub>)  $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  și  $\forall \mathbf{x} \in V$ ;
- (N<sub>3</sub>)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ,  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

Din  $f \in C([1, e])$  și continuitatea funcției logaritmice rezultă că funcția  $x \mapsto f^2(x) \ln x$  este continuă pe compactul  $[1, e]$  și deci integrabilă.

Deoarece funcția  $x \mapsto \ln x$  este nenegativă pe intervalul  $[1, e]$ , considerând funcția  $f \in C([1, e])$  cu proprietatea  $\|f\| = 0$  deducem  $f = 0$ , ceea ce arată că axioma  $(N_1)$  este satisfăcută.

Dacă  $\lambda \in \mathbb{R}$  și  $f \in C([1, e])$  sunt elemente arbitrare, atunci

$$\|\lambda f\| = \sqrt{\int_1^e \lambda^2 f^2(x) \ln x \, dx} = |\lambda| \sqrt{\int_1^e f^2(x) \ln x \, dx} = |\lambda| \|f\|,$$

de unde rezultă că axioma  $(N_2)$  este de asemenea verificată.

Pentru a arăta că și axioma  $(N_3)$  este satisfăcută calculăm pătratul normei sumei a două funcții continue arbitrare  $f$  și  $g$  definite pe compactul  $[1, e]$ . Avem

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \int_1^e (f(x) + g(x))^2 \ln x \, dx = \int_1^e (f^2(x) + 2f(x)g(x) + g^2(x)) \ln x \, dx = \\ &= \|f\|^2 + 2 \int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx + \|g\|^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Încercăm să găsim o majorare pentru termenul  $\int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx$  din (3.9). Presupunând  $f \neq 0$ , considerăm funcția polinomială

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \int_1^e (tf(x) - g(x))^2 \ln x \, dx, \quad f, g \in C([1, e]), \quad f \neq 0, \quad (3.10)$$

ale cărei valori se pot scrie

$$\varphi(t) = \|f\|^2 t^2 - 2 \left( \int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx \right) t + \|g\|^2, \quad (3.11)$$

din care se vede că

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Din (3.10), (3.11) și (3.12) rezultă că funcția polinomială  $\varphi$  este un trinom de gradul al doilea nenegativ. Folosind această remarcă deducem că inegalitatea (3.12) are loc dacă și numai dacă **discriminantul trinomului** este nepozitiv, adică

$$\left( \int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx \right)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0. \quad (3.13)$$

Dacă în (3.13) trecem în membrul doi termenul  $-\|f\|^2 \|g\|^2$  și extragem radicalul, obținem

$$\left| \int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx \right| \leq \|f\| \|g\|. \quad (3.14)$$

Adăugând faptul că un număr real este mai mic cel mult egal cu modulul său, din (3.14) deducem

$$\int_1^e f(x)g(x) \ln x \, dx \leq \|f\| \|g\|. \quad (3.15)$$

Revenind la (3.9) și ținând cont de (3.15) obținem

$$\|f + g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2. \quad (3.16)$$

Rezultatul extragerii rădăcinii pătrate din ambii membri ai inegalității (3.16) arată că axioma  $(N_3)$  este și ea satisfăcută.

Prin urmare, aplicația (3.8) este o normă pe spațiul liniar real  $C([1, e])$ .

Să determinăm norma (lungimea) vectorului  $f \in C([1, e])$  specificat în enunț, adică a funcției  $f(x) = \sqrt{x}$ . Vom calcula pătratul acestei norme. Integrând prin părți, avem

$$\|f\|^2 = \int_1^e x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{1 + e^2}{4},$$

de unde  $\|f\| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + e^2}$ . ■

## 3.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 3.2.1.** Determinați punctele fixe ale aplicațiilor:

- a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^5;$   
 b)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = z^5.$

**Indicație.** Amintim definiția **punctului fix** al unei aplicații definită pe un spațiu metric cu valori în același spațiu metric.

**Definiția 3.2.1.** Elementul  $x$  al unui spațiu metric  $(X, d)$  se numește **punct fix** al aplicației  $f : X \rightarrow X$  dacă  $f(x) = x$ .

Se rezolvă ecuațiile  $f(x) = x$ , în mulțimea numerelor reale și  $f(z) = z$ , în mulțimea numerelor complexe  $\mathbb{C}$ . ■

**Răspuns.**

- a)  $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1;$   
 b)  $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1, z_4 = -i, z_5 = i, (i = \sqrt{-1}).$

■

**Exercițiul 3.2.2.** Dacă  $\mathbb{C}$  este mulțimea numerelor complexe  $z = x + iy$ , unde  $x, y \in \mathbb{R}$ , atunci să se arate că perechea  $(\mathbb{C}, d)$ , unde

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad (3.17)$$

este **spațiu metric complet**.

**Indicație.** Numărul complex  $x - iy$ , notat cu  $\bar{z}$ , se numește **conjugatul complex** al numărului complex  $z = x + iy$ . Modulul numărului complex  $z$ , notat prin  $|z|$ , se știe că este  $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ . Evident,

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (3.18)$$

Folosind (3.17) și (3.18) demonstrați că aplicația  $d$  din (3.17) este o metrică pe  $\mathbb{C}$ , deci  $(\mathbb{C}, d)$  este spațiu metric.

Amintim definiția **spațiului metric complet**.

**Definiția 3.2.2.** Perechea  $(X, d)$  se numește **spațiu metric complet** dacă  $(X, d)$  este spațiu metric și orice șir de puncte fundamental din  $X$  este convergent.

A da un șir de puncte în  $(\mathbb{C}, d)$  este echivalent cu a da două șiruri numerice și anume **șirul părților reale** și **șirul părților imaginare**. Apoi se ține cont că un șir de numere reale este **convergent** dacă și numai dacă este **fundamental**. ■

**Exercițiul 3.2.3.** Să se arate că perechea  $(\mathbb{R}, d)$ , unde  $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$  este un spațiu metric, dar nu este spațiu metric complet.

**Indicație.** Faptul că aplicația  $d$  este metrică se arată demonstrând că sunt satisfăcute axiomele  $(M_1)$ ,  $(M_2)$ ,  $(M_3)$  din definiția unei distanțe.

Arătați apoi că șirul cu termenul general  $x_n = n$  este fundamental, dar nu este convergent în metrica  $d$ . ■

**Exercițiul 3.2.4.** În spațiul metric  $(\mathbb{R}^3, d)$ , unde  $d$  este **metrica Euclidiană** pe  $\mathbb{R}^3$ , să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

$$(\mathbf{x}_n)_{n \geq 1}, \quad \mathbf{x}_n = \left( \frac{n}{2n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}, n \sin \frac{1}{n} \right);$$

$$(\mathbf{y}_n)_{n \geq 1}, \quad \mathbf{y}_n = \left( \left( \frac{n^2 - nk + 1}{n^2 + 1} \right)^{\frac{n^2 + n + 1}{n+1}}, \sqrt[n]{n}, n \sin \frac{1}{n} \right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

**Indicație.** Limita unui șir de puncte (vectori) din  $\mathbb{R}^3$  este vectorul din  $\mathbb{R}^3$  cu coordonatele limitele șirurilor coordonate ale șirului dat. ■

**Răspuns.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = \left( \frac{1}{2}, 1, 1 \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{y}_n = (e^{-k}, 1, 1).$  ■

**Exercițiul 3.2.5.** Să se arate că funcția  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2,$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  sunt vectori arbitrari din  $\mathbb{R}^3$ , este un **tensor metric** sau **produs scalar** pe spațiul vectorial real  $\mathbb{R}^3$  și apoi să se calculeze:

- produsele scalare  $g(x_0, y_0)$ ,  $g(x_0, x_0)$  și  $g(y_0, y_0)$ ;
- normele vectorilor  $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 1)$  și  $\mathbf{y}_0 = (2, -1, 5)$ ;
- distanța dintre vectorii  $\mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{y}_0$ ;
- unghiul  $\varphi$  dintre vectorii  $\mathbf{x}_0$  și  $\mathbf{y}_0$ .

**Indicație.** Pentru rezolvarea primei părți a exercițiului reamintim

**Observația 3.2.1.** Un produs scalar pe spațiul vectorial real  $H$  este o formă biliniară simetrică pe  $H$  cu proprietatea că forma pătratică asociată este pozitiv definită. ■

**Răspuns.**  $g(x_0, y_0) = 11$ ,  $g(x_0, x_0) = 7\|\mathbf{x}_0\|^2$ ,  $g(y_0, y_0) = 70 = \|\mathbf{y}_0\|^2$ ,  $d(x_0, y_0) = 55$ ,  $\cos \varphi = \frac{11}{7\sqrt{10}}$ . ■

### 3.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Enunțați și demonstrați teorema de punct fix a lui Banach. ■

2°. Demonstrați că dacă  $(H, g)$  este un **spațiu Euclidian real** atunci pentru orice vectori din  $H$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$$



și orice scalari reali

$$\lambda, \mu, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

au loc egalitățile:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}_2),$$

$$g(\mathbf{x}, \mu \mathbf{y}) = \mu g(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0;$$

$$g\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^n \mu_j \mathbf{y}_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j g(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j).$$

■

**3°.** Demonstrați că într-un spațiu Euclidian real  $(H, \cdot)$  are loc

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad (3.19)$$

numită **inegalitatea lui Cauchy–Buniakowski–Schwarz**.

Când are loc egalitate în (3.19)?

■

**Răspuns.** Egalitatea are loc dacă și numai dacă vectorii  $\mathbf{x}$  și  $\mathbf{y}$  sunt **liniar dependenți** sau **coliniari**.

■

**4°.** Cum se scrie matematic că doi vectori sunt liniar coliniari?

Verificați că afirmația referitoare la egalitatea în (3.19) este adevărată.

■

**5°.** Dacă  $A$  este o mulțime dintr-un spațiu metric  $(X, d)$ , dați definițiile noțiunilor: acoperire pentru  $A$ ; acoperire finită a lui  $A$ ; acoperire finită deschisă a lui  $A$ ;  $\varepsilon$ -rețea finită a lui  $A$ . De asemenea, precizați noțiunile: mulțime compactă prin acoperire; mulțime secvențial compactă; spațiu metric compact prin șiruri.

■

**6°.** Demonstrați echivalența convergenței unui șir de vectori din spațiul Euclidian real  $\mathbb{R}^n$  cu convergența șirurilor coordonate.

■

## Capitolul 4

# MC.04 – Limite și continuitate

### 4.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 4.1.1.** Folosind definiția limitei unei funcții într-un punct, să se demonstreze că :

$$\textbf{a)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + xy) = 3; \quad \textbf{b)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (3,+\infty)} \frac{xy-1}{y+1} = 3; \quad \textbf{c)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$$

**Soluție.** a) Considerăm metrica pe  $\mathbb{R}^2$

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \max\{|x - x_0|, |y - y_0|\}, \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0).$$

Atunci, inegalitatea  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$  este echivalentă cu  $|x - x_0| < \delta$  și  $|y - y_0| < \delta$ .

Trebuie să arătăm că pentru orice  $\varepsilon > 0$  putem determina  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , astfel încât de îndată ce

$$|x - 1| < \delta, \quad |y - 2| < \delta,$$

să rezulte

$$|f(x, y) - 3| < \varepsilon,$$

unde funcția  $f$  este

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Evaluăm diferența  $|f(x, y) - 3|$  astfel încât să punem în evidență  $|x - 1|$  și  $|y - 2|$ . Avem

$$f(x, y) - 3 = x^2 + xy - 3 = (x - 1)^2 + (x - 1) \cdot (y - 2) + 4(x - 1) + (y - 2),$$

de unde obținem

$$|f(x, y) - 3| < 2\delta^2 + 5\delta.$$

Inegalitatea  $|f(x, y) - 3| < \varepsilon$  va fi verificată dacă

$$2\delta^2 + 5\delta = \varepsilon.$$

Ținând cont că  $\delta > 0$ , găsim

$$\delta(\varepsilon) = \frac{-5 + \sqrt{25 + 8\varepsilon}}{4}.$$

Prin urmare,

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\exists) \ \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{-5 + \sqrt{25 + 8\varepsilon}}{4}$$

cu proprietatea

$$\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ cu } |x - 1| < \delta, |y - 2| < \delta \implies |f(x, y) - 3| < \varepsilon,$$

și deci, în baza primei teoreme de caracterizare a limitei unei funcții, rezultă

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} f(x, y) = \ell = 3.$$

**b)** Fiind dat  $\varepsilon > 0$  oarecare, trebuie să determinăm  $\delta(\varepsilon) > 0$  astfel încât de îndată ce

$$|x - 3| < \delta(\varepsilon), \quad y > \frac{1}{\delta(\varepsilon)}$$

să fie satisfăcută inegalitatea

$$\left| \frac{xy - 1}{y + 1} - 3 \right| < \varepsilon,$$

din care va rezulta că limita funcției

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x} = (x, y) \mid y = -1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{xy - 1}{y + 1},$$

în punctul de la infinit de pe dreapta de ecuație  $x = 3$ , este 3.

Pentru aceasta evaluăm diferența  $|f(x, y) - 3|$  astfel încât să punem în evidență  $|x - 3|$  și  $y$ .

$$\left| \frac{xy - 1}{y + 1} - 3 \right| = \left| x - 3 - \frac{x + 1}{y + 1} \right| \leq |x - 3| + \left| \frac{x - 3}{y + 1} \right| + \frac{4}{|y + 1|}.$$

Dacă se consideră  $y > 0$ , rezultă  $\frac{1}{|y + 1|} < \frac{1}{y}$  astfel că

$$|f(x, y) - 3| < |x - 3| + \frac{|x - 3|}{y} + \frac{4}{y}.$$

Având în vedere că  $|x - 3| < \delta$  și  $\frac{1}{y} < \delta$ , obținem

$$|f(x, y) - 3| < \delta + \delta^2 + 4\delta = \delta^2 + 5\delta.$$

Constatăm că  $|f(x, y) - 3| < \varepsilon$  dacă

$$\delta^2 + 5\delta = \varepsilon.$$

De aici, ținând cont că  $\delta > 0$ , deducem

$$\delta(\varepsilon) = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Rezultatele stabilite pot fi expuse și astfel: pentru orice vecinătate de forma  $V = (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$  a punctului  $\ell = 3$  există o vecinătate a lui  $(3, \infty)$  de forma  $U = (3 - \delta(\varepsilon), 3 + \delta(\varepsilon)) \times \left( \frac{1}{\delta(\varepsilon)}, +\infty \right)$  cu proprietatea că

$$\forall (x, y) \in U \implies f(x, y) \in V,$$

și deci limita funcției  $f$  în  $(3, \infty)$  este 3.

**c)** Cum  $x^2 + y^2 = (|x| + |y|)^2 - 2|x| \cdot |y|$ , presupunând  $|x| < \delta$ ,  $|y| < \delta$ , obținem:

$$\frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| - \frac{2|x| \cdot |y|}{|x| + |y|} \leq |x| + |y| < 2\delta.$$

Dacă se impune ca  $2\delta = \varepsilon$  rezultă că pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există  $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ , astfel încât

$$|x| < \delta, |y| < \delta \implies |f(x, y)| < \varepsilon,$$

ceea ce înseamnă că  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(x, y) = 0$ . ■

**Exercițiul 4.1.2.** Se dă funcția  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^2}{2x^2 + 9y^4}, & \text{dacă } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{dacă } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Să se arate că funcția  $f$  nu are limită în origine.

**Soluție.** Pentru calculul limitei  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  vom considera că  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$  pe unul din elementele familiei uniparametrice de parabole  $\{y^2 = mx : m \in \mathbb{R}\}$ . Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y^2 = mx}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y^2 = mx}} \frac{3mx^2}{x^2(2 + 9m^2)} = \frac{3m}{2 + 9m^2}.$$

Deoarece limita obținută depinde de parametrul familiei de parabole, rezultă că ea nu este unică. Deci funcția  $f$  nu are limită în origine. ■

**Exercițiul 4.1.3.** Funcția

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0} = (0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

nu are limită în origine.

**Soluție.** Într-adevăr, șirul  $(\mathbf{z}_n)_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{z}_n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , este convergent la  $\mathbf{0} = (0, 0)$ . Șirul valorilor funcției are termenul general

$$f(\mathbf{z}_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{\frac{\lambda}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{\lambda^2}{n^2}} = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2},$$

de unde  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{z}_n) = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$  și deci limita șirului  $(f(\mathbf{z}_n))$  depinde de  $\lambda$ . De exemplu, pentru  $\lambda = 2$ ,  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$  avem  $f(\mathbf{z}_n) \rightarrow \frac{2}{5}$ , iar pentru  $\lambda = -1$ ,  $\mathbf{z}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{-1}{n}\right)$ ,  $f(\mathbf{z}_n) \rightarrow -\frac{1}{2}$ .

Așadar, există două șiruri de puncte convergente la  $\mathbf{0}$  pentru care șirurile valorilor funcției converg la limite diferite, ceea ce demonstrează că funcția  $f$  nu are limită în origine.

Termenii șirului de vectori  $(\mathbf{z}_n)_{n \geq 1}$  sunt situați pe dreapta  $y = \lambda x$  care trece prin origine. Dacă se efectuează limita funcției  $f$  pentru  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , cu  $(x, y)$  aparținând acestei drepte, limita depinde de  $\lambda$  și deci funcția  $f$  nu are limită în origine. ■

**Exercițiul 4.1.4.** Să se calculeze limitele:

$$\begin{array}{lll}
 a) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}; & f) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}; & k) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}; \\
 b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x}; & g) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}; & l) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2y^2(x^2+y^2)}; \\
 c) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}; & h) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}; & m) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}; \\
 d) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x; & i) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}; & n) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}; \\
 e) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}; & j) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty \\ z \rightarrow \infty}} \left(\frac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}\right)^{x^2+y^2}; & o) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 1}} \frac{e^{x-y+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}}.
 \end{array}$$

**Soluție.** a) Trecând formal la limită se obține cazul de nedeterminare  $0/0$ . Întrucât nedeterminarea provine din funcții iraționale, amplificăm fracția cu conjugata  $1 + \sqrt{xy+1}$  a numitorului. Obținem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy(1+\sqrt{xy+1})}{xy+1-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\sqrt{xy+1}+1) = 2.$$

b) Avem aceeași nedeterminare. Vom înmulți numărătorul și numitorul fracției cu  $y$ . Obținem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} y \cdot \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{y \rightarrow 2} y \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{y \rightarrow 2} y \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2.$$

c) Pentru  $x > 0$  și  $y > 0$ , avem:

$$0 < \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{x^2} + \frac{y}{y^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Trecând la limită în aceste inegalități și ținând cont că  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0$ , deducem că  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$ .

d) Prin trecere formală la limită se obține nedeterminarea  $1^\infty$  pe care o vom înlătura folosind limita fundamentală  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ . Avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow k}} \left[\left(1 + \frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y = e^k.$$

e) Făcând precizarea că  $xyz \neq 0$ , din inegalitatea mediilor obținem:

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{(xyz)^2}}.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu  $|xyz|$ , deducem:

$$|f(x, y, z)| = \left| \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} \right| \leq \frac{\sqrt[3]{|xyz|}}{3}.$$

Ținând cont de proprietățile trecerii la limită în inegalități avem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} |f(x, y, z)| = 0 \implies \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} f(x, y, z) = 0.$$

f) Să observăm că  $(x - y)^2 \geq 0 \iff x^2 - xy + y^2 \geq xy$ . De asemenea,  $x^2 + y^2 \geq 0 \iff x^2 - xy + y^2 \geq -xy$ , deci  $|x^2 - xy + y^2| = x^2 - xy + y^2 \geq |xy|$ . Atunci, pentru  $x \neq 0$  și  $y \neq 0$ , deducem:

$$\frac{|x + y|}{|x^2 - xy + y^2|} \leq \frac{|x + y|}{|xy|} \leq \frac{|x| + |y|}{|x| \cdot |y|} = \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \rightarrow 0, \text{ când } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty,$$

de unde rezultă că limita funcției în origine este egală cu 0.

g) Deoarece se cere limita unei funcții de două variabile pentru  $x \rightarrow \infty$  și  $y \rightarrow \infty$ , putem considera  $x > 0$  și  $y > 0$ . Avem:

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = \frac{x^2}{x^4 + y^4} + \frac{y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2}{x^4} + \frac{y^2}{y^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \rightarrow 0, \text{ când } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty.$$

Așadar, limita funcției în origine este 0.

h) Pornim de la inegalitatea evidentă

$$(x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2y^2$$

din care deducem

$$x^2y^2 \leq \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2.$$

Deoarece  $x \rightarrow 0$  și  $y \rightarrow 0$  rezultă că putem considera o vecinătate  $V$  a originii în care să avem

$$0 < x^2 + y^2 < 1, \forall (x, y) \in V \setminus \{(0, 0)\}.$$

Putem scrie:

$$1 > (x^2 + y^2)^{x^2y^2} \geq (x^2 + y^2)^{\frac{(x^2 + y^2)^2}{4}} = t^{\frac{t^2}{4}},$$

unde  $t = x^2 + y^2$ . Cum  $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} t^{\frac{t^2}{4}} = 1$ , după trecerea la limită în aceste inegalități găsim că limita cerută este 1.

i) Deoarece se cere să se determine limita funcției  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$  pentru  $x \rightarrow \infty$  și  $y \rightarrow \infty$ , putem considera  $x > 0$  și  $y > 0$ . Avem:

$$0 < f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{e^{x+y}} = \frac{x^2 + y^2}{e^x e^y} \leq \frac{x^2}{e^x} + \frac{y^2}{e^y}.$$

Cum  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$ , după trecerea la limită în ultimele inegalități obținem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} = 0.$$

j) Și aici putem considera  $x > 0$ ,  $y > 0$  și  $z > 0$ . Din inegalitatea mediilor, avem:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \implies \left( \frac{\sqrt[3]{xyz}}{x + y + z} \right)^{x^2 + y^2} \leq \left( \frac{1}{3} \right)^{x^2 + y^2}.$$

Cum  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left( \frac{1}{3} \right)^{x^2 + y^2} = 0$  rezultă că  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left( \frac{\sqrt[3]{xyz}}{x + y + z} \right)^{x^2 + y^2} = 0$ .

k) Se procedează la fel ca la punctul a). Se găsește

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = 2.$$

l) Cum  $1 - \cos(x^2 + y^2) = 2 \sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}$ , avem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 y^2 (x^2 + y^2)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 \sin^2 \frac{x^2 + y^2}{2}}{x^2 y^2 (x^2 + y^2)} = \frac{1}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = \infty.$$

m) Cazul de nedeterminare  $\frac{0}{0}$  îl vom înlătura folosind o limită fundamentală. Obținem

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left( 1 + x^2 y^2 \right)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[ \left( 1 + x^2 y^2 \right)^{\frac{1}{x^2 y^2}} \right]^{-\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}} = e^{-\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Însă  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ . Urmează că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 1$ .

n) Folosind  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  deducem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \left( 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Ultima limită este 0 pentru că  $x + y \rightarrow 0$  când  $x \rightarrow 0$  și  $y \rightarrow 0$ , iar funcția

$$g(x, y) = 1 - \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

este mărginită deoarece are valorile în compactul  $[1/2, 3/2]$ .

o) Avem:  $\lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 0, 1)} f(x, y, z) = \lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 0, 1)} \frac{e^{x-y+z}}{z^2 + \cos \sqrt{xy}} = f(1, 0, 1) = \frac{1}{2} e^2$ . ■

**Exercițiul 4.1.5.** Se dă funcția  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \mathbb{R})$ ,

$$f(x, y) = (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}, \quad x \neq 0, y \neq 0.$$

Să se arate că :

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0; \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ nu există; c) } \lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) \text{ nu există.}$$

**Soluție.** a) Pentru că funcția  $t \rightarrow \sin \frac{1}{t}$  este mărginită, avem:

$$\sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \in [-1, 1], \quad \forall x \neq 0, y \neq 0.$$

Ținând cont că  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x + y| = 0$ , deducem:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |f(x, y)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| (x + y) \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x + y| = 0,$$

din care, utilizând proprietăți ale limitei unei funcții, obținem

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0.$$

b) Nu există  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  pentru că se pot găsi cel puțin două șiruri diferite  $(y_n)_{n \geq 1}$  cu  $y_n \neq 0$  și  $y_n \rightarrow 0$  pentru care limitele  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n)$  sunt diferite.

Așadar  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  nu există.

c) Nu există  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  pentru că se pot găsi cel puțin două șiruri diferite  $(x_n)_{n \geq 1}$  cu  $x_n \neq 0$  și  $x_n \rightarrow 0$  pentru care limitele  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y)$  sunt diferite.

Așadar  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$  nu există. ■

**Exercițiul 4.1.6.** Să se arate că funcția reală de două variabile reale

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}.$$

nu este uniform continuă.

**Soluție.** Vom arăta că pentru  $\varepsilon_0 = 1$  și  $\forall \delta > 0$  se pot preciza punctele  $M'_\delta(x'_\delta, y'_\delta)$ ,  $M''_\delta(x''_\delta, y''_\delta)$ , cu  $d(M'_\delta, M''_\delta) < \delta$ , care să implice

$$|f(M'_\delta) - f(M''_\delta)| \geq \varepsilon_0,$$

unde  $d(\cdot, \cdot)$  este **metrica Euclidiană** pe  $\mathbb{R}^2$ .

Punctele le determinăm din condițiile  $f(M'_\delta) = 0$  și  $f(M''_\delta) = 1$ , deci din ecuațiile

$$\frac{\pi}{1 - x'^2_\delta - y'^2_\delta} = 2n\pi, \quad \frac{\pi}{1 - x''^2_\delta - y''^2_\delta} = 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Trecem indicele "δ" în  $n$  și alegem  $x'_n, x''_n, y'_n$  și  $y''_n$  după cum urmează:

$$x'_n = x''_n = \frac{1}{n}; \quad y'_n = \sqrt{1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2}}; \quad y''_n = \sqrt{1 - \frac{2}{4n+1} - \frac{1}{n^2}}.$$

Deoarece  $y'_n \rightarrow 1$  și  $y''_n \rightarrow 1$ , rezultă că  $y''_n - y'_n \rightarrow 0$  și deci pentru orice  $\delta > 0$  există numărul natural  $N(\delta)$  astfel încât pentru orice  $n > N(\delta)$  să avem  $y''_n - y'_n < \delta$ .

Cum distanța dintre punctele  $M'_n$  și  $M''_n$  este

$$d(M'_n, M''_n) = \sqrt{(x'_n - x''_n)^2 + (y'_n - y''_n)^2} = |y'_n - y''_n| = y''_n - y'_n,$$

avem  $d(M'_n, M''_n) < \delta$  dacă  $n > N(\delta) \in \mathbb{N}$ .

Acest raționament demonstrează că funcția  $f$  nu este uniform continuă. ■

## 4.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri



**Exercițiul 4.2.1.** Să se discute în raport cu parametrul real  $\alpha$  continuitatea următoarelor funcții:

$$\begin{aligned} 1^0. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\ 2^0. \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0); \end{cases} \\ 3^0. \quad f(x, y, z) &= \begin{cases} \frac{(x + y + z) \operatorname{tg}(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ \alpha, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases} \end{aligned}$$

**Indicație.** Pentru limita  $\ell$  în origine a fiecăreia dintre funcții se găsește:  $1^0$ .  $\ell$  nu există;  $2^0$ .  $\ell = \frac{1}{2}$ ;  $3^0$ .  $\ell = 0$ .

În calcule intervin limitele fundamentale:  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ ;  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$  ■

**Răspuns.** Prima funcție este discontinuă  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , a doua este continuă pentru  $\alpha = \frac{1}{2}$ , iar a treia este continuă pentru  $\alpha = 0$ . ■

**Exercițiul 4.2.2.** Să se arate că funcția  $f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}$  nu este uniform continuă.

**Indicație.** Se procedează la fel ca în Exercițiul 4.1.6. ■

**Răspuns.** Rezultă că funcția  $f$  nu este uniform continuă. ■

**Exercițiul 4.2.3.** Fie funcția vectorială de variabilă vectorială

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left( e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, \|\mathbf{x}\| \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\|^{x_1} \right), & \text{dacă } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ (0, 0, 1), & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  și mulțimile:

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \sum_{k=1}^n |x_k| \leq 1\}; \quad B = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2 \leq 1 \right\}.$$

Să se arate că :

- (a)  $A$  și  $B$  sunt mulțimi închise în  $\mathbb{R}^n$  și respectiv în  $\mathbb{R}^3$ ;
- (b)  $\mathbf{f}(A)$  este o mulțime compactă și conexă în  $\mathbb{R}^3$ ;
- (c)  $\mathbf{f}^{-1}(B)$  este o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

**Indicație.** Funcțiile coordonate  $f_1, f_2, f_3$  ale funcției date sunt funcțiile reale de  $n$  variabile reale

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\| \sin \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{cases} \|\mathbf{x}\|^{x_1}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned}$$

unde  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  este norma Euclidiană pe  $\mathbb{R}^n$ .

Este ușor de verificat că  $f_1, f_2, f_3$  sunt continue pe  $\mathbb{R}^n$ , deci  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  este funcție continuă.

(a) Mulțimea  $A$  este bila închisă cu centrul în origine și rază 2 din spațiul metric  $(\mathbb{R}^n, d_2)$ , unde

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

deci este o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ .

Considerăm funcția reală

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} + y_3^2,$$

care este continuă. Atunci  $B = \varphi^{-1}([0, 1])$  este o mulțime închisă în  $\mathbb{R}^3$  (contraimaginea prin funcția continuă  $\varphi$  a compactului  $[0, 1]$ ).

(b) Deoarece o bilă închisă în spațiul Euclidian  $\mathbb{R}^n$  este mulțime compactă în  $\mathbb{R}^n$  (mărginită și închisă în  $\mathbb{R}^n$ ) și conexă în  $\mathbb{R}^n$ , rezultă că mulțimea  $A$  este o mulțime compactă și conexă în  $\mathbb{R}^n$ .

Întrucât  $f$  este funcție continuă și  $A$  este o mulțime compactă și conexă în  $\mathbb{R}^n$ , rezultă că  $f(A)$  este mulțime compactă și conexă în  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Mulțimea  $B$  fiind închisă și  $f$  fiind funcție continuă, rezultă că  $f^{-1}(B)$  este mulțime închisă în  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Exercițiul 4.2.4.** Fie  $(V, \|\cdot\|)$  un spațiu normat. Funcția  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$  este continuă pe  $V$ .

**Indicație.** Avem  $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ . **Răspuns.** Fie  $\varepsilon > 0$ . Luând  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , atunci  $\forall \mathbf{x} \in V$  cu  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta(\varepsilon) \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ , adică  $f$  este continuă în  $\mathbf{x}_0$ . Cum  $\mathbf{x}_0$  este arbitrar din  $V$ , rezultă că  $f$  este continuă pe  $V$ . ■

**Exercițiul 4.2.5.** Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

**Indicație.** Se arată ușor că funcția  $f$  este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor. ■

### 4.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Care este deosebirea dintre **continuitate** și **uniforma continuitate** a unei funcții definită pe un spațiu metric cu valori într-un alt spațiu metric? ■

**2°.** Ce se poate afirma despre **funcțiile continue pe mulțimi conexe**? Dar pe mulțimi convexe? Demonstrați cel puțin una dintre afirmații. ■

**3°.** Orice **spațiu metric conex prin arce** este **spațiu metric conex**? Dacă răspunsul este **da**, demonstrați afirmația. ■

**4°.** Fie funcția vectorială de argument vectorial

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Dacă  $A$  este o **mulțime mărginită și închisă** și  $\mathbf{f}$  este funcție continuă, mulțimea  $\text{Im } \mathbf{f} = \mathbf{f}(A) \subset \mathbb{R}^m$  este mărginită și închisă? Dacă răspunsul este **da**, să se demonstreze afirmația. ■

**5°.** Ce este o **funcție Hölder**, sau **funcție hölderiană**? Dar o **funcție Lipschitz**? ■

## Capitolul 5

# MC.05 – Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor reale

### 5.1 Derivabilitatea și diferențiabilitatea funcțiilor vectoriale de variabilă reală

#### 5.1.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 5.1.1.** Să se arate că fiecare dintre imaginile următoarelor drumuri parametrizate:

$$(1) \quad \mathbf{r} : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = (t^2 - 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (\ln t)\mathbf{k};$$

$$(2) \quad \mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = (2t^3 + t^2)\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + (t^3 + t - 1)\mathbf{k}$$

este situată într-un plan a cărui ecuație se cere a fi determinată.

**Soluție.** (1) Ecuațiile parametrice ale primului drum sunt

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 \\ z = \ln t, \quad t \in [1, e] \end{cases}.$$

Eliminarea parametrului  $t$  între primele două ecuații conduce la egalitatea  $x - y + 1 = 0$ , care reprezintă ecuația unui plan paralel cu axa  $Oz$ .

Prin urmare imaginea primului drum parametrizat este situată în planul de ecuație  $x - y + 1 = 0$ .

(2) Ecuațiile parametrice ale drumului sunt

$$\begin{cases} x = 2t^3 + t^2 \\ y = t^2 - 2t \\ z = t^3 + t - 1, \quad t \in [0, 1] \end{cases}.$$

Ecuația unui plan care ar putea conține imaginea drumului considerat este  $Ax + By + Cz + D = 0$ , unde coeficienții  $A, B, C, D$  urmează a fi determinați.

Impunând ca imaginea drumului să aparțină acestui plan, se obține

$$A(2t^3 + t^2) + B(t^2 - 2t) + C(t^3 + t - 1) + D = 0, \quad t \in [0, 1],$$

de unde, prin identificarea coeficienților, deducem sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ A + B = 0 \\ 2B - C = 0 \\ D - C = 0 \end{cases}$$

care are o infinitate simplă de soluții, și anume:  $B = -A$ ;  $C = -2A$ ;  $D = -2A$ .

Prin urmare, imaginea drumului se găsește în planul  $Ax - Ay - 2Az - 2A = 0$ .

Simplificând prin  $A$ , obținem că ecuația planului căutat este  $x - y - 2z - 2 = 0$ . ■

**Exercițiul 5.1.2.** Fie curba în spațiu

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}.$$

Determinați parametrizarea naturală a curbei, lungimea ei și versorii triedrului Frenet într-un punct oarecare al curbei.

**Soluție.** Cum  $\dot{\mathbf{r}}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + e^t(\sin t + \cos t)\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ , urmează că  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{3}e^t$ . De aici, elementul de arc  $ds$  al curbei este dat de relația  $ds = \sqrt{3}e^t dt$ , deci  $s = \sqrt{3}e^t + C$ .

Presupunând că originea de arc pe curbă corespunde lui  $t = 0$ , obținem  $C = -\sqrt{3}$ , deci  $s = \sqrt{3}(e^t - 1)$ .

Prin urmare, parametrizarea naturală a curbei este

$$\mathbf{r} = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \cos \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{i} + \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \sin \ln \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{j} + \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) \mathbf{k}, \quad s \in [0, \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1)].$$

Lungimea curbei este

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t dt = \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1),$$

iar versorii triedrului Frenet  $\boldsymbol{\tau}(s)$ ,  $\boldsymbol{\nu}(s)$  și  $\boldsymbol{\beta}(s)$  sunt dați de relațiile

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \\ \boldsymbol{\nu}(s) = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|}, \\ \boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \times \boldsymbol{\nu}(s) = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left\|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right\|}. \end{cases}$$

Efectuând calculele, găsim

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(s) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \left[ \cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) - \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{i} + \left[ \cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) + \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{j} + \mathbf{k} \right\}, \\ \boldsymbol{\nu}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[ -\cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) - \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{i} + \left[ \cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) - \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{j} \right\}, \\ \boldsymbol{\beta}(s) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \left[ \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) - \cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{i} - \left[ \cos \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) + \sin \ln \left( \frac{s}{\sqrt{3}} + 1 \right) \right] \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \right\}. \end{cases}$$

■

**Exercițiul 5.1.3.** Determinați ecuația tangentei la curba definită de drumul

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$$

în punctul  $M_0$  corespunzător valorii  $\frac{\pi}{6}$  a parametrului  $t$ .

**Soluție.** Un vector director al tangentei la curbă într-un punct  $M$  corespunzător valorii  $t$  a parametrului este

$$\mathbf{f}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}.$$

De aici, un vector director pentru tangenta în  $M_0$  este

$$\mathbf{f}'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\mathbf{i} + \sqrt{3} \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}.$$

Cum  $M_0\left(\sqrt{3}, 1, \frac{2\pi}{3}\right)$ , urmează că ecuațiile canonice ale tangentei în  $M_0$  la curbă sunt

$$\frac{x - \sqrt{3}}{-1} = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} = \frac{z - \frac{2\pi}{3}}{4}.$$

■

**Exercițiul 5.1.4.** Fie curba definită de drumul

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^{-2t} \mathbf{k}.$$

Determinați punctele curbei în care tangenta este paralelă cu dreapta  $(D) : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-2}$ .

**Soluție.** Un vector director pentru tangenta în punctul curent  $M$  de pe curbă corespunzător valorii  $t$  a parametrului este

$$\mathbf{f}'(t) = e^t(\cos t - \sin t) \mathbf{i} + e^t(\cos t + \sin t) \mathbf{j} - 2e^{-2t} \mathbf{k}.$$

Un vector director al dreptei  $(D)$  fiind  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ , impunând condiția de paralelism  $\mathbf{f}'(t) = c\mathbf{v}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , obținem

$$e^t(\cos t - \sin t) = c, \quad e^t(\cos t + \sin t) = c, \quad -2e^{-2t} = -2c.$$

Din cea de-a treia ecuație obținem că  $c = e^{-2t}$ . Ridicând la pătrat fiecare dintre primele două ecuații și sumând rezultatele, deducem  $c^2 = e^{2t}$ . Prin înmulțirea ultimelor două egalități găsim  $c^3 = 1$ , de unde aflăm că  $c = 1$ , ceea ce implică  $e^t = 1$  și deci  $t = 0$ .

Prin urmare, punctul  $M_0$  de pe curbă în care tangenta este paralelă cu dreapta  $(D)$  este cel corespunzător valorii  $t = 0$  a parametrului. Găsim  $M_0(1, 0, 1)$ . ■

**Exercițiul 5.1.5.** Determinați ordinul de contact în origine al curbelor plane

$$(C_1) : x = t^3 - 3t^2, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (C_2) : x = t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.** Funcțiile din teorie (vezi MC.05) sunt  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $f(t) = t^3 - 3t^2$  și  $g(t) = t^2$ . Observăm că originea corespunde valorii  $t = 0$ .

Derivatele de ordinul întâi și doi ale funcțiilor  $f$  și  $g$  au expresiile:

$$f'(t) = 3t^2 - 6t; \quad g'(t) = 2t; \quad f''(t) = 6t - 6; \quad g''(t) = 2.$$

Cum:

$$f(0) = g(0) = 0; \quad f'(0) = g'(0) = 0; \quad f''(0) = 0 \neq g''(0) = 2,$$

urmează că  $(C_1)$  și  $(C_2)$  au în origine un contact de ordinul întâi. ■

### 5.1.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 5.1.6.** *Determinați parametrizarea naturală a curbei*

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + 4 \sin \frac{t}{2}\mathbf{k}.$$

**Indicație.** Determinând  $ds = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|dt$  găsiți  $ds = 2dt$ . ■

**Răspuns.** Parametrizarea naturală a curbei este  $\mathbf{r} = \left(\frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2}\right)\mathbf{i} + \left(1 - \cos \frac{s}{2}\right)\mathbf{j} + 4 \sin \frac{s}{2}\mathbf{k}$ ,  $s \in [0, \pi]$ . ■

**Exercițiul 5.1.7.** *Să se găsească vectorul viteză, vectorul accelerație, viteza și accelerația la momentul  $t$  ale particulei materiale care se mișcă după legea*

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f}(t) = (3t^2 - 3)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j} - 4t^2\mathbf{k}.$$

**Indicație.** Vectorul viteză  $\mathbf{v}(t)$  la momentul  $t$  este  $\mathbf{f}'(t)$ , iar viteza  $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$  este  $\|\mathbf{f}'(t)\|$ . Vectorul accelerație  $\mathbf{a}(t)$  la momentul  $t$  este  $\mathbf{f}''(t)$ , iar accelerația  $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$  este  $\|\mathbf{f}''(t)\|$ . ■

**Răspuns.**  $\mathbf{v}(t) = 6t\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 8t\mathbf{k}$ ;  $v(t) = 10\sqrt{1+t^2}$ ;  $\mathbf{a}(t) = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ ;  $a(t) = 10$ . ■

**Exercițiul 5.1.8.** *Fie funcția  $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t$ , unde  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$  sunt vectori constanți, iar  $\omega$  este o constantă reală pozitivă numită **frecvență**. Să se arate că*

$$(1) \quad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \mathbf{a} \times \mathbf{b}; \quad (2) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

**Indicație.** Primele două derivate ale funcției  $\mathbf{r}$  sunt

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega(\mathbf{a} \sin \omega t - \mathbf{b} \cos \omega t), \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2(\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t) = -\omega^2 \mathbf{r}.$$

**Răspuns.** Deoarece  $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , urmează că

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= (\mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \sin \omega t) \times (-\omega(\mathbf{a} \sin \omega t - \mathbf{b} \cos \omega t)) \\ &= \mathbf{a} \cos \omega t \times (-\mathbf{b} \cos \omega t) + \mathbf{b} \sin \omega t \times (-\omega(\mathbf{a} \sin \omega t)) \\ &= \omega \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

cea de-a doua egalitate demonstrându-se asemănător. ■

**Exercițiul 5.1.9.** Fie funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad f(t) = \sqrt[5]{1+t}.$$

Determinați aproximările liniară și pătratică în vecinătatea punctului  $t_0 = 0$ , precum și ecuația cercului osculator al curbei  $(C) : x = f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , în punctul  $M_0(0, 1)$ .

**Indicație.** Derivatele de ordinul întâi și al doilea ale lui  $f$  sunt date de formulele

$$f'(t) = \frac{1}{5}(1+t)^{-\frac{4}{5}}; \quad f''(t) = -\frac{4}{25}(1+t)^{-\frac{9}{5}}, \quad f'(0) = \frac{1}{5}, f''(0) = -\frac{4}{25}$$

Aproximarea liniară în vecinătatea lui  $t_0 = 0$  este

$$f(t) \simeq f(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} f'(t_0) = P_1(t; t_0, f),$$

iar aproximarea pătratică în vecinătatea lui  $t_0 = 0$  este

$$f(t) \simeq f(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} f''(t_0) = P_2(t; t_0, f).$$

Expresiile celor trei numere care definesc cercul osculator sunt

$$\begin{cases} \alpha &= t_0 - \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} f'(t_0) \\ \beta &= f(t_0) + \frac{1 + (f'(t_0))^2}{f''(t_0)} \\ R &= \frac{(1 + (f'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(t_0)|}. \end{cases},$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt coordonatele centrului de curbura, iar numărul pozitiv  $R$  este raza de curbura. ■

**Răspuns.** Aproximările liniară și pătratică ale lui  $f$  în vecinătatea lui  $t_0 = 0$  sunt:

$$f(t) \simeq 1 + \frac{1}{5}t; \quad f(t) \simeq 1 + \frac{1}{5}t - \frac{4}{50}t^2,$$

iar ecuația cercului osculator este  $\left(x - \frac{13}{10}\right)^2 + \left(x + \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{2197}{50}$ . ■

**Exercițiul 5.1.10.** Să se scrie formula lui Taylor cu restul lui Peano de ordin  $n$  a funcției

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(t) = (e^{2t}, \ln(1+3t)).$$

în vecinătatea punctului  $t_0 = 1$ .

**Indicație.** Se calculează derivatele de ordin oarecare  $n \in \mathbb{N}^*$  ale funcțiilor de coordonate:

$$f_1 \in \mathcal{F}(I), \quad f_1(t) = e^{2t}, \quad f_2 \in \mathcal{F}(I), \quad f_2(t) = \ln(1+3t).$$

**Răspuns.**

$$\mathbf{f}(t) = (e^2, \ln 4) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{2^k}{k!} e^2, \frac{(-1)^{k-1} 3^k}{k 4^k} \right) (t-1)^k + \boldsymbol{\alpha}(t)(t-1)^n.$$

unde  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^2)$ . ■



### 5.1.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Care este raportul incremental al unei funcții vectoriale de variabilă reală  $\mathbf{f}$  într-un punct dat  $t_0$ ?

Precizați modul de calcul al raportului incremental cu ajutorul rapoartelor incrementare ale funcțiilor componente.

Ce efect are acest mod de calcul asupra legăturii dintre derivabilitatea funcției  $\mathbf{f}$  și derivabilitatea funcțiilor componente? ■

**2°.** Scrieți și demonstrați formula lui Leibniz de derivare de  $k$  ori a produsului funcțiilor  $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C^k(I, \mathbb{R}^m)$ . ■

**3°.** Precizați o funcție  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  care este continuă în  $t_0 = 0$  fără a fi derivabilă în  $t_0$ . ■

**4°.** Drumul parametrizat

$$\mathbf{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(t) = (R \cos t, R \sin t, ht), \quad R > 0, \quad h \in \mathbb{R}^*,$$

are drept **traietorie** o buclă dintr-o **elice cilindrică de pas constant**.

Cât este lungimea acestei bucle? ■

**5°.** Fie curbele plane

$$(C_1) : x = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (C_2) : x = g(t), \quad t \in [a, b].$$

Interpretați cu ajutorul noțiunilor de tangentă și cerc osculator următoarele situații:

1.  $(C_1)$  și  $(C_2)$  au contact de ordin 0 în  $M_1(t_1, x_1)$ ;
2.  $(C_1)$  și  $(C_2)$  au contact de ordin cel puțin 2 în  $M_2(t_2, x_2)$ .

■

## 5.2 Diferențiabilitatea și derivabilitatea parțială ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

### 5.2.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 5.2.1.** Să se calculeze derivata funcției reale de trei variabile reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_2 + 4x_3^3$$

în punctul  $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$  după direcția  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ .

**Soluție.** Determinăm întâi versorul  $\mathbf{s}$  al vectorului  $\mathbf{v}$ . Deoarece  $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$ , urmează că

$$\mathbf{s} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Derivata funcției  $\mathbf{f}$  în punctul  $\mathbf{a}$  după direcția de versor  $\mathbf{s}$  este dată de

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) - f(\mathbf{a})}{t} = g'(0),$$

unde  $g$  este definită prin

$$g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{s}) = 3 \left( 2 + \frac{t\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2 + 4 \left( 1 + \frac{t\sqrt{2}}{2} \right)^3.$$

Prin urmare

$$g'(t) = 3\sqrt{2} \left( 2 + \frac{t\sqrt{2}}{2} \right) + 6\sqrt{2} \left( 1 + \frac{t\sqrt{2}}{2} \right)^2,$$

de unde

$$\frac{df}{ds}(\mathbf{a}) = g'(0) = 12\sqrt{2}.$$

■

**Exercițiul 5.2.2.** Să se calculeze diferențiala funcției reale de două variabile reale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2$$

și să se demonstreze că derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției  $f$  verifică relația

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

**Soluție.** Se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( e^{x_1^2 - x_2^2} \right) \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} (\sin 2x_1 x_2) \\ &= 2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_2 \cos 2x_1 x_2; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( e^{x_1^2 - x_2^2} \right) \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\sin 2x_1 x_2) \\ &= -2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_1 \cos 2x_1 x_2 \end{aligned}$$

de unde, conform expresiei diferențiale de ordinul întâi a unei funcții

$$df(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) dx_2$$

rezultă

$$df(x_1, x_2) = 2e^{x_1^2 - x_2^2} [(x_1 \sin 2x_1 x_2 + x_2 \cos 2x_1 x_2) dx_1 + (x_1 \cos 2x_1 x_2 - x_2 \sin 2x_1 x_2) dx_2].$$

Au loc de asemenea egalitățile

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( 2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_2 \cos 2x_1 x_2 \right) \\ &= 2e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + 4x_1^2 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + 2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_2 \cos 2x_1 x_2 \\ &\quad + 2x_1 e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_2 \cos 2x_1 x_2 - e^{x_1^2 - x_2^2} 4x_2^2 \sin 2x_1 x_2 \\ &= e^{x_1^2 - x_2^2} ((2 + 4x_1^2 - 4x_2^2) \sin 2x_1 x_2 + 8x_1 x_2 \cos 2x_1 x_2) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) (x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( -2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_1 \cos 2x_1 x_2 \right) \\ &= -2e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 + 4x_2^2 e^{x_1^2 - x_2^2} \sin 2x_1 x_2 - 2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_1 \cos 2x_1 x_2 \\ &\quad - 2x_2 e^{x_1^2 - x_2^2} 2x_1 \cos 2x_1 x_2 - e^{x_1^2 - x_2^2} 4x_1^2 \sin 2x_1 x_2 \\ &= e^{x_1^2 - x_2^2} ((-2 - 4x_1^2 + 4x_2^2) \sin 2x_1 x_2 - 8x_1 x_2 \cos 2x_1 x_2), \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

O funcție reală  $f$  care verifică egalitatea de mai sus se numește **funcție armonică**.

Dacă  $f$  are trei variabile reale, egalitatea corespunzătoare celei de mai sus se scrie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in D \subset \mathbb{R}^3,$$

iar  $f$  se numește de asemenea funcție armonică. ■

**Exercițiul 5.2.3.** Fie  $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$  o funcție derivabilă. Demonstrați că funcția

$$\Phi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \quad \Phi(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$$

verifică relația

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

**Soluție.** Conform formulei de derivare a funcțiilor compuse, au loc relațiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) &= \varphi'(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x\varphi'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) &= \varphi'(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y\varphi'(x^2 + y^2), \end{aligned}$$

deci

$$y \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 2xy\varphi'(x^2 + y^2) - 2xy\varphi'(x^2 + y^2) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 5.2.4.** Demonstrați că funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

este diferențiabilă în origine.

**Soluție.** Observăm că  $f(0, 0) = 0$ , iar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{|t|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{|t|} = 0,$$

deoarece  $\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$  iar  $\left| \sin \frac{1}{|t|} \right| \leq 1$ . Similar,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{|t|}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{|t|} = 0.$$

Definiția diferențiabilității unei funcții conduce la egalitatea

$$f(x, y) = \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

de unde

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ținând seama că

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \alpha(x, y) = 0 = \alpha(0, 0),$$

deoarece  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ , iar  $\left| \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$ , rezultă concluzia. ■

**Exercițiul 5.2.5.** Precizați dezvoltarea funcției polinomiale

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = x^2y - 5xy + x^2 - 5x + 6y + 6,$$

cu ajutorul formulei lui Taylor într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{x}_0 = (2, -1)$ .

**Soluție.** Observăm că  $f \in C^N(\mathbb{R}^2)$  pentru orice  $N$  număr natural, iar  $f(\mathbf{x}_0) = 0$ . Pentru funcția dată derivatele parțiale de ordinele întâi și doi sunt date de relațiile

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy - 5y + 2x - 5, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - 5x + 6, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y + 2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2x - 5, \end{cases}$$

de unde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{x}_0) = -1.$$

Mai departe,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = 0,$$

toate derivatele parțiale ale lui  $f$  de ordin patru sau mai mare fiind identic nule. Rezultă atunci că

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}_0)(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{x}_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}_0)(y - y_0)^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\mathbf{x}_0)(x - x_0)^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\mathbf{x}_0)(x - x_0)^2(y - y_0) + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\mathbf{x}_0)(x - x_0)(y - y_0)^2 \right. \\ &\left. + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\mathbf{x}_0)(y - y_0)^3 \right). \end{aligned}$$

din care obținem  $f(x, y) = -(x - 2)(y + 1) + (x - 2)^2(y + 1)$ , oricare ar fi  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . ■

**Exercițiul 5.2.6.** Arătați că funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^2), \quad f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x}$$

este omogenă, precizați-i gradul de omogenitate și verificați formula lui Euler.

**Soluție.** Au loc relațiile

$$f(tx, ty) = ((tx)^2 + (ty)^2) \sin \frac{ty}{tx} = t^2(x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x} = t^2 f(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \quad t > 0,$$

deci  $f$  este omogenă de gradul al doilea. Prin calcul direct, se obține că

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( (x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x} \right) = 2x \sin \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cos \frac{y}{x} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( (x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x} \right) = 2y \sin \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cos \frac{y}{x} \left( \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Conform acestor relații,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \left( 2x \sin \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cos \frac{y}{x} \left( -\frac{y}{x^2} \right) \right) + y \left( 2y \sin \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \cos \frac{y}{x} \left( \frac{1}{x} \right) \right) \\ &= 2x^2 \sin \frac{y}{x} - (x^2 + y^2) \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y^2 \sin \frac{y}{x} + (x^2 + y^2) \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \\ &= 2(x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x} \\ &= 2f(x, y), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că formula lui Euler este verificată. ■

## 5.2.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 5.2.7.** Precizați direcțiile după care funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \sqrt[6]{x^2 y^4}$$

are derivată în origine.

**Indicație.** O direcție oarecare din  $\mathbb{R}^2$  are versorul  $\mathbf{s} = (\cos \theta, \sin \theta)$ , unde  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Se arată că

$$\frac{df}{ds}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{t^6 \cos^2 \theta \sin^4 \theta}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} \sqrt[6]{\cos^2 \theta \sin^4 \theta}.$$

■

**Răspuns.** Limita de mai sus există dacă și numai dacă  $\cos^2 \theta \sin^4 \theta = 0$ , deci  $\theta \in \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \right\}$ . ■

**Exercițiul 5.2.8.** Pornind de la definiția derivatelor parțiale, determinați  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$  dacă

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \ln(1 + xy^2).$$

**Indicație.** Notând  $\mathbf{a} = (0, 1)$ , avem  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t}$ , unde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ . ■

**Răspuns.**  $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a}) = 1$ . ■

**Exercițiul 5.2.9.** Arătați că funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = y \cos(x^2 - y^2)$$

satisface egalitatea

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y^2} f(x, y), \quad \text{pentru } x, y \neq 0.$$

**Indicație.** Au loc relațiile

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy \sin(x^2 - y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2 - y^2) + 2y^2 \sin(x^2 - y^2).$$

**Răspuns.**

$$\frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(x^2 - y^2) + \frac{1}{y} \cos(x^2 - y^2) + 2y \sin(x^2 - y^2) = \frac{1}{y} \cos(x^2 - y^2) = \frac{1}{y^2} f(x, y).$$

**Exercițiul 5.2.10.** Demonstrați că funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nu este diferențiabilă în  $(0, 0)$ .

**Indicație.** Să presupunem că  $f$  este diferențiabilă în origine. Deoarece

$$f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

conform definiției diferențiabilității urmează că

$$f(x, y) = \alpha(x, y) \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

cu

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \alpha(x, y) = 0 = \alpha(0, 0).$$

**Răspuns.** Din relațiile de mai sus se obține că expresia lui  $\alpha$  este dată de

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Însă  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x|y|}{x^2 + y^2}$  nu există, lucru care se poate constata, de exemplu, observând că  $\alpha(x,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , pentru  $x > 0$ , iar  $\alpha(x,x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , pentru  $x < 0$ , sau folosind caracterizarea cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct. Rezultă de aici că  $f$  nu este diferențiabilă în  $(0,0)$ . ■

**Exercițiul 5.2.11.** Calculați  $d^N f(x,y)$ , unde  $f(x,y) = e^{ax+by}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Indicație.** Se arată că  $d^N(e^{ax+by}) = \sum_{k=0}^N C_N^k \frac{\partial^N(e^{ax+by})}{\partial x^{N-k} \partial y^k} dx^{N-k} dy^k$ . ■

**Răspuns.**  $d^N(e^{ax+by}) = e^{ax+by} \sum_{k=0}^N C_N^k a^{N-k} b^k dx^{N-k} dy^k = e^{ax+by} (adx + bdy)^N$ . ■

### 5.2.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Fie funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \\ 0, & x = 0 \text{ sau } y = 0 \end{cases}.$$

Atunci  $f$  este derivabilă parțial în origine, iar  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ , deși  $f$  nu este continuă în origine.

Cum explicați acest rezultat? ■

2°. Fie funcția

$$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2), \quad f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \sqrt{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Atunci  $f$  este diferențiabilă în origine, deși  $\frac{\partial f}{\partial x}$  și  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sunt discontinue în origine.

Cum explicați? ■

3°. Fie  $E \subset \mathbb{R}^n$  un con cu vârful în origine și  $k \in \mathbb{R}$ .

Este mulțimea funcțiilor omogene de gradul  $k$  pe  $\mathbb{R}$  spațiu liniar real în raport cu operațiile uzuale de adunare a funcțiilor și înmulțire a funcțiilor cu scalari? ■

4°. Dați exemplu de două funcții  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  care au aceeași matrice hessiană în orice  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  fără ca diferența lor să fie constantă. ■

5°. Precizați definiția laplacianului în trei variabile.

## 5.3 Teoria diferențiabilității și derivabilității funcțiilor vectoriale de argument vectorial

### 5.3.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 5.3.1.** Fie funcția

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3), \quad \mathbf{f}(x,y) = (xy, y \sin x, x + y).$$

Demonstrați că  $\mathbf{f}$  este diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^2$ . Precizați diferențiala sa  $d\mathbf{f}(\mathbf{x})$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x}$  și  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{a})$ , unde  $\mathbf{x}_0 = (0,1)$ ,  $\mathbf{a} = (1,0)$ . Determinați matricea jacobiană a lui  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x}$ .

**Soluție.** Fie funcțiile de coordonate  $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,

$$f_1(x, y) = xy, \quad f_2(x, y) = y \sin x, \quad f_3(x, y) = x + y.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestor funcții

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = y \cos x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \sin x, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) = 1$$

sunt continue pe  $\mathbb{R}^2$ , prin urmare  $f_1, f_2$  și  $f_3$  sunt funcții diferențiabile pe  $\mathbb{R}^2$ .

Deoarece funcțiile de coordonate  $f_1, f_2$  și  $f_3$  sunt diferențiabile pe  $\mathbb{R}^2$ , funcția vectorială  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  este diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^2$ .

Diferențiala funcției  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x} = (x, y)$  se calculează cu ajutorul diferențialelor funcțiilor de coordonate sub forma

$$d\mathbf{f}(x, y) = (df_1(x, y), df_2(x, y), df_3(x, y)) = (ydx + xdy, y \cos x dx + \sin x dy, dx + dy),$$

de unde

$$d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{a}) = (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0, 1 \cos 0 \cdot 1 + \sin 1 \cdot 0, 1 + 0) = (1, 1, 1).$$

Deoarece matricea jacobiană a lui  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x} = (x, y)$  este

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix},$$

$$\text{urmează că } J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y \cos x & \sin x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

**Exercițiul 5.3.2.** Fie funcția

$$\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(x, y) = (\sin(x^2 + y^2), \cos(xy))$$

Demonstrați că  $\mathbf{f}$  este de două ori diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^2$  și calculați  $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{a})$ , unde  $\mathbf{x}_0 = (0, \sqrt{\pi})$ ,  $\mathbf{a} = (0, 1)$ .

**Soluție.** Fie funcțiile de coordonate  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,

$$f_1(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad f_2(x, y) = \cos(xy).$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestor funcții sunt, respectiv,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -y \sin(xy), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -x \sin(xy),$$

în vreme ce derivatele parțiale de ordinul al doilea sunt, respectiv,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y) &= 2 \cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2), & \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y) &= 2 \cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x, y) = -4xy \sin(x^2 + y^2), & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y) &= -y^2 \cos(xy), \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y) &= -x^2 \cos(xy), & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x, y) = -(\sin(xy) + xy \cos(xy)). \end{aligned}$$



Deoarece aceste derivate parțiale sunt continue pe  $\mathbb{R}^2$ , urmează că funcțiile de coordonate  $f_1$  și  $f_2$  sunt de două ori diferențiabile pe  $\mathbb{R}^2$ .

În concluzie  $\mathbf{f}$  este de două ori diferențiabilă pe  $\mathbb{R}^2$ .

Diferențiala de ordinul al doilea a lui  $\mathbf{f}$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x} = (x, y)$  se calculează cu ajutorul diferențialelor de ordinul al doilea ale funcțiilor de coordonate, sub forma

$$d^2\mathbf{f}(x, y) = (d^2f_1(x, y), d^2f_2(x, y)),$$

unde

$$\begin{aligned} d^2f_1(x, y) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x, y)dy^2 \\ &= (2\cos(x^2 + y^2) - 4x^2 \sin(x^2 + y^2))dx^2 - 8xy \sin(x^2 + y^2)dxdy + \\ &\quad + (2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2))dy^2 \\ d^2f_2(x, y) &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x, y)dy^2 \\ &= -y^2 \cos(xy)dx^2 - 2(\sin(xy) + xy \cos(xy))dxdy - x^2 \cos(xy)dy^2, \end{aligned}$$

iar, pentru  $x = \sqrt{\pi}$ ,  $y = 0$ ,  $dx = 0$ ,  $dy = 1$ , de unde obținem  $d^2\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{a}) = (-2, 0)$ , deci un vector din  $\mathbb{R}^2$ . ■

**Exercițiul 5.3.3.** Să se determine aproximarea liniară a funcției

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(x, y) = (\sin^2 x \cos y, \sin x - \cos y), \quad (\forall) \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

într-o vecinătate a punctului  $\mathbf{x}_0 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Soluție.** Se observă că  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = (0, 0)$ .

Aproximarea liniară a funcției  $\mathbf{f}$  în vecinătatea punctului  $\mathbf{x}_0$  este dată de relația

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Considerând funcțiile de coordonate  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,

$$f_1(x, y) = \sin^2 x \cos y, \quad f_2(x, y) = \sin x - \cos y,$$

rezultă că

$$d\mathbf{f}(x, y) = (df_1(x, y), df_2(x, y)) = (2\sin x \cos x \cos y dx - \sin^2 x \sin y dy, \cos x dx + \sin y dy),$$

de unde  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0; \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \left(0 \cdot 1(x - 0) - 0 \cdot 1\left(y - \frac{\pi}{2}\right), 1(x - 0) + 1\left(y - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0, x + y - \frac{\pi}{2}\right)$ .

Aproximarea liniară căutată este  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \simeq \left(0, x + y - \frac{\pi}{2}\right)$ . ■

**Exercițiul 5.3.4.** Să se calculeze  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ , unde

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{f}(x, y) = (\sin(x + y), \cos(x + y), xy).$$

**Soluție.** Derivata parțială de ordinul al doilea mixtă a unei funcții vectoriale de două variabile reale  $\mathbf{f}$ , într-un punct  $(x, y)$ , se calculează după regula

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right)(x, y).$$

Dar  $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(x, y) = (\cos(x+y), -\sin(x+y), x)$ . Aplicând acestei funcții operația de derivare față de  $x$ , găsim

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}(x, y) = (-\sin(x+y), -\cos(x+y), 1).$$

Luând  $x = \pi$  și  $y = \frac{\pi}{2}$ , obținem

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sin \frac{3\pi}{2}, -\cos \frac{3\pi}{2}, 1\right) = (1, 0, 1).$$

Derivata astfel determinată este un vector de lungime  $\sqrt{2}$ , paralel cu planul  $xOz$ . ■

### Exercițiul 5.3.5. Fie suprafața

$$(\mathcal{S}) : \quad \mathbf{r} = (u^2 + v + 3)\mathbf{i} + (u^2 - v + 1)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinați ecuația planului tangent la suprafață și a normalei în punctul  $M_0 \in (\mathcal{S})$  corespunzător perechii  $(u_0, v_0) = (1, 0)$ . Precizați coeficienții lui Gauss și prima formă fundamentală asociată suprafeței  $(\mathcal{S})$ . Demonstrați că liniile parametrice  $u = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  sunt drepte, iar curba  $(C) : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ , este curbă plană.

**Soluție.** Observăm că funcția  $\mathbf{S} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  care definește suprafața  $(\mathcal{S})$  este diferențiabilă, prin urmare  $(\mathcal{S})$  este o suprafață netedă în  $\mathbb{R}^3$ . Să notăm

$$S_1(u, v) = u^2 + v + 3, \quad S_2(u, v) = u^2 - v + 1, \quad S_3(u, v) = uv$$

funcțiile coordonate ale funcției vectoriale  $\mathbf{S}$ . Atunci parametrii directori  $A, B, C$  ai normalei  $\mathbf{N}$  la planul tangent la suprafață sunt

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(S_2, S_3)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -1 \\ v & u \end{vmatrix} = 2u^2 + v \\ B &= \frac{D(S_3, S_1)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 1 \end{vmatrix} = v - 2u^2, \\ C &= \frac{D(S_1, S_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 2u & -1 \end{vmatrix} = -4u \end{aligned}$$

iar matricea jacobiană a aplicației  $\mathbf{S}$  este

$$J_{\mathbf{S}}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ 2u & -1 \\ v & u \end{pmatrix}.$$

Pentru  $u = 1$  și  $v = 0$ , obținem  $A = 2$ ,  $B = -2$ ,  $C = -4$ .

Deoarece  $M_0(4, 2, 0)$ , ecuația planului tangent în  $M_0$  la  $(\mathcal{S})$  este  $(P) : 2(x-4) + (-2)(y-2) + (z-0)(-4) = 0$ , adică  $(P) : 2x + 2y - 4z - 4 = 0$ .

Ecuațiile canonice ale normalei în  $M_0$  la  $(\mathcal{S})$  sunt atunci

$$(D) : \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-0}{-4}.$$

Din expresia matricei jacobiene de mai sus obținem coeficienții primei forme fundamentale

$$\begin{aligned} E(u, v) &= (2u)^2 + (2u)^2 + v^2 = 8u^2 + v^2 \\ G(u, v) &= 1^2 + (-1)^2 + u^2 = u^2 + 2 \\ F(u, v) &= 2u \cdot 1 + 2u \cdot (-1) + v \cdot u = uv, \end{aligned}$$

iar prima formă fundamentală asociată suprafeței ( $\mathcal{S}$ ) este

$$ds^2 = (8u^2 + v^2)du^2 + 2uvdu dv + (u^2 + 2)dv^2.$$

Linia parametrică  $u = c$  are reprezentarea  $x = c^2 + v + 3$ ,  $y = c^2 - v + 1$ ,  $z = cv$ ,  $v \in \mathbb{R}$ , de unde  $x - (c^2 + 3) = -(y - (c^2 + 1)) = \frac{z}{c} = v$ . De aici,

$$\frac{x - (c^2 + 3)}{1} = \frac{y - (c^2 + 1)}{-1} = \frac{z}{c},$$

aceasta reprezentând ecuațiile unei drepte care trece prin  $M(c^2 + 3, c^2 + 1, 0)$  și are ca vector director  $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + c\mathbf{k}$ .

Curba ( $C$ ) are reprezentarea parametrică  $x = u^2 + u + 3$ ,  $y = u^2 - u + 1$ ,  $z = u^2$ ,  $v \in \mathbb{R}$ . Ecuația unui plan care conține drumul ( $C$ ) este  $Ax + By + Cz + D = 0$ , unde coeficienții  $A, B, C, D$  urmează a fi determinați din condiția ca planul să conțină curba ( $C$ ). Se obține

$$A(u^2 + u + 3) + B(u^2 - u + 1) + Cu^2 + D = 0, \quad u \in \mathbb{R},$$

de unde, prin identificarea coeficienților, obținem relațiile  $A + B + C = 0$ ,  $A - B = 0$  și  $3A + B + D = 0$ . Atunci  $B = A$ ,  $C = -2A$ ,  $D = -4A$ , iar curba ( $C$ ) se găsește în planul  $Ax + Ay - 2Az - 4A = 0$ .

Simplificând prin  $A$  obținem că ecuația planului care conține curba ( $C$ ) este  $x + y - 2z - 4 = 0$ . ■

### 5.3.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

#### Exercițiul 5.3.6.

Fie funcția

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \quad \mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Demonstrați că  $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ .

Indicație.

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} e^{x_0} \cos y_0 & -e^{x_0} \sin y_0 \\ e^{x_0} \sin y_0 & e^{x_0} \cos y_0 \end{vmatrix} = e^{x_0} \neq 0.$$

■

#### Exercițiul 5.3.7. Fie funcția

$$\mathbf{g} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{g}(x_1, x_2) = ((x_1 + x_2) \sin(x_1 - x_2), e^{x_1 + x_2} \cos(x_1 - x_2)).$$

Determinați matricea jacobiană a funcției  $\mathbf{g}$  într-un punct oarecare  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  și determinantul său.

**Indicație.** Observăm că  $\mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \varphi$ , unde

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{f}(u_1, u_2) &= (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2)) = (u_1 \sin u_2, e^{u_1} \cos u_2); \\ \varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2), \quad \varphi(x_1, x_2) &= (\varphi_1(x_1, x_2), \varphi_2(x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Atunci

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f} \circ \varphi}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}(\varphi(\mathbf{x})) \cdot J_{\varphi}(\mathbf{x}).$$

■

**Răspuns.** Se obține că

$$J_{\mathbf{f}}(\varphi(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) & (x_1 + x_2) \cos(x_1 - x_2) \\ e^{x_1+x_2} \cos(x_1 - x_2) & -e^{x_1+x_2} \sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix}, \quad J_{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de unde

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_2) + (x_1 + x_2) \cos(x_1 - x_2) & \sin(x_1 - x_2) - (x_1 + x_2) \cos(x_1 - x_2) \\ e^{x_1+x_2} \cos(x_1 - x_2) - e^{x_1+x_2} \sin(x_1 - x_2) & e^{x_1+x_2} \cos(x_1 - x_2) + e^{x_1+x_2} \cos(x_1 - x_2) \end{pmatrix}.$$

■

**Exercițiul 5.3.8.** Determinați elementul de suprafață  $d\sigma$  pentru suprafețele

$$(1) (\mathcal{S}_1) : \mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + \frac{1}{u} \mathbf{k}; \quad (2) (\mathcal{S}_2) : z = x^3 + y^3.$$

**Indicație.** 1) Să notăm  $S_1(u, v) = u \cos v$ ,  $S_2(u, v) = u \sin v$ ,  $S_3(u, v) = \frac{1}{u}$ . Expresia elementului de suprafață  $d\sigma$  este dată de

$$d\sigma = \sqrt{\frac{D(S_2, S_3)^2}{D(u, v)} + \frac{D(S_3, S_1)^2}{D(u, v)} + \frac{D(S_1, S_2)^2}{D(u, v)}} du dv.$$

2) Deoarece suprafața  $(\mathcal{S}_2)$  este definită explicit cu  $z$  ca funcție de  $x, y$ , prin  $z = f(x, y) = x^3 + y^3$ , expresia elementului de suprafață  $d\sigma$  este dată de

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

■

**Răspuns.** 1) Se observă că

$$\begin{aligned}\frac{D(y, z)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin v & u \cos v \\ -\frac{1}{u^2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{u} \cos v; \\ \frac{D(z, x)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{u^2} & 0 \\ \cos v & -u \sin v \end{vmatrix} = \frac{1}{u} \sin v; \\ \frac{D(x, y)}{D(u, v)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u.\end{aligned}$$

Se obține că

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{u} \cos v\right)^2 + \left(\frac{1}{u} \sin v\right)^2 + u^2} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + u^2} du dv.$$

2) Se observă că  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$ , de unde

$$d\sigma = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} dx dy.$$

■

**Exercițiul 5.3.9.** Să se verifice dacă ecuațiile  $\mathbf{r} = \frac{1}{u^2 + v^2}(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \mathbf{k})$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  și  $\mathbf{r} = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  reprezintă aceeași suprafață.

**Indicație.** Pentru fiecare dintre cele două suprafețe se determină ecuația carteziană implicită. ■

**Răspuns.** Ecuația carteziană implicită este  $x^2 + y^2 - z = 0$ , de unde se trage concluzia. ■

**Exercițiul 5.3.10.** Determinați locul geometric al punctelor de pe suprafața  $\mathbf{r} = (u + v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u^2 + 4v^2)\mathbf{k}$  pentru care planul tangent în acel punct la suprafață trece prin  $A(1, 0, 0)$ .

**Indicație.** Ecuația planului tangent într-un punct  $M$  corespunzător valorilor  $u, v$  este

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}(x - (u + v)) + \frac{D(z, x)}{D(u, v)}(y - uv) + \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(z - (u^2 + 4v^2)) = 0.$$

■

**Răspuns.** Punând condiția ca  $A$  să aparțină planului tangent obținem  $(u + 2v)(u - 2v)(u + v - 2) = 0$ , de unde rezultă ecuațiile vectoriale ale curbelor soluții sub forma

$$\mathbf{r} = 3v\mathbf{i} + 2v^2\mathbf{j} + 8v^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = -v\mathbf{i} - 2v^2\mathbf{j} + 8v^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = 2\mathbf{i} + v(2 - v)\mathbf{j} + (5v^2 - 4v + 4)\mathbf{k}.$$

De exemplu, prima curbă este intersecția dintre planul  $4y - z = 0$  și cilindrul parabolic cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  de ecuație  $y = \frac{2}{9}x^2$ . Afirmatii asemănătoare se pot face și pentru celelalte două curbe. Precizați-le. ■

### 5.3.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Fie  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$ .

Care este formula de calcul a diferențialei de ordinul  $N$ ,  $d^N \mathbf{f}(\mathbf{a})$ ,  $N \geq 1$  în punctul  $\mathbf{a} \in D$ ? ■

**2°.** Dacă funcția  $\varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^m)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{x}_0 \in D$  și  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\varphi(D), \mathbb{R}^p)$  este diferențiabilă în  $\mathbf{u}_0 = \varphi(\mathbf{x}_0) \in \varphi(D)$ , precizați regula de calcul a diferențialei funcției compuse  $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \varphi \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^p)$  în  $\mathbf{x}_0$  ■

**3°.** Ce reprezintă din punct de vedere geometric suprafața

$$\mathbf{r} = v \cos u \mathbf{i} + v \sin u \mathbf{j} + v^2 \mathbf{k}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty)?$$

■

4°. Fiind dată aplicația  $\mathbf{S} : [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  definită prin

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k},$$

în care  $a$  este o constantă pozitivă,  $\text{Im } \mathbf{S}$  este sfera de rază  $a$  cu centrul în origine.

Ce reprezintă curbele de coordonate  $u = c$  și  $v = c$  în acest caz? ■

5°. Elementul de arie  $d\sigma$  al suprafeței de ecuație vectorială  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  se calculează cu formula

$$d\sigma = \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv, .$$

De ce expresia de sub radical este totdeauna pozitivă? ■



## Capitolul 6

# MC.06 – Aplicații: extreme; funcții definite implicit; extreme condiționate

### 6.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 6.1.1.** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

**Soluție.** Derivatele parțiale până la ordinul doi inclusiv ale funcției sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 15, & \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) &= 6xy - 12; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y) &= 6x, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) &= 6y, & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x, y) &= 6x. \end{aligned}$$

Din anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi, se obține

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x+y)^2 = 9, \\ xy = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x+y = \pm 3, \\ xy = 2 \end{cases}$$

Rezolvarea ultimelor două sisteme conduce la patru puncte staționare

$$M_1(1, 2), \quad M_2(2, 1), \quad M_3(-1, -2), \quad M_4(-2, -1).$$

Matricele hessiene corespunzătoare celor patru puncte staționare sunt

$$\begin{aligned} H_z(M_1) &= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, & H_z(M_2) &= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}, \\ H_z(M_3) &= \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}, & H_z(M_4) &= \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vom folosi *metoda valorilor proprii* pentru a stabili natura formelor pătratice  $d^2z(M_1), \dots, d^2z(M_4)$  care se pot scrie în forma

$$d^2z(M_1) = (dx \ dy) \cdot H_z(M_1) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \dots, d^2z(M_4) = (dx \ dy) \cdot H_z(M_4) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$



Se știe că valorile proprii ale unei matrice pătratice simetrică  $A$  (de ordin 2 și cu elementele  $a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{22}$ ) sunt rădăcinile ecuației caracteristice  $P(\lambda) = 0$ , unde  $P(\lambda)$  este polinomul caracteristic al matricei

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A,$$

$I_2$  fiind aici matricea unitate de ordinul al doilea.

O rădăcină a ecuației caracteristice a unei matrice pătratice simetrică  $A$  se numește fie *valoare proprie* a acesteia, fie *valoare proprie* a formei pătratice  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  care în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are matricea  $A$ .

O formă pătratică  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , care în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are matricea  $A$ , are expresia analitică

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

unde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  este un element oarecare al spațiului  $\mathbb{R}^2$ .

Cele patru polinoame caracteristice  $P_1(\lambda)$ ,  $\dots$ ,  $P_4(\lambda)$  ale respectiv celor patru hessiene ale funcției  $z$  în punctele sale staționare sunt

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda - 18), & P_2(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda - 18), \\ P_3(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda + 18), & P_4(\lambda) &= (\lambda + 6)(\lambda + 18). \end{aligned}$$

Pentru a determina natura unei forme pătratice  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , a cărei matrice  $A$  în baza canonică din  $\mathbb{R}^2$  are rădăcinile caracteristice  $\lambda_1$  și  $\lambda_2$  vom ține cont de:

- dacă  $\lambda_1 > 0$  și  $\lambda_2 > 0$ , forma pătratică  $f$  este pozitiv definită;
- dacă  $\lambda_1 < 0$  și  $\lambda_2 < 0$ , forma pătratică  $f$  este negativ definită;
- dacă  $\lambda_1 > 0$ , iar  $\lambda_2 = 0$ , forma pătratică  $f$  este pozitiv semidefinită;
- când  $\lambda_1 < 0$  și  $\lambda_2 = 0$ , forma pătratică  $f$  este negativ semidefinită;
- dacă  $\lambda_1 > 0$ , iar  $\lambda_2 < 0$ , forma pătratică  $f$  este nedefinită.

Natura punctului staționar analizat depinde de natura diferențialei a doua a funcției în acel punct, aceeași cu natura formei pătratice cu care se exprimă această diferențială.

Aplicând funcției  $z$  cele de mai sus, stabilim:

- $M_1$  și  $M_3$  nu sunt puncte de extrem ale funcției  $z$ ; ele sunt puncte de tip șa;
- $M_2$  este un punct de minim local strict al funcției și  $f_{\min} = f(M_2) = -28$ ;
- $M_4$  este un punct de maxim local strict al funcției și  $f_{\max} = f(M_4) = 28$ .

■

**Exercițiul 6.1.2.** Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = \Phi\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right),$$

iar  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$  este o funcție reală de două variabile reale diferențiabilă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$ , este soluția ecuației cu derivate parțiale

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

**Soluție.** Dacă introducem **variabilele intermediare**  $u$  și  $v$ , unde

$$u = u(x, y, z) = x + \frac{z}{y}, \quad v = v(x, y, z) = y + \frac{z}{x},$$

atunci putem spune că funcția  $F$  depinde de variabilele sale  $x, y$  și  $z$  prin intermediul variabilelor  $u$  și  $v$ .

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale variabilelor intermediare, pe care convenim să le notăm prin:

$$u_{,1}(x, y, z); u_{,2}(x, y, z); u_{,3}(x, y, z); v_{,1}(x, y, z); v_{,2}(x, y, z); v_{,3}(x, y, z),$$

sunt date de

$$\begin{cases} u_{,1}(x, y, z) = 1, & u_{,2}(x, y, z) = -\frac{z}{y^2}, & u_{,3}(x, y, z) = \frac{1}{y}, \\ v_{,1}(x, y, z) = -\frac{z}{x^2}, & v_{,2}(x, y, z) = 1, & v_{,3}(x, y, z) = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Dacă convenim în plus ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\Phi$  să fie notate  $\Phi_{,1}$  și  $\Phi_{,2}$ , iar cele ale funcției  $F$  prin  $F_{,1}$ ,  $F_{,2}$  și  $F_{,3}$ , atunci ultimele derivate se determină din relațiile:

$$F_{,1}(x, y, z) = \Phi_{,1} - \frac{z}{x^2}\Phi_{,2}, \quad F_{,2}(x, y, z) = -\frac{z}{y^2}\Phi_{,1} + \Phi_{,2}, \quad F_{,3}(x, y, z) = \frac{1}{y}\Phi_{,1} + \frac{1}{x}\Phi_{,2}.$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției definită implicit sunt atunci

$$\begin{cases} z_{,1} = -\frac{F_{,1}}{F_{,3}} = \frac{\frac{z}{x^2}\Phi_{,2} - \Phi_{,1}}{\frac{1}{y}\Phi_{,1} + \frac{1}{x}\Phi_{,2}} \\ z_{,2} = -\frac{F_{,2}}{F_{,3}} = \frac{\frac{z}{y^2}\Phi_{,1} - \Phi_{,2}}{\frac{1}{y}\Phi_{,1} + \frac{1}{x}\Phi_{,2}}. \end{cases}$$

Folosind aceste derivate parțiale și efectuând combinația  $xz_{,1} + yz_{,2}$  constatăm că se obține  $z - xy$ , ceea ce trebuia să se arate. ■

**Exercițiul 6.1.3.** Dintr-un fier cornier de lungime 20 de unități și o foaie de sticlă cu aria egală cu 16 unități, urmează să se construiască un acvariu.

Cum trebuiesc croite materialele astfel încât capacitatea acvariului să fie maximă?

**Soluție.** Acvariul are forma unui paralelipiped dreptunghic de dimensiuni  $x, y, z$ . Evident,  $x \geq y \geq z > 0$ . Atunci, capacitatea acvariului este egală cu  $xyz$ .

Laturile paralelipipedului provenind din fierul cornier, însumarea lungimilor acestora trebuie să dea lungimea materialului. Cum din cele 12 muchii ale paralelipipedului din fiecare dimensiune sunt câte 4, urmează că  $x + y + z = 5$ .

Oricare dintre cele 6 fețe ale paralelipipedului este un dreptunghi de arie  $xy, yz$ , sau  $zx$ . Cum sunt câte 2 dreptunghiuri congruente și pentru că toate provin din aceeași foaie de sticlă, suma ariilor acestor fețe trebuie să fie 16.

Prin urmare,

$$xy + yz + zx = 8.$$

Astfel, problema se reduce la o problemă de extrem condiționat în care funcția scop, definită pe mulțimea deschisă  $D = \{M(x, y, z) | x \geq y \geq z > 0\}$ , este  $f(x, y, z) = xyz$ , iar legăturile sunt:

$$F_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad F_2(x, y, z) = xy + yz + zx - 8 = 0.$$

Fie  $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu)$  funcția lui Lagrange corespunzătoare

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda F_1(x, y, z) + \mu F_2(x, y, z).$$

Derivatele parțiale de ordinul întâi ale acestei funcții sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, z; \lambda, \mu) = yz + \lambda + \mu(y + z), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, z; \lambda, \mu) = zx + \lambda + \mu(z + x), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x, y, z; \lambda, \mu) = xy + \lambda + \mu(x + y), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_1(x, y, z), \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu}(x, y, z; \lambda, \mu) = F_2(x, y, z). \end{cases}$$

Sistemul în necunoscutele  $x, y, z, \lambda, \mu$ , format prin anularea acestor derivate este

$$\begin{cases} yz + \lambda + \mu(y + z) = 0, \\ zx + \lambda + \mu(z + x) = 0, \\ xy + \lambda + \mu(x + y) = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Pentru a rezolva mai simplu acest sistem, observăm că primele trei ecuații ale sale pot fi privite ca un sistem liniar și omogen în necunoscutele  $\lambda$  și  $\mu$ . Fiindcă o soluție a acestui sistem este nebanală (prima componentă este 1), urmează că rangul matricii sistemului trebuie să fie mai mic decât 3 și deci

$$\begin{vmatrix} yz & 1 & y+z \\ zx & 1 & z+x \\ xy & 1 & x+y \end{vmatrix} = 0 \implies (z-y)(3x^2 - 10x + 8) = 0.$$

Egalarea cu zero a fiecărui factor din ecuația rezultată, la care se adaugă ultimele două ecuații ale sistemului (6.1), conduce la două sisteme de trei ecuații cu necunoscutele  $x, y$  și  $z$

$$\begin{cases} z - y = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0, \\ x + y + z - 5 = 0, \\ xy + yz + zx - 8 = 0. \end{cases}$$

Soluțiile acestor sisteme sunt:

$$(1, 2, 2); \quad \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1); \quad (2, 1, 2); \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

dar numai două se încadrează în datele problemei și anume:

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1).$$

Pentru a determina valorile parametrilor lui Lagrange  $\lambda$  și  $\mu$  corespunzătoare acestor soluții, vom înlocui pe rând componentele acestora în primele trei ecuații ale sistemului (6.1) și astfel găsim pentru perechea  $(\lambda, \mu)$  respectiv valorile:

$$\left(\frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right); \quad (4, -2).$$

Prin urmare, funcția lui Lagrange are două puncte staționare:

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right); \quad (2, 2, 1; 4, -2)$$

și deci funcția scop are două puncte staționare condiționate:

$$M_1\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right); \quad M_2(2, 2, 1),$$

corespunzătoare respectiv celor două perechi de valori ale lui  $\lambda$  și  $\mu$ .

Diferențierea legăturilor într-un punct arbitrar al mulțimii  $D$ , conduce la

$$dx + dy + dz = 0, \quad (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz = 0,$$

care în cele două puncte staționare condiționate, devin

$$\begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 8dx + 11(dy + dz) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dx + dy + dz = 0, \\ 3(dx + dy) + 4dz = 0. \end{cases}$$

Din primul sistem obținem  $dx = 0$  și  $dz = -dy$ , iar din al doilea  $dy = -dx$  și  $dz = 0$ .

Diferențiala de ordinul al doilea a funcției lui Lagrange, într-un punct arbitrar al mulțimii  $D$ , are expresia

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda, \mu) &= 2[(z + \mu)dx dy + (x + \mu)dy dz + (y + \mu)dz dx] + \\ &+ 2(dx + dy + dz)d\lambda + 2[(y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz]d\mu. \end{aligned}$$

care, în cele două puncte staționare ale funcției  $\mathcal{L}$ , devine:

$$d^2\mathcal{L}\left(M_1; \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right) = -2dy^2; \quad d^2\mathcal{L}(M_2; 4, -2) = 2dx^2.$$

Prima diferențială este o formă pătratică negativ definită și deci  $M_1$  este punct de maxim condiționat strict, iar cea de a doua este o formă pătratică pozitiv definită, fapt ce atrage că punctul  $M_2$  este punct de minim condiționat strict. Valorile extreme corespunzătoare ale funcției scop sunt:  $f_{\max} = f(M_1) = \frac{112}{27}$ ;  $f_{\min} = f(M_2) = 4$ .

În concluzie, problema dată revine la dimensionarea fierului cornier în patru bucăți a câte 5 unități lungime, fiecare din ele urmând a fi divizată în câte trei bucăți cu lungimile:

$$\frac{7}{3}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{4}{3}.$$

Cât privește foaia de sticlă, aceasta urmează a fi croită în două părți cu arii egale, fiecare parte fiind divizată la rându-i în trei bucăți având ariile:

$$\frac{28}{9}; \quad \frac{28}{9}; \quad \frac{16}{9}.$$

Așadar, se comandă foaia de sticlă cu lungimea de 6 unități și lățimea de  $\frac{8}{3}$  unități. Foaia astfel comandată se divizează în două părți identice cu dimensiunile 6 și  $\frac{4}{3}$ . Din fiecare parte se extrage un pătrat cu latura  $\frac{4}{3}$ , iar din cele două bucăți rămase se croiesc câte două dreptunghiuri identice de dimensiuni  $\frac{7}{3}$  și  $\frac{4}{3}$ . ■

#### Exercițiul 6.1.4. Transformați ecuația

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z$$

introducând noile variabile independente

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

și noua funcție necunoscută  $w = -x - y + \ln z$ .

**Soluție.** Diferențiind legăturile dintre variabile, obținem

$$\begin{cases} du &= 2xdx + 2ydy, \\ dv &= -\frac{1}{x^2}dx - \frac{1}{y^2}dy, \\ dw &= -dx - dy + \frac{1}{z}dz. \end{cases}$$

Pe de altă parte

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv.$$

Egalând expresiile diferențialei funcției  $w$ , avem

$$-dx - dy + \frac{1}{z}dz = (2xdx + 2ydy)\frac{\partial w}{\partial u} - \left(\frac{1}{x^2}dx + \frac{1}{y^2}dy\right)\frac{\partial w}{\partial v},$$

de unde rezultă

$$dz = z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dx + z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)dy.$$

Pe de altă parte,  $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ . Folosind unicitatea expresiei diferențiale funcției  $z$ , deducem

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right). \end{cases}$$

Cu acestea, ecuația inițială ia forma mai simplă

$$\left(\frac{zx}{y^2} - \frac{zy}{x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial v} = 0 \implies \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

ce se poate integra, soluția sa generală fiind  $w = f(u)$ , unde  $f$  este o funcție diferențiabilă arbitrară.

Ținând cont de legătura dintre variabile, găsim că

$$z(x, y) = e^{x+y+f(x^2+y^2)}$$

este soluția generală a ecuației inițiale. ■

**Exercițiul 6.1.5.** Să se determine valorile extreme ale funcției

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

definită pe mulțimea compactă  $K = \{\mathbf{x} = (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\} \subset \mathbb{R}^3$ .

**Soluție.** Faptul că funcția  $f$  este definită pe o mulțime compactă (bila închisă în  $\mathbb{R}^3$  de rază 10 cu centrul în origine) implică despărțirea problemei determinării valorilor sale extreme întâi în interiorul mulțimii  $K$  și apoi pe frontiera acesteia.

Deoarece funcția  $f$  este diferențiabilă în interiorul mulțimii  $K$ , pentru a afla valorile sale extreme în punctele interioare ale lui  $K$  procedăm analog cu determinarea punctelor de extrem local ale unei funcții reale de mai multe variabile reale definită pe o mulțime deschisă.

Sistemul format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $f$  are doar soluția  $(0, 0, 0)$  și deci singurul punct staționar al funcției  $f$  este originea reperului.

Diferențiala de ordinul al doilea a funcției  $f$  în origine este

$$d^2f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2$$

și este evident că este o formă pătratică pe  $\mathbb{R}^3$ , pozitiv definită.

Prin urmare, în origine, funcția  $f$  are un punct de minim iar valoarea minimă este zero.

Să determinăm valorile extreme ale funcției  $f$  pe frontiera domeniului acesteia care este sfera de ecuație

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0.$$

Deci trebuie să rezolvăm o problemă de extrem condiționat.

Pentru aceasta, introducem funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z)$$

căreia îi determinăm punctele critice ale căror coordonate sunt soluții ale sistemului

$$\begin{cases} 2x(\lambda + 1) = 0, \\ 2y(\lambda + 2) = 0, \\ 2z(\lambda + 3) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 100 = 0, \end{cases}$$

format prin anularea derivatelor parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\mathcal{L}$ .

Găsim trei puncte staționare ale funcției  $\mathcal{L}$

$$(10, 0, 0; -1), \quad (0, 10, 0; -2), \quad (0, 0, 10; -3)$$

din care deducem că funcția  $f$  are punctele staționare condiționate

$$M_1(10, 0, 0), \quad M_2(0, 10, 0), \quad M_3(0, 0, 10)$$

corespunzătoare respectiv valorilor  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$  ale multiplicatorului  $\lambda$  a lui Lagrange.

Diferențiala de ordinul 2 a funcției lui Lagrange  $\mathcal{L}$  într-un punct oarecare de pe sferă are expresia

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2(\lambda + 1)dx^2 + 2(\lambda + 2)dy^2 + 2(\lambda + 3)dz^2 + 4(xdx + ydy + zdz)d\lambda,$$

expresie ce se modifică dacă ținem cont că între diferențialele variabilelor există legătura  $xdx + ydy + zdz = 0$ . Astfel,

$$d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = 2\left((\lambda + 1)dx^2 + (\lambda + 2)dy^2 + (\lambda + 3)dz^2\right).$$

iar în punctele staționare avem

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}(M_1; -1) &= 2(dy^2 + 2dz^2), \quad d^2\mathcal{L}(M_2; -2) = 2(dz^2 - dx^2), \\ d^2\mathcal{L}(M_3; -3) &= -2(2dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

Prima diferențială este o formă pătratică pozitiv definită, a doua este formă pătratică nedefinită, în timp ce a treia diferențială este formă pătratică negativ definită.

Rezultatele găsite arată că pentru funcția  $f$   $M_1$  este punct de minim condiționat strict,  $M_2$  este un punct de tip șa, iar  $M_3$  este punct de maxim condiționat strict.

Prin urmare în punctele sferei de rază 10 cu centrul în origine, funcția  $f$  are o valoare minimă egală cu  $f(M_1) = 100$  și o valoare maximă  $f(M_3) = 300$ .

Luând în calcul și valorile pe care le ia funcția  $f$  în interiorul domeniului de definiție, rezultă că cea mai mică valoare a funcției este zero, atinsă în origine, iar cea mai mare valoare este 300, luată într-un punct de pe frontiera domeniului  $K$ . ■

**Exercițiul 6.1.6.** Să se arate că funcția  $f(x, y) = (1 + e^y) \cos x - y e^y$ , definită pe mulțimea  $\mathbb{R}^2$ , are o infinitate de maxime și nici un minim.

**Soluție.** Rezolvând sistemul  $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$  obținem punctele staționare:

$$M_{2k}(2k\pi, 0); \quad M_{2k+1}((2k+1)\pi, -2), \quad k \in \mathbb{Z},$$

în care trebuie să calculăm diferențiala a doua.

Diferențiala a doua a funcției  $f$  într-un punct curent al domeniului de definiție este diferențiala primei diferențiale. Se găsește

$$d^2 f(x, y) = -(1 + e^y) \cos x dx^2 - 2e^y \sin x dx dy + e^y (\cos x - y - 2) dy^2.$$

Diferențialele de ordinul doi în punctele staționare  $M_{2k}$

$$d^2 f(M_{2k}) = -2dx^2 - dy^2$$

sunt forme pătratice negativ definite. Prin urmare  $M_{2k}$  sunt puncte de maxim. Evident, sunt o infinitate de puncte de maxim.

Diferențialele de ordinul doi în punctele staționare  $M_{2k+1}$

$$d^2 f(M_{2k+1}) = (1 + e^{-2})dx^2 - e^{-2}dy^2$$

sunt forme pătratice nedefinite. Deci  $M_{2k+1}$  sunt puncte șa. ■

## 6.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 6.2.1.** Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor:

$$a) \quad f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \quad (x, y) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$b) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{1}{z^2}, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

**Indicație.** Se determină punctele staționare. Se calculează diferențiala a doua în punctele staționare. Se studiază natura formelor pătratice găsite. ■

**Răspuns.** *a)* Un singur punct staționar,  $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ , care este punct de maxim. *b)* Un singur punct staționar,  $M\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ , care este punct de minim. ■

**Exercițiul 6.2.2.** Să se arate că funcția  $z = z(x, y)$  definită implicit de ecuația  $F(x, y, z) = 0$ , unde

$$F(x, y, z) = \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2),$$

iar  $(u, v) \mapsto \Phi(u, v)$  este o funcție reală de două variabile reale diferențiabilă pe un domeniu  $D \subset \mathbb{R}^2$ , este soluția ecuației cu derivate parțiale

$$(y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

**Indicație.** Variabilele intermediare  $u$  și  $v$  au expresiile

$$u = u(x, y, z) = x + y + z, \quad v = v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Dacă convenim ca derivatele parțiale de ordinul întâi ale funcției  $\Phi$  să fie notate  $\Phi_{,1}$  și  $\Phi_{,2}$ , iar cele ale funcției  $F$  prin  $F_{,1}$ ,  $F_{,2}$  și  $F_{,3}$ , atunci ultimele derivate se determină folosind regulile de derivare ale unei funcții compuse, iar  $\frac{\partial z}{\partial x}$  și  $\frac{\partial z}{\partial y}$  se calculează după formulele

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_{,1}}{F_{,3}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_{,2}}{F_{,3}}.$$

**Răspuns.** Derivatele parțiale  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\Phi_{,1} + 2x\Phi_{,2}}{\Phi_{,1} + 2z\Phi_{,2}}$  și  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\Phi_{,1} + 2y\Phi_{,2}}{\Phi_{,1} + 2z\Phi_{,2}}$  verifică ecuația cu derivate parțiale din enunț. ■

**Exercițiul 6.2.3.** Sistemul de ecuații algebrice  $\begin{cases} u + v = x + y \\ xu + yv = 1 \end{cases}$  definește implicit funcțiile  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$ .  
Să se determine diferențialele acestor funcții și să se verifice rezultatul.

**Indicație.** Se diferențiază sistemul. Se obține  $\begin{cases} du + dv = dx + dy \\ xdu + ydv = -udx - vdy \end{cases}$  din care se pot calcula diferențialele. Pe de altă parte, sistemul se poate rezolva în privința lui  $u$  și  $v$ , astfel că verificarea rezultatului se poate face diferențiind direct expresiile lui  $u = u(x, y)$  și  $v = v(x, y)$ . ■

**Răspuns.**  $du = \frac{y+u}{y-x}dx + \frac{y+v}{y-x}dy$ ,  $dv = \frac{x+u}{x-y}dx + \frac{x+v}{x-y}dy$ . ■

**Exercițiul 6.2.4.** Să se determine extremele condiționate ale funcției scop  $f(x, y, z) = x + y + z$  cu legăturile  $F_1(x, y, z) = 0$  și  $F_2(x, y, z) = 0$ , unde  $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ ,  $F_2(x, y, z) = 2x + y + 2z - 1$ . Dați o interpretare geometrică problemei rezolvate.

**Indicație.** Se scrie funcția lui Lagrange  $\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 F_1(x, y, z) + \lambda_2 F_2(x, y, z)$  căreia i se determină punctele staționare. Rezultă două asemenea puncte. Se calculează diferențiala a doua a funcției lui Lagrange în aceste puncte ținându-se cont de legături. Se constată că nu este nevoie să mai diferențiem legăturile pentru că  $d^2\mathcal{L}(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ . ■

**Răspuns.**  $M_1(0, 1, 0)$  pentru  $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$  și  $M_2\left(\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right)$  pentru  $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda_2 = -\frac{11}{18}$ . Rezultă  $M_1$  punct de maxim și  $M_2$  punct de minim. În legătură cu interpretarea geometrică, se observă că funcția scop este, până la factorul  $\sqrt{3}$ , distanța de la punctul  $M(x, y, z)$  al curbei de intersecție dintre sfera  $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$  și planul  $2X + Y + 2Z - 1 = 0$  (un cerc trasat pe sferă) la planul  $X + Y + Z = 0$  care trece prin origine. ■

**Exercițiul 6.2.5.** Să se determine marginile funcției  $f(x, y) = x^2 + 2xy$  în compactul

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 - 2, y \leq 2 - x^2\}.$$

**Indicație.** Sunt trei probleme de rezolvat:



- 1) extremele libere locale ale funcției  $f$  pe domeniul mărginit de parabolele care definesc compactul  $K$ ;
- 2) extremele condiționate ale funcției  $f$  cu legătura  $x^2 - y - 2 = 0$ ;
- 3) extremele condiționate ale funcției  $f$  cu legătura  $x^2 + y - 2 = 0$ .

Pentru prima problemă se găsește că originea este **punct șa**.

Problemele 2) și 3) se rezolvă cu metoda multiplicatorilor a lui Lagrange. ■

**Răspuns.**  $M_1(-1, -1)$  punct de maxim, iar  $M_2\left(\frac{2}{3}, -\frac{14}{9}\right)$  punct de minim, ambele aflate pe prima parabolă care face parte din frontiera mulțimii compacte  $K$ . Pe cea de a doua parabolă, punctul  $M_3(1, 1)$  este de maxim, iar  $M_4\left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{9}\right)$  este punct de minim al funcției  $f$ . ■

**Exercițiul 6.2.6.** Să se determine punctele de extrem ale funcției reale

$$f(x, y, z) = x + y^2 + 3z^3 - \ln(x + y + z)$$

definită pe semispațiul  $x + y + z > 0$ .

**Indicație.** Se determină **punctele critice** ale funcției  $f$ . În fiecare punct critic se calculează diferențiala a doua a funcției  $f$  și se studiază natura sa pentru a vedea dacă punctul staționar respectiv este sau nu punct de extrem. ■

**Răspuns.**  $M_1\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ , punct de minim. Punctul staționar  $M_2\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$  nu este punct de extrem: este punct șa. ■

## 6.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Care este **condiția necesară de extrem** într-un punct  $\mathbf{x}_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  a unei **funcții reale de mai multe variabile reale**  $f$  diferențiabilă pe domeniul  $D$ ? ■

**2°.** Cum se numește punctul  $\mathbf{x}_0$  în care se anulează prima **diferențială** a funcției  $f$ , dar care nu este punct de extrem? Dacă  $df(\mathbf{x}_0) = 0$  și  $f$  este **funcție diferențiabilă de două ori** în punctul  $\mathbf{x}_0$ , care este condiția suficientă pentru ca  $f$  să aibă **punct de maxim** în  $\mathbf{x}_0$ ? Dar **punct de minim**? ■

**3°.** Cum se formulează **teorema funcțiilor implicite** în cazul unei **funcții reale**  $f$  de  $n$  variabile reale **definită implicit** de ecuația  $F(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = 0$ ? Dați o demonstrație pentru expresia **derivatelor parțiale de ordinul întâi** ale funcției  $f$ . ■

**4°.** Cum se determină **extremele locale** ale funcției  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  definită implicit de ecuația

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y) = 0,$$

atunci când acest lucru este posibil? ■

**5°.** Ce este un **punct staționar**? Dar un **punct staționar condiționat**? Cum se determină punctele staționare condiționate ale **funcției scop**  $z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ale cărei variabile sunt supuse la **legăturile**  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , unde  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_m)$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ? ■

# Capitolul 7

## MC.07 – Integrale improprii

### 7.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 7.1.1.** Studiați natura integralei improprii de speța întâi

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

și în caz de convergență stabiliți valoarea sa.

**Soluție.** Pentru a se urmări studiul naturii integralei improprii reamintim un set de definiții.

Precizăm că  $a$  și  $b$  sunt elemente din  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  cu proprietățile  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , iar

$$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (7.1)$$

este o funcție integrabilă Riemann pe orice interval compact  $[a, t] \subset [a, b)$  și nemărginită într-o vecinătate a lui  $b$  dacă  $b \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 7.1.1.** Limita în punctul  $t = b$  a funcției

$$F : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_a^t f(x) dx \quad (7.2)$$

se numește **integrală improprie cu limita superioară de integrare punct singular** și se notează cu simbolul

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (7.3)$$

Din această definiție rezultă

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b} F(t) = \lim_{t \rightarrow b} \int_a^t f(x) dx. \quad (7.4)$$

**Definiția 7.1.2.** Funcția  $f$  se numește **integrabilă în sens generalizat** dacă există și este finită limita funcției  $F$  pentru  $t \rightarrow b$ .

**Definiția 7.1.3.** Dacă funcția (7.1) este integrabilă în sens generalizat, spunem că integrala improprie (7.3) este **convergentă**; dacă limita pentru  $t \rightarrow b$  a funcției (7.2) este infinită sau nu există, integrala improprie (7.3) se numește **divergentă**.

**Definiția 7.1.4.** Prin natura unei integrale improprie se înțelege proprietatea sa de a fi convergentă sau divergentă.

În baza acestor definiții rezultă că trebuie să studiem limita la infinit a funcției

$$F_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_n(t) = \int_0^t \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (7.5)$$

În prealabil, vom stabili o relație de recurență între termenii șirului de funcții  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Mai întâi avem

$$F_n(t) = \int_0^t \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = \int_0^t \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} - \frac{1}{2} \int_0^t x \cdot \frac{2x}{(x^2 + 1)^n} dx,$$

care se poate scrie și în forma

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) - \frac{1}{2} \int_0^t x \left( (x^2 + 1)^{-n} (2x) \right) dx. \quad (7.6)$$

Folosind metoda integrării prin părți alegând  $u(x) = x$ ,  $v'(x) = (x^2 + 1)^{-n} (2x)$

$$\int_\alpha^\beta u(x) \cdot v'(x) dx = \left( u(x) \cdot v(x) \right) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u'(x) \cdot v(x) dx.$$

și utilizând  $u'(x) = 1$  și  $v(x) = \frac{(x^2 + 1)^{-n+1}}{-n + 1} = -\frac{1}{(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}}$ , din (7.6) obținem

$$F_n(t) = F_{n-1}(t) + \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} \Big|_0^t - \frac{1}{2(n-1)} F_{n-1}(t).$$

Deducem astfel relația de recurență anunțată

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot F_{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2. \quad (7.7)$$

Deoarece  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{t}{(t^2 + 1)^{n-1}} = 0$ , din (7.7) putem afirma că dacă integrala improprie

$$I_{n-1} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}}$$

este convergentă, atunci

$$I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

este convergentă.

Se impune așadar să studiem natura integralei improprie  $I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$ , ceea ce înseamnă că trebuie calculată limita la infinit a funcției  $F_1(t) = \int_0^t \frac{dx}{1 + x^2}$ .

Cum  $F_1(t) = \arctg x \Big|_0^t = \arctg t$  și  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(t) = \frac{\pi}{2}$ , rezultă că integrala improprie  $I_1$  este convergentă și

$$I_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (7.8)$$

Din afirmația precedentă rezultă că  $I_2$  este convergentă, care antrenează  $I_3$  convergentă și, continuând astfel, ajungem la concluzia că  $I_n$  este integrală improprie convergentă. Deci,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_n(t) = I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (7.9)$$

Efectuând limită la infinit în relația de recurență (7.7) și folosind (7.9), obținem

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2. \quad (7.10)$$

Așadar,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} = \frac{2n-3}{2n-2} \frac{2n-5}{2n-4} I_{n-2} = \dots = \frac{(2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1}{(2n-2) \cdot (2n-4) \cdot (2n-6) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2} \cdot I_1. \quad (7.11)$$

Din (7.8) și (7.11) deducem

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-5) \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-4) \cdot (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (7.12)$$

Relația (7.12) poate fi scrisă și în forma

$$I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \quad (7.13)$$

**Observația 7.1.1.** Simbolul  $!!$  se citește **semifactorial**.

De exemplu:

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n-2) \cdot (2n).$$

■

**Exercițiul 7.1.2.** Studiați natura integralei improprii de speța întâi

$$I = \int_2^\infty \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

și în caz de convergență stabiliți valoarea ei.

**Soluție.** Conform exercițiului precedent, trebuie calculată integrala  $F(t) = \int_2^t \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ . Avem

$$F(t) = \int_2^t \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \int_2^t \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \left( \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right) \Big|_2^t = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{4(t-1)}{t+2}.$$

Să calculăm limita la infinit a funcției  $F(t)$ . Găsim

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{4(t-1)}{t+2} = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2.$$

Așadar, integrala  $I$  este convergentă și valoarea sa este  $I = \frac{2}{3} \ln 2$ . ■

**Exercițiul 7.1.3.** Arătați că integrala improprie de speța doua

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

este convergentă și determinați valoarea sa.

**Soluție.** Funcția de integrat  $f(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$  este definită pe intervalul  $[0, 1)$ . În vecinătatea punctului  $x = 1$  funcția  $f$  este nemărginită ceea ce arată că  $x = 1$ , limita superioară a intervalului de integrare, este punct singular.

Convergența integralei improprie se stabilește folosind criteriul în  $\alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1/2} \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1/2} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x} \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2-x} = 1.$$

Deoarece  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$  rezultă că  $I$  este convergentă.

Pentru determinarea valorii lui  $I$  utilizăm **metoda schimbării de variabilă**. Prin schimbarea  $x = 1 - t^2 = \varphi(t)$ , noile limite de integrare sunt 1 și 0, iar funcția de integrat este  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \frac{-2}{1+t^2}$ . Astfel, integrala improprie  $I$  se transformă în integrala proprie

$$I = \int_1^0 \frac{-2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctg t \Big|_0^1 = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare  $I$  este integrală improprie convergentă și are valoarea  $I = \frac{\pi}{2}$ . ■

**Exercițiul 7.1.4.** Să se studieze integrala improprie

$$I = \int_0^\infty \frac{\arctg x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

**Soluție.** Funcția de integrat  $f(x) = \frac{\arctg x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$  este mărginită pe intervalul nemărginit  $[0, \infty)$ , deci avem de a face cu o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul naturii integralei improprie  $I$  aplicăm **primul criteriu de comparație**. Majorând funcția  $\arctg x$  cu  $\frac{\pi}{2}$  și ținând cont că pe intervalul  $[0, \infty)$  are loc inegalitatea  $(1+x^2)\sqrt{1+x^2} > x^3$ , rezultă că

$$f(x) < \frac{\frac{\pi}{2}}{x^3}.$$

Constatăm apoi că integrala improprie de primul tip  $\int_a^\infty \frac{\pi/2}{x^3} dx$ ,  $a > 0$  este convergentă.

Conform criteriului menționat, integrala improprie  $I$  este convergentă.

Dacă luăm:

$$u = \arctg x; \quad dv = \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}},$$

se găsește

$$du = \frac{dx}{1+x^2}; \quad v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

unde  $v$  este o primitivă a funcției  $\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ . Această primitivă s-a determinat utilizând schimbarea de variabilă  $x = \operatorname{tg} t$ , ajungându-se la o primitivă funcției  $\cos t$ , care este  $\sin t$ . Cum  $\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}$  și  $\operatorname{tg} t = x$ , suntem conduși la  $v = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Astfel că

$$\int_0^\infty \frac{\arctg x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Calculul ultimei integrale se face folosind schimbarea de variabilă  $x = \operatorname{tg} t$ . Intervalul de integrare trece în compactul  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , iar funcția de integrat devine  $\sin t$

$$\int_0^\infty \frac{\arctg x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x \Big|_0^\infty - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{\arctg x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \arctg x \Big|_0^\infty + \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Prin urmare, valoarea integralei  $I$  este  $I = \frac{\pi}{2} - 1$ . ■

**Exercițiul 7.1.5.** Să se studieze natura integralei improprii de tipul al doilea

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$$

și în caz de convergență să i se determine valoarea.

**Soluție.** Singularitatea funcției de integrat  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}$  se află în limita superioară de integrare.

Având în vedere că  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2-x} f(x) = \frac{1}{10}$ , conform criteriului de comparație în  $\alpha$ , deducem că integrala improprie  $I$  este convergentă deoarece  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ .

Pentru calculul integralei se folosește schimbarea de variabilă  $x = 2 \sin t = \varphi(t)$ . Prin această schimbare de variabilă, intervalul de integrare trece în compactul  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , iar funcția de integrat devine

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{1+4\sin^2 t}.$$

Se obține astfel că  $I$  este integrala proprie

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+4\sin^2 t}.$$

Ultima integrală fiind de forma  $\int_a^b \mathcal{R}(\sin t, \cos t) dt$ , unde  $\mathcal{R}(\sin t, \cos t)$  este o funcție pară în  $\sin t$  și  $\cos t$ , se face substituția  $\operatorname{tg} t = u$  și astfel integrala  $I$  devine o integrală improprie de primul tip, convergentă, a cărei

valoare este

$$I = \int_0^{\infty} \frac{du}{1+5u^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} u\sqrt{5} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}.$$

Așadar,  $I = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}$ . ■

## 7.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 7.2.1.** Studiați convergența integralei improprii

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

și în caz afirmativ calculați valoarea sa.

**Indicație.** Funcția de integrat  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  este mărginită pe intervalul nemărginit  $[0, \infty)$ , deci avem o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul convergenței lui  $I$  aplicăm **criteriul în  $\alpha$** . Cum  $\alpha = 4 > 1$ ,  $I$  este convergentă.

Pentru calculul valorii lui  $I$  scriem

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)}$$

și descompunem în fracții simple. ■

**Răspuns.**  $I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ . ■

**Exercițiul 7.2.2.** Studiați convergența integralei improprii

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$$

și în caz afirmativ calculați valoarea sa.

**Indicație.** Funcția de integrat  $f(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}$  este mărginită pe intervalul nemărginit  $[0, \infty)$ , deci avem o integrală improprie de primul tip.

Pentru studiul convergenței lui  $I$  aplicăm criteriul în  $\alpha$ . Se găsește  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ , deci  $I$  este convergentă.

Pentru calculul valorii lui  $I$  efectuăm schimbarea de variabilă (substituția lui Euler)

$$\sqrt{4x^2+x+1} = t - 2x \implies x = \frac{t^2-1}{4t+1} = \varphi(t).$$

Noul interval de integrare este  $[0, \infty)$ , iar funcția de integrat devine  $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{2}{t^2+4t}$ . ■

**Răspuns.**  $\frac{1}{2} \ln 5$ . ■

**Exercițiul 7.2.3.** Studiați natura integralei improprii

$$I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx.$$

**Indicație.** Deoarece pentru  $x = 1$ , numitorul fracției de sub integrală se anulează, trebuie studiată natura următoarelor integrale improprii (generalizate):

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx; \quad I_2 = \int_1^2 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx; \quad I_3 = \int_2^\infty \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx.$$

Se arată că integrala  $I_1$  este divergentă arătând că integrala  $J(u, v) = \int_u^v \frac{x \ln x}{(1-x^2)^2} dx$ , unde  $0 < u < v < 1$ , nu are limită finită când  $u \rightarrow 0$  și  $v \rightarrow 1$ . Pentru aceasta se face integrarea prin părți în integrala  $J(u, v)$ , observând că  $\frac{x}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-x^2} \right)'$ . Se ajunge la integrala  $\int_u^v \frac{1}{x(x^2-1)} dx$  care se calculează descompunând fracția  $\frac{1}{x(x^2-1)}$  în fracții simple. ■

**Răspuns.** Divergentă. ■

**Exercițiul 7.2.4.** Să se studieze natura integralei improprii de tipul al doilea

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

**Indicație.** Punctul singular al funcției de integrat  $f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt[3]{x^2}}$  se află în origine. Se aplică criteriul în  $\alpha$ . ■

**Răspuns.** Integrala  $I$  este divergentă. ■

**Exercițiul 7.2.5.** Să se arate că integrala improprie de speța a doua

$$I = \int_a^b x \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad a < b,$$

este convergentă și apoi să se determine valoarea sa.

**Indicație.** Integrala este convergentă în baza criteriului de comparație în  $\alpha$ , unde  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ .

Cu substituția  $x = a \cos^2 t + b \sin^2 t$  integrala  $I$  devine integrala proprie

$$I = 2(b-a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (a \cos^2 t + b \sin^2 t) dt.$$

**Răspuns.**  $I = \frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$ . ■



### 7.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** În ipoteza că  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , unde  $-\infty < a < b < \infty$ , este o funcție nemărginită în vecinătatea lui  $b$  și integrabilă Riemann pe orice compact  $[a, t] \subset [a, b)$ , se poate introduce simbolul

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (7.14)$$

denumit **integrală improprie de tipul al doilea** cu punctul singular în limita superioară de integrare.

Puteți enunța **criteriul lui Cauchy** de convergență a integralei improprii (7.14)? Dar demonstrația, o puteți prezenta?

Se cere justificare pentru fiecare răspuns **da**. ■

**2°.** Enunțați și demonstrați **criteriul lui Abel** de convergență a integralei improprii

$$\int_a^b f(x)h(x)dx, \quad (7.15)$$

cu integrantul de semn variabil și singularitatea în limita superioară de integrare. ■

**3°.** Enunțați și demonstrați **criteriul lui Dirichlet** de convergență a integralei improprii (7.15) cu integrantul de semn variabil și singularitatea în limita superioară de integrare. ■

**4°.** Prin ce se deosebesc criteriile de convergență ale lui Abel și Dirichlet pentru integrale improprii (7.15)? ■

**5°.** Cum se numește integrala improprie  $\int_a^b f(x)dx$ ,  $-\infty < a < c < b < \infty$ , unde  $f : [a, c) \cup (c, b] \rightarrow \mathbb{R}$  este funcție nemărginită într-o vecinătate a punctului  $x = c$  și integrabilă Riemann pe orice compact de forma  $[a, u] \cup [v, b]$ , cu  $a < u < c < v < b$ , care este divergentă, dar pentru care există și este finită limita

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)? \quad (7.16)$$

Ce nume poartă limita din (7.16)? ■

## Capitolul 8

# MC.08 – Integrale depinzând de un parametru

### 8.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 8.1.1.** Utilizând posibilitatea derivării sub semnul integrală să se calculeze

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \ln \frac{1 + y \sin x}{1 - y \sin x} dx.$$

**Soluție.** Funcția  $J(y)$  este definită printr-o integrală proprie deoarece funcția de sub semnul integrală are limită în origine și deci poate fi prelungită prin continuitate în  $x = 0$ .

Fiindcă sunt îndeplinite ipotezele teoremei de derivare a integralelor depinzând de un parametru, putem scrie

$$J'(y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - y^2 \sin^2 x}.$$

Cu substituția  $\operatorname{tg} x = t$  obținem  $J'(y) = \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}}$ , de unde deducem  $J(y) = 2 \arcsin y + C$ . Constanta reală  $C$  se determină din  $J(0) = 0$  și se găsește  $C = 0$ .

Prin urmare  $J(y) = 2 \arcsin y$ . ■

**Exercițiul 8.1.2.** Știind că *integrala lui Poisson*  $\int_0^\infty e^{-z^2} dz$  este convergentă și are valoarea  $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ , adică

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad (8.1)$$

să se arate că

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2 x} dz, \quad x > 0. \quad (8.2)$$

Folosind acest rezultat să se arate că au loc următoarele egalități:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (8.3)$$

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (8.4)$$

**Soluție.** Dacă în integrala din (8.1) facem schimbarea de variabilă  $z = t\sqrt{x}$ , unde  $x > 0$  se consideră fixat, dar arbitrar, se obține (8.2).

Pentru determinarea valorii primei integrale din (8.3) folosim (8.2) și integrabilitatea integralelor improprii depinzând de un parametru. Astfel, avem

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \cos x \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2 x} dz \right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-z^2 x} \cos x dx \right) dz. \quad (8.5)$$

Folosind de două ori integrarea prin părți, obținem

$$\int_0^\infty e^{-z^2 x} \cos x dx = \frac{z^2}{1+z^4}. \quad (8.6)$$

Din (8.5) și (8.6) rezultă

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{z^2}{1+z^4} dz. \quad (8.7)$$

Considerăm integralele improprii  $A = \int_0^\infty \frac{z^2}{1+z^4} dz$  din (8.7) și  $B = \int_0^\infty \frac{1}{1+z^4} dz$ . Combinațiile  $A+B$  și  $A-B$  conduc la

$$\begin{cases} A+B = \int_0^\infty \frac{\left(z - \frac{1}{z}\right)'}{\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 + 2} dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z^2-1}{z\sqrt{2}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ A-B = \int_0^\infty \frac{\left(z + \frac{1}{z}\right)'}{\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2} dz = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 - z\sqrt{2} + 1}{z^2 + z\sqrt{2} + 1} \Big|_0^\infty = 0, \end{cases}$$

din care deducem

$$A = B = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}. \quad (8.8)$$

Din (8.7) și (8.8) rezultă că  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Pentru cealaltă integrală cerută în (8.3), calculele sunt similare.

Dacă în integrala improprie  $\int_0^\infty \cos x^2 dx$  efectuăm schimbarea de variabilă  $x^2 = t$  și folosim (8.3), se obține

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Analog se determină valoarea celeilalte integrale din (8.4).

Integralele din (8.4) sunt cunoscute ca **integralele lui Fresnel**, utilizate în optică. ■

**Exercițiul 8.1.3.** Să se arate că funcția  $J$  definită prin integrala

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta$$

verifică egalitatea

$$\int_0^\infty e^{-ax} J(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad a > 0.$$

**Soluție.** Utilizând integrabilitatea integralelor improprii uniform convergente, putem scrie

$$\int_0^\infty e^{-ax} J(x) dx = \int_0^\infty e^{-ax} \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin \theta) d\theta \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx \right) d\theta. \quad (8.9)$$

Integrarea prin părți de două ori în  $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx$  conduce la concluzia

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos(x \sin \theta) dx = \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta}. \quad (8.10)$$

Astfel, se obține

$$\int_0^\infty e^{-ax} J(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta. \quad (8.11)$$

Dacă în (8.11) efectuăm schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} \theta = t$  se obține rezultatul dorit. ■

**Exercițiul 8.1.4.** Calculând mai întâi funcția  $J(y)$  definită prin integrala depinzând de parametrul  $y > 0$

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y + \cos^2 x},$$

să se determine funcția  $F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(y + \cos^2 x)^2}$ .

**Soluție.** Integrala se calculează efectuând schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = t$ . Noile limite de integrare sunt 0 și  $\infty$ , iar funcția de integrat devine  $\frac{1}{yt^2 + 1 + y}$ . Astfel,

$$J(y) = \int_0^\infty \frac{dt}{yt^2 + 1 + y} = \frac{1}{y} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left( \sqrt{\frac{1+y}{y}} \right)^2} = \frac{1}{y} \sqrt{\frac{y}{1+y}} \operatorname{arctg} \left( t \sqrt{\frac{y}{1+y}} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y(y+1)}}.$$

Observând că  $F(y) = -J'(y)$  și folosind pentru  $J(y)$  expresia  $J(y) = \frac{\pi}{2}(y^2 + y)^{-\frac{1}{2}}$ , deducem

$$F(y) = \frac{\pi(2y+1)}{4y(y+1)\sqrt{y(y+1)}}. \quad \blacksquare$$

**Exercițiul 8.1.5.** Să se arate că pentru funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \quad \text{și } y \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \quad \text{și } y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nu are loc formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, adică

$$\frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y) dx \neq \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx. \quad (8.12)$$

**Soluție.** Considerând că punctul  $(x, y) \in (0, 1] \times \mathbb{R}$  se află pe parabola  $y^2 = x$  și efectuând limita în origine a restricției funcției  $f$  la parabolă, găsim că aceasta nu există. Prin urmare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0) = 0,$$

ceea ce arată că funcția  $f$  nu este continuă.

În schimb, funcția  $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu valorile date în enunț, este continuă oricare ar fi  $x \in [0, 1]$ .

Cu schimbarea de variabilă de integrare

$$-\frac{y^2}{x} = t, \quad (8.13)$$

obținem că funcția

$$J(y) = \int_0^1 \frac{y^3}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}} dx. \quad (8.14)$$

este bine definită și

$$J(y) = ye^{-y^2}, \quad (8.15)$$

de unde deducem

$$\frac{d}{dy} J(y) = \frac{d}{dy} \int_0^1 f(x, y) dx = (1 - 2y^2)e^{-y^2} = J'(y). \quad (8.16)$$

Funcția  $f$  este derivabilă parțial în raport cu  $y$  și

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}} \left(3 - \frac{2y^2}{x}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

și atunci pentru  $y \neq 0$

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx = \int_0^1 \frac{y^2}{x^2} e^{-\frac{y^2}{x}} \left(3 - \frac{2y^2}{x}\right) dx. \quad (8.18)$$

Utilizând schimbarea de variabilă (8.13), din (8.18) obținem

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{-y^2} (3 + 2t)e^t dt = (1 - 2y^2)e^{-y^2}. \quad (8.19)$$

Pentru  $y = 0$  vom avea  $\int_0^1 0 \cdot dx = 0$ , prin urmare

$$\left( \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (8.20)$$

Pe de altă parte, din (8.15) deducem

$$J'(0) = 1. \quad (8.21)$$

Analizând raționamentul constatăm că are loc (8.12). ■

**Exercițiul 8.1.6.** Să se exprime printr-o **integrală Euler**, următoarele integrale

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad I_2 = \int_b^a (a-x)^{p-1} (x-b)^{q-1} dx.$$

**Soluție.** În integrala  $I_1$  facem schimbarea de variabilă  $\frac{1}{1+x^2} = t$ . Obținem

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{n-\frac{3}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

În integrala  $I_2$  se face schimbarea de variabilă  $t = \frac{x-b}{a-b}$  și se obține

$$I_2 = (a-b)^{p+q-1} B(p, q).$$

Dacă se ține cont că  $B(p, q) = B(q, p)$ , se poate da și altă expresie lui  $I_2$ . Aici  $\Gamma$  și  $B$  sunt **funcțiile lui Euler**. ■

## 8.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 8.2.1.** Utilizând posibilitatea derivării sub semnul integrală, să se calculeze integralele:

$$J_1(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx, \quad y > 1; \quad J_2(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \sin x)}{\sin x} dx.$$

**Indicație.** În fiecare dintre integralele obținute prin derivare

$$J'_1(y) = 2y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{y^2 - \sin^2 x}; \quad J'_2(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + y^2 \sin^2 x}$$

se face schimbarea de variabilă  $\operatorname{tg} x = t$ . ■

**Răspuns.**  $J_1(y) = \pi \ln \frac{|y + \sqrt{y^2 - 1}|}{2}$ ,  $J_2(y) = \ln y + \sqrt{1 + y^2}$ . ■

**Exercițiul 8.2.2.** Știind că pentru  $a \cdot b > 0$  avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}, \quad (8.22)$$

să se calculeze integrala

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}.$$

**Indicație.** Se derivează parțial în egalitatea (8.22) folosind formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de mai mulți parametri. ■

**Răspuns.**  $J(a, b) = \frac{\pi}{4ab} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$ . ■

**Exercițiul 8.2.3.** *Ce se poate spune despre funcția Bessel de indice întreg*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (8.23)$$

*în legătură cu ecuația diferențială Bessel de ordin întreg*

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0? \quad (8.24)$$

**Indicație.** Se derivează de două ori în (8.23) folosind formula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, obținând astfel  $J'_n(x)$  și  $J''_n(x)$ . Se arată că

$$x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0. \quad (8.25)$$

■

**Răspuns.** Relația (8.25) arată că funcția Bessel de indice întreg (8.23) este o **soluție a ecuației diferențiale** Bessel de ordin întreg (8.24). ■

**Exercițiul 8.2.4.** *Să se studieze convergența integralelor improprii:*

$$I_1 = \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^{\frac{1}{n}}}.$$

**Indicație.** În  $I_1$  se face substituția  $x^2 = t$ , iar în  $I_2$  se schimbă variabila de integrare prin  $x^m = t$ . ■

**Răspuns.**  $I_1 = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ ,  $I_2 = \frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ , unde  $B$  și  $\Gamma$  sunt funcțiile lui Euler. ■

**Exercițiul 8.2.5.** *Observând că  $\int_0^1 x^{y-1} dx = \frac{1}{y}$ , unde  $y \neq 0$ , să se calculeze integrala depinzând de parametru*

$$J(y) = \int_0^1 x^{y-1} \ln^m x dx \quad (8.26)$$

*unde  $m$  este număr natural cu  $m \geq 1$ .*

**Indicație.** Se derivează de  $m$  ori în egalitatea (8.26). ■

**Răspuns.**  $J(y) = \frac{(-1)^m m!}{y^{m+1}}$ . ■

## 8.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** În ce condiții putem calcula  $J'(y)$  dacă  $J(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx$ ? Dar dacă  $J(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$ ? ■

**2°.** Definiți uniforma convergență a integralelor improprii de prima speță și a doua speță care depind de

parametrul  $y$ .

■

3°. Enunțați criteriul de convergență uniformă al lui Weierstrass.

■

4°. Care sunt integralele  $\Gamma$  și  $B$  ale lui Euler? Expuneți câteva dintre proprietățile lor.

■

5°. Care sunt integralele Cauchy–Frullani? În ce condiții se poate determina valoarea unei astfel de integrale și cât este această valoare?

■





## Capitolul 9

# MC.09 – Integrale curbilinii

### 9.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 9.1.1.** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip

$$I = \int_C ye^{-x} ds, \quad C : \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

**Soluție.** Conform expresiei elementului de arc  $ds$  al unei curbe netede, au loc relațiile

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \\ &= \sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2} dt = \frac{1}{1+t^2} \cdot (1+t^2) dt = dt. \end{aligned}$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip, obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t) e^{-\ln(1+t^2)} dt; \\ I &= \int_0^1 \left( 2 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt; \\ I &= 2 \int_0^1 \operatorname{arctg} t \cdot d(\operatorname{arctg} t) - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^1; \\ I &= (\operatorname{arctg} t)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi^2}{16} - \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

■

**Exercițiul 9.1.2.** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip  $I = \int_C xyz ds$ , curba  $C$  având ecuațiile

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3} \sqrt{2t^3} \\ z = \frac{1}{2} t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

**Soluție.** Conform expresiei elementului de arc  $ds$  al unei curbe netede, au loc relațiile

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt; \\ ds &= \sqrt{1 + \frac{4t^4}{2t^3} + t^2} dt = (1+t)dt. \end{aligned}$$

Aplicând formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip, obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 t \cdot \frac{2}{3} \cdot (2t^3)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} t^2 (1+t) dt; \\ I &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ \frac{t^{\frac{9}{2}+1}}{\frac{9}{2}+1} \Big|_0^1 + \frac{t^{\frac{11}{2}+1}}{\frac{11}{2}+1} \Big|_0^1 \right]; \\ I &= \frac{16\sqrt{2}}{143}. \end{aligned}$$

■

**Exercițiul 9.1.3.** Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_C xdx + xydy + xyzdz, \text{ unde curba } C \text{ are ecuațiile: } \begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}, t \in [0, 1]$$

**Soluție.** Ținând cont de reprezentarea parametrică a curbei  $C$ , avem:

$$dx = e^t dt, \quad dy = -e^{-t} dt, \quad dz = \sqrt{2} dt.$$

Rezultă atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[ e^t \cdot e^t + e^t \cdot e^{-t} (-e^{-t}) + e^t \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{2}t \cdot \sqrt{2} \right] dt = \int_0^1 (e^{2t} - e^{-t} + 2t) dt = \\ &= \left( \frac{1}{2} e^{2t} + e^{-t} + t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 + e^{-1} + 1 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} e^2 + e^{-1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

**Exercițiul 9.1.4.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al firului material omogen, având densitatea  $\rho(x, y) = 1$  și reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi], \quad a > 0.$$

**Soluție.** Masa firului material este  $M = \int_C \rho ds$ . Coordonatele centrului de greutate sunt date de:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_C x \rho ds, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_C y \rho ds;$$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt;$$

$$\begin{cases} x' = 3a \cos^2 t (-\sin t) \\ y' = 3a \sin^2 t \cos t. \end{cases}$$

Conform expresiei elementului de arc, avem

$$ds = \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a |\sin t| |\cos t| dt.$$

Celelalte elemente se determină folosind formula de calcul a unei integrale curbilinii de primul tip. Se obțin:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi 3a |\sin t| |\cos t| dt = 3a \int_0^\pi \sin t |\cos t| dt = \\ &= 3a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt - 3a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin t \cos t dt; \\ M &= 3a \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3a \left. \frac{\sin^2 t}{2} \right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \frac{3a}{2} (1 - 0) - \frac{3a}{2} (0 - 1) = 3a; \\ x_G &= \frac{1}{M} \int_C x \rho ds = \frac{1}{3a} \int_C x ds = \frac{1}{3a} \int_0^\pi a \cos^3 t \cdot (3a) \cdot \sin t |\cos t| dt = \\ &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin t dt - a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^4 t \sin t dt = \\ &= -a \cdot \left. \frac{\cos^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + a \cdot \left. \frac{\cos^5 t}{5} \right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = -\frac{a}{5} (0 - 1) + \frac{a}{5} (-1 - 0) = 0; \\ y_G &= \frac{1}{M} \int_C y \rho ds = \frac{1}{3a} \int_C y ds = \frac{1}{3a} \int_0^\pi a \sin^3 t \cdot (3a) \cdot \sin t |\cos t| dt = \\ &= a \int_0^\pi \sin^4 t |\cos t| dt = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt - a \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^4 t \cos t dt = \\ &= a \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} - a \left. \frac{\sin^5 t}{5} \right|_{\frac{\pi}{2}}^\pi = a \left( \frac{1}{5} - 0 \right) - a \left( 0 - \frac{1}{5} \right) = \frac{2a}{5}. \end{aligned}$$

■

**Exercițiul 9.1.5.** Să se calculeze lucrul mecanic al forței  $\mathbf{F} = \frac{-k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , când punctul de aplicație se deplasează pe dreapta  $C$  de ecuații parametrice

$$\begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}, \quad t \in [1, 2].$$

**Soluție.** Lucrul mecanic efectuat de forța  $\mathbf{F}$  pe dreapta  $C$  are expresia

$$\mathcal{L} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C X dx + Y dy + Z dz.$$

Avem:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{kx}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} - \frac{ky}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{kz}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}; \\ d\mathbf{r} &= dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}; \\ \mathcal{L} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -k \int_C \frac{x}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx + \frac{y}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dy + \frac{z}{z\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz.\end{aligned}$$

Din ecuațiile parametrice ale lui  $C$  obținem:

$$dx = a dt, \quad dy = b dt, \quad dz = c dt;$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -k \int_1^2 \frac{at \cdot a + bt \cdot b + ct \cdot c}{ct\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2 + c^2t^2}} dt = -k \int_1^2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \frac{dt}{t} = \\ &= -\frac{k}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ln t \Big|_1^2 = -\frac{k}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ln 2.\end{aligned}$$

■

## 9.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 9.2.1.** Să se calculeze integrala curbilinie de primul tip:

$$I = \int_C y^5 ds; \quad C: x = \frac{y^4}{4}, \quad y \in [0, 2]$$

**Indicație.** Parametrul pe curbă este  $y$ , deci

$$ds = \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy = \sqrt{1 + y^6} dy.$$

■

**Răspuns.**  $I = \frac{1}{9} (65\sqrt{65} - 1).$

■

**Exercițiul 9.2.2.** Să se calculeze integrala curbilinie de al doilea tip:

$$I = \int_C y^2 dx - x^2 dy; \quad C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

**Indicație.** Se aplică formula de calcul a unei integrale curbilinii de al doilea tip.

■

**Răspuns.**  $I = 0.$

■

**Exercițiul 9.2.3.** Să se calculeze integrala curbilinie, constatând în prealabil că este independentă de drum:

$$I = \int_C yzdx + xzdy + xydz.$$

Capetele curbei de integrare sunt punctele  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(2, 3, 1)$ .

**Indicație.** Se arată că:  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ . O primitivă a expresiei diferențiale  $\omega = yzdx + xzdy + xydz$  poate fi  $U(x, y, z) = xyz$ . ■

**Răspuns.**  $I = 6$ . ■

**Exercițiul 9.2.4.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate a firului material, având densitatea  $\rho = 1$  și reprezentarea parametrică

$$C : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}, \quad t \in (-\infty, 0].$$

**Indicație.** Se folosesc expresiile de calcul pentru masă și coordonatele centrului de greutate  $G$ . ■

**Răspuns.**  $M = \sqrt{3}$ ;  $G\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ . ■

**Exercițiul 9.2.5.** Să se calculeze lucrul mecanic al forței  $\mathbf{F} = -k(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$ , când punctul de aplicație se deplasează pe curba

$$C : \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**Indicație.** Lucrul mecanic  $\mathcal{L}$  este dat de  $\mathcal{L} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . ■

**Răspuns.**  $\mathcal{L} = \frac{k(a^2 - b^2)}{2}$ . ■

### 9.3 Întrebări de autoevaluare

1°. Care sunt proprietățile relației de echivalență în mulțimea drumurilor din plan? ■

2°. Dacă reprezentarea parametrică a drumului  $(d)$  neted în spațiu este:

$$(d) : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

Ce reprezintă

$$l(d) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt = \int_a^b \left\| \frac{dr}{dt}(t) \right\| dt ?$$

■

**3°.** Dacă  $(AB)$  este un arc de curbă din planul  $Oxy$ , neted sau neted pe porțiuni, iar  $\rho$  este o funcție continuă, pozitivă în punctele lui  $(AB)$ , ce semnificație are numărul  $\int_{(AB)} \rho(x, y) ds$  ?

■

**4°.** Pentru firul material spațial de configurație  $(AB)$  și densitate  $\rho(x, y, z)$ , ce reprezintă numerele:

$$\begin{aligned} I_O &= \int_{(AB)} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds; \\ I_{Ox} &= \int_{(AB)} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds; \\ I_{Oxz} &= \int_{(AB)} y^2 \rho(x, y, z) ds ? \end{aligned}$$

■

**5°.** Dacă  $P$ ,  $Q$  și  $R$  sunt componentele unei forțe  $\mathbf{F}$  care acționează în punctele curbei netede sau netede pe porțiuni  $(AB)$ , ce reprezintă expresia  $I = \int_{(AB)} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  ?

■

# Capitolul 10

## MC. 10 – Integrala dublă

### 10.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 10.1.1.** Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{1 + yx^2}, \text{ unde } D = [-1, 1] \times [1, 4].$$

**Soluție.** Funcția de sub semnul integrală este continuă. Domeniul  $D$  este un interval, deci este simplu în raport cu ambele axe. Vom aplica, pentru calcul, formula de reducere a unei integrale duble la o integrală iterată, în ordinea  $x, y$  spre exemplu. Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \left( \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + yx^2} \right) dy = \int_1^4 \left[ \frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{arctg} x\sqrt{y} \right] \Big|_{x=-1}^{x=1} dy = \\ &= \int_1^4 \left[ \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{y}}{\sqrt{y}} - \frac{\operatorname{arctg} (-\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \right] dy = 2 \int_1^4 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy. \end{aligned}$$

Efectuăm substituția:  $\sqrt{y} = t$ ,  $y = t^2$ ,  $dy = 2t dt$ .

Astfel,

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_1^2 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \cdot 2t dt = 4 \int_1^2 \operatorname{arctg} t dt = 4 \left( t \operatorname{arctg} t \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{1 + t^2} dt \right) = \\ &= 4 \left[ 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) \Big|_1^2 \right] = 8 \operatorname{arctg} 2 - \pi - 2(\ln 5 - \ln 2) = \\ &= 8 \operatorname{arctg} 2 - \pi + \ln \frac{4}{25}. \end{aligned}$$

■

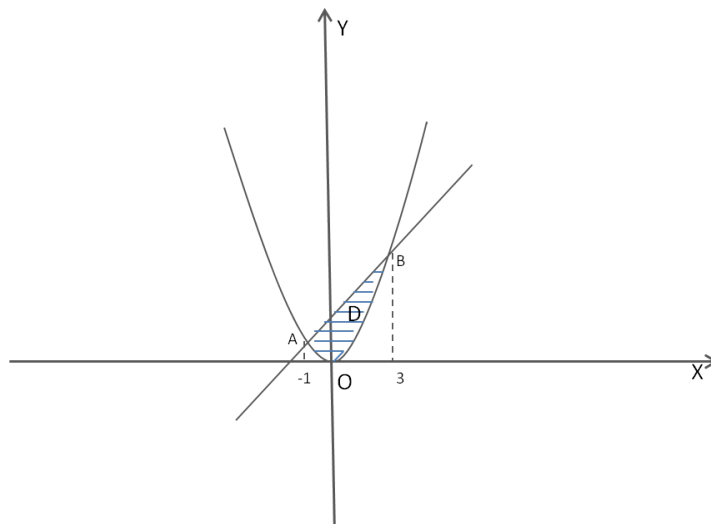
**Exercițiul 10.1.2.** Să se calculeze

$$I = \iint_D xy dx dy,$$

dacă  $D$  este limitat de parabola  $y = x^2$  și de dreapta  $y = 2x + 3$ .

**Soluție.** Domeniul  $D$ , reprezentat mai jos, este simplu în raport cu ambele axe.





Vom integra în ordinea  $y, x$ , deoarece este mai comod să integrăm în această ordine decât în ordinea inversă. Proiecția domeniului  $D$  pe axa  $Ox$  este intervalul  $[-1, 3]$ . Curba care îl mărginește inferior are reprezentarea  $y = x^2$  ( $-1 \leq x \leq 3$ ), iar curba care îl mărginește superior are reprezentarea  $y = 2x + 3$  ( $-1 \leq x \leq 3$ ). Aplicând formula de reducere a integralei duble la o integrală definită, obținem

$$I = \int_{-1}^3 dx \int_{x^2}^{2x+3} xy \, dy = \int_{-1}^3 \frac{xy^2}{2} \Big|_{x^2}^{2x+3} dx = \int_{-1}^3 \frac{x}{2} [(2x+3)^2 - x^4] dx = 53 + \frac{1}{3}.$$

■

**Exercițiul 10.1.3.** Să se calculeze, cu ajutorul formulei lui Riemann–Green, integrala curbilinie

$$I = \int_C \frac{1}{2} \left[ y\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 \ln \left( y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dx + y^2 \left[ xy + \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy$$

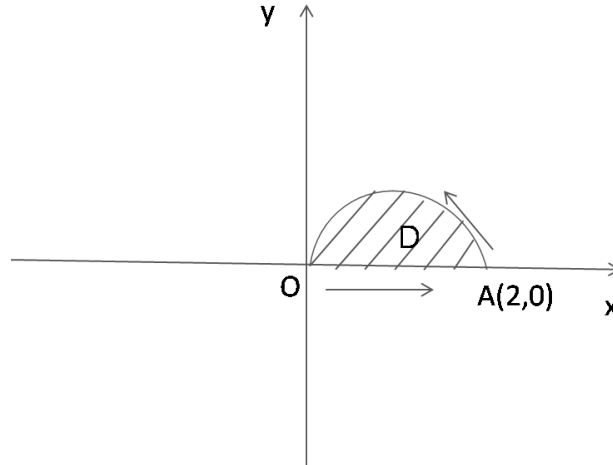
unde

$$C : \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi].$$

**Soluție.** Să observăm că este dificil să calculăm direct integrala dată. Este firesc să încercăm o nouă metodă de calcul, folosindu-ne de formula lui Riemann–Green. Imaginea curbei  $C$  este semicercul superior

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2x, y \geq 0\}$$

reprezentat mai jos:



Curba  $C$  este simplă și rectificabilă, dar nu este închisă. Pentru a putea folosi formula lui Green, trebuie să completăm semicercul  $K$  prin imaginea unei noi curbe simple și rectificabile  $C_1$ , până la un contur închis. Curba  $C_1$  trebuie astfel aleasă, încât integrala curbilinie de-a lungul ei să poată fi calculată cât mai ușor. Vom completa semicercul  $K$  prin segmentul  $OA$ , unde  $A = (2, 0)$ . Obținem astfel domeniul  $D = \{x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ .

Pentru curba  $C_1$  vom alege reprezentarea parametrică

$$x = t, \quad y = 0, \quad t \in [0, 2].$$

Curbele  $C$  și  $C_1$  sunt juxtapozabile, iar reuniunea lor  $\Gamma = C \cup C_1$  este o curbă închisă, simplă, rectificabilă și determină orientarea pozitivă a lui  $D$ . Să definim funcțiile  $P$  și  $Q$  pe domeniul  $D$  prin relațiile

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ y\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 \ln \left( y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$Q(x, y) = \begin{cases} y^2 \left[ xy + \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

și să cercetăm dacă formula lui Green este aplicabilă.

Funcțiile  $P$  și  $Q$  sunt, evident, continue pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $(x, y) \in D$ . Din relațiile

$$\left| x^2 \ln \left( y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right| = x^2 \cdot \ln \frac{1}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2}{y + \sqrt{x^2 + y^2}} \leq x,$$

$$\left| y^2 \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right| = y^2 \cdot \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \leq y,$$

adevărate pentru  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $y + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  și  $x + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$ , deducem că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} P(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} Q(x, y) = 0,$$

de unde rezultă continuitatea funcțiilor  $P$  și  $Q$  în origine. Pentru  $(x, y) \neq (0, 0)$  avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^3 + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

În origine, calculând derivatele parțiale după definiție, obținem

$$\frac{\partial P}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Din inegalitatea  $\frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq y$  ( $y \geq 0$ ) deducem că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial P}{\partial y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

de unde rezultă continuitatea derivatelor parțiale  $\frac{\partial P}{\partial y}$  și  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  în origine, și deci, pe tot domeniul  $D$ .

În concluzie, sunt verificate condițiile din teoremă pentru domenii având ca frontieră o curbă simplă, închisă și rectificabilă și formula lui Riemann-Green este aplicabilă. Avem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy; \\ \int_{\Gamma} P dx + Q dy &= \iint_D y^3 dx dy. \end{aligned}$$

Notând integrala curbilinie de-a lungul curbei  $C_1$  cu  $I_1$  și integrala dublă cu  $J$ , egalitatea precedentă devine

$$I + I_1 = J.$$

Integrala  $I_1$  o calculăm aplicând formula de reducere a unei integrale curbilinii la o integrală Riemann, iar integrala  $J$  o calculăm aplicând formula de reducere a unei integrale duble la o integrală iterată în ordinea  $y, x$ . Avem:

$$I_1 = \int_0^2 \frac{1}{2} [-t^2 \ln t] dt = -\frac{1}{2} \left[ \frac{t^3 \cdot \ln t}{3} \Big|_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 t^2 dt \right] = \frac{4}{9} (1 - 3 \ln 2);$$

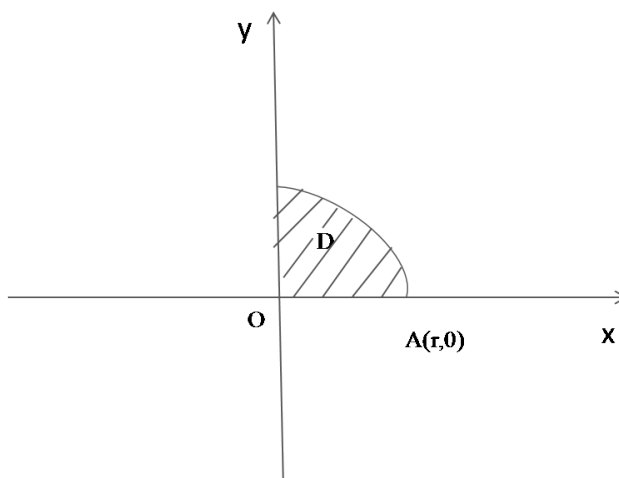
$$J = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y^3 dy = \frac{1}{4} \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{4}{15}.$$

Obținem  $I = J - I_1 = \frac{4}{3} \left[ \ln 2 - \frac{2}{15} \right]$ . ■

**Exercițiul 10.1.4.** Folosind o schimbare de variabile convenabilă, să se calculeze:

$$I = \iint_D xy dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq r^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

**Soluție.** Domeniul  $D$  are următoarea reprezentare:



Folosim coordonatele polare

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Din inegalitățile care caracterizează domeniul  $D$  vom obține

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq r \\ \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq 0. \end{cases} \implies \begin{cases} \rho \in [0, r] \\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

$$\text{Avem: } J = \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho.$$

Domeniul  $D$  este transformat în domeniul  $\Delta : \left\{ 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ .

Calculând integrala, obținem:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} \rho \cos \theta \rho \sin \theta \rho d\rho d\theta; \\ I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^r \rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta \cdot \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^r \rho^3 d\rho; \\ I &= \left. \frac{\sin^2 \theta}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^r = \frac{r^4}{8}. \end{aligned}$$

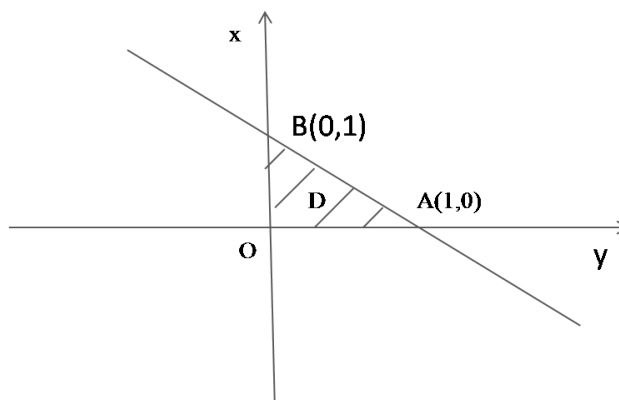
■

**Exercițiul 10.1.5.** Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcii materiale

$$D : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

având densitatea  $\rho(x, y) = 1 + xy$ .

**Soluție.** Domeniul  $D$  este simplu în raport cu ambele axe  $Ox$  și  $Oy$ . Domeniul  $D$  are reprezentarea



Vom integra în ordinea  $y, x$ :

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} y^2 (1 + xy) dy \right] dx; \\ I_x &= \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} + x \cdot \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[ \frac{(1-x)^3}{3} + \frac{x}{4} (1-x)^4 \right] dx. \end{aligned}$$

Efectuăm schimbarea de variabilă  $1 - x = t$ . Rezultă:

$$\begin{cases} x = 0 \implies t = 1; \\ x = 1 \implies t = 0; \\ -dx = dt. \end{cases}$$

Calculând integralele, obținem:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_1^0 \left( \frac{t^3}{3} + \frac{1-t}{4} \cdot t^4 \right) dt(-1) = \int_0^1 \left( \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{4} \right) dt = \left( \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{20} - \frac{t^6}{24} \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{120} \\ I_y &= \iint_D x^2(1+xy) dx dy = \frac{11}{120}. \end{aligned}$$

■

## 10.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 10.2.1.** Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{\sqrt{y} dx dy}{(1+xy)\sqrt{x}},$$

unde  $D : \{1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 1\}$ .

**Indicație.** Funcția de sub semnul integrală este continuă. Domeniul de integrare este simplu în raport cu ambele axe. Dacă folosim ordinea de integrare  $x, y$ , obținem

$$I = \int_0^1 \left( \int_1^3 \frac{\sqrt{y} dx}{(1+xy)\sqrt{x}} \right) dy.$$

■

**Răspuns.**  $I = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}$ .

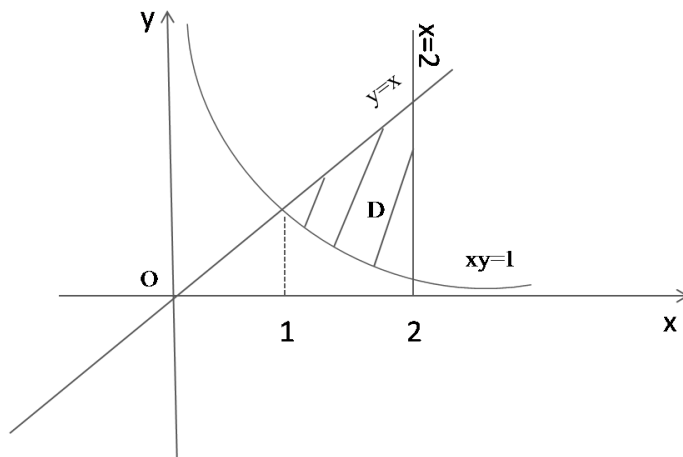
■

**Exercițiul 10.2.2.** Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

unde  $D$  este mărginit de dreptele  $x = 2$ ,  $y = x$  și de hiperbola echilateră  $xy = 1$ .

**Indicație.** Domeniul  $D$  este simplu în raport cu  $Oy$  și are reprezentarea



$$D : \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{x} \leq y \leq x. \end{cases}$$

Integrala  $I$  devine  $I = \int_1^2 \left[ \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right] dx$ .

Răspuns.  $I = \frac{9}{4}$ .

**Exercițiul 10.2.3.** Folosind o schimbare de variabile convenabilă, să se calculeze:

$$I = \iint_D \frac{dx dy}{1 + xy}, \text{ unde } D \begin{cases} 1 \leq xy \leq 2 \\ x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

**Indicație.** Scrierea lui  $D$  în forma

$$D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 2 \\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 3 \end{cases}$$

sugerează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} xy = u \\ \frac{y}{x} = v, \end{cases}$$

domeniul devenind astfel un dreptunghi cu laturile paralele cu noile axe.

Răspuns.  $I = \left( \frac{\ln 3}{2} \right)^2$ .

**Exercițiul 10.2.4.** Să se calculeze volumul elipsoidului de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

**Indicație.** Se constată că

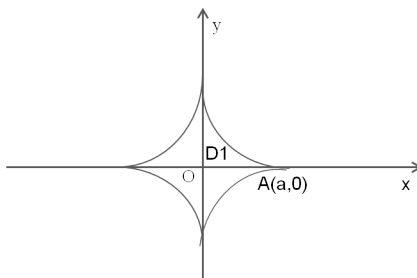
$$V = 2 \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

unde  $D : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$  este proiecția elipsoidului pe planul  $xOy$ . ■

**Răspuns.**  $I = \frac{4\pi abc}{3}$  ■

**Exercițiul 10.2.5.** Să se calculeze aria domeniului  $D \subset \mathbb{R}^2$  mărginit de curba:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ .

**Indicație.** Curba care mărginește domeniul este astroida cu brațe egale



Notând aria domeniului cu  $(D)$ , avem  $(D) = \iint_D dx dy = 4 \iint_{D_1} dx dy$ .

Se efectuează schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r \cos^3 t \\ y = r \sin^3 t. \end{cases}$$

**Răspuns.** Aria domeniului mărginit de astroida din enunț este  $\frac{3\pi a^2}{8}$ . ■

## 10.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Ce interpretare are egalitatea  $\iint_{I_2} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx$ , unde  $I_2 = [a,b] \times [c,d]$ ? ■

**2°.** Enunțați definiția unui **domeniu simplu în raport cu axa  $Oy$** . ■

**3°.** Enunțați definiția unui **domeniu simplu în raport cu axa  $Ox$** . ■

**4°.** Demonstrați formula integrală Riemann – Green

$$\int_{\Gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

**5°.** Ce reprezintă formula  $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{\Omega} f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u,v)}(u,v) \right| du dv$ ?

În caz că o recunoașteți, demonstrați-o. ■

## Capitolul 11

# MC. 11 – Integrale de suprafață

### 11.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 11.1.1.** Să se calculeze aria unei emisfere de ecuații:

$$S : \begin{cases} x = R \cos u \sin v \\ y = R \sin u \sin v \\ z = R \cos v \end{cases}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

**Soluție.** Notăm:  $A = \text{aria } S$ ;  $D = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Atunci

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

$$\begin{cases} x_u = -R \sin u \sin v, & y_u = R \cos u \sin v, & z_u = 0 \\ x_v = R \cos u \cos v, & y_v = R \sin u \cos v, & z_v = -R \sin v; \end{cases}$$

$$\begin{cases} E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2 = R^2 \sin^2 v \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0 \\ G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2 = R^2; \end{cases}$$

$$EG - F^2 = R^4 \sin^2 v;$$

$$A = \iint_D R^2 \sin v du dv = R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v dv = 2\pi R^2.$$

■

**Exercițiul 11.1.2.** Să se calculeze aria pânzei conice  $S$ , de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , cuprinsă între planele  $z = 0$  și  $z = 1$ .



**Soluție.** Fie  $D$  proiecția pânzei conice pe planul  $xOy$ . Atunci  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  este un disc închis de rază 1. Notăm cu  $A = \text{aria } S$ . Atunci

$$A = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy,$$

unde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \sqrt{2} dx dy.$$

Astfel,

$$A = \iint_D \sqrt{2} dx dy = \pi\sqrt{2},$$

deoarece aria discului  $D$  este  $\pi$ . ■

**Exercițiul 11.1.3.** Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al unei pânze subțiri în formă de emisferă, de ecuație  $S : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , densitatea  $\rho_S$  fiind constantă.

**Soluție.** Avem:

$$\begin{cases} p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}; \end{cases}$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy;$$

$$M = \iint_S \rho_S d\sigma = \iint_D \rho_S \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \rho_S R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

unde  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ . este proiecția lui  $S$  pe planul  $xOy$ , iar  $M$  este masa pânzei.

Trecând la coordonate polare obținem

$$M = \rho_S R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = 2\pi\rho_S R^2.$$

În virtutea omogenității pânzei subțiri  $S$  și a simetriei față de  $Oz$ , rezultă că  $x_G$  și  $y_G$  sunt nuli. Prin urmare, nu avem de calculat decât pe  $z_G$ . Avem

$$M \cdot z_G = \rho_S \iint_S z d\sigma = \rho_S R \iint_D dx dy = \rho_S \pi R^3.$$

Rezultă:  $x_G = 0$ ,  $y_G = 0$ ,  $z_G = \frac{R}{2}$ . ■

**Exercițiul 11.1.4.** Să se calculeze

$$\iint_{S^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

unde  $S^+$  fiind fața exterioară a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Soluție.** Sunt de calculat trei integrale de suprafață. Fie mai întâi,

$$I_1 = \iint_{S^+} z \, dx \, dy$$

Notând cu  $S_1$  emisfera situată deasupra planului  $xOy$ , de ecuație  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  și cu  $S_2$  emisfera inferioară, de ecuație  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , rezultă că

$$I_1 = \iint_{S_1^+} z \, dx \, dy + \iint_{S_2^+} z \, dx \, dy = \iint_{S_1^+} z \cos \gamma \, d\sigma + \iint_{S_2^+} z \cos \gamma \, d\sigma,$$

unde  $\gamma$  este unghiul format de normala exterioară la sferă cu axa  $Oz$ . Deoarece pe  $S_1^+$  avem  $\cos \gamma > 0$ , iar pe  $S_2^+$  avem  $\cos \gamma < 0$ , rezultă că

$$I_1 = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy + \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy = 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy,$$

unde  $D$  este interiorul cercului  $x^2 + y^2 = a^2$  din planul  $xOy$ . Trecând la coordonate polare, rezultă

$$I_1 = 2 \iint_{\Delta} (a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} \rho \, d\rho \, d\theta, \text{ unde } \Delta : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 < \rho \leq a \end{cases}$$

sau

$$I_1 = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} \, d\rho = -\frac{4\pi}{3} \sqrt{(a^2 - \rho^2)^3} \Big|_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

Raționând la fel pentru calculul celorlalte două integrale, rezultă că integrala

$$I_2 = \iint_{S^+} y \, dx \, dz$$

se transformă într-o integrală dublă referitoare la domeniul  $x^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $y = 0$ , iar integrala

$$I_3 = \iint_{S^+} x \, dy \, dz$$

se reduce la calculul unei integrale duble pe domeniul  $y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $x = 0$ . Valorile lor sunt egale cu cea obținută pentru  $I_1$ . Avem,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi a^3.$$

■

**Exercițiul 11.1.5.** Să se calculeze

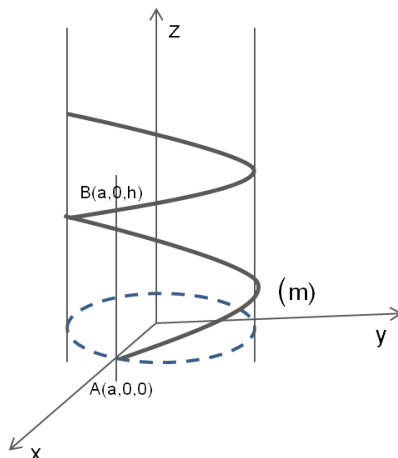
$$\int_{\widehat{AmB}} (x^2 - yz) \, dx + (y^2 - xz) \, dy + (z^2 - xy) \, dz$$

de-a lungul arcului de elice

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = \frac{ht}{2\pi}, \end{cases}$$

situat între punctul  $A(a, 0, 0)$  și punctul  $B(a, 0, h)$ , unde  $a > 0$  și  $h > 0$ .

**Soluție.** În figura de mai jos este desenată elicea cilindrică de pas constant.



Se observă că punctele  $A$  și  $B$  sunt situate pe aceeași paralelă la  $Oz$ . Deoarece curba nu este închisă, sub această formă nu poate fi aplicată formula lui Stokes. Completând însă arcul  $\widehat{AmB}$  cu segmentul  $\overline{BA}$  se obține o curbă închisă. Celelalte condiții de aplicabilitate ale formulei lui Stokes fiind satisfăcute, avem

$$\int_{\widehat{AmB}} + \int_{\widehat{BA}} = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = 0,$$

$S$  fiind o porțiune de suprafață mărginită de curba închisă  $\widehat{AmBA}$ .

Ultima integrală este nulă deoarece integrandul este nul. Urmează atunci că avem

$$\int_{\widehat{AmB}} = - \int_{\widehat{BA}} = \int_{\widehat{AB}} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz = \int_{\widehat{AB}} z^2 dz = \int_0^h z^2 dz = \frac{h^3}{3},$$

deoarece pe  $\widehat{AB}$  avem  $y = 0$  și  $x = a$ . ■

## 11.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 11.2.1.** Să se calculeze aria sferei cu centrul în originea reperului și de rază  $R$ .

**Indicație.** Ecuațiile parametrice ale sferei sunt

$$S : \begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad \theta \in [0, \pi].$$

Se știe că  $A = \text{aria } S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} d\theta d\varphi$ , unde  $D = \{(\theta, \varphi) : \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ . ■

**Răspuns.** Aria lui  $S$  este  $4\pi R^2$ . ■

**Exercițiul 11.2.2.** Să se calculeze

$$I = \iint_S z \, d\sigma$$

unde  $S$  este porțiunea paraboloidului  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  decupată de cilindrul  $x^2 + y^2 = 8$ .

**Indicație.** Calculăm mai întâi  $d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$ , cu  $p = x$  și  $q = y$ . Astfel  $d\sigma = \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$ . ■

**Răspuns.**  $I = \frac{596}{15}$ . ■

**Exercițiul 11.2.3.** Să se calculeze integrala de suprafață de al doilea tip

$$I = \iint_{S^-} y \, dy dz + z \, dz dx + 3x \, dx dy$$

unde  $S^-$  este fața interioară a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , situată în primul octant.

**Indicație.** Normala dirijată spre interiorul sferei are versorul  $\vec{n} = \left(-\frac{x}{a}, -\frac{y}{a}, -\frac{z}{a}\right)$ .

$$\text{Atunci } I = \iint_S (y \cos \alpha + z \cos \beta + 3x \cos \gamma) \, d\sigma = -\frac{1}{a} \iint_S (xy + zy + 3xz) \, d\sigma.$$

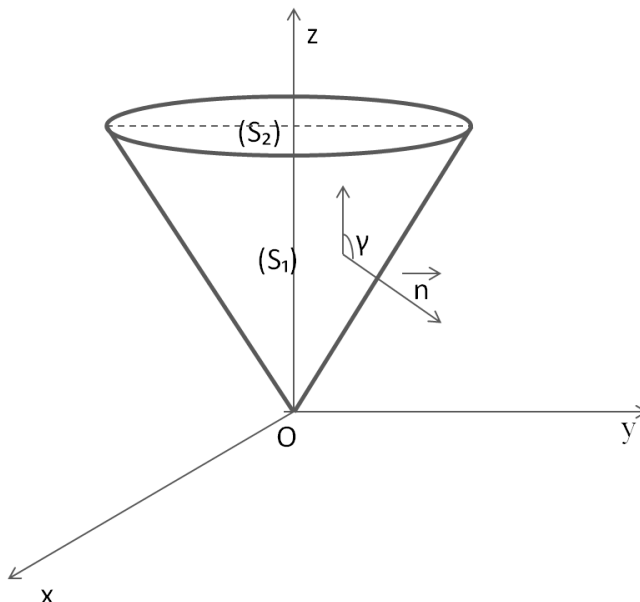
**Răspuns.**  $I = -2a^3$ . ■

**Exercițiul 11.2.4.** Să se calculeze

$$\iint_{S^+} (y - z) \, dy dz + (z - x) \, dz dx + (x - y) \, dx dy,$$

unde  $S^+$  este fața exterioară închisă a conului  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

**Indicație.** Suprafața  $S$  are reprezentarea



Se separă integrala dată în două integrale, după porțiunile de suprafață  $S_1$  - fața laterală a conului și  $S_2$  - capacul  $z = h$ , astfel că

$$\iint_{S^+} = \iint_{S_1^+} + \iint_{S_2^+}.$$

■

Răspuns.  $I = 0$ .

■

**Exercițiul 11.2.5.** Să se determine centrul de greutate  $G$  al unei calote sferice omogene de rază  $R$  și înălțime  $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}R$ .

**Indicație.** Din motive de simetrie  $x_G = y_G = 0$ , iar  $z_G = \frac{1}{M} \iint_S z d\sigma$ , unde  $M = \iint_S d\sigma$ .

■

Răspuns.  $G\left(0, 0, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ .

■

### 11.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Să se scrie ecuația planului tangent la pânza parametrică netedă

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2,$$

într-un punct curent al ei.

■

**2°.** Să se scrie elementul de arie  $d\sigma$  al unei suprafețe netede cu reprezentarea parametrică dată anterior.

■

**3°.** Ce reprezintă egalitatea  $\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iiint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} dx dy$ ?

În caz că o recunoașteți, încercați să o demonstrați. ■

**4°.** Dacă  $S$  este o pânză materială cu elementul de masă  $dm$ , atunci ce semnifică numerele:  $I_x = \iint_S (y^2 + z^2) dm$ ;  $I_{yz} = \iint_S x^2 dm$ ;  $I_O = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$  ? ■

**5°.** Care este problema concretă care sugerează introducerea noțiunii de **integrală de suprafață de al doilea tip**? ■

**6°.** Demonstrați formula lui Stokes

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

unde  $\Gamma = \partial S$ . ■



## Capitolul 12

# MC. 12 – Integrala triplă

### 12.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 12.1.1.** Să se calculeze  $I = \iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ , unde  $V$  este domeniul definit de inegalitățile:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2; \quad x^2 + y^2 \leq z^2; \quad z \geq 0.$$

**Soluție.** Suprafața dată de ecuația  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  este o sferă de rază  $a$ , iar suprafața  $z^2 = x^2 + y^2$  este un con cu vârful în origine și cu axă de simetrie  $Oz$ .

Deoarece  $z \geq 0$ , din con reținem doar pânza superioară  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Intersecția celor două suprafețe este curba definită de ecuațiile

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2} \\ z = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

adică un cerc de rază  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  situat la înălțimea  $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . Proiecția lui  $V$  pe planul  $xOy$  este deci discul  $D$  cu centrul în origine și raza  $a\sqrt{2}$ . Ecuațiile explicite ale suprafețelor care mărginesc pe  $V$  sunt  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z \in \left[0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$  și  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z \in \left[\frac{a\sqrt{2}}{2}, a\right]$ . Deci explicitarea lui  $V$  este dată de

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right\},$$

iar integrala triplă se reduce astfel

$$I = \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left( \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy = \iint_D \frac{z^2}{2} \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D (a^2 - 2x^2 - 2y^2) dx \, dy.$$

Pentru calculul acestei integrale duble folosim coordonatele polare. Domeniul  $D$  este transformat în

$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\},$$



iar jacobianul transformării este  $J = \rho$ . Astfel, integrala devine

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \left( \int_0^{2\pi} (a^2 - 2\rho^2 \cos^2 \theta - 2\rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} (a^2 - 2\rho^2) \rho d\rho = -\frac{\pi}{8} (a^2 - 2\rho^2)^2 \Big|_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

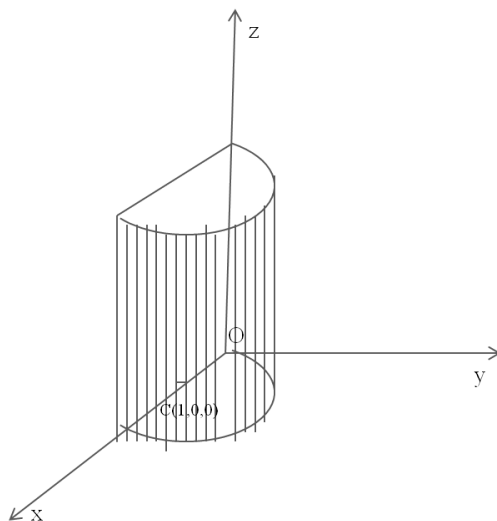
■

**Exercițiul 12.1.2.** Să se calculeze

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

unde  $V$  este definit de inecuațiile:  $y \geq 0$ ;  $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ ;  $0 \leq z \leq 1$ .

**Soluție.**  $V$  este un corp cilindric secționat de planele  $z = 0$ ,  $z = 1$  și  $y = 0$ , cu următoarea reprezentare



Prin urmare

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \iint_D \left( \int_0^1 (x^2 + y^2) dz \right) dx dy,$$

unde  $D$  este interiorul semicercului  $z = 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ . Rezultă

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Integrala dublă se calculează în coordonate polare și se obține  $I = \iint_{\Delta} \rho^3 d\rho d\theta$ , unde

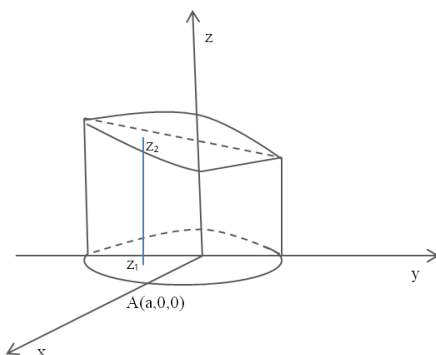
$$\Delta = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Se găsește  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^3 d\rho = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)^2 d\theta = \frac{3\pi}{4}.$

■

**Exercițiul 12.1.3.** Să se calculeze  $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , unde  $V$  este domeniul limitat de suprafețele  $x + y + z = 2a$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$  și  $z = 0$ , iar  $a > 0$ .

**Soluție.** Domeniul  $V$  este mărginit lateral de cilindrul  $x^2 + y^2 = a^2$ , inferior de planul de ecuație  $z = 0$  și superior de planul  $x + y + z = 2a$ , cu următoarea reprezentare



Avem

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \left( \int_{z_1}^{z_2} dz \right) dx dy,$$

unde  $D : z = 0, x^2 + y^2 \leq a^2$ , iar  $z_1 = 0, z_2 = 2a - x - y$ . Urmează atunci

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \left( z \Big|_0^{2a-x-y} \right) dx dy = \iint_D (2a - x - y) \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$$

Trecând în coordonate polare, ultima integrală devine:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Delta} (2a - \rho \cos \theta - \rho \sin \theta) \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a\rho^2 - \rho^3 \cos \theta - \rho^3 \sin \theta) d\rho; \\ I &= \int_0^{2\pi} \left( 2a \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \cos \theta - \frac{\rho^4}{4} \sin \theta \right) \Big|_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \left( 2a \cdot \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \cos \theta - \frac{a^4}{4} \sin \theta \right) d\theta = \\ &= \frac{4\pi a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \sin \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{a^4}{4} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi a^4}{3}. \end{aligned}$$

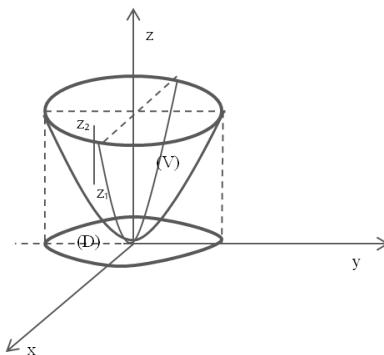
■

**Exercițiul 12.1.4.** Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_V z^2 dx dy dz,$$

unde  $V$  este definit de inecuațiile  $x^2 + y^2 \leq 2z$  și  $0 \leq z \leq 2$ .

**Soluție.** Domeniul  $V$  este simplu în raport cu  $Oz$ , deoarece este interiorul unui paraboloid de rotație în jurul axei  $Oz$ , limitat de planul  $z = 2$ . Avem următoarea reprezentare pentru  $V$ :



Avem

$$I = \iiint_V z^2 dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \right) dx dy,$$

unde  $D : x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $z = 0$ , iar  $z_1 = \frac{x^2 + y^2}{2}$ ,  $z_2 = 2$ .

$$I = \frac{1}{3} \iint_D z^3 \Big|_{\frac{x^2+y^2}{2}}^2 dx dy = \frac{1}{3} \iint_D \left( 8 - \frac{(x^2 + y^2)^3}{8} \right) dx dy.$$

Trecând la coordonate polare, se obține

$$I = \frac{1}{3} \iint_{\Delta} \left( 8\rho - \frac{\rho^7}{8} \right) d\rho d\theta,$$

unde  $\Delta = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Mai departe,

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left( 8\rho - \frac{\rho^7}{8} \right) d\rho = \frac{2\pi}{3} \left( 4\rho^2 - \frac{\rho^8}{64} \right) \Big|_0^2 = 8\pi.$$

■

**Exercițiul 12.1.5.** Să se calculeze

$$I = \iint_S 2xz^2y dy dz + z^2 dz dx + xyz^2 dy dx$$

folosind formula lui Gauss-Ostrogradski, unde  $S : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z \geq 0. \end{cases}$

**Soluție.** Reamintim formula integrală Gauss-Ostrogradski

$$\iint_S P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

unde  $S$  mărginește corpul  $V$ . În acest caz:  $P(x, y, z) = 2xz^2y$ ;  $Q(x, y, z) = z^2$ ;  $R(x, y, z) = xyz^2$  și

$$I = \iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iiint_V 6xyz dx dy dz$$

unde  $V$  este interiorul elipsoidului pentru  $z \geq 0$ . Mai departe,

$$I = 6 \iint_D xy \left( \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z dz \right) dxdy = 6 \iint_D xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dxdy = 3c^2 \iint_D xy \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dxdy,$$

unde  $D : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$ .

Trecem la coordonate polare generalizate  $\begin{cases} x = a\rho \cos \theta \\ y = b\rho \sin \theta \end{cases}$ , jacobianul transformării fiind  $J = ab\rho$ . Astfel, integrala devine

$$I = 3c^2 \iint_{\Delta} ab\rho^2 \sin \theta \cos \theta (1 - \rho^2) ab\rho d\rho d\theta$$

unde  $\Delta = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . În continuare avem:

$$I = 3c^2 \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^1 a^2 b^2 \rho^2 (1 - \rho^2) \rho d\rho; \quad I = \frac{3c^2}{2} \left( -\frac{\cos 2\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \int_0^1 a^2 b^2 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho = 0.$$

■

## 12.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 12.2.1.** Să se calculeze

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz,$$

unde  $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq az$ .

**Indicație.** Domeniul este interiorul unei sfere cu centrul în  $A(0, 0, \frac{a}{2})$  și rază  $R = \frac{a}{2}$ . Se utilizează coordonatele sferice.

■

**Răspuns.**  $I = \frac{\pi a^4}{10}$ .

■

**Exercițiul 12.2.2.** Să se calculeze

$$I = \iiint_V xyz dxdydz, \text{ unde } V : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq c \end{cases}.$$

**Indicație.** Domeniul  $V$  este simplu în raport cu axa  $Oz$ .

■

**Răspuns.**

$$I = \frac{a^2 b^2 c^2}{8}.$$

■

**Exercițiul 12.2.3.** Să se calculeze

$$I = \iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

unde  $V$  este corpul mărginit de suprafața conică  $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$  și planul  $z = h$ , cu  $h > 0$ .

**Indicație.** Volumul  $V$  este simplu în raport cu axa  $Oz$ . ■

**Răspuns.**  $I = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$ . ■

**Exercițiul 12.2.4.** Să se calculeze masa corpului mărginit de elipsoidul  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  știind că densitatea lui variază după legea  $\rho = k|z|$ .

**Indicație.** Masa solidului este  $M = \iiint_V k|z| \, dx \, dy \, dz$ . ■

**Răspuns.**  $M = \frac{k\pi abc^2}{2}$ . ■

**Exercițiul 12.2.5.** Folosind formula lui Gauss-Ostrogradski să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S x^3 \, dy \, dz + y^3 \, dz \, dx + z^3 \, dx \, dy,$$

unde  $S$  este fața exterioară a sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Indicație.** În formula lui Gauss-Ostrogradski  $P(x, y, z) = x^3$ ,  $Q(x, y, z) = y^3$ ,  $R(x, y, z) = z^3$ . ■

**Răspuns.**  $I = \frac{12\pi a^5}{5}$ . ■

## 12.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Să se scrie formula de calcul a unei integrale triple când domeniul de integrare este simplu în raport cu una din axele de coordonate. Enunțați definiția integralei triple. ■

**2°.** Enunțați proprietățile integralei triple. ■

**3°.** Demonstrați formula integrală Gauss-Ostrogradski. ■

**4°.** Ce semnificație au numerele:

$$I_x = \rho_0 \iiint_V (y^2 + z^2) \, dV; \quad I_{xy} = \iiint_V \rho z^2 \, dV; \quad I_O = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dV ?$$

**5°.** Care este formula schimbării de variabile într-o integrală triplă când se trece la coordonate polare generalizate? Dar când se trece la coordonatele cilindrice? ■

## Capitolul 13

# MC. 13 – Elemente de teoria câmpurilor

### 13.1 Exerciții rezolvate

**Exercițiul 13.1.1.** Dacă:

- $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  este **vectorul de poziție al unui punct** oarecare  $M(x, y, z)$  din **spațiul afin Euclidian tridimensional**  $\mathbb{E}^3$ ;
- $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  este **norma** sau **lungimea** vectorului  $\mathbf{r}$ ;
- $\varphi(r)$  este un câmp scalar diferențiabil care depinde compus de variabilele  $x, y, z$  prin intermediul lui  $r$ ;
- $\mathbf{a}$  este un vector constant;
- $\mathbf{v}$  este un câmp vectorial oarecare diferențiabil;
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$  este **operatorul lui Hamilton**,

atunci au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r = \nabla r &= \frac{\mathbf{r}}{r}; & \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) &= \mathbf{a}; & \operatorname{grad} \varphi(r) &= \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}; \\ \operatorname{div} \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3; & \operatorname{rot} \mathbf{r} = \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{0}; & (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r} &= \mathbf{v}, & \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \quad (13.1)$$

**Soluție.** Găsim

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} r &= \operatorname{grad} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k} = \\ &= \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \\ \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) &= \operatorname{grad}(a_1x + a_2y + a_3z) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} = \mathbf{a}; \\ \operatorname{grad} \varphi(r) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \mathbf{k} = \varphi'(r) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0};$$

$$(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{r} = \left( v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{r} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} = \mathbf{v};$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{r} = (a_2 z - a_3 y) \mathbf{i} + (a_3 x - a_1 z) \mathbf{j} + (a_1 y - a_2 x) \mathbf{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial x} (a_2 z - a_3 y) + \frac{\partial}{\partial y} (a_3 x - a_1 z) + \frac{\partial}{\partial z} (a_1 y - a_2 x) = 0.$$

Întrucât rezultatele (13.1) sunt întâlnite frecvent în aplicații, se recomandă memorarea lor. ■

**Exercițiul 13.1.2.** Se dă câmpul scalar

$$\varphi(M) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^n + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{r^2} + \ln r,$$

unde  $\mathbf{a}$  și  $\mathbf{b}$  sunt vectori constanți,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  este **vectorul de poziție** al punctului  $M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  este **norma** sau **lungimea** vectorului  $\mathbf{r}$ , iar  $n \geq 1$  este un număr natural.

a) Să se calculeze  $(\operatorname{grad} \varphi)(M)$ .

b) Pentru  $n = 1$ ,  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$  și  $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$  să se găsească **unghiul** dintre vectorii  $(\operatorname{grad} \varphi)(A)$  și  $(\operatorname{grad} \varphi)(B)$ , unde punctele  $A$  și  $B$  au coordonatele  $A(1, 1, 0)$  și  $B(-1, 0, 1)$ .

**Soluție.** Gradientul câmpului scalar  $\varphi(M)$  este vectorul

$$(\operatorname{grad} \varphi)(M) = n(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})^{n-1} \mathbf{a} + \frac{1}{r^2} (\mathbf{b} + \mathbf{r}) - \frac{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}}{r^4} \mathbf{r},$$

din care, pentru  $n = 1$ ,  $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$  și  $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$  se obține

$$(\operatorname{grad} \varphi)(A) = 2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}, \quad (\operatorname{grad} \varphi)(B) = -\frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}.$$

Vectorii găsiți sunt **ortogonali** deoarece produsul lor scalar este nul. ■

**Exercițiul 13.1.3.** Să se determine funcția reală de o variabilă reală  $x \mapsto \varphi(x)$  astfel încât câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = x\varphi(x)\mathbf{i} + y\varphi(x)\mathbf{j} + x^2 z \mathbf{k}$$

să fie **solenoidal**. Pentru  $\varphi$  astfel determinat să se determine **rotorul** câmpului vectorial  $\mathbf{v}$ .

**Soluție.** Divergența câmpului vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z)$  este

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = x\varphi'(x) + 2\varphi(x) + x^2.$$

Impunând condiția ca  $\mathbf{v}$  să fie câmp vectorial solenoidal, ceea ce înseamnă  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , ajungem la ecuația diferențială liniară și neomogenă de ordinul întâi

$$\varphi'(x) + \frac{2}{x}\varphi(x) = -x$$

cu soluția generală

$$\varphi(x) = \frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}.$$

După înlocuirea funcției  $\varphi$  în expresia câmpului vectorial  $\mathbf{v}$  se obține

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(\frac{C}{x} - \frac{x^3}{4}\right)\mathbf{i} + y\left(\frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{k}. \quad (13.2)$$

Rotorul câmpului vectorial (13.2) se determină folosind

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix}, \quad (13.3)$$

unde funcțiile  $P$ ,  $Q$  și  $R$  sunt coordonatele câmpului vectorial

$$P(x, y, z) = \frac{C}{x} - \frac{x^3}{4}, \quad Q(x, y, z) = y\left(\frac{C}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right), \quad R(x, y, z) = x^2z. \quad (13.4)$$

Din (13.3) și (13.4) rezultă

$$\nabla \times \mathbf{v} = -2xz\mathbf{j} - y\left(\frac{2C}{x^3} - \frac{x}{2}\right)\mathbf{k}.$$

■

**Exercițiul 13.1.4.** Se dă câmpul scalar  $\varphi(x, y, z) = x^2y^2z^2$ . Se cer liniile de câmp ale câmpului vectorial  $\mathbf{v} = \nabla\varphi = \text{grad}\varphi$  și suprafața de câmp care trece prin curba

$$\Gamma: \begin{cases} x = 1 \\ y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

**Soluție.** Se găsește

$$\mathbf{v} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^2z^2\mathbf{i} + 2x^2yz^2\mathbf{j} + 2x^2y^2z\mathbf{k}.$$

Sistemul simetric care dă liniile de câmp este

$$\frac{dx}{2xy^2z^2} = \frac{dy}{2x^2yz^2} = \frac{dz}{2x^2y^2z}.$$

Din primele două rapoarte se obține combinația integrabilă  $x dx = y dy$  din care deducem prima integrală primă  $x^2 - y^2 = C_1$ .

A doua integrală primă se obține similar considerând primul și ultimul raport. Găsim  $x^2 - z^2 = C_2$ .

Din punct de vedere geometric prima integrală primă reprezintă o familie de **cilindri hiperbolici** cu **generatoarele** paralele cu axa  $Oz$ , în timp ce a doua este o familie de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa  $Oy$ .

Ansamblul celor două integrale prime reprezintă ecuațiile liniilor de câmp

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$$

O linie de câmp este o curbă rezultată din intersecția unui cilindru hiperbolic cu generatoarele paralele cu axa  $Oz$  cu un cilindru hiperbolic având generatoarele paralele cu axa  $Oy$ .



Liniilor de câmp le impunem să treacă prin curba  $\Gamma$  pentru a genera suprafața de câmp căutată. Ajungem la sistemul de patru ecuații cu trei necunoscute

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ x^2 - z^2 = C_2 \\ x = 1 \\ y^4 + z^4 = 1. \end{cases}$$

Pentru ca acest sistem să aibă soluții, constantele  $C_1$  și  $C_2$  trebuie să fie legate prin **relația de condiție** sau **condiția de compatibilitate**

$$(1 - C_1)^2 + (1 - C_2)^2 = 1.$$

Înlocuind  $C_1 = x^2 - y^2$  și  $C_2 = x^2 - z^2$  obținem **ecuația carteziană implicită a suprefetei** de câmp

$$(1 - x^2 + y^2)^2 + (1 - x^2 + z^2)^2 - 1 = 0$$

în care recunoaștem o **suprafață algebrică de ordinul patru**. ■

**Exercițiul 13.1.5.** Se dă câmpul vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z) = \varphi(r) \text{grad } \varphi(r)$ , unde  $\varphi$  este o funcție reală diferențiabilă, iar  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  este norma vectorului de poziție  $\mathbf{r}$  a unui punct arbitrar  $M \in \mathbb{E}^3$ . Se cere:

- a) să se calculeze  $\text{div } \mathbf{v}$ ;
- b) să se arate că  $\mathbf{v}$  este un **câmp vectorial irotational**;
- c) în ipoteza că  $\varphi(r) = -\frac{1}{r}$ , să se găsească punctele  $M$  pentru care  $\text{div } \mathbf{v} = 1$ .

**Soluție.** Pentru primele două puncte folosim formulele:

$$\text{div}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \text{div } \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \text{grad } \varphi; \quad (13.5)$$

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{u}) = \varphi \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{u} \times \text{grad } \varphi, \quad (13.6)$$

unde  $\varphi$  este un câmp scalar, iar  $\mathbf{u}$  este un câmp vectorial, ambele diferențiabile pe domeniile lor de definiție.

În cazul acestui exercițiu, câmpul vectorial  $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ .

Aplicând (13.5), avem

$$\text{div}(\varphi(r) (\text{grad } \varphi)(r)) = \varphi(r) \text{div grad } \varphi(r) + \text{grad } \varphi(r) \cdot \text{grad } \varphi(r).$$

Însă  $\text{div grad } \varphi(r) = \nabla^2 \varphi(r)$ , unde  $\nabla^2$  este **operatorul lui Laplace**

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Se obține

$$\text{div}(\varphi(r) (\text{grad } \varphi)(r)) = \varphi(r) \nabla^2 \varphi(r) + \|\text{grad } \varphi(r)\|^2. \quad (13.7)$$

Pentru al doilea punct aplicăm (13.6) și găsim

$$\text{rot}(\varphi(r) \text{grad } \varphi(r)) = \varphi(r) \text{rot grad } \varphi(r) - \text{grad } \varphi(r) \times \text{grad } \varphi(r).$$

Însă,  $\text{rot grad } \varphi(r) = \mathbf{0}$ , iar  $\text{grad } \varphi(r) \times \text{grad } \varphi(r) = \mathbf{0}$ , prima fiind evidentă dacă se folosește (13.3), a doua rezultând din faptul că produsul vectorial a doi vectori coliniari este vectorul nul. Așadar,

$$\text{rot}(\varphi(r) \text{grad } \varphi(r)) = \mathbf{0},$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Pentru cel de al treilea punct folosim (13.7) în care  $\varphi(r) = -\frac{1}{r}$ . Avem

$$\nabla^2 \left( -\frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \left( -\frac{1}{r} \right) = -\operatorname{div} \left( -\frac{\operatorname{grad} r}{r^2} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (13.8)$$

Calculând ultimul termen din (13.8) folosind formula (13.5), obținem

$$\operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left( -\frac{3r^2 \mathbf{r}}{r^6} \right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0. \quad (13.9)$$

Din (13.7) și (13.9) rezultă  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \left\| \operatorname{grad} \left( -\frac{1}{r} \right) \right\|^2 = \left\| -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right\|^2 = \frac{1}{r^4}$ .

Din condiția  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 1$  rezultă  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , ceea ce înseamnă că punctele  $M(x, y, z)$  se află pe sfera de rază 1 cu centrul în origine. ■

## 13.2 Exerciții propuse cu indicații și răspunsuri

**Exercițiul 13.2.1.** Se dau câmpurile vectoriale:

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (r + \varphi(r))\mathbf{r}; \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \frac{\varphi^2(r)}{r^2}(\mathbf{r} + \mathbf{a} \times \mathbf{r}); \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \varphi(r)\mathbf{r} + (r + \varphi(r))(\mathbf{a} \times \mathbf{r}).$$

unde:  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  este vectorul de poziție al punctului  $M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  este norma vectorului  $\mathbf{r}$ ;  $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$  este un vector constant; iar  $\varphi(r)$  este o funcție diferențiabilă.

Pentru fiecare dintre aceste câmpuri vectoriale să se determine funcția  $\varphi$  astfel încât  $\mathbf{v}$  să fie câmp vectorial solenoidal.

**Indicație.** În toate cazurile se impune condiția  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . În fiecare caz această condiție conduce la câte o **ecuație diferențială**. De exemplu, prima ecuație diferențială este  $\varphi' + \frac{3}{r}\varphi = -4$ , iar a treia are forma  $3\varphi + r\varphi' = 0$  care este o **ecuație diferențială cu variabile separabile**. ■

**Răspuns.** Pentru fiecare din cele trei câmpuri vectoriale funcția  $\varphi$  este:

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^3} - r; \quad \varphi(r) = \frac{C}{\sqrt{r}}; \quad \varphi(r) = \frac{C}{r^3}.$$

În toate cazurile  $C$  este o **constantă reală de integrare**, arbitrară. ■

**Exercițiul 13.2.2.** Se dă câmpul vectorial  $\mathbf{v}(x, y, z) = \varphi(r)\mathbf{r}$ , unde  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  este vectorul de poziție al punctului  $M(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ , iar  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  este norma sa.

- Să se arate că  $\mathbf{v}$  este câmp vectorial irotațional, sau **lamelar**;
- Să se găsească funcția  $\varphi$  astfel încât  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 3r^2 + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi(r)$ ;
- În ipoteza că  $\varphi(r) = \frac{1}{r}$ , să se determine funcția  $f(M)$  astfel încât  $\mathbf{v}(M) = \operatorname{grad} f(M)$ .

**Indicație.** Se arată că  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . ■

**Răspuns.**  $\varphi(r) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $f(M) = f(x, y, z) = r + C$ , unde  $C$  este constantă arbitrară. ■

**Exercițiul 13.2.3.** Se dau: câmpul scalar  $\varphi(x, y, z) = xy + yz + zx$ ; punctul  $A(1, -1, 2) \in \mathbb{E}^3$ ; punctul  $B(3, 1, 1) \in \mathbb{E}^3$ . Se cere:

- ecuația **suprafeței de nivel** care trece prin punctul  $A$ ;
- derivata câmpului scalar  $\varphi$ , în punctul  $A$ , după direcția  $\overrightarrow{AB}$ ;
- derivatele câmpului scalar  $\varphi$  după direcțiile axelor de coordonate  $Ox, Oy, Oz$ ;
- să se găsească direcția după care derivata câmpului scalar  $\varphi$  în punctul  $A$  este maximă și să se calculeze valoarea acestei derivate;
- să se calculeze produsul vectorial al vectorilor  $(\text{grad } \varphi)(A)$  și  $(\text{grad } \varphi)(B)$ .

**Răspuns.**

- Suprafața de nivel, de ecuație  $xy + yz + zx + 1 = 0$ , este o **cuadrică** adică o **suprafață algebrică de ordinul doi**;

$$b) \quad \overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{s} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}, \quad \frac{d\varphi}{ds}(A) = \frac{8}{3};$$

$$c) \quad \frac{d\varphi}{di}(A) = 1; \quad \frac{d\varphi}{dj}(A) = 3; \quad \frac{d\varphi}{dk}(A) = 0;$$

- derivata este maximă după direcția normalei  $\mathbf{n}$  în punctul  $A$  la suprafața de nivel. Avem

$$\mathbf{N} = (\text{grad } \varphi)(A) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} \implies \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j} \implies \frac{d\varphi}{dn}(A) = \sqrt{10};$$

$$c) \quad (\text{grad } \varphi)(A) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad (\text{grad } \varphi)(B) = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \implies (\text{grad } \varphi)(A) \times (\text{grad } \varphi)(B) = 12\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

■

**Exercițiul 13.2.4.** Se cer liniile de câmp ale câmpului vectorial

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - zx)\mathbf{j} + (z^2 - xy)\mathbf{k}.$$

**Indicație.** Se scrie **sistemul simetric al liniilor de câmp**

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy}$$

și se determină două **integrale prime independente funcțional**. Acestea pot fi:

$$\frac{x - y}{y - z} = C_1; \quad \frac{y - z}{z - x} = C_2$$

■

**Răspuns.** Liniile de câmp sunt drepte în spațiu

$$\begin{cases} x - (1 + C_1)y + C_1z = 0 \\ C_2x + y - (1 + C_2)z = 0. \end{cases}$$

■

**Exercițiul 13.2.5.** Să se determine funcția  $\varphi(x)$  astfel încât câmpul vectorial

$$\mathbf{v}(M) = 2x\varphi(x)\mathbf{i} - y\varphi(x)\mathbf{j} + 6x^2z\mathbf{k}$$

să fie solenoidal.

**Indicație.** Din condiția ca  $(\operatorname{div} \mathbf{v})(M) = 0$  rezultă ecuația diferențială liniară neomogenă

$$\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = -3x.$$

Se află întâi soluția ecuației omogene  $\varphi'(x) + \frac{1}{2x}\varphi(x) = 0$ , care dacă se scrie în forma  $\frac{d\varphi}{\varphi} + \frac{1}{2} \frac{dx}{x} = 0$ . Se determină  $\varphi_o = \frac{C}{\sqrt{x}}$ , unde  $C$  este o constantă arbitrară. Se caută apoi soluția ecuației neomogene în forma  $\varphi(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ . Se găsește  $u(x) = C - \frac{6}{5}x^2\sqrt{x}$  și apoi funcția  $\varphi(x)$ . ■

**Răspuns.**  $\varphi(x) = \frac{C}{\sqrt{x}} - \frac{6}{5}x^2$ . ■

### 13.3 Întrebări de autoevaluare

**1°.** Definiți noțiunile: **câmp vectorial potențial**; **potențialul scalar al unui câmp vectorial**; **câmp conservativ de forțe**; **funcție de forță**; **câmp gravitațional** și demonstrați că *un câmp gravitațional este un câmp conservativ de forțe*. Determinați funcția de forță a câmpului gravitațional.

**Indicație.** Forța  $\mathbf{F}$  cu care este atras de către Pământ un punct material  $M$  de vector de poziție  $\mathbf{r}$  este

$$\mathbf{F}(M) = -\frac{C}{r^3}\mathbf{r},$$

unde  $C$  este o constantă pozitivă, iar  $r$  este norma vectorului  $\mathbf{r}$ . Funcția de forță  $U$  se determină din definiția acesteia, adică din  $\mathbf{F}(M) = (\operatorname{grad} U)(M)$ . ■

**Răspuns.** Se găsește  $U(M) = \frac{C}{r}$ . ■

**2°.** Presupunem că  $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  este un câmp vectorial continuu diferențiabil pe domeniul  $D \subset \mathbb{R}^3$  care are coordonatele  $v_1(x, y, z)$ ,  $v_2(x, y, z)$  și  $v_3(x, y, z)$ .

Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- $\mathbf{v}$  este câmp vectorial potențial;
- integrala curbilinie  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C v_1(x, y, z)dx + v_2(x, y, z)dy + v_3(x, y, z)dz$  este independentă de drum pe  $D$ ;
- expresia diferențială

$$\omega = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = v_1(x, y, z)dx + v_2(x, y, z)dy + v_3(x, y, z)dz$$

este diferențială totală pe  $D$ . ■

**3°.** Demonstrați că un câmp vectorial potențial  $\mathbf{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  al cărui potențial  $\varphi \in C^2(D)$  este câmp

vectorial lamelar. ■

4°. Scrieți sub diverse forme **formula integrală Gauss–Ostrogradski** și demonstrați că

$$\iint_S n_i x_j d\sigma = \delta_{ij} \text{vol } V,$$

unde  $V$  este un **domeniu cubabil**,  $\text{vol } V$  este **volumul domeniului**  $V$ ,  $S$  este **frontiera** lui  $V$  care este o **suprafața închisă netedă pe porțiuni**,  $n_1, n_2, n_3$  sunt **cosinușii directori ai normalei exterioare**  $\mathbf{n}$  într-un punct regulat de coordonate  $x_1, x_2, x_3$  al frontierei  $S$ . ■

5°. Scrieți:

- **formula integrală a gradientului;**
- **formula integrală a rotorului;**
- **prima identitate a lui Green;**
- **a doua identitate a lui Green.**

■

## Index de noțiuni

- șir de funcții reale de o variabilă reală uniform convergent, 21
- șir de puncte
  - convergent, 24
  - dintr-un spațiu metric, 24
  - fundamental, 24
- șir numeric fundamental, 16, 24
- mulțime mărginită în  $\mathbb{R}$ , 9
  
- a doua identitate a lui Green, 118
  
- bilă deschisă într-un spațiu metric, 19
  
- câmp
  - conservativ de forțe, 117
  - gravitațional, 117
- câmp vectorial
  - irotational, 114
  - lamelar, 115
  - potențial, 117
  - solenoidal, 112
- cazuri de nedeterminare, 9
- cilindru
  - hiperbolic, 113
- clase de echivalență pe o mulțime, 9
- condiție de compatibilitate, 114
- condiție necesară de extrem, 66
- conjugatul unui număr complex, 24
- constantă reală de integrare, 115
- constanta lui Euler, 12
- continuitate, 36
- contractie pe un spațiu metric, 20
- convergența unei serii numerice, 16
- coordonatele unui câmp vectorial, 117
- cosinusi directori, 118
- criteriul
  - în  $\alpha$  pentru studiul naturii unei integrale improprii, 72
  - lui Abel, 74
  - lui Cauchy de convergență a unei integralei improprii, 74
  - lui Dirichlet, 74
- criteriul general de convergență (Cauchy) al unui șir numeric, 16
- criteriul lui D'Alembert, 14
- criteriul raportului, 14
- cuadrică, 116
  
- definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct, 21
- derivate parțiale de ordinul întâi, 66
- diferențială totală, 117
- diferențiala de ordinul întâi a unei funcții, 66
- discriminantul unui trinom de gradul doi, 23
- distanța Euclidiană, 21
- divergența unei serii numerice, 16
- domeniu, 66
- domeniu cubabil, 118
  
- ecuația carteziană implicită a unei suprefete, 114
- ecuația diferențială Bessel de ordin întreg, 80
- ecuație cu derivate parțiale, 58, 64
- ecuație diferențială, 115
  - cu variabile separabile, 115
  - liniară neomogenă, 117
- elicea cilindrică de pas constant, 42, 99
- expresie diferențială, 117
- extreme locale, 66
  
- formula integrală
  - a gradientului, 118
  - a rotorului, 118
- formula integrală Gauss-Ostrogradski, 108
- frecvență, 40
- frontiera unui domeniu, 118
- funcția
  - Bessel de indice întreg, 80
  - identitate, 8
- funcție
  - armonică, 44
  - continuă pe o mulțime conexă, 36
  - de forță, 117
  - diferențiabilă, 66
  - diferențiabilă de două ori, 66
  - Hölder, 36
  - hölderiană, 36
  - injectivă, 6
  - integrabilă în sens generalizat, 67
  - Lipschitz, 36
  - reală de  $n$  variabile reale definită implicit, 66
  - reală de mai multe variabile reale, 66
  - scop, 66
  - surjectivă, 6
- funcțiile lui Euler, 79
  
- generatoare, 113

- independența de drum a unei integrale curbilinii, 117
- inegalitatea
  - Cauchy – Buniakowski – Schwarz, 9
  - lui Bernoulli, 8, 11
- integrală Euler, 78
- integrală improprie
  - cu limita superioară de integrare punct singular, 67
  - convergentă, 68
  - divergentă, 68
- integrală improprie de tipul al doilea, 74
- integrala lui Poisson, 75
- integrale prime independente funcțional, 116
- integralele lui Fresnel, 76
- legături, 66
- limită fundamentală, 21
- limita punctuală a unui șir de funcții, 22
- lungimea, 111
- lungimea unui vector, 112
- marginea
  - inferioară a unei mulțimi de numere reale, 9
  - superioară a unei mulțimi de numere reale, 9
- marginea superioară a unei funcții, 22
- metoda schimbării de variabilă pentru calculul unei integrale improprie, 70
- metrica
  - Euclidiană, 19, 21, 25, 33
  - lui Cebășev, 22
- metrice echivalente, 19
- metrice echivalente pe o aceeași mulțime nevidă, 19
- modulul unui număr complex, 24
- mulțime mărginită și închisă, 36
- mulțime total ordonată, 9
- natura unei integrale improprie, 68
- normă pe un spațiu vectorial real, 22
- norma, 111
- norma Euclidiană, 20
- norma unui vector, 112
- normala exterioară într-un punct regulat al unei suprafețe, 118
- operatorul lui
  - Hamilton, 111
  - Laplace, 114
- partiție, 6
- potențialul scalar al unui câmp vectorial, 117
- prima identitate a lui Green, 118
- primul criteriu de comparație, 70
- principiul contractiei, 20
- produs scalar pe un spațiu vectorial real, 25
- punct sa, 66
- punct de maxim, 66
- punct de minim, 66
- punct fix, 24
- punct fix al unei aplicații, 20
- punct staționar, 66
- puncte critice ale unei funcții diferențiabile, 66
- relație
  - de condiție, 114
- relație de ordine pe o mulțime, 9
- relație de recurență, 20
- relpe ație de echivalență într-o mulțime, 9
- semifactorial, 69
- seria
  - geometrică, 16
  - lui Riemann, 16
- seria lui Riemann, 14
- serie alternantă, 17
- serie numerică alternantă, 17
- serii numerice absolut convergente, 17
- sistemul simetric al liniilor de câmp, 116
- soluția generală a unei ecuații diferențiale, 113
- soluție a ecuației diferențiale, 80
- spațiu Euclidian real, 25
- spațiu
  - afin Euclidian tridimensional, 111
  - Banach, 20
- spațiu metric
  - complet, 24
  - conex, 36
  - conex prin arce, 36
- spațiul metric Euclidian al numerelor reale, 20
- suprafață
  - închisă netedă pe porțiuni, 118
  - de nivel, 116
- suprafață algebrică
  - de ordinul doi, 116
  - de ordinul patru, 114
- tensor metric pe un spațiu vectorial real, 25
- teorema
  - de punct fix a lui Banach, 20
  - funcțiilor implicite, 66
- traiectoria unui drum parametrizat, 42
- unghiul dintre doi vectori, 112
- uniform convergent, 21
- uniformă continuitate, 36
- variabile intermediare, 59, 65
- vectori
  - coliniari, 26
  - liniar dependenți, 26
- vectori ortogonali, 112
- vectorul de poziție al unui punct, 111, 112
- volumul unui domeniu cubabil, 118

# Bibliografie

- [1] Adams, Robert, A. – *Calculus. A complete Course*, Fourth ed., Addison–Wesley, 1999
- [2] Baranenkova, G., Chostak, R., Démidovitch, B., Efimenko, V., Frolov, S., Kogan, S., Lountz, G., Porchnéva, E., Sytchéva, E., Yanpolski, A. – *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*, sous la direction de Démidovitch, B., cinquième édition revue, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [3] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. – *Mathematical Analysis. A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow, 1986.
- [4] Calistru, N., Ciobanu, Gh. – *Curs de analiză matematică, Vol. I*, Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, 1988.
- [5] Chiriță, Stan – *Probleme de matematici superioare*, Editura Academiei Române, București, 1989.
- [6] Colojoară, Ion – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [7] Corduneanu, Silvia – Otilia – *Capitole de analiză matematică*, Editura MATRIX ROM, București, 2011.
- [8] Craiu, M., Tănase, V. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [9] Crăciun, A., Crăciun, I., Ispas, M. – *Analiză matematică. Partea I. Culegere de probleme de calcul diferențial*, Editura POLITEHNIUM, Iași, 2004.
- [10] Crăciun, I., Procopiuc, Gh., Neagu, A., Fetecău, C. – *Algebră liniară, geometrie analitică și diferențială și programare liniară*, Institutul Politehnic Iași, Rotaprint, 1984.
- [11] Crăciunaș, Petru Teodor – *Mathematical Analysis*, Polytechnic Institute of Iassy, Faculty of civil engineering, Iassy 1992.
- [12] Cruceanu, Vasile – *Algebră liniară și geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
- [13] Dieudonné, J. – *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier–Villars, Paris 1963.
- [14] Dixon, C. – *Advanced Calculus*, John Wiley & Sons, Chichester·New York·Brisbane·Toronto 1981.
- [15] Drăgușin, L., Drăgușin, C., Cășlan, C. – *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura TEORA, București, 1993.
- [16] Flondor, P., Stănășilă, O. – *Lecții de analiză matematică și exerciții rezolvate*, Ediția a II-a, Editura ALL, București, 1996.
- [17] Fulks, Watson – *Advanced calculus: an introduction to analysis*, Third Edition, John Wiley & Sons, New York 1978.
- [18] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh. – *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral Vol. II*, Editura Tehnică, București, 1966.
- [19] Gheorghiu, N., Precupanu, T. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
- [20] Hewitt, E., Stromberg, K. – *Real and Abstract Analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*, Springer–Verlag Berlin Heidelberg New York, 1965.



- [21] Marinescu, Gheorghe – *Analiză matematică, vol. I, Ediția a V-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
- [22] Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. – *Analiză matematică, vol. I, ediția a patra*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- [23] Olariu, Valter – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [24] Olariu, V., Halanay, A., Turbatu, S. – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [25] Precupanu, Anca – *Bazele analizei matematice*, Editura Universității Al. I. Cuza, Iași, 1993.
- [26] Roșculeț, Marcel – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
- [27] Sburlan, Silviu – *Principiile fundamentale ale analizei matematice*, Editura Academiei Române, București, 1991.
- [28] Sirețchi, Gheorghe – *Calcul diferențial și integral, Vol. I, II*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
- [29] Smirnov, Vladimir – *Cours de mathématiques supérieures, tome I, Deuxième Éditions*, Mir, Moscou 1972.
- [30] Stănășilă, Octavian – *Analiză matematică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [31] Sykorski, Roman – *Advanced Calculus. Functions of several variables*, PWN–Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1969.
- [32] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L. – *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company, 1988.

Ion CRĂCIUN

Departamentul de Matematică și Informatică  
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași

**MATEMATICI SPECIALE**  
LUCRĂRI DE VERIFICARE A CUNOȘTINȚELOR

IAȘI – 2013



# Cuprins

<b>1</b>	<b>Lucrări de verificare a cunoștințelor</b>	<b>5</b>
1.1	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 1	6
1.2	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 2	7
1.3	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 3	8
1.4	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 4	9
1.5	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 5	10
1.6	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 6	11
1.7	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 7	12
1.8	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 8	13
1.9	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 9	14
1.10	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 10	15
1.11	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 11	16
1.12	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 12	17
1.13	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 13	18
1.14	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 14	19
1.15	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 15	20
1.16	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 16	21
1.17	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 17	22
1.18	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 18	23
1.19	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 19	24
1.20	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 20	25
1.21	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 21	26
1.22	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 22	27
1.23	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 23	28
1.24	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 24	29
1.25	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 25	30
1.26	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 26	31
1.27	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 27	32
1.28	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 28	33
1.29	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 29	34
1.30	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 30	35
1.31	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 31	36
1.32	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 32	37
1.33	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 33	38
1.34	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 34	39
1.35	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 35	40
1.36	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 36	41
1.37	Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 37	42



**1**

## **Lucrări de verificare a cunoștințelor**

# Matematici speciale

## 1.1 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 1

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția sistemului

$$\begin{cases} x' - x + 2y &= 0, \\ x'' + 2y' &= 2t - \cos 2t \end{cases}$$

care satisface condițiile inițiale  $x(0+) = 0$ ,  $x'(0+) = -1$ ,  $y(0+) = \frac{1}{2}$ .

*Răspuns.*

$$x(t) = t^2 - \frac{1}{2} \sin 2t; y(t) = -t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \cos 2t - \frac{1}{4} \sin 2t.$$

2. Să se cerceteze dacă funcția

$$w = \frac{x^2 + y^2 - 3x + 2 - iy}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

este olomorfă și să se aducă la forma  $w = f(z)$ ,  $z \neq 2$ ,  $z = x + iy$ .

*Răspuns.*

$$w = \frac{z-1}{z-2}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2 - 2x + 10} dx$ .

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{3e^6} (\sin 2 + 3 \cos 2).$$

4. Să se afle transformata Fourier prin cosinus  $F_c$  a funcției  $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$  și din rezultatul obținut să se deducă relația

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ux}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi u e^{-u}}{4}.$$

*Răspuns.*

$$F_c(u) = \sqrt{2\pi} \frac{1+u}{4} e^{-u}. \text{ Egalitatea se obține derivând sub semnul integrală.}$$

5. Se consideră funcțiile original  $f(t) = e^t$  și  $g(t) = e^{-2t}$ . Să se determine convoluția  $f * g$  în două moduri:
- calculând direct integrala care definește convoluția;
  - aplicând transformarea Laplace convoluției.

*Răspuns.*

$$(f * g)(t) = \frac{e^t - e^{-2t}}{3}, t \geq 0.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.2 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 2

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x, \quad f(0) = i.$$

*Răspuns.*  $v(x, y) = 3x^2y - x^2 - y^3 + y^2 - y + 1 \implies f(z) = z^3 - iz^2 - z + i.$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} (z - 2i)^n.$$

*Răspuns.* Convergentă pe discul închis  $|z - 2i| \leq 3$  și divergentă în exterior.

3. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția periodică de perioadă  $T = \pi$

$$f(t) = |\sin t|.$$

*Răspuns.*

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția ecuației integrale

$$\int_0^t \sin(t - \tau)x(\tau)d\tau = t^2.$$

**Indicație.** Primul membru al ecuației integrale este convoluția a două funcții.

*Răspuns.*

$$x(t) = 2 + t^2.$$

5. Să se găsească punctele singulare de la distanță finită și comportarea în punctul de la infinit pentru funcția

$$f(z) = \frac{z^7 - 3z^2}{z^2 - 6z + 9} \text{ și apoi să se calculeze integrala } I = \int_{|z|=R} f(z)dz, \text{ unde } R \neq 3.$$

*Răspuns.* Punctul  $z = 3$  este pol de ordin doi, iar  $z = \infty$  pol de ordin cinci. Pentru  $R < 3$  rezultă  $I = 0$ , iar pentru  $R > 3$  găsim  $I = 10170\pi i$ .



# Matematici speciale

## 1.3 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 3

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$\operatorname{Im} f = v(x, y) = e^x \sin y + \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad f(z_0) = 1, \quad \text{unde } z_0 = 1.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = e^z - \frac{1}{z} + 2 - e.$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(x) = \frac{1}{5 + 3 \sin x}$ .

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}} \left( \cos \frac{n\pi}{2} \cos nt + \sin \frac{n\pi}{2} \sin nt \right).$$

3. Să se găsească punctele singulare de la distanță finită și comportarea în punctul de la infinit pentru  $f(z) = \frac{2}{\sin^2 z}$ .

*Răspuns.*  $z = k\pi$ , unde  $k$  este număr întreg, poli de ordin doi;  $z = \infty$  punct singular esențial neizolat (limită de poli).

4. Să se găsească dezvoltarea în serie Laurent în jurul punctului  $z = \infty$  pentru

$$f(z) = \frac{z^{13}}{(z-2)^4(z^5+3)^2},$$

din rezultatul găsit să se precizeze  $\operatorname{Rez}[f, \infty]$  și apoi să se calculeze integrala

$$\int_C f(z) dz, \quad \text{unde } z = x + iy \quad \text{și} \quad C : 4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$$

*Răspuns.*

$$\operatorname{rez}[f, \infty] = -1, \quad \int_C f(z) dz = 2\pi i.$$

5. Să se calculeze cu teorema reziduurilor integrala reală  $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{(5 + 4 \sin \theta)^2} d\theta$ .

*Răspuns.*

$$I = \pi/6.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.4 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 4

1. Folosind teorema reziduurilor calculați  $I = \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(i-z)^3} dz$ , unde  $\Gamma$  este cercul de rază  $a \neq 1$  cu centrul în origine. Discuție după  $a > 0$ .

*Răspuns.* Pentru  $a < 1 \Rightarrow I = 2\pi i \operatorname{Rez}[f; z_0 = 0] = -2\pi$ . Pentru  $a > 1 \Rightarrow$

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{Rez}[f; z_0 = 0] + \operatorname{Rez}[f; z_1 = i] \right) = 2\pi[-1 + 2\sin 1 + \cos 1 + 2i(\sin 1 - \cos 1)].$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f: [-\ell, \ell] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \in [-\ell, 0] \\ x, & \text{pentru } x \in [0, \ell]. \end{cases}$$

$$\text{Răspuns. } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\ell}; a_0 = \frac{1}{8}; a_k = \frac{\ell((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2}; b_k = \frac{\ell}{\pi k}(-1)^k \Rightarrow$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Să se afle raza de convergență  $R$  a seriei de puteri în complex  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$ .

*Răspuns.*

$$R = 27.$$

4. Să se determine soluția problemei

$$\begin{cases} x' = x + y - 3e^t \\ y' = 3x - y + 5e^{3t} \end{cases} \quad x(0+) = 5, \quad y(0+) = 3.$$

**Indicație.** Eliminând  $y$  se ajunge la problema

$$x'' - 4x = -6e^t + 5e^{3t}; \quad x(0+) = 5, \quad x'(0+) = 5,$$

a cărei soluție se determină utilizând transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} + e^{-2t} + 2e^t + e^{3t}, \\ y(t) = e^{2t} - 3e^{-2t} + 3e^t + 2e^{3t} \end{cases}$$

5. Să se scrie sub forma  $a + ib$  numărul complex  $i^{\sqrt{2}}$ .

**Indicație.** Se scrie numărul dat ca  $i^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln i}$ .

*Răspuns.*

$$i^{\sqrt{2}} = \cos \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) + i \sin \sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right).$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.5 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 5

1. Folosind teorema reziduurilor calculați integrala  $I = \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z^2 + 9)^2}$ , unde curba  $\Gamma$  este, pe rând, unul din cercurile:

$$\Gamma_1 : |z - 2i| = 2; \quad \Gamma_2 : |z + 2i| = 2; \quad \Gamma_3 : |z| = 4.$$

*Răspuns.*  $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z^2 + 9)^2} = \frac{\pi}{54}, \quad \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z^2 + 9)^2} = -\frac{\pi}{54}, \quad \int_{\Gamma_3} \frac{dz}{(z^2 + 9)^2} = 0.$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1 - \alpha \cos x}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}, \quad |\alpha| < 1, \quad \alpha \neq 0.$$

**Indicație.** Se alege ca interval  $[\alpha, \alpha + T]$ , intervalul  $[-\pi, \pi]$ .

*Răspuns.*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos nx.$$

3. Folosind transformarea Laplace determinați soluția ecuației integrale

$$x(t) - \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau = t.$$

**Indicație.** Observați întâi că ecuația are forma  $e^t * x(t) = x(t) - t$ , apoi aplicați transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$x(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t}, \quad t \geq 0.$$

4. Arătați că  $z = \infty$  este punct ordinar pentru funcția  $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}$ .

**Indicație.** Se dezvoltă în jurul punctului  $z = \infty$  funcția  $f'(z)$ , se revine la  $f(z)$  integrând seria termen cu termen în coroana infinită  $|z| > \max(|a|, |b|)$ , constanta de integrare fiind  $C = i2k\pi$ .

*Răspuns.*

$z = \infty$  este punct ordinar pentru funcția  $f(z)$ .

5. Să se calculeze suma  $S$  a seriei de numere complexe  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 i^{2n} + ni^n + 1}{n!}$ .

*Răspuns.*

$$S = e + i e^i.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.6 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 6

1. Să se dezvolte în serie de puteri funcția  $f(z) = \frac{3z+2}{z(z-1)^2}$

a) în jurul punctului  $z_0 = 1$ ;

b) în jurul punctului  $z_0 = 0$ .

Răspuns.

$$\begin{cases} a) & f(z) = \left(\frac{3}{z-1} + \frac{5}{(z-1)^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k; \\ b) & f(z) = \left(3 + \frac{2}{z}\right) \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}. \end{cases}$$

2. Utilizând teorema reziduurilor să se arate că

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2} dz = 0,$$

unde  $\Gamma$  este cercul de rază arbitrară  $R > 0$  cu centrul în origine.

**Indicație.** Se iau cazurile  $R < \pi$ ,  $R = \pi$ ,  $R > \pi$ .

3. Folosind transformarea Fourier să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^{\infty} \varphi(u) \cos xu \, du = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Răspuns.

$$\varphi(u) = e^{-u}.$$

4. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția **factorul discontinuu al lui Dirichlet**

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |t| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{pentru } t = \pm a, \\ 0, & \text{pentru } |t| > a, \end{cases} \quad a > 0.$$

Răspuns.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin au \cos ut}{u} du.$$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze  $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{13 + 12 \sin \theta}$ .

Răspuns.

$$I = \frac{2\pi}{5}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.7 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 7

1. Să se rezolve ecuația

$$\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = -1.$$

Răspuns.

$$z_k = -i \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \text{ unde } k = \overline{0, n-1}.$$

2. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$v(x, y) = e^x(x \sin y + y \cos y) + x + y; \quad f(0) = 0.$$

Răspuns.

$$f(z) = (1+i)z + ze^z.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{x^2 - 2x + 10} dx.$$

Răspuns.

$$I = \frac{\cos 2 - 3 \sin 2}{3e^6}.$$

4. Să se determine funcția  $f(t)$  care satisface ecuația integrală Fourier

$$\int_0^\infty f(t) \cos tx \, dt = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \geq 0,$$

unde  $a$  este o constantă pozitivă.

Răspuns.

$$f(t) = \frac{1}{a} e^{-at}.$$

5. Să se găsească funcția original  $f(t)$  dacă imaginea sa este

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p - 7}.$$

Răspuns.

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{-3t} \sinh 4t = \frac{1}{8} (e^t - e^{-7t}).$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.8 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 8

1. Utilizând transformarea Laplace rezolvați problema cu valoare inițială

$$x' + 2x = 26 \sin 3t, \quad x(0+) = 3.$$

Răspuns.

$$x(t) = 9e^{-2t} - 6 \cos 3t + 4 \sin 3t, \text{ unde } t \in [0, \infty).$$

2. Să se determine funcția olomorfa  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$u(x, y) = \varphi(ax + by), \quad a, b \in \mathbb{R}^*, \quad \text{și} \quad f(0) = 2i.$$

**Indicație.** Se impune condiția ca funcția  $u(x, y)$  să fie armonică și se găsește  $u(x, y) = \alpha(ax + by) + \beta$ , unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt constante reale arbitrare.

Răspuns.

$$f(z) = \alpha(a - ib)z + 2i.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Răspuns.

$$I = \pi\sqrt{2}.$$

4. Să se dezvolte în serie Taylor funcția  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$  într-o vecinătate a lui  $z_0 = 0$ . Să studieze natura punctului de la infinit și, din acest rezultat, să se deducă  $\int_{|z|=R<1} f(z)dz$  și  $\int_{|z|=R>1} f(z)dz$ .

Răspuns. Pentru  $|z| < 1$  are loc dezvoltarea

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

5. Să se găsească  $|z|$ ,  $\operatorname{Re} z$  și  $\operatorname{Im} z$  pentru numărul complex  $z = \frac{(3 + 4i)(1 - i)}{2i}$ .

Răspuns.

$$|z| = \frac{5\sqrt{2}}{2}, \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, \text{ și } \operatorname{Im} z = -\frac{7}{2}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.9 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 9

1. Să se găsească punctele din planul complex în care funcția

$$f(z) = z^2 + i\bar{z}^2 + 4z + 6\bar{z} + 8$$

este monogenă. În punctele găsite, să se calculeze derivata funcției.

*Răspuns.*

$$z_0 = -3i \text{ și } f'(z_0) = 4 - 6i.$$

2. Să se determine raza de convergență a seriei de puteri  $\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}$  și să se arate că pe discul de convergență  $|z| < 1$  are loc egalitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

*Răspuns.*

$$R = 1. \text{ Egalitatea se deduce derivând în } \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{2a^3}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-t}, \quad x(0+) = x'(0+) = 0.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = e^{-2t} + (t-1)e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

5. Să se determine imaginea  $F(p)$  prin transformarea Laplace a funcției

$$f(t) = e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi).$$

*Răspuns.*

$$F(p) = \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2} \cdot e^{\frac{\varphi(p+\lambda)}{\omega^2}}.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.10 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 10

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = t + 1, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 0.$$

**Indicație.** Se aplică transformarea Laplace. Se găsește

$$X(p) = \frac{p^3 + 3p^2 + p + 1}{p^2(p+1)(p+2)}.$$

Se descompune  $X(p)$  în fracții simple și se determină  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(p)]$ .

*Răspuns.*

$$x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + 2e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-2t}, \text{ unde } t \geq 0.$$

2. Pentru funcția  $f(z) = \frac{z-1}{z-2}$  să se scrie seriile Taylor în punctele  $z=0$  și  $z=i$ .

**Indicație.** Punem, pe rând,  $f(z)$  în formele  $f(z) = 1 + \frac{1}{z-2}$  și respectiv  $f(z) = 1 + \frac{1}{z-i+i-2}$ .

*Răspuns.*  $f(z) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ , cu  $R=2$ , și  $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(i-2)^{n+1}}$ .

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} dx, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{4b(a+b)^2}.$$

4. Să se arate că nu există funcția olomorfă  $f(z)$  a cărei parte reală  $u(x, y)$  este

$$u(x, y) = e^x(\cos y - y \sin x)$$

**Indicație.** Se arată că funcția  $u(x, y)$  nu este armonică.

5. Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuația integrală

$$x(t) + 2 \int_0^t x(\tau) d\tau = 3e^t + 2t.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = 1 + e^t + e^{-2t}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.



# Matematici speciale

## 1.11 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 11

1. Să se găsească punctele singulare de la distanță finită ale funcției de mai jos cercetând și comportarea sa în punctul de la infinit

$$f(z) = e^{2z} \ln \frac{z-i}{z+i}.$$

*Răspuns.*

$z = \pm i$  puncte critice logaritmice;  $z = \infty$  punct singular esențial izolat.

2. Fie funcția complexă

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Să se dezvolte  $f(z)$  în serie de puteri ale lui  $z$  pe domeniul  $1 < |z| < 2$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 6x + 10)^2} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{3\pi}{2}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$\begin{cases} x'' + y' + 3x &= 15e^{-t} \\ y'' - 4x' + 3y &= 15\sin 2t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0+) = 35, & y(0+) = 27, \\ x'(0+) = -48, & y'(0+) = -57. \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$\begin{cases} x = 30 \cos t - 15 \sin 3t + 3e^{-t} + 2 \cos 2t \\ y = 30 \cos 3t - 60 \sin t - 3e^{-t} + \sin 2t. \end{cases}$$

5. Folosind transformarea Fourier să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^{\infty} g(u) \cos tudu = \begin{cases} 1-t, & \text{pentru } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{pentru } t > 1. \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$g(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \cos ut dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos u}{u^2}, \quad u \in [0, \infty).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.12 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 12

1. Considerăm problema cu valori inițiale

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad x(0+) = x'(0+) = 0, \quad t > 0,$$

pentru care funcția de transfer a sistemului este  $\Phi(p) = \frac{1}{2p^2 + 5p + 2}$ .

- (a) Să se determine constantele  $a$ ,  $b$  și  $c$ .  
 (b) Dacă  $f(t) = e^{-t}$ , determinați  $x(t)$  cu ajutorul transformării Laplace.

**Indicație.** Funcția de transfer a sistemului este  $\Phi(p) = \frac{X(p)}{F(p)}$ , unde  $X(p) = \mathcal{L}[x(t)]$  și  $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ .

*Răspuns.*

$$a = c = 2, \quad b = 5, \quad x(t) = -e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-t/2} + \frac{1}{3}e^{-2t}, \quad t \geq 0.$$

2. Să se determine funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  olomorfa în întreg planul complex la distanță finită știind că:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 4xy; \quad f(0) = 0.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = (1 - 2i)z^2.$$

3. Dezvoltați în serie Laurent funcția  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  în  $|z-1| > 2$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^{n+1}} \right]$$

4. Folosind teorema reziduurilor să se determine valoarea integralei

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 16)^2} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{9\pi}{128}.$$

5. Demonstrați că funcția complexă  $f(z) = e^{1/z}$  are în  $z_0 = 0$  un punct singular esențial izolat.

**Indicație.** Se folosește dezvoltarea Laurent în jurul originii a funcției

$$f(z) = e^{1/z}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.13 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 13

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$x'' - 9x' + 20x = t^2 e^{4t}, \quad x(0+) = -1, \quad x'(0+) = -3.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = -4e^{4t} + 3e^{5t} - \frac{1}{3}(t^3 + 3t^2 + 6t)e^{4t}.$$

2. Să se afle mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} (z-2)^n.$$

*Răspuns.*

$$\text{Mulțimea de convergență este } B_2\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2 - 4x + 5)^2} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \pi.$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(x) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$ ,  $x \in (-\pi, +\pi)$ , unde  $a$  este o constantă în modul subunitară.

**Indicație.** Coeficienții se calculează cu teorema reziduurilor;  $a_n$  și  $b_n$  se găsesc simultan calculând  $a_n + ib_n$ .

*Răspuns.*

$$f(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

5. Să se calculeze toate valorile posibile pe care le poate lua integrala  $\int_C \frac{dz}{z(z^2-1)}$  pentru diferite poziții ale curbei închise  $C$ , presupunând că aceste curbe nu trec prin punctele  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,-1)$ .

**Indicație.** Se consideră curbe închise care conțin unul, două, trei sau nici unul din punctele singulare.

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.14 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 14

1. Folosind transformarea Laplace să se rezolve problema lui Cauchy pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y + \cos t, \end{cases}$$

cu datele inițiale:  $x(0+) = 0$ ;  $y(0+) = 0$ .

*Răspuns.*

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} - \sin t \\ y = e^{t/2} \left( \cos \frac{t\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{t\sqrt{3}}{2} \right) - \cos t. \end{cases}$$

2. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  pentru care se cunoaște:

$$u(x, y) = \frac{x}{2} \ln(x^2 + y^2) - y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad f(1) = 0.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = z \ln z$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

4. Să se calculeze transformata prin cosinus a funcției  $f(x) = e^{-2|x|} \cos x$ .

*Răspuns.*

$$F_c(u) = \frac{2}{4 + (1 + u)^2} + \frac{2}{4 + (1 - u)^2}.$$

5. Să se determine seria Taylor în vecinătatea punctului  $z_0 = 4$  a funcției

$$f(z) = \frac{z + 3}{z^2 - 8z + 15}.$$

**Indicație.** Se notează  $z - 4 = u$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = -(7 + u)(1 + u^2 + u^4 + \dots + u^{2n} + \dots)$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.15 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 15

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$tx''(t) + 2x'(t) = t - 1, \quad x(0+) = 0.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = \frac{t^2}{6} - \frac{t}{2}.$$

2. Să se demonstreze că dacă funcția  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este olomorfa pe un domeniu  $D$  din planul complex, atunci funcția reală de două variabile reale

$$\varphi(x, y) = \left( e^{v(x, y)} + e^{-v(x, y)} \right) \sin u(x, y)$$

este armonică pe  $D$ .

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

4. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \leq n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

$n$  fiind un număr natural,  $n \geq 1$ .

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin n\pi u \sin tu}{u^2 - 1} du.$$

5. Să se găsească domeniul de convergență pentru seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{(z-1)^n}.$$

*Răspuns.*

$$|z - 1| > e.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.16 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 16

1. Să se găsească imaginea dreptunghiului cu vârfurile în punctele  $0$ ,  $1$ ,  $1 + 2i$ , și  $2i$  prin transformarea  $w = (1 + i)z + 2 - 3i$ .

**Indicație.** Deoarece  $w$  se scrie  $w = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z + (2 - 3i) = \sqrt{2} e^{i\pi/4} z + (2 - 3i)$ , imaginea dreptunghiului se obține efectuând o rotație, urmată de o omotetie și apoi de o translație.

2. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x, \end{cases} \quad x(0+) = 1, \quad y(0+) = 3.$$

*Răspuns.*

$$\begin{cases} x(t) = 2e^t - e^{-t} \\ y(t) = 2e^t + e^{-t}. \end{cases}$$

3. Se dă funcția  $f(z) = \frac{z^3 + 1}{z^3(z - i)}$ . Să se calculeze reziduurile în punctele ei singulare, inclusiv în punctul  $z = \infty$  și să se afle valoarea integralei  $\int_{|z|=R} f(z) dz$ , unde  $R \neq 1$ .

*Răspuns.*

$$\operatorname{Rez}[f, z_1 = 0] = -i, \quad \operatorname{Rez}[f, z_2 = i] = 1 + i, \quad \operatorname{Rez}[f, z_3 = \infty] = -1.$$

4. Să se calculeze soluția ecuației integrale

$$f(t) = \sin t + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 f(\tau) d\tau$$

folosind transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{1}{6} e^t + \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) - \frac{2}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t.$$

5. Să se pună sub forma  $a + ib$  numărul complex  $z = (1 + i)^{1-i}$ .

*Răspuns.*

$$z = \sqrt{2} e^{\pi/4 + 2k\pi} \left( \cos(\pi/4 - \ln \sqrt{2}) + \sin(\pi/4 - \ln \sqrt{2}) \right).$$

# Matematici speciale

## 1.17 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 17

1. Folosiți transformarea Laplace pentru a găsi soluția ecuației integrale

$$t * x(t) = t^2(1 - e^{-t}).$$

*Răspuns.*

$$x(t) = 2 + (t^2 + 16t + 2)e^t.$$

2. Să se determine punctele  $z = x + iy$  în care funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2)$$

este monogenă și să se calculeze derivata funcției în punctele găsite.

*Răspuns.*

$$z_0 = 1 + i, \quad f'(z_0) = -2 + 3i.$$

3. Să se determine reziduurile funcției  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  și să se calculeze  $\int_{|z|=R} f(z)dz$ , unde  $R \neq 1$ .

*Răspuns.*

$$\operatorname{Rez}[f, -1] = \frac{1}{8} \text{ și } \operatorname{Rez}[f, 1] = -\frac{1}{8}.$$

4. Să se calculeze integrala improprie  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$ .

*Răspuns.*

$$I = \pi/8.$$

5. Se cere transformata Laplace  $F(p)$  a funcției original  $f(t) = te^{-3t} \sin 5t$ .

*Răspuns.*

$$F(p) = \frac{10(p+3)}{(p^2 + 6p + 34)^2}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.18 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 18

1. Să se determine regiunile planului complex unde funcția complexă de variabilă complexă

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

este olomorfă. În fiecare regiune găsită, să se determine derivata funcției  $f(z)$ .

2. Să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_C z e^z dz,$$

unde  $C$  este o curbă netedă pe porțiuni oarecare care unește originea cu  $z = \frac{\pi}{2}i$ . *Răspuns.*  $I = 1 - \frac{\pi}{2} - i$ .

3. Să se calculeze imaginea  $F(p)$  a funcției original  $f(t) = (t^3 + t^2 + t + 1)e^t$ .

*Răspuns.*

$$F(p) = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{(p-1)^3} + \frac{6}{(p-1)^4}.$$

4. Folosind transformarea Laplace să se rezolve ecuația integro-diferențială

$$x(t) + x'(t) - 2 \int_0^t x(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = \cos t + \sinh t$$

cu condiția  $x(0+) = 1$ .

*Răspuns.*

$$x(t) = \cosh t.$$

5. Să se arate că are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx = \frac{\pi(be^{-ac} - ce^{-ab})}{2bc(b^2 - c^2)}, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la acest test. Timpul de lucru este 2 ore.



# Matematici speciale

## 1.19 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 19

1. Folosind transformarea Laplace, eventual combinată cu metoda eliminării, să se determine soluția sistemului

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

care satisface condițiile inițiale  $x_1(0+) = 1$ ,  $x_2(0+) = -3$ .

*Răspuns.*

$$\begin{cases} x_1(t) &= 2e^t - e^{3t} \\ x_2(t) &= -2e^t - e^{3t}. \end{cases}$$

2. Să se rezolve problema cu valoare inițială

$$x' - x = \int_0^t (t-s)e^s ds, \quad x(0+) = -1.$$

**Indicație.** Membrul doi al ecuației diferențiale este convoluția  $t * e^t$ . Se aplică transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$x(t) = 2 + t(t-3)e^t, \quad t \geq 0.$$

3. Să se determine punctele  $z$  în care funcția complexă

$$f(z) = z^2 + 2z\bar{z} - 2\bar{z}^2 + 3z + 2\bar{z}, \quad z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

este monogenă și să se calculeze  $f'(z)$  în punctele determinate.

*Răspuns.*

$$z_0 = \frac{1}{2} - \frac{i}{6}, \quad f'(z_0) = 4 - i.$$

4. Să se calculeze integrala  $I = \int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^2} \sin \frac{\pi}{z} dz$ , unde  $\Gamma$  este o elipsă de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ , în următoarele două cazuri:  $0 < b < 1$ ;  $b > 1$ .

*Răspuns.*

$$b < 1 \implies I = 2\pi i \sinh \pi; \quad b > 1 \implies I = 0.$$

5. Să se dezvolte în serie Laurent funcția

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

în coroana circulară  $0 < |z| < 1$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.20 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 20

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$x^{(4)} + 2x'' + x = 0, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0+) = 0, \quad x'''(0+) = 0.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = \cos t + \frac{1}{2}t \sin t.$$

2. Să se calculeze integrala complexă  $I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-2i)} dz$ , unde conturul  $C$  este cercul  $|z-3i| = r$ , cu raza diferită de 1 și de 3, parcurs în sens direct trigonometric. Discuție după  $r$ .

*Răspuns.*

$$r < 1 \implies I = 0; \quad 1 < r < 3 \implies I = \pi; \quad r > 3 \implies I = 0.$$

3. Folosind formulele integrale ale lui Cauchy să se calculeze

$$\int_C \frac{z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz,$$

unde conturul  $C$  este cercul de ecuație  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ , parcurs în sens direct trigonometric.

*Răspuns.*

$$I = \frac{-4+3i}{25}\pi.$$

4. Să se găsească imaginea domeniului  $y > 1$  din planul complex prin transformarea  $w = (1-i)z$ .

**Indicație.** Se scrie  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  și se determină  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ .

*Răspuns.*

Imaginea domeniului este  $u + v > 2$ .

5. Să se dezvolte după puterile lui  $z$  funcția

$$f(z) = \frac{3z^2 - 12z + 11}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6},$$

în coroana circulară cu centrul în origine  $1 < |z| < 2$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple.

*Răspuns.*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.21 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 21

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = z(t), & x(0+) = y(0+) = z(0+) = 1. \\ z'(t) = x(t), \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$x(t) = y(t) = z(t) = e^t.$$

2. Să se arate că are loc egalitatea

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2 + b^2)(x^2 + c^2)} dx = \frac{\pi(e^{-ac} - e^{-ab})}{2(b^2 - c^2)}, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)^2} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{32}.$$

4. Se cere dezvoltarea funcției  $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}$  în serie Laurent în jurul punctului  $z_0 = 1$  și să se precizeze apoi reziduul funcției în acest punct.

*Răspuns.*

$$\text{Rez}[f, z_0 = 1] = -\frac{1}{8}.$$

5. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } |t| \geq 1 \\ -1, & \text{pentru } t \in (-a, 0) \\ 1, & \text{pentru } t \in (0, a), \end{cases}$$

care ia valorile  $f(0) = 0$ ,  $f(-a) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(a) = \frac{1}{2}$ .

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin tu}{u} \sin^2 \frac{au}{2} du.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.22 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 22

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei

$$\begin{cases} x' + y - z = 0 \\ y' - z = 0 \\ z' + x - z = \cos t, \end{cases} \quad x(0+) = y(0+) = z(0+) = 0.$$

Răspuns.

$$\begin{cases} 2x(t) = t \sin t, \\ 4y(t) = e^t - (t+1) \cos t + t \sin t, \\ 4z(t) = e^t + (t-1) \cos t + (t+2) \sin t. \end{cases}$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(x) = \frac{16 \sin^2 x}{(5 + 4 \sin x)^2}$ .

Răspuns.

$$f(x) = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} (5 - 3n) \cos nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Se cere transformarea Laplace a funcției original  $f(t) = e^{-3t} \sin 5t$ .

Răspuns.

$$F(p) = \frac{5}{(p+3)^2 + 25} = \frac{5}{p^2 + 6p + 34}.$$

4. Să se calculeze  $I = \int_{[a,b]} \bar{z} dz$ , unde  $a = 1 + i$  și  $b = 2i$ . Se păstrează valoarea integralei dacă se integrează pe o altă curbă care unește punctele  $a$  și  $b$ ?

Răspuns.

$I = 0$ . Răspunsul este **nu** și trebuie justificat.

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos x}{(17 + 8 \cos x)^2} dx.$$

Răspuns.

$$I = -\frac{32\pi}{15^3}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.23 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 23

1. Să se găsească numerele complexe  $z$  care verifică simultan egalitățile:

$$\left| \frac{z-12}{z-8i} \right| = \frac{5}{3}; \quad \left| \frac{z-4}{z-8} \right| = 1.$$

**Indicație.** Cele două ecuații sunt echivalente cu cele obținute prin ridicarea la pătrat. Se ține apoi cont de faptul că  $|f(z)|^2 = f(z) \cdot \overline{f(z)}$ .

*Răspuns.*

$$z_1 = 6 + 17i \text{ și } z_2 = 6 + 8i.$$

2. Folosind eventual metoda eliminării și aplicând transformarea Laplace să se determine soluția sistemului de ecuații diferențiale liniare

$$\begin{cases} y_1' &= -y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_3, \end{cases}$$

care satisface condițiile inițiale  $y_1(0+) = 1$ ,  $y_2(0+) = 1$ , și  $y_3(0+) = 2$ .

*Răspuns.*

$$\begin{cases} y_1(t) = \cos t + \sin t, \\ y_2(t) = e^t + \sin t, \\ y_3(t) = e^t + \cos t. \end{cases}$$

3. Să se dezvolte în serie Fourier funcția

$$f(x) = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad |a| < 1.$$

*Răspuns.*

$$f(x) = a + \sum_{n=1}^{\infty} a^{n+1} \cos nx.$$

4. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad f(1) = 0.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \text{ cunoscută sub numele de transformarea lui Jukowski.}$$

5. Să se arate că dacă  $F(u)$  și  $G(u)$  sunt transformatele Fourier ale funcțiilor  $f(t)$  și  $g(t)$ , atunci

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut} du.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.24 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 24

1. Să se determine funcția olomorfă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$v(x, y) = 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3 - y^3; \quad f(0) = 0.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = (1 - 2i)z^3.$$

2. Să se calculeze reziduurile funcției  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+1)}$  în punctele ei singulare. Să se găsească apoi toate valorile integralei  $\int_{|z|=R} f(z)dz$ , unde  $R \neq 1$ .

*Răspuns.*

$$\operatorname{Rez}[f, 1] = \frac{1}{4}, \operatorname{Rez}[f, i] = -\frac{1+i}{8}, \operatorname{Rez}[f, -i] = \frac{-1+i}{8}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z^{100} e^{i\pi z}}{z^2 + 1} dz,$$

unde conturul  $C$  are ecuația  $4x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

*Răspuns.*

$$I = -2\pi \cosh \pi.$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f(t)$  de perioadă  $\pi$  definită pe intervalul  $(0, \pi)$  prin  $f(t) = e^{-at}$ , unde  $a > 0$  este o constantă.

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{1 - e^{-a\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{a} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a \cos 2kt + 2k \sin 2kt}{a^2 + 4k^2} \right).$$

5. Să se calculeze  $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$  aplicând definiția transformatei Laplace funcției

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx^2}{x} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.25 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 25

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția ecuației integrale

$$x(t) + 2 \int_0^t x(u) du = 3e^t + 2t.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = 1 + e^t + e^{-2t}.$$

2. Să se determine rădăcinile ecuației  $z^8 + i = 0$ .

*Răspuns.*

$$z_k = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{8}, \quad k = \overline{0, 7}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_C \frac{z dz}{(z^2 - 1)^2 (z^2 + 1)},$$

unde  $C$  este curba de ecuație  $x^2 + y^2 - 2x - 2 = 0$ .

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{4}i.$$

4. Să se dezvolte funcția  $f(z) = (z^2 + z + 2) \cos(z + i)$  după puterile lui  $z - i$ .

**Indicație.** Fiecare  $z$  se scrie ca  $(z - i) + i$ .

$$\text{Răspuns. } f(z) = \left(2 + (2i + 1)(z - i) + (z - i)^2\right) \left(\cosh 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z - i)^{2n} - i \sinh 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} (z - i)^{2n+1}\right).$$

5. Aplicând definiția transformării Laplace funcției  $f(t) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin tx}{1 + x^2} dx$  să se calculeze valorile integralelor

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin tx}{1 + x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^2} dx.$$

*Răspuns.*

$$I_1 = \frac{\pi}{2e^t}, \quad I_2 = \frac{\pi}{2e}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.26 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 26

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția ecuației diferențiale

$$x'' - x' - 2x = 2(1 + t - t^2)e^t,$$

care satisface condițiile inițiale  $x(0+) = 1$  și  $x'(0+) = 2$ .

*Răspuns.*

$$x(t) = e^{2t} + t^2 e^t.$$

2. Să se determine forma complexă a seriei Fourier pentru funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, \pi), \\ -1, & \text{dacă } x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$f(x) = \frac{2}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala complexă

$$I = \int_{|z|=3/2} \frac{z^3 \cdot e^z}{(z-1)^2(z^2+iz+2)} dz.$$

*Răspuns.*

$$I = \pi \left( \frac{18e}{25} + \frac{\cos 1}{3} + i \left( \frac{49e}{25} + \frac{\sin 1}{3} \right) \right).$$

4. Să se dezvolte în serie de puteri în vecinătatea punctului  $z_0 = 3$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple.

*Răspuns.*

$$f(z) = -\frac{1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 2 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z-3)^n.$$

5. Să se găsească mulțimea de convergență a seriei Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n (z-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{5^n}.$$

*Răspuns.*

$$\frac{1}{3} < |z-2| < 5.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.



# Matematici speciale

## 1.27 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 27

1. Să se arate că ecuația

$$z \cdot \bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + B = 0,$$

unde  $B \in \mathbb{R}$  și  $B < |A|^2$ , reprezintă ecuația unui cerc și reciproc, ecuația oricărui cerc poate fi scrisă sub forma de mai sus.

**Indicație:** Pentru reciprocă se ține cont de faptul că  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  și  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ .

2. Să se rezolve ecuația integrală de tip Volterra

$$x(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau} x(\tau) d\tau.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = \frac{3}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} e^{2t}.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 0$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple.

*Răspuns.*

$$f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n.$$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{5 + 4 \cos x} dz.$$

*Răspuns.*

$$I = \pi/4.$$

5. Să se determine seria Laurent a ramurii principale a funcției complexe de variabilă complexă  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$  în coroana circulară  $1 < |z| < \infty$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.28 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 28

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția sistemului de ecuații diferențiale ordinare de ordinul întâi, liniar și omogen

$$\begin{cases} y_1' = -9y_1 - 12y_2 - 5y_3, \\ y_2' = 5y_1 + 6y_2 + 3y_3, \\ y_3' = y_1 + 4y_2 + y_3, \end{cases}$$

care satisface condițiile inițiale:  $y_1(0+) = -1$ ;  $y_2(0+) = 1$ ;  $y_3(0+) = -1$ .

**Indicație.** Utilizând metoda eliminării, se ajunge la problema

$$y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0, \quad y_1(0+) = -1, \quad y_1'(0+) = 2, \quad y_1''(0+) = -4,$$

care se rezolvă utilizând transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$y_1(t) = -e^{-2t}, \quad y_2(t) = e^{-2t}, \quad y_3(t) = -e^{-2t}.$$

2. Se consideră ecuația  $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a+ib$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Să se stabilească în ce condiții ecuația are soluții și apoi să se rezolve.

*Răspuns.*  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $z_k = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2n}\right)$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , unde  $\theta$  este argumentul numărului complex  $a+bi$ .

3. Să se arate că dacă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  este olomoră într-un domeniu  $D$ , atunci funcția  $\psi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ , unde

$$U(x, y) = e^{v(x, y)} \cos u(x, y), \quad V(x, y) = -e^{v(x, y)} \sin u(x, y),$$

este olomoră pe  $D$ .

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala reală

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{5\pi}{12}.$$

5. Dacă  $X(z) = z \sin \frac{1}{z}$  este transformata  $Z$  a șirului  $(x_n)_{n \geq 0}$ , să se afle acest șir.

*Răspuns.*

$$x_n = \frac{(-1)^n + 1}{2(n+1)!}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.29 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 29

1. Determinați soluția problemei

$$x'' - 5x' + 6x = e^{3t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = -1$$

folosind transformarea Laplace.

*Răspuns.*

$$x(t) = (t - 4)e^{3t} + 5e^{2t}.$$

2. Să se reprezinte printr-o serie Fourier funcția  $f(t)$ , periodică de perioadă  $2\pi$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ -1, & \text{pentru } t \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \left(1 - (-1)^k\right) \cos kx.$$

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 2$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple și se pune în evidență binomul  $(z - 2)$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \frac{2}{z - 2} + 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (z - 2)^{2n}.$$

4. Folosind metodele de calcul ale unor integrale reale cu ajutorul teoriei reziduurilor să se arate că

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \cdot \frac{\sin \omega x}{x} dx = \pi \left( e^{-a\omega} - \frac{1}{2} \right), \quad \omega > 0, \quad a > 0.$$

5. Să se arate că funcția complexă  $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$  are în punctul  $z_0 = 0$  un punct singular esențial neizolat.

# Matematici speciale

## 1.30 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 30

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția ecuației integrale

$$x(t) - \int_0^t \sinh 2(t - \tau)x(\tau)d\tau = e^{2t}.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = \frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{6}} \sinh(\sqrt{6}t).$$

2. Să se studieze comportarea seriei de puteri

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} z^n.$$

*Răspuns.* Convergentă în toate punctele discului  $|z| \leq 1$ , cu excepția lui  $z = -1$ .

3. Să se dezvolte în serie de puteri într-o vecinătate a punctului  $z_0 = 1$  funcția

$$f(z) = \frac{z(z^2 + 1) - 4(z^2 - 1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}$$

și să se precizeze apoi natura punctului  $z_0$  pentru funcția  $f(z)$ .

**Indicație.** Se descompune funcția  $f(z)$  în fracții simple și se pune în evidență binomul  $(z - 1)$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^{n+1}} - 2 \right) (z - 1)^n.$$

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{\pi}{2e^3} (1 + e^2).$$

5. Să se determine funcțiile olomorfe  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că

$$u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

*Răspuns.*

$$f(z) = C_1 + \ln(x^2 + y^2) + i(C_2 + 2\arctg \frac{y}{x}).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.31 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 31

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei lui Cauchy

$$x'' + 11x' + 30x = 72e^{3t}, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = -1.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = e^{3t} + 4(e^{-6t} - e^{-5t}).$$

2. Folosind teoria reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_{|z|=3} (1+z+z^2) \left( e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz.$$

**Indicație.** Se scrie  $I$  sub forma

$$I = \int_{|z|=3} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z}} dz + \int_{|z|=3} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-1}} dz + \int_{|z|=3} (1+z+z^2) e^{\frac{1}{z-2}} dz$$

și se folosesc dezvoltările în serii Laurent corespunzătoare.

*Răspuns.*

$$I = 32\pi i.$$

3. Să se reprezinte printr-o integrală Fourier funcția

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{dacă } |t| \leq n\pi, \\ 0, & \text{dacă } |t| > n\pi, \end{cases}$$

$n$  fiind un număr natural.

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(n\pi u) \sin(tu)}{u^2 - 1} du.$$

4. Folosind transformarea "z", să se determine șirul  $(x_n)_{n \geq 0}$  pentru care

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n, \quad n \geq 0 \quad \text{și} \quad x_0 = 2x_1 = 2.$$

*Răspuns.*

$$x_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}3^n.$$

5. Să se arate că  $16 \sinh^5 z = \sinh(5z) - 5 \sinh(3z) + 10 \sinh z$ .

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.32 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 32

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația diferențială

$$x'' - 2x' + 2x = e^t \cos t$$

cu datele inițiale  $x(0+) = 1, x'(0+) = 1$ .

*Răspuns.*

$$x(t) = \left( \cos t + \frac{1}{2}t \sin t \right) e^t.$$

2. Să se arate că dezvoltarea în serie Taylor în jurul originii a funcției  $\cos z$  este

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.$$

3. Să se determine mulțimea de convergență a seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(3n-2)2^n} (z-1+i)^n$$

și să se reprezinte grafic discul de convergență.

*Răspuns.*

Raza de convergență este  $R = \frac{2}{3}$ .

4. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

*Răspuns.*

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

5. Folosind dezvoltarea în jurul punctului de la infinit a funcției de integrat să se arate că

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^n - 1} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{pentru } n = 1 \\ 0, & \text{pentru } n \neq 1. \end{cases}$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.33 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 33

1. Folosind transformarea Laplace să se găsească soluția problemei lui Cauchy pentru ecuația  $x'' - 2x' + 10x = 0$  cu condițiile inițiale  $x(0+) = 1$ ,  $x'(0+) = 4$ .

*Răspuns.*

$$x = e^t(\sin 3t + \cos 3t)$$

2. Să se determine constantele reale  $a$  și  $b$  astfel încât funcția

$$f(z) = (\cosh y + a \sinh y) \cos x + i(\cosh y + b \sinh y) \sin x$$

să fie olomorfă în întreg planul complex la distanță finită și apoi să se calculeze  $f'(z)$ .

*Răspuns.*

$$a = b = -1 \text{ și } f'(z) = ie^{iz}.$$

3. Folosind transformarea Laplace să se găsească soluția sistemului

$$\begin{cases} x(t) = e^t + \int_0^t x(\tau) d\tau - \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, \\ y(t) = -t - \int_0^t (t-\tau) x(\tau) d\tau + \int_0^t y(\tau) d\tau. \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$x(t) = e^{2t}, \quad y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{2t}).$$

4. Folosind forma trigonometrică a numerelor complexe să se arate că

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3} + i)^2}{1 + i}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{12} + 2k\pi}{3} + \sin \frac{\frac{\pi}{12} + 2k\pi}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \sin \theta) e^{\cos \theta} d\theta.$$

*Răspuns.*

$$I = 2\pi e.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.34 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 34

1. Să se rezolve ecuația integrală

$$2 \int_0^{+\infty} g(u) \sin t u du = \begin{cases} \pi \sin t, & \text{pentru } t \in (0, \pi) \\ 0, & \text{pentru } t \geq \pi; \end{cases}$$

*Răspuns.*

$$g(u) = \frac{\sin \pi u}{1 - u^2}.$$

2. Studiind existența limitei raportului incrementar să se arate că funcția

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

este monogenă în orice punct  $z \in \mathbb{C}$  și  $f'(z) = 2z$ .

3. Să se determine punctele singulare la distanță finită ale funcției

$$f(z) = \frac{z^8 + 1}{(z^2 + 4)^3}$$

și să se precizeze comportarea ei în punctul de la infinit. Ținând cont de această comportare să se calculeze integrala  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , unde curba  $\Gamma$  are ecuația  $|z| = R$ , cu  $R > 2$ .

*Răspuns.*

$$I = 0.$$

4. Să se calculeze integrala curbilinie  $I = \int_{C_r} \frac{dz}{z - z_0}$ , unde curba  $C_r$  este cercul de rază  $r$  cu centrul în punctul  $z_0$  parcurs în sens trigonometric. Să se regăsească rezultatul folosind formulele integrale ale lui Cauchy și, separat, teorema reziduurilor.

*Răspuns.*

$$I = 2\pi i.$$

5. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala improprie

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + x + 3}{x^4 + 13x^2 + 36} dx.$$

*Răspuns.*

$$I = \frac{2\pi}{5}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.



# Matematici speciale

## 1.35 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 35

1. Folosind transformarea Laplace să se determine soluția problemei cu valori inițiale

$$x'' - 3x' + 2x = (3t - 2)e^t, \quad x(0+) = 1, \quad x'(0+) = 1.$$

*Răspuns.*

$$x(t) = e^{2t} - \frac{1}{2}(3t^2 + 2t)e^t.$$

2. Să se determine funcția olomorvă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2xy - x; \quad f(0) = i.$$

**Indicație:** Se folosesc condițiile Cauchy–Riemann și independența de drum a unei integrale curbilinii și se găsește. Pentru a pune în evidență variabila  $z$  se face  $y = 0$  și se trece  $x$  în  $z$ .

*Răspuns.*

$$f(z) = z^3 - iz^2 - z + i.$$

3. Să se dezvolte în serie Taylor funcția  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  în vecinătatea punctului  $z_0 = 1$ .

*Răspuns.*

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{2^{\frac{n+1}{2}}} (z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

4. Să se determine reziduurile funcției  $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n}$ , unde  $n > 1$  este un număr natural. Să se calculeze

$$I = \int_C f(z) dz, \text{ unde } C \text{ este o curbă oarecare închisă care nu trece prin punctele } i \text{ și } -i.$$

*Răspuns.*

$$\text{Rez}[f(z), z_1 = i] = -i \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2} = -\text{Rez}[f(z), z_2 = -i].$$

5. Folosind transformarea Fourier să se determine funcția  $f(t)$  care verifică ecuația

$$\int_0^{\infty} f(t) \sin tx dt = e^{-x}, \quad x > 0.$$

*Răspuns.*

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin tx dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t}{1+t^2}.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.36 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 36

1. Să se determine funcția olomorvă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  știind că:

$$v(x, y) = (x \sin y + y \cos y)e^x; \quad f(0) = 0.$$

*Răspuns.*

$$f(z) = ze^z.$$

2. Să se determine reziduurile funcției în punctele singulare de la distanță finită inclusiv în  $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}.$$

*Răspuns.*

$$\operatorname{rez}[f(z), z_1] = 1; \operatorname{rez}[f(z), z_2] = -\frac{1}{2}; \operatorname{rez}[f(z), z_3] = -\frac{1}{2}.$$

3. Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integralele

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta.$$

**Indicație.** Integralele se determină simultan considerând

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} d\theta$$

în care se efectuează schimbarea de variabilă  $z = e^{i\theta}$ .

*Răspuns.*

$$I_1 = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}, \quad I_2 = 0.$$

4. Să se găsească regiunile planului complex în care au loc, pe rând, relațiile:

$$a) \quad |z| + \operatorname{Re} z \leq 1; \quad |z| - \bar{z} = \frac{1}{2} + i.$$

5. Să se calculeze transformata Laplace  $F(p)$  a funcției original

$$f(t) = \int_0^t e^{-u} \frac{\sin u}{u} du.$$

*Răspuns.*

$$F(p) = \frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+1) \right).$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

# Matematici speciale

## 1.37 Lucrarea de verificare a cunoștințelor nr. 37

- Se consideră funcțiile originale  $f(t) = \sin t$  și  $g(t) = \cos t$ . Să se determine convoluția  $f * g$  în două moduri:
  - calculând direct integrala care definește convoluția  $(f * g)(t)$ ;
  - aplicând transformarea Laplace convoluției.

Răspuns.

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2}t \sin t, t \geq 0.$$

- Să se determine funcția complexă  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , unde  $z = x + iy$ , știind că:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1 + x)^2 + y^2}; \quad f(1) = 0.$$

Să se scrie  $f(z)$  și derivata  $f'(z)$  în funcție de variabila  $z$ .

Răspuns.

$$f(z) = \frac{1 - z}{1 + z}, \quad f'(z) = -\frac{2}{(1 + z)^2}.$$

- Să se dezvolte în serie Fourier funcția  $f$  de perioadă  $2\pi$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{pentru } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{pentru } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Răspuns.

$$a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

- Folosind teorema reziduurilor să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{|z|=3} \frac{1}{z^3(z^2 - 1)(z - 4)} dz.$$

Răspuns.

$$I = -\frac{\pi i}{480}.$$

- Să se pună în evidență partea principală a seriei Laurent pentru funcția  $f(z) = \frac{z}{(z + 3)^2}$  în vecinătatea punctului  $z_0 = -3$ . Să se deducă din această dezvoltare natura punctului singular  $z_0 = -3$  și să se stabilească  $\text{Rez } [f, -3]$ . Să se dea valoarea integralei  $I = \int_{|z+3|=R} f(z) dz$ , pentru orice  $R$ .

Răspuns.

$$\text{Rez } [f, -3] = 1 \text{ și } I = 2\pi i.$$

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se apreciază cu o notă între 1 și 10. Media aritmetică a celor cinci note este calificativul obținut la această lucrare. Timpul de lucru este 2 ore.

**Ion CRĂCIUN**

**Departamentul de Matematică și Informatică  
Universitatea Tehnică "Gheorghe Asachi" din Iași**

**ME-11. TRANSFORMAREA LAPLACE**

**ME-12. APLICAȚII ALE TRANSFORMĂRII LAPLACE**

**IAȘI – 2012**



# Cuprins

<b>11 ME–11. Transformarea Laplace</b>	<b>5</b>
11.1 Continuitate și diferențiabilitate	5
11.2 Original	7
11.3 Definiția transformării Laplace. Imagine	9
11.4 Transformarea Laplace inversă. Formula Mellin–Fourier	11
11.5 Proprietăți ale transformării Laplace	12
11.5.1 Proprietatea de liniaritate	12
11.5.2 Teorema asemănării	13
11.5.3 Teorema întârzierii	14
11.5.4 Teorema deplasării	16
11.5.5 Derivarea originalului	16
11.5.6 Derivarea imaginii	18
11.5.7 Integrarea originalului	19
11.5.8 Integrarea imaginii	20
11.5.9 Produsul a două imagini	21
11.5.10 Produsul a două originale	23
11.5.11 Teoreme de dezvoltare	25
<b>12 ME–12. Aplicații ale transformării Laplace</b>	<b>31</b>
12.1 Integrarea ecuațiilor diferențiale	31
12.2 Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare	33
12.3 Integrarea unor ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili	34
12.4 Integrarea unor ecuații cu derivate parțiale	36
12.5 Rezolvarea unor ecuații integrale	38
12.6 Calculul unor integrale improprii	40



# Capitolul 11

## ME–11. Transformarea Laplace

### 11.1 Continuitate și diferențiabilitate

Fie  $f$  o funcție reală definită pe un anumit interval deschis  $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  care conține punctul  $x = c \in \mathbb{R}$ .

**Definiția 11.1.1.** Spunem că  $f$  este **continuă** în  $x = c$  dacă și numai dacă

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

**Definiția 11.1.2.** Funcția  $f$  este **continuă** pe intervalul  $(a, b)$  dacă și numai dacă este continuă în toate punctele  $x \in (a, b)$ .

Mulțimea funcțiilor continue  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  formează un spațiu vectorial real notat prin  $C(a, b)$  sau  $C^0(a, b)$ .

**Definiția 11.1.3.** O funcție  $f$  este **continuă** pe  $[a, b]$  dacă ea este continuă pe  $(a, b)$  și

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Cu alte cuvinte, nu există *comportare singulară* în extremitățile intervalului. Vom folosi  $C[a, b]$  pentru a nota spațiul vectorial al funcțiilor continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mai jos, prezentăm o definiție alternativă a continuității, echivalentă cu Definiția 11.1.1.

**Definiția 11.1.4.** Funcția  $f$  este **continuă** în  $x = x_0$  dacă, pentru orice  $\varepsilon > 0$ , există o funcție  $\delta(x_0, \varepsilon)$  astfel încât

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{când} \quad |x - x_0| < \delta.$$

Dacă  $\delta$  depinde numai de  $\varepsilon$ , adică are aceeași valoare pentru toți  $x_0$  dintr-un anumit interval  $I$ , spunem că  $f$  este **uniform continuă** pe  $I$ . Se poate arăta că dacă  $f$  este funcție continuă pe un interval *închis*, atunci ea este uniform continuă acolo.



**Definiția 11.1.5.** *Dacă*

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x),$$

*spunem că  $f$  nu este continuă în  $x = c$ .*

Există o importantă clasă de funcții de această formă pentru care există un număr finit de *discontinuități*. O astfel de funcție *sare* de un număr finit de ori. Astfel de funcții sunt cunoscute ca *funcții continue pe porțiuni*, și, ca și funcțiile continue, formează un spațiu vectorial, pe care îl notăm prin  $PC(a, b)$ .

**Definiția 11.1.6.** *Dacă limita raportului incrementar  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  există când  $x \rightarrow c$ , spunem că  $f$  este diferențiabilă sau derivabilă în  $x = c$ , și notăm derivata sa prin*

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Mulțimea tuturor funcțiilor derivabile pe  $(a, b)$  formează un spațiu vectorial pe care îl notăm cu  $C^1(a, b)$ . Putem da definiții similare pentru spațiile vectoriale  $C^2(a, b)$ ,  $C^3(a, b)$ , ...,  $C^n(a, b)$ , ...,  $C^\infty(a, b)$ , în care derivatele de ordin superior se definesc ca limite ale rapoartelor incrementare ale derivatelor de ordin inferior cu o unitate.

Spațiile vectoriale introduse mai sus poartă denumirea de *clase*. Așadar, spațiului vectorial  $C^2(a, b)$  îi vom spune *clasa funcțiilor reale, de o variabilă reală, de două ori diferențiabile pe  $(a, b)$* .

**Exemplul 11.1.1.** *Funcția*

$$f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin x$$

*aparține clasei  $C^\infty(0, 2\pi)$ .*

Întrădevăr,  $f'(x) = \cos x$  și  $f''(x) = -\sin x = -f(x)$ . De aici rezultă că funcția  $f$  poate fi diferențiată ori de câte ori dorim și rezultatul va fi o funcție continuă. Prin urmare,  $f \in C^\infty(0, 2\pi)$ . ■

**Exemplul 11.1.2.** *Funcția  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2$  pentru  $x \geq 0$ ,  $f(x) = 0$  pentru  $x < 0$  aparține clasei  $C^2(-1, 1)$ .*

**Exemplul 11.1.3.** *Funcția  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pentru } 0 \leq x < 1 \\ \cos x & \text{pentru } 1 \leq x \leq 2 \\ e^{-x} & \text{pentru } 2 < x \leq 3, \end{cases}$  aparține clasei  $PC[0, 3]$*

*deoarece nu este continuă în  $x = 1$  și  $x = 2$ .*

**Observația 11.1.1.** *Dacă  $f$  este diferențiabilă în  $c \in (a, b)$ , ea este continuă în  $x = c$ . Afirmatia reciprocă nu este adevărată. În acest sens, se poate da ca exemplu funcția*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)^2 x}{n!}$$

*care este continuă pe  $\mathbb{R}$ , însă niciunde diferențiabilă.*

## 11.2 Original

*Calculul operațional* se bazează pe realizarea unei corespondențe între două mulțimi de funcții: mulțimea funcțiilor numite *funcții original* și mulțimea *imaginilor* lor printr-o anumită *transformare*. Interesul pe care îl prezintă această corespondență se datorește faptului că operațiilor de derivare și integrare aplicate funcțiilor original le corespund anumite operații algebrice care se aplică imaginilor lor, așa cum vom vedea în cele ce urmează.

**Definiția 11.2.1.** Se numește **original** o funcție  $f(t)$ , reală sau complexă, definită pe mulțimea numerelor reale și care satisface următoarele condiții:

1.  $f(t) = 0$  pentru  $t < 0$ ;
2.  $f(t)$  este derivabilă pe porțiuni;
3. Există două numere  $M_0 > 0$  și  $s_0$  astfel încât  $|f(t)| \leq M_0 e^{s_0 t}$ .

**Definiția 11.2.2.** Numărul  $s_0$  se numește **indice de creștere** al funcției original  $f(t)$ . În cazul în care  $s_0$  este definit ca

$$s_0 = \inf\{s : \exists M > 0 \text{ astfel încât } |f(t)| < M_0 e^{st}, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

atunci el se numește **indicele de creștere** al funcției original  $f(t)$ .

Metodele operaționale se referă la rezolvarea unor probleme în care mărimea fizică reprezentată prin  $f(t)$  are proprietatea că sau este nulă înainte de momentul inițial  $t = 0$ , sau valorile sale pentru  $t < 0$  nu prezintă interes. Cu această motivație, prima condiție din Definiția 11.2.1 nu mai pare artificială.

Cea mai simplă funcție original este *funcția unitate*

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{pentru } t = 0 \\ 1 & \text{pentru } t > 0. \end{cases} \quad (11.1)$$

Indicele de creștere este  $s_0 = 0$ . Această funcție poate fi reprezentată prin integrala

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{tz}}{z} dz, \quad (11.2)$$

unde  $a$  este un număr real pozitiv.

Funcția unitate este importantă mai ales datorită faptului că dată fiind o funcție  $\varphi(t)$  definită pe toată axa reală și îndeplinind ultimele două condiții din Definiția 11.2.1, funcția

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \frac{1}{2}\varphi(0) & \text{pentru } t = 0 \\ \varphi(t) & \text{pentru } t > 0 \end{cases}$$

este o funcție original.

În cele ce urmează vom considera toate funcțiile de o variabilă reală înmulțite în prealabil cu funcția unitate. Pentru simplitatea scrierii vom nota cu același simbol funcția și înainte și după înmulțirea cu funcția unitate. De exemplu, prin funcția  $f(t) = \sin \omega t$  înțelegem funcția

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < 0 \\ \sin \omega t & \text{pentru } t \geq 0. \end{cases}$$

**Teorema 11.2.1.** *Suma și produsul a două funcții original sunt funcții original.*

*Demonstrație.* Într-adevăr, fie  $f(t)$  și  $g(t)$  două funcții original. Suma și produsul lor

$$f(t) + g(t), \quad f(t) \cdot g(t)$$

îndeplinesc primele două condiții. Din inegalitățile

$$|f(t)| \leq M_1 e^{s_1 t}, \quad |g(t)| \leq M_2 e^{s_2 t}$$

rezultă

$$|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq 2M e^{s_0 t},$$

unde  $M$  este cel mai mare dintre numerele  $M_1$  și  $M_2$ , iar  $s_0$  este cel mai mare dintre indicii de creștere  $s_1$  și  $s_2$ . De asemenea,

$$|f(t) \cdot g(t)| = |f(t)| \cdot |g(t)| \leq M_1 \cdot M_2 e^{(s_1 + s_2)t}.$$

Teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

**Exemplul 11.2.1.** *Funcția  $e^{\lambda t}$ , unde  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ , este o funcție original care are indicii de creștere  $s_0 = \lambda_1$ .*

**Exemplul 11.2.2.** *Funcția constantă  $f(t) = c$ , pentru  $t > 0$ ,  $f(t) = 0$ , pentru  $t < 0$  și  $f(0) = \frac{1}{2}c$  este o funcție original cu indicii de creștere  $s_0 = 0$ .*

**Exemplul 11.2.3.** *Funcțiile  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ ,  $\sinh \omega t$  și  $\cosh \omega t$  sunt funcții original.*

Într-adevăr, folosind exprimările acestor funcții cu ajutorul funcției exponențiale

$$\begin{cases} \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, & \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \\ \sinh \omega t &= \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, & \cosh \omega t &= \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}, \end{cases} \quad (11.3)$$

din Exemplul 11.2.1 și Teorema 11.2.1 rezultă că aceste funcții sunt funcții original. ■

**Exemplul 11.2.4.** *Funcția  $t^n$ , cu  $n$  număr natural, este, de asemenea, o funcție original.*

Într-adevăr, verificarea se face ușor. Pentru a arăta că a treia condiție este satisfăcută, se consideră dezvoltarea în serie a funcției  $e^{\alpha t}$ , cu  $\alpha > 0$  arbitrar. Avem

$$e^{\alpha t} = 1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \dots,$$

din care deducem, pentru  $t > 0$ ,

$$\frac{\alpha^n t^n}{n!} < e^{\alpha t},$$

deci

$$t^n < \frac{n!}{\alpha^n} e^{\alpha t}.$$

Rolul lui  $M$  îl are  $\frac{n!}{\alpha^n}$ , iar indicele de creștere este  $\alpha$ . ■

#### Exemplul 11.2.5. Funcțiile

$$\begin{array}{ccc} t^n e^{\lambda t}, & t^n \sin \omega t, & t^n \cos \omega t, \\ t^n e^{\lambda t} \sin \omega t, & t^n e^{\lambda t} \cos \omega t, & e^{\lambda t} [P(t) \cos \omega t + Q(t) \sin \omega t], \end{array}$$

cu  $P(t)$  și  $Q(t)$  polinoame, sunt funcții original.

Într-adevăr, din Teorema 11.2.1 și exemplele anterioare, rezultă că aceste funcții sunt funcții original. ■

### 11.3 Definiția transformării Laplace. Imagine

Fie  $f(t)$  o funcție original având indicele de creștere  $s_0$ .

**Definiția 11.3.1.** Funcția definită prin relația

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad p = s + i\sigma, \quad (11.4)$$

se numește **imaginea după Laplace** a funcției  $f(t)$  sau **transformata Laplace** a funcției  $f(t)$ .

Domeniul în care funcția  $F(p)$  este definită este prezentat de teorema următoare.

**Teorema 11.3.1.** Imaginea  $F(p)$  a funcției  $f(t)$  este determinată în semiplanul  $s > s_0$  și este o funcție olomorvă în acest semiplan. Derivata sa  $F'(p)$  se obține derivând în raport cu  $p$  funcția de sub semnul de integrare

$$F'(p) = \int_0^\infty [-t f(t)] e^{-pt} dt. \quad (11.5)$$

*Demonstrație.* Integralele improprie (11.4) și (11.5) sunt absolut convergente în semiplanul  $s > s_0$ . Într-adevăr,

$$\int_0^l |f(t) e^{-pt}| dt = \int_0^l |f(t)| |e^{-pt}| dt \leq M \int_0^l e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0} [1 - e^{-(s-s_0)l}].$$

Trecând la limită pentru  $l \rightarrow \infty$ , în ipoteza că  $s > s_0$ , rezultă  $\int_0^\infty |f(t) e^{-pt}| dt \leq \frac{M}{s-s_0}$ . Deci, integrala (11.4) este absolut convergentă și

$$|F(p)| \leq \frac{M}{s-s_0}. \quad (11.6)$$

În mod asemănător se demonstrează că integrala improprie (11.5) este absolut convergentă în semiplanul  $s > s_0$ .

Să demonstrăm acum că  $F(p)$  este monogenă în orice punct  $p$  din semiplanul  $s > s_0$ . Pentru aceasta considerăm un cerc  $C$  cu centrul în  $p$ , conținut în semiplanul  $s > s_0$  și fie  $z$  un punct din interiorul cercului.

Urmărim să evaluăm raportul incremental al funcției  $F$ , în punctul  $p$ , corespunzător creșterii  $z - p$  a argumentului. Numărătorul acestui raport este  $F(z) - F(p) = \int_0^\infty f(t)(e^{-zt} - e^{-pt})dt$ .

Diferența de sub semnul integrală o evaluăm cu ajutorul formulei lui Taylor cu rest de ordin unu sub formă integrală  $e^{-zt} - e^{-pt} = -te^{-pt}(z - p) + (z - p)^2 R(z, p, t)$ , unde restul este dat de integrala

$$R(z, p, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-t\zeta} d\zeta}{(\zeta - p)^2 [\zeta - p - (z - p)]}.$$

Folosind această dezvoltare, putem scrie

$$\frac{F(z) - F(p)}{z - p} = \int_0^\infty [-t f(t)] e^{-pt} dt + (z - p) \int_0^\infty R(z, p, t) f(t) dt. \quad (11.7)$$

Vom arăta că ultimul termen tinde la zero când  $z$  tinde către  $p$ . Pentru aceasta pornim de la inegalitatea

$$|R(z, p, t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{|e^{-t\zeta}| |d\zeta|}{|\zeta - p|^2 |\zeta - p - (z - p)|}$$

și ținem cont că  $|e^{-\zeta t}| = |e^{-(\xi + i\eta)t}| = e^{-\xi t} \leq e^{-s_1 t}$ , unde  $s_1$  este cea mai mică abscisă a punctului arbitrar  $\zeta$  de pe cerc. Dacă notăm cu  $\rho$  raza cercului, iar  $r = |z - p|$ , atunci:

$$|\zeta - p| = \rho, \quad |\zeta - p - (z - p)| \geq |\zeta - p| - |z - p| = \rho - r;$$

$$|R(z, p, t)| \leq \frac{e^{-s_1 t}}{\rho(\rho - r)}.$$

Cu acestea,

$$\left| \int_0^\infty R(z, p, t) f(t) dt \right| \leq \frac{1}{\rho(\rho - r)} \int_0^\infty |f(t)| e^{-s_1 t} dt.$$

Datorită inegalității pe care o satisface funcția original  $f(t)$  (Definiția 11.2.1), deoarece  $s_1 > s_0$ , obținem

$$\left| \int_0^\infty R(z, p, t) f(t) dt \right| \leq \frac{M}{\rho(\rho - r)} \int_0^\infty e^{-(s_1 - s_0)t} dt = \frac{M}{\rho(\rho - r)} \frac{1}{s_1 - s_0}$$

Folosind această inegalitate, se observă că ultimul termen din (11.7) tinde către zero când  $z$  tinde către  $p$  astfel că

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{F(z) - F(p)}{z - p} = \int_0^\infty [-t f(t)] e^{-pt} dt.$$

Deci, funcția  $F(p)$  este monogenă în semiplanul  $s > s_0$  iar derivata sa are expresia (11.5).

**q.e.d.**

**Exemplul 11.3.1.** Imaginea funcției unitate  $\eta(t)$  este  $\frac{1}{p}$ .

**Soluție.** Conform formulei (11.4), trebuie calculată integrala

$$\int_0^\infty \eta(t) e^{-pt} dt = \left[ -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

deoarece

$$|e^{-pt}| = |e^{-(s+i\sigma)t}| = e^{-st}$$

și pentru  $s > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} = 0$ . ■

**Exemplul 11.3.2.** Imaginea funcției originale  $f(t) = e^{\lambda t}$  este funcția  $F(p) = \frac{1}{p - \lambda}$ , definită pentru  $\operatorname{Re} p > 0$ .

**Soluție.** Din Exemplul 11.2.1 se știe că dacă partea reală a numărului complex  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  este nenegativă, indicele de creștere al funcției originale  $f(t)$  este  $s_0 = \lambda_1$ , iar dacă  $\lambda_1 < 0$ , atunci  $s_0 = 0$ . Funcția  $F(p)$  este definită în semiplanul  $s > s_0$ . Avem

$$F(p) = \int_0^\infty e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-\lambda)t} dt = -\left[ \frac{1}{p-\lambda} e^{-(p-\lambda)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{p-\lambda}$$

deoarece

$$|e^{-(p-\lambda)t}| = |e^{-(s+i\sigma)t}| = e^{-(s-\lambda_1)t}$$

și pentru  $s > s_0 \geq \lambda_1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(p-\lambda)t} = 0$ . ■

## 11.4 Transformarea Laplace inversă. Formula Mellin–Fourier

Am văzut că, dată fiind o funcție originală  $f(t)$ , imaginea sa  $F(p)$  prin transformarea Laplace (11.4) este complet determinată.

Se pune problema inversă, să se determine originalul  $f(t)$  când se cunoaște imaginea sa  $F(p)$ . Răspunsul este dat de teorema următoare:

**Teorema 11.4.1.** Dacă  $f(t)$  este o funcție originală cu indicele de creștere  $s_0$ , iar  $F(p)$  este imaginea sa, atunci egalitatea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad a > s_0 \quad (11.8)$$

are loc în toate punctele în care funcția  $f(t)$  este continuă.

În fiecare punct  $c$  de discontinuitate, valoarea funcției din membrul drept este egală cu

$$\frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

*Demonstrație.* Considerăm funcția

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} e^{-at} [f(t-0) + f(t+0)],$$

egală cu  $e^{-at} f(t)$  pe mulțimea punctelor în care funcția este continuă. În orice interval mărginit,  $\varphi(t)$  nu poate avea decât puncte de discontinuitate de prima speță în număr finit, punctele în care  $f(t)$  este discontinuă. Valoarea funcției  $\varphi(t)$  într-un punct de discontinuitate este egală cu media limitelor sale laterale în același punct.

Observăm că funcția  $\varphi(t)$  are următoarele proprietăți:

1. este derivabilă pe porțiuni;
2. în fiecare punct  $c$  de discontinuitate,  $\varphi(c) = \frac{1}{2} [\varphi(c-0) + \varphi(c+0)]$ ;
3. este absolut integrabilă pe intervalul  $(-\infty, +\infty)$ .

Primele două proprietăți sunt evidente.

A treia proprietate se demonstrează imediat.

Deoarece  $f(t)$  este o funcție original,  $\varphi(t) = 0$  pentru  $t < 0$  și rămâne să demonstrăm că  $\varphi(t)$  este absolut integrabilă pe  $(0, \infty)$ . Pe acest interval, datorită inegalității pe care o satisface funcția  $f(t)$  ca funcție original (vezi cel de al treilea punct din Definiția 11.2.1), în toate punctele în care  $\varphi(t)$  este continuă,

$$|\varphi(t)| = e^{-at} |f(t)| \leq M e^{-(a-s_0)t},$$

și pentru  $a > s_0$  integrala funcției  $M e^{-(a-s_0)t}$  pe intervalul  $(0, \infty)$  este convergentă. De aici rezultă și  $\varphi(t)$  este absolut integrabilă pe  $(0, \infty)$ .

Comparând cele trei propoziții ale funcției  $\varphi(t)$  cu condițiile dintr-o teoremă enunțată la Capitolul Integrala Fourier, observăm că numai prima diferă. Se poate demonstra că, datorită celor trei proprietăți de mai sus,  $\varphi(t)$  poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier. Avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-a\tau} e^{i\sigma(t-\tau)} d\tau$$

deoarece  $\varphi(t) = 0$  pentru  $t < 0$ . De aici rezultă

$$e^{at} \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+i\sigma)t} d\sigma \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-(a+i\sigma)\tau} d\tau.$$

Cu schimbarea de variabilă  $p = a + i\sigma$  deducem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} dp \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{at} \varphi(t) = \frac{1}{2} [f(t-0) + f(t+0)].$$

Ținând seama de (11.4), această egalitate se reduce la (11.8) și teorema este demonstrată.

**q.e.d.**

Egalitatea (11.8) se numește *formula lui Mellin–Fourier* și reprezintă *inversa transformării* (11.4).

## 11.5 Proprietăți ale transformării Laplace

### 11.5.1 Proprietatea de liniaritate

În tot cursul expunerii vom nota funcțiile original cu litere mici ale alfabetului latin

$$f(t), \quad g(t), \quad h(t), \dots$$

și mulțimea imaginilor lor cu litera mare corespunzătoare

$$F(p), \quad G(p), \quad H(p), \dots$$

Transformările Laplace de forma (11.4) le vom nota prescurtat

$$F(p) = \mathcal{L}f(t), \quad G(p) = \mathcal{L}g(t), \quad H(p) = \mathcal{L}h(t), \dots$$

iar transformarea inversă (11.8) o vom scrie

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(p), \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(p), \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}H(p), \dots$$

**Teorema 11.5.1.** Transformarea Laplace este o transformare liniară

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t) + g(t)] &= \mathcal{L}f(t) + \mathcal{L}g(t) \\ \mathcal{L}[kf(t)] &= k \mathcal{L}f(t), \quad k = \text{constant}. \end{cases} \quad (11.9)$$

*Demonstrație.* Am arătat la începutul capitolului că dacă  $f(t)$  și  $g(t)$  sunt funcții original, atunci și funcțiile  $f(t) + g(t)$ ,  $kf(t)$  sunt funcții original. Avem

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [f(t) + g(t)]e^{-pt} dt &= \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt + \int_0^\infty g(t)e^{-pt} dt \\ \int_0^\infty k f(t)e^{-pt} dt &= k \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Aceste egalități coincid cu (11.9).

**q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.1.** Folosind Exemplul 11.3.2 să se determine transformatele Laplace ale funcțiilor original:

$$\sin \omega t; \quad \cos \omega t; \quad \sinh \omega t; \quad \cosh \omega t.$$

**Soluție.** În Exemplul 11.3.2 s-a arătat că

$$\mathcal{L}e^{\lambda t} = \frac{1}{p - \lambda}. \quad (11.10)$$

Folosind proprietatea de liniaritate (11.9) și (11.3), rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sin \omega t &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}e^{i\omega t} - \mathcal{L}e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) \\ \mathcal{L} \cos \omega t &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}e^{i\omega t} + \mathcal{L}e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right), \end{aligned}$$

deci

$$\mathcal{L} \sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L} \cos \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}. \quad (11.11)$$

În mod analog se deduc egalitățile

$$\mathcal{L} \sinh \omega t = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \quad \mathcal{L} \cosh \omega t = \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (11.12)$$

■

## 11.5.2 Teorema asemănării

Fie  $f(t)$  o funcție original și  $\alpha$  o constantă strict pozitivă. Se constată ușor că funcția  $\varphi(t) = f(\alpha t)$  este, de asemenea, o funcție original. Înlocuirea variabilei  $t$  cu  $\alpha t$  revine, evident, la o schimbare a unității pe axa variabilei.



**Teorema 11.5.2.** Dacă  $F(p)$  este imaginea funcției  $f(t)$ , oricare ar fi constanta  $\alpha > 0$ , avem

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (11.13)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr,

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt} dt$$

și făcând schimbarea de variabilă  $\alpha t = \theta$ , obținem

$$\mathcal{L}f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\theta) e^{-\frac{p}{\alpha} \theta} d\theta = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Folosind această teoremă se pot determina imaginile altor funcții.

**q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.2.** Cunoscând că imaginea funcției  $f(t) = \sin t$  este  $F(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$ , să se determine imaginea funcției  $f(\omega t) = \sin \omega t$ , unde  $\omega > 0$ .

**Soluție.** Aplicând formula (11.13), avem  $\mathcal{L} \sin \omega t = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ . Vezi și Exercițiul 11.5.1. ■

### 11.5.3 Teorema întârzierii

Dacă în funcția original  $f(t)$  înlocuim pe  $t$  cu  $t - \tau$ , unde  $\tau$  este o constantă pozitivă, obținem o nouă funcție original,  $f(t - \tau)$ , care este nulă pentru  $t - \tau < 0$  și ia aceleași valori ca și  $f(t)$ , însă cu întârzierea  $\tau$ .

**Teorema 11.5.3.** Întârzierea  $\tau$  se traduce prin înmulțirea imaginii cu  $e^{-p\tau}$ ,

$$\mathcal{L}f(t - \tau) = e^{-p\tau} \cdot \mathcal{L}f(t). \quad (11.14)$$

*Demonstrație.* Formula (11.14) rezultă imediat. Ținând seama că  $f(t - \tau) = 0$  pentru  $t < \tau$ , avem

$$\int_0^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt.$$

Cu schimbarea de variabilă  $t - \tau = \theta$ , ultima integrală devine

$$\int_\tau^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(\theta) e^{-p(\tau + \theta)} d\theta = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(\theta) e^{-p\theta} d\theta$$

și egalitatea (11.14) este demonstrată.

**q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.3. (Funcția  $\delta$  a lui Dirac)** Să se determine imaginea funcției

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{pentru } a < t < b \\ 0 & \text{pentru } t < a \quad \text{și pentru } t > b \\ \frac{k}{2} & \text{pentru } t = a \quad \text{și pentru } t = b. \end{cases}$$

**Soluție.** Această funcție se mai poate scrie în forma

$$f(t) = k[\eta(t-a) - \eta(t-b)]. \quad (11.15)$$

Reprezentarea sa grafică se compune din reuniunea următoarei succesiuni de mulțimi: semidreapta  $(-\infty, a)$ ; punctul de coordonate  $(a, \frac{k}{2})$ , segmentul de dreaptă deschis  $\{(x, k) : a < x < b\}$ , paralel cu axa  $Ox$ ; punctul  $(b, \frac{k}{2})$ ; și semidreapta  $(b, +\infty)$ .

Conform Teoremei 11.5.1 și Teoremei 11.5.3, imaginea funcției (11.15) este

$$F(p) = \frac{k}{p}(e^{-ap} - e^{-bp}). \quad (11.16)$$

În cazul particular  $a = 0, b = h, k = \frac{1}{h}$ , avem funcția original

$$\delta_h(t) = \frac{1}{h}[\eta(t) - \eta(t-h)] \quad (11.17)$$

reprezentată grafic ca succesiunea de mulțimi: semiaxa deschisă negativă a axei  $Ox$ ; punctul de coordonate  $(0, \frac{h}{2})$ ; segmentul de dreaptă deschis  $\{(x, \frac{1}{h}) : 0 < x < h\}$ , paralel cu axa  $Ox$ ; punctul  $(h, \frac{h}{2})$ ; și semidreapta deschisă  $(h, +\infty)$ .

Funcția (11.17) are proprietatea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t) dt = \int_0^h \frac{1}{h} dt = 1,$$

iar imaginea ei este

$$F_h(p) = \frac{1}{hp}(1 - e^{-hp}).$$

Se observă ușor că limita funcției (11.17), în sensul obișnuit, pentru  $h \rightarrow 0$ , nu există. Se consideră totuși funcția improprie, notată cu

$$\delta(t) = \eta'(t)$$

care ia valoarea zero pentru toate valorile reale ale lui  $t$ , cu excepția punctului  $t = 0$ , în care  $\delta(t)$  ia valoarea infinită și având proprietatea că

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Această funcție se numește *funcția delta a lui Dirac* sau *funcția impuls de ordin zero*.

Se spune că

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t)$$

și că imaginea sa este limita imaginii funcției  $\delta_h(t)$  pentru  $h \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} F_h(p) = 1,$$

ceea ce înseamnă

$$\mathcal{L}\delta(t) = 1,$$

deși funcția  $\delta(t)$  nu este o funcție original în sensul Definiției 11.2.1 și nici  $F(p) = 1$  nu este o imagine în sensul Definiției 11.3.1. ■

### 11.5.4 Teorema deplasării

Fie  $f(t)$  o funcție original având indicele de creștere  $s_0$  și  $F(p)$  imaginea sa. Trecerea lui  $p$  în  $p - q$ , unde  $q$  este o constantă, poate fi interpretată ca o *deplasare*, adică o *translație*, care aduce originea în punctul  $q$ .

**Teorema 11.5.4.** *Deplasarea originii din planul variabilei  $p$  în  $q$  se traduce prin înmulțirea originalului cu  $e^{qt}$*

$$F(p - q) = \mathcal{L}[e^{qt} f(t)]. \quad (11.18)$$

*Demonstrație.* Într-adevăr, din (11.4) deducem

$$F(p - q) = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-q)t} dt = \int_0^\infty [e^{qt} f(t)] e^{-pt} dt.$$

În ultima integrală, rolul funcției  $f(t)$  din (11.4) îl are  $e^{qt} f(t)$  cu indicele de creștere  $s_0 + \text{Re}(q)$ . Funcția  $F(p - q)$  este olomorfa în semiplanul  $s > s_0 + \text{Re}(q)$ . **q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.4.** *Să se arate că:*

$$\mathcal{L}e^{\lambda t} \sin \omega t = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}e^{\lambda t} \cos \omega t = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}; \quad (11.19)$$

$$\mathcal{L}e^{\lambda t} \sinh \omega t = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}, \quad \mathcal{L}e^{\lambda t} \cosh \omega t = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}. \quad (11.20)$$

**Soluție.** Pornind de la egalitățile (11.11) și (11.12) și aplicând Teorema 11.5.4 se obțin (11.19) și (11.20). ■

### 11.5.5 Derivarea originalului

Presupunem că  $f(t)$  și derivatele sale sunt funcții original și fie  $F(p)$  imaginea funcției  $f(t)$ .

**Teorema 11.5.5.** *Imaginea derivatei  $f'(t)$  este*

$$\mathcal{L}f'(t) = pF(p) - f(0+). \quad (11.21)$$

În general,

$$\mathcal{L}f^{(n)}(t) = p^n F(p) - [p^{n-1} f(0+) + p^{n-2} f'(0+) + \dots + p f^{(n-2)}(0+) + f^{(n-1)}(0+)], \quad (11.22)$$

unde  $f(0+), f'(0+), \dots, f^{(n-2)}(0+), f^{(n-1)}(0+)$  sunt limitele la dreapta în origine ale respectiv funcțiilor  $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-2)}(t), f^{(n-1)}(t)$ .

*Demonstrație.* Demonstrăm întâi egalitatea (11.21).

După Definiția 11.3.1, avem  $\mathcal{L}f'(t) = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt$ . Integrând prin părți, obținem

$$\mathcal{L}f'(t) = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt. \quad (11.23)$$

Primul termen din membrul drept al egalității (11.23) se reduce la  $-f(0+)$  deoarece, conform Definiției 11.2.1, avem

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-pt} \leq Me^{-(s-s_0)t}, \quad s > s_0.$$

Deci,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{-pt}| = 0$ , ceea ce atrage  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-pt} = 0$ .

În acest fel, din (11.23) rămâne  $\mathcal{L}f'(t) = -f(0+) + p \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ , din care rezultă că egalitatea (11.21) este demonstrată.

Observăm că egalitatea (11.21) se scrie și în forma

$$\mathcal{L}f'(t) = p\mathcal{L}f(t) - f(0+). \quad (11.24)$$

Pentru a demonstra egalitatea (11.22), înlocuim  $f'(t)$  din (11.24), pe rând, cu  $f''(t)$ ,  $f'''(t)$ ,  $f^{(4)}(t)$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(t)$ . Avem

$$\begin{cases} \mathcal{L}f''(t) = p\mathcal{L}f'(t) - f'(0+) \\ \mathcal{L}f'''(t) = p\mathcal{L}f''(t) - f''(0+) \\ \mathcal{L}f^{(4)}(t) = p\mathcal{L}f'''(t) - f'''(0+) \\ \dots\dots\dots \\ \mathcal{L}f^{(n)}(t) = p\mathcal{L}f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0+). \end{cases} \quad (11.25)$$

Înmulțim întâi în (11.24) cu  $p^{n-1}$ , apoi prima egalitate din (11.25) cu  $p^{n-2}$ , a doua cu  $p^{n-3}$ , a treia cu  $p^{n-4}$  și așa mai departe, ultima rămânând neschimbată.

Adunând rezultatele, obținem egalitatea (11.22).

**q.e.d.**

**Observația 11.5.1.** Egalitatea (11.21), sau echivalența ei (11.24), nu sunt adevărate în situația în care  $f$  are puncte de discontinuitate în  $(0, \infty)$ .

Într-adevăr, să presupunem că  $f$  are un unic punct de discontinuitate în  $(0, \infty)$ , notat cu  $t_0$ . Atunci, ca mai sus

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f'(t) &= \int_0^{t_0} f'(t)e^{-pt} dt + \int_{t_0}^\infty f'(t)e^{-pt} dt \\ &= f(t)e^{-pt} \Big|_0^{t_0} + f(t)e^{-pt} \Big|_{t_0}^\infty + p \int_0^{t_0} f(t)e^{-pt} dt \\ &= e^{-pt_0}(f(t_0-) - f(t_0+)) + p\mathcal{L}f(t) - f(0+), \end{aligned}$$

o egalitate asemănătoare obținându-se pentru cazul mai multor puncte de discontinuitate. ■

**Exercițiul 11.5.5.** Cunoscând imaginea funcției  $\cos \omega t$ ,

$$\mathcal{L} \cos \omega t = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad (11.26)$$

să se deducă imaginea funcției  $\sin \omega t$  folosind teorema de derivare a originalului.

**Soluție.** Din Teorema 11.5.5 și (11.26) avem

$$\mathcal{L}(-\omega \sin \omega t) = p \frac{p}{p^2 + \omega^2} - 1 = \frac{-\omega^2}{p^2 + \omega^2}.$$

Datorită proprietății de liniaritate,  $-\omega$  poate fi scos în stânga operatorului  $\mathcal{L}$  și, simplificând cu  $-\omega$ , obținem

$$\mathcal{L} \sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

rezultat pe care l-am stabilit și în (11.11). ■

## 11.5.6 Derivarea imaginii

Egalitatea (11.5) se mai poate scrie

$$F'(p) = \mathcal{L}[-t f(t)]. \quad (11.27)$$

Funcția  $F(p)$ , fiind olomorfă în semiplanul  $s > s_0$ , admite derivate de orice ordin în acest semiplan. Funcția  $t^n f(t)$ , cu  $n$  număr natural, este o funcție original cu indicele de creștere  $s_0 + \alpha$ , unde  $\alpha$  este un număr strict pozitiv la voia noastră de mic.

Din aproape în aproape se obține

$$F^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)]. \quad (11.28)$$

Această proprietate poate fi enunțată astfel:

**Teorema 11.5.6.** *Derivarea imaginii se traduce prin înmulțirea originalului cu  $-t$ .*

**Exemplul 11.5.1.** Pornind de la egalitatea (11.10) și aplicând Teorema 11.5.6, obținem

$$\mathcal{L}(te^{\lambda t}) = \frac{1}{(p - \lambda)^2}, \quad \mathcal{L}(t^n e^{\lambda t}) = \frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}. \quad (11.29)$$

Dacă în ultima egalitate facem  $\lambda = 0$  și împărțim cu  $n!$ , obținem

$$\mathcal{L} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{p^{n+1}}. \quad (11.30)$$

**Exercițiul 11.5.6.** Să se arate că au loc egalitățile:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(t \sin \omega t) = \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, & \mathcal{L}(t \cos \omega t) = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2} \\ \mathcal{L}(t \sinh \omega t) = \frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}, & \mathcal{L}(t \cosh \omega t) = \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}; \end{cases} \quad (11.31)$$

$$\mathcal{L}(te^{\lambda t} \sin \omega t) = \frac{2\omega(p - \lambda)}{[(p - \lambda)^2 + \omega^2]^2}, \quad \mathcal{L}(te^{\lambda t} \cos \omega t) = \frac{(p - \lambda)^2 - \omega^2}{[(p - \lambda)^2 + \omega^2]^2}; \quad (11.32)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(te^{\lambda t} \sinh \omega t) = \frac{2\omega(p - \lambda)}{[(p - \lambda)^2 - \omega^2]^2} \\ \mathcal{L}(te^{\lambda t} \cosh \omega t) = \frac{(p - \lambda)^2 + \omega^2}{[(p - \lambda)^2 - \omega^2]^2}. \end{cases} \quad (11.33)$$

**Soluție.** Dacă se folosesc relațiile (11.11), (11.12) și se aplică totodată (11.27) se deduc toate egalitățile (11.31).

De asemenea, din (11.20), (11.20) și Teorema 11.5.6 rezultă (11.32) și (11.33). ■

### 11.5.7 Integrarea originalului

Prin integrarea funcției original  $f(t)$  se înțelege operația  $\int_0^t f(\tau) d\tau$ , în urma căreia se obține o nouă funcție original pe care o notăm cu  $g(t)$ . Într-adevăr, funcția

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (11.34)$$

îndeplinește cele trei condiții din Definiția 11.2.1, primele două fiind evidente. Pentru a treia, vom scrie

$$|g(t)| = \left| \int_0^t f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau$$

și ținând seama de condiția a treia din Definiția 11.2.1 a funcției  $f$ , avem

$$|g(t)| = M \int_0^t e^{s_0 \tau} d\tau = \frac{M}{s_0} (e^{s_0 t} - 1) \leq \frac{M}{s_0} e^{s_0 t}$$

ceea ce arată că funcțiile  $f$  și  $g$  au același indice de creștere.

Să notăm, ca de obicei

$$F(p) = \mathcal{L}f(t), \quad G(p) = \mathcal{L}g(t).$$

**Teorema 11.5.7.** Integrarea originalului se traduce prin împărțirea imaginii sale cu  $p$ ,

$$\mathcal{L} \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{p} F(p). \quad (11.35)$$

*Demonstrație.* Din (11.34) deducem următoarele:

$$g'(t) = f(t), \quad g(0) = 0.$$

Aplicând Teorema 11.5.5 și ținând cont că  $\mathcal{L}g'(t) = \mathcal{L}f(t)$ , obținem  $pG(p) = F(p)$  din care rezultă egalitatea (11.35). **q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.7.** Pornind de la relația evidentă

$$\sin^2 \omega t = \omega \int_0^t \sin 2\omega \tau d\tau, \quad (11.36)$$

să se determine imaginea funcției  $g(t) = \sin^2 \omega t$ .

**Soluție.** În primul rând, putem determina imaginea funcției  $\sin 2\omega t$ . Pentru aceasta considerăm (11.11) și trecem  $\omega$  în  $2\omega$ . Avem

$$\mathcal{L} \sin 2\omega t = \frac{2\omega}{p^2 + 4\omega^2}.$$

Atunci, după (11.36) și Teorema 11.5.7, deducem

$$\mathcal{L} \sin^2 \omega t = \omega \mathcal{L} \int_0^t \sin 2\omega t dt = \frac{\omega}{p} \mathcal{L} \sin 2\omega t.$$

În acest mod, deducem

$$\mathcal{L} \sin^2 \omega t = \frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)}.$$

Acest rezultat s-ar fi putut obține folosind identitatea

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t),$$

proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace și imaginea funcției  $\cos 2\omega t$ . Avem

$$\mathcal{L} \sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(\mathcal{L} 1 - \mathcal{L} \cos 2\omega t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\omega^2}\right)$$

și de aici se vede că se obține același rezultat. ■

### 11.5.8 Integrarea imaginii

Fie  $f(t)$  o funcție original și  $F(p)$  imaginea sa. Să presupunem că integrala improprie

$$\int_0^\infty f(q) dq \quad (11.37)$$

este convergentă.

funcția  $F(p)$  este olomorfă în semiplanul  $s > s_0$ , deci admite o primitivă  $\Phi(p)$  în acest semiplan și

$$\int_p^{p_1} F(q) dq = \Phi(p_1) - \Phi(p)$$

oricare ar fi cele două puncte  $p$  și  $p_1$  din semiplanul  $s > s_0$ . dacă  $\Phi(p)$  are în punctul de la infinit un punct ordinar, convergența integralei (11.37) este asigurată. În ipoteza că această proprietate are loc, obținem

$$G(p) = \int_p^\infty f(q) dq = \Phi(\infty) - \Phi(p). \quad (11.38)$$

Vom spune că funcția  $G(p)$  s-a obținut prin integrarea imaginii.

**Teorema 11.5.8.** Integrarea imaginii se traduce prin împărțirea originalului corespunzător cu  $t$

$$\int_p^\infty f(q) dq = \mathcal{L} \frac{f(t)}{t}. \quad (11.39)$$

*Demonstrație.* Prin derivare, din (11.38) rezultă

$$G'(p) = -F(p).$$

Fie  $g(t)$  originalul funcției  $G(p)$ . Conform egalității (11.5) deducem de aici

$$-t g(t) = -f(t),$$

deci

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \implies G(p) = \mathcal{L} \frac{f(t)}{t}$$

și egalitatea (11.39) este demonstrată.

q.e.d.

**Exercițiul 11.5.8.** Să se determine imaginile funcțiilor  $\frac{\sinh \omega t}{t}$  și  $\frac{\sin \omega t}{t}$ .

**Soluție.** Conform egalităților (11.11) și (11.12),

$$\mathcal{L} \sinh \omega t = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega} \right], \quad \mathcal{L} \sin \omega t = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Aplicăm Teorema 11.5.8 și avem

$$\mathcal{L} \frac{\sinh \omega t}{t} = \frac{1}{2} \ln \frac{p - \omega}{p + \omega}, \quad (11.40)$$

$$\mathcal{L} \frac{\sin \omega t}{t} = \left( \operatorname{arctg} \frac{q}{\omega} \right) \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{\omega}. \quad (11.41)$$

Se introduc tăieturile convenabile în planul variabilei  $p$  și se consideră ramurile funcțiilor  $\ln z$ ,  $\operatorname{arctg} z$  care pe axa reală iau valorile cunoscute din analiza funcțiilor reale.

Prin integrarea originalului, în cazul  $\omega = 1$ , se obține o funcție importantă în aplicații

$$\operatorname{si} t = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau, \quad t > 0, \quad (11.42)$$

care se numește *sinus integral* de  $t$ . Datorită egalităților (11.41) și (11.35) obținem

$$\mathcal{L} \operatorname{si} t = \frac{1}{p} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \right). \quad (11.43)$$

În mod analog se definește funcția *cosinus integral*,

$$\operatorname{ci} t = \int_\infty^t \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau, \quad t > 0, \quad (11.44)$$

și se demonstrează că imaginea sa este

$$\mathcal{L} \operatorname{ci} t = \frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}. \quad (11.45)$$

■

### 11.5.9 Produsul a două imagini

Fie  $f(t)$  și  $g(t)$  două funcții original și imaginile lor

$$F(p) = \mathcal{L} f(t) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad G(p) = \mathcal{L} g(t) = \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt.$$

**Definiția 11.5.1.** Se numește **produsul de convoluție** al funcțiilor  $f$  și  $g$ , sau **convoluția** funcțiilor  $f$  și  $g$ , funcția

$$\varphi(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (11.46)$$



**Teorema 11.5.9. (Borel)** Produsul  $F(p)G(p)$  este tot o imagine, și anume

$$F(p)G(p) = \mathcal{L}\varphi(t) = \mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (11.47)$$

*Demonstrație.* Să remarcăm că în locul lui (11.4), se poate scrie

$$F(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} d\tau$$

Prin înmulțirea ambilor membri cu  $G(p)$ , obținem  $F(p)G(p) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}G(p) d\tau$ .

Conform Teoremei întârzierii 11.5.3,

$$e^{-p\tau}G(p) = \mathcal{L}g(t-\tau) = \int_0^\infty g(t-\tau)e^{-pt}dt.$$

Deci,

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)e^{-pt}dt. \quad (11.48)$$

Dar,  $f(t)$  și  $g(t)$  fiind funcții original, ordinea de integrare poate fi schimbată, astfel că putem scrie

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (11.49)$$

Cum funcția  $g(t)$  este un original,  $g(t-\tau) = 0$  pentru  $t-\tau < 0$ , adică pentru  $\tau > t$ . Avem

$$\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau + \int_t^\infty f(\tau)g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

Folosind acest rezultat în (11.49), deducem egalitatea

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty \left( \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt}dt,$$

care este aceeași cu (11.47).

**q.e.d.**

**Corolarul 11.5.1.** În condițiile Teoremei 11.5.9, are loc egalitatea

$$pF(p)G(p) = \mathcal{L}\left(f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau\right) \quad (11.50)$$

cunoscută sub numele de **formula lui Duhamel**.

*Demonstrație.* Folosind regula lui Leibniz de derivare a unei integrale depinzând de un parametru, care poate să apară și în limitele de integrare, să derivăm funcția original (11.46). Avem

$$\varphi'(t) = f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau) d\tau.$$

Teorema 11.5.5, de derivare a originalului, și faptul că  $\varphi(0) = 0$  conduce la (11.50).

**q.e.d.**

**Observația 11.5.2.** Formula lui Duhamel (11.50) își găsește deseori aplicații în electrotehnică.

**Exercițiul 11.5.9.** Să se determine funcția original a cărei imagine este  $\frac{1}{p(p^2 + a^2)}$ .

**Soluție.** Vom prezenta două metode de rezolvare.

Prima din acestea pornește de la faptul că imaginea dată se poate scrie în forma

$$\frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{p^2 + a^2} = \frac{1}{a} F(p) G(p),$$

unde:

$$F(p) = \frac{1}{p} = \mathcal{L}\eta(t); \quad G(p) = \frac{a}{p^2 + a^2} = \mathcal{L}\sin at,$$

după care aplicăm (11.47). Conform acestei formule, avem

$$F(p)G(p) = \mathcal{L}\varphi(t) = \mathcal{L}(\eta(t) * \sin at) = \mathcal{L} \int_0^t \eta(\tau) \sin a(t - \tau) d\tau = \mathcal{L} \int_0^t \sin a(t - \tau) d\tau.$$

Efectuând integrarea, găsim

$$F(p)G(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(1 - \cos at) = \frac{2}{a} \mathcal{L} \sin^2 \frac{at}{2},$$

de unde deducem

$$\frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \mathcal{L}\left(\frac{2}{a^2} \sin^2 \frac{at}{2}\right),$$

care mai departe conduce la concluzia finală

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \frac{2}{a^2} \sin^2 \frac{at}{2}.$$

O a doua metodă de rezolvare a exercițiului pornește de la descompunerea imaginii în fracțiuni simple

$$\frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + a^2},$$

unde  $A, B, C$  sunt numere reale care se determină simplu. Obținem

$$\frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + a^2} \right). \quad (11.51)$$

În egalitatea (11.51) aplicăm transformarea Laplace inversă și ținem cont de Exemplul 11.3.1 și de (11.11). Obținem

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{p(p^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2} (1 - \cos at) = \frac{2}{a^2} \sin^2 \frac{at}{2}.$$

Pentru  $a = 2\omega$  se regăsește rezultatul obținut în Exercițiul 11.5.7. ■

### 11.5.10 Produsul a două originale

Fie  $f(t)$  și  $g(t)$  două funcții original având respectiv indicii de creștere  $s_1$  și  $s_2$ . Conform Teoremei 11.2.1, produsul  $f(t)g(t)$  este tot o funcție original cu indicele de creștere  $s_1 + s_2$ . Imaginea acestui produs este o funcție  $\Phi$  olomorfa în semiplanul  $s > s_1 + s_2$ . Se pune problema determinării funcției  $\Phi(p)$ .

Fie  $F(p)$  și  $G(p)$  imaginile funcțiilor  $f(t)$  și  $g(t)$ .

**Teorema 11.5.10.** *Imaginea produsului  $f(t)g(t)$  este*

$$\Phi(p) = \mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q) dq, \quad a > s_1. \quad (11.52)$$

*Demonstrație.* Din (11.8), prin înmulțire cu  $g(t)$ , obținem

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt}g(t)dq.$$

Conform teoremei deplasării, avem  $e^{qt}g(t) = \mathcal{L}^{-1}G(p-q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} G(p-q)e^{pt}dp$ ,  $b > s_2 + \operatorname{Re}(q)$ . Introducem în egalitatea precedentă

$$f(t)g(t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)dq \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} G(p-q)e^{pt}dp.$$

Se poate arăta că putem schimba ordinea de integrare și avem

$$f(t)g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq \right] e^{pt}dp.$$

Comparând cu (11.8), rezultă egalitatea (11.52).

**q.e.d.**

**Observația 11.5.3.** *Din inegalitatea  $b > s_2 + \operatorname{Re}(q)$ , ținând seama că în procesul de integrare  $\operatorname{Re}(q) = a$ , iar  $a > s_1$ , deducem*

$$b > s_1 + s_2,$$

ceea ce este în acord cu faptul că indicele de creștere al produsului  $f(t)g(t)$  este  $s_1 + s_2$ . De asemenea, imaginea funcției  $e^{qt}g(t)$ , fiind determinată în semiplanul  $\operatorname{Re}(p) > s_2 + \operatorname{Re}(q)$ , iar  $\operatorname{Re}(q) = a$  în procesul de integrare, urmează că imaginea produsului  $f(t)g(t)$  este determinată în semiplanul

$$\operatorname{Re}(p) > s_2 + a. \quad (11.53)$$

Cum  $a > s_1$  și oricât de apropiat de  $s_1$ , inegalitatea (11.53) poate fi înlocuită cu  $\operatorname{Re}(p) > s_1 + s_2$ .

**Exercițiul 11.5.10.** *Ca aplicație a Teoremei 11.5.10, să se determine imaginea produsului  $\sin \omega t \cdot \sinh \omega t$ .*

**Soluție.** Întâi de toate, avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \sin \omega t &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, & s > s_1 &= |\operatorname{Re}(i\omega)|, \\ \mathcal{L} \sinh \omega t &= \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, & s > s_2 &= |\operatorname{Re}(\omega)|. \end{aligned}$$

Introducem în (11.52)

$$\mathcal{L}(\sin \omega t \sinh \omega t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\omega}{q^2 + \omega^2} \frac{\omega}{(p-q)^2 - \omega^2} dq.$$

Aplicăm teorema reziduurilor pentru funcția

$$\varphi(q) = \frac{\omega^2}{(q^2 + \omega^2)[(p - q)^2 - \omega^2]}$$

și curba închisă formată din segmentul de dreaptă de extremități  $a - i\omega$ ,  $a + i\omega$  și semicercul  $\Gamma$  cu centrul în  $a$  și de rază  $R = l$ ,  $l > 0$ , situat în stânga segmentului de dreaptă. Conform teoremei reziduurilor

$$\int_{a-i\omega}^{a+i\omega} \varphi(q) dq + \int_{\Gamma} \varphi(q) dq = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{rez}(\varphi, q_k).$$

Pentru  $R \rightarrow \infty$ , prima integrală tinde către  $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \varphi(q) dq$ , iar integrala pe  $\Gamma$  tinde evident către zero.

funcția  $\varphi(q)$  are polii simpli  $q = \pm i\omega$  situați la stânga dreptei  $s = a$ , deoarece  $a > s_1 = |\text{Re}(i\omega)|$ . Polii  $q = p \pm \omega$  se află la dreapta acestei drepte deoarece, ținând seama de (11.53) și de faptul că  $\text{Re}(\omega) = s_2$ , avem

$$\text{Re}(p \pm \omega) = \text{Re}(p) \pm \text{Re}(\omega) > s_2 + a \pm s_2 \geq a.$$

Prin urmare, avem de calculat doar reziduurile funcției  $\varphi(q)$  în punctele  $\pm i\omega$ .

$$\begin{aligned} \text{rez}(\varphi, i\omega) &= \left\{ \frac{\omega^2}{2q[(p - q)^2 - \omega^2]} \right\}_{q=i\omega} = \frac{\omega}{2i(p^2 - 2\omega^2 - 2p i\omega)} \\ \text{rez}(\varphi, -i\omega) &= \left\{ \frac{\omega^2}{2q[(p - q)^2 - \omega^2]} \right\}_{q=-i\omega} = \frac{-\omega}{2i(p^2 - 2\omega^2 + 2p i\omega)}. \end{aligned}$$

Suma acestor reziduuri este  $\frac{2p\omega^2}{p^4 + 4\omega^4}$ , deci

$$\mathcal{L}(\sin \omega t \sinh \omega t) = \frac{2p\omega^2}{p^4 + 4\omega^4}.$$

Acest rezultat se mai poate obține scriind  $\sin \omega t \sinh \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} \sin \omega t - e^{-\omega t} \sin \omega t)$  și aplicând teorema deplasării

$$\mathcal{L}(\sin \omega t \sinh \omega t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{(p - \omega)^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{(p + \omega)^2 + \omega^2} \right] = \frac{2p\omega^2}{p^4 + 4\omega^4}.$$

Comparând cele două metode de rezolvare, constatăm că a doua metodă este mult mai directă și cu mult mai puține calcule și implicații teoretice. ■

### 11.5.11 Teoreme de dezvoltare

Pentru determinarea originalului  $f(t)$ , când se știe imaginea sa  $F(p)$ , se folosesc uneori teoremele de dezvoltare.

**Teorema 11.5.11.** Dacă  $F(p)$  este o funcția rațională  $F(p) = \frac{A(p)}{B(p)}$ , în care gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, iar numitorul  $B(p)$  are rădăcinile simple  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ , atunci  $F(p)$  este imaginea funcției

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (11.54)$$

*Demonstrație.* În ipotezele de mai sus, funcția  $F(p)$  admite o descompunere în fracții simple de forma

$$F(p) = \frac{a_0}{p-p_0} + \frac{a_1}{p-p_1} + \frac{a_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{a_n}{p-p_n}.$$

Coeficientul  $a_j$  se poate calcula integrând funcția  $F(p)$  pe un cerc  $\Gamma_j$  cu centrul în  $p_j$  și de rază suficient de mică astfel ca în interiorul său să nu fie plasat un alt pol al funcției  $F(p)$ . Avem

$$\int_{\Gamma_j} F(p) dp = \sum_{k=0}^n a_k \int_{\Gamma_j} \frac{dp}{p-p_k}.$$

În virtutea teoremei lui Cauchy,  $\int_{\Gamma_j} \frac{dp}{p-p_k} = 0$  pentru  $k \neq j$ .

Când  $k = j$ , tot din teorema lui Cauchy avem  $\int_{\Gamma_j} \frac{dp}{p-p_j} = 2\pi i$ , deci  $\int_{\Gamma_j} F(p) dp = 2\pi i a_j$ .

Folosind teorema reziduurilor și formula de calcul pentru reziduul relativ la un pol simplu, avem

$$\int_{\Gamma_j} F(p) dp = 2\pi i \operatorname{rez}(F, p_j) = 2\pi i \frac{A(p_j)}{B'(p_j)}.$$

Comparând cu egalitatea precedentă, deducem  $a_j = \frac{A(p_j)}{B'(p_j)}$ .

Cu aceasta, dezvoltarea funcției  $F(p)$  devine

$$F(p) = \sum_{k=0}^n \frac{A(p_k)}{B'(p_k)} \frac{1}{p-p_k}$$

iar originalul său are evident expresia (11.54).

**q.e.d.**

**Corolarul 11.5.2.** Dacă una din rădăcini este nulă, relația (11.54) devine

$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{R'(p_k)} \frac{e^{p_k t}}{p_k},$$

unde  $R(p)$  este polinomul cu proprietatea

$$B(p) = p R(p).$$

*Demonstrație.* Să presupunem că rădăcina nulă este  $p_0 = 0$ . Atunci  $B(p) = p R(p) \implies B'(p) = p R'(p) + R(p)$ . Deoarece  $R(p_k) = 0$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ , vom avea

$$\begin{aligned} B'(p_0) &= B'(0) = R(0), \\ B'(p_k) &= p_k R'(p_k). \end{aligned}$$

Descompunerea lui  $F(p)$  va lua forma  $F(p) = \frac{A(0)}{R(0)} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{p_k R'(p_k)} \frac{1}{p-p_k}$  și (11.54) devine

$$f(t) = \frac{A(0)}{R(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{A(p_k)}{p_k R'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (11.55)$$

Această egalitate se numește *formula lui Heaviside*.

**q.e.d.**

**Observația 11.5.4.** *Procedeul prin care am determinat originalul unei funcții raționale poate fi extins ușor și pentru cazul când numitorul  $B(p)$  are rădăcini multiple.*

**Extinderea procedurii.** Vom lua o constantă reală pozitivă  $a$ , mai mare decât toate părțile reale ale polilor  $p_k$ . Fie  $\alpha_k$  multiplicitatea polului  $p_k$ .

Vom utiliza aceeași curbă închisă ca în paragraful precedent și determinăm valoarea integralei pe această curbă din funcția  $\Phi(p) = F(p)e^{p t}$ .

Considerând că raza  $l$  a cercului, din care face parte semicercul  $\Gamma$ , tinde la  $\infty$  și folosind (11.8), obținem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{p t} dp = \sum_{k=1}^h \text{rez}(\Phi, p_k)$$

unde  $h \in \mathbb{N}^*$  este numărul polilor.

Folosim formula de calcul a reziduurilor în poli multipli și deducem formula

$$f(t) = \sum_{k=1}^h \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \left[ (p - p_k)^{\alpha_k} F(p)e^{p t} \right]_{p=p_k}^{(\alpha_k-1)}$$

după care se determină originalul în cazul când polii funcției raționale  $F(p)$  sunt multipli. ■

O a doua teoremă de dezvoltare este

**Teorema 11.5.12.** *Dacă funcția imagine  $F(p)$  este olomorfă în afara unui cerc  $\Gamma$  cu centrul în origine și rază  $R$  și are în punctul de la infinit un punct ordinar, atunci dezvoltarea sa în serie Laurent este*

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}, \quad |p| > R, \quad (11.56)$$

și  $F(p)$  este imaginea funcției

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \quad (11.57)$$

*Demonstrație.* Prin ipoteză,  $F(p)$  este olomorfă în domeniul  $|p| > R$ . Deci, funcția  $\varphi(\zeta) = F\left(\frac{1}{\zeta}\right)$  este olomorfă în domeniul  $|\zeta| < \frac{1}{R}$  și admite dezvoltarea în serie Taylor

$$\varphi(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots, \quad |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

Funcția  $F(p)$  are în punctul de la infinit un punct ordinar și din inegalitatea (11.6) rezultă că într-o vecinătate a acestui punct  $F(p)$  este mărginită și prin urmare

$$\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0,$$

deci  $\varphi(0) = a_0 = 0$ . Revenind la variabila  $p$ , obținem dezvoltarea (11.56).

Conform egalității (11.30), termenul general al seriei (11.56) este imaginea funcției

$$\frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Considerăm seria de puteri formată cu originalele termenilor seriei (11.56),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1}. \quad (11.58)$$

Vom demonstra că această serie este absolut și uniform convergentă și că suma sa este o funcție original.

Datorită inegalităților lui Cauchy,  $|a_n| \leq \frac{M}{r^n} = M R^n$ ,  $\left| \frac{a_n}{(n-1)!} t^{n-1} \right| \leq M R \frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!}$ , termenii seriei (11.58) nu depășesc, în modul, termenii seriei

$$MR \cdot e^{Rt} = MR \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Rt)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0,$$

despre care știm că este absolut și uniform convergentă pe intervalul  $[0, L]$ , unde  $L$  este la voia noastră de mare.

De aici rezultă că seria (11.58) este absolut și uniform convergentă pe intervalul  $[0, L]$ , cu  $L$  oricând de mare, și că suma sa  $f(t)$  are proprietatea

$$|f(t)| \leq M R e^{Rt}, \quad t > 0.$$

Prima condiție din Definiția 11.2.1 o considerăm îndeplinită de la sine, conform convenției adoptate. A doua condiție este evident îndeplinită, deci funcția (11.57) este un original.

Datorită convergenței uniforme, seria (11.57), înmulțită în prealabil cu  $e^{-pt}$ , poate fi integrată termen cu termen pe intervalul  $(0, \infty)$  și obținem funcția (11.56).

Teorema este complet demonstrată.

**q.e.d.**

**Exercițiul 11.5.11.** Să se determine originalul funcției  $F(p) = \frac{p}{(p^2 + a^2)(p^2 + b^2)}$ .

**Soluție.** Folosim prima teoremă de dezvoltare, în care

$$A(p) = p, \quad B(p) = (p^2 + a^2)(p^2 + b^2).$$

Polinomul  $B(p)$  are numai rădăcini simple:  $\pm ia, \pm ib$ . Cu

$$\frac{A(p)}{B'(p)} = \frac{1}{2(2p^2 + a^2 + b^2)}$$

obținem

$$f(t) = \frac{1}{2(b^2 - a^2)}(e^{ia t} + e^{-ia t}) + \frac{1}{2(a^2 - b^2)}(e^{ib t} + e^{-ib t})$$

sau, cu o altă scriere,  $f(t) = \frac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$ . ■

**Exercițiul 11.5.12.** Să se determine originalul funcției

$$F(p) = \frac{p + \lambda}{(p - a)^3(p - b)}$$

**Soluție.** De data aceasta,  $B(p)$  are o rădăcină triplă. Conform celor stabilite în Observația 11.5.4, avem

$$f(t) = \left[ \frac{p+\lambda}{(p-a)^3} e^{pt} \right]_{p=b} + \frac{1}{2!} \left[ \frac{p+\lambda}{p-b} e^{pt} \right]_{p=a}''.$$

Făcând calculele, se obține

$$f(t) = \frac{b+\lambda}{(b-a)^3} e^{bt} + \left[ \frac{b+\lambda}{(a-b)^3} - \frac{b+\lambda}{(a-b)^2} t + \frac{1}{2} \frac{a+\lambda}{a-b} t^2 \right] e^{at}.$$

■

**Exercițiul 11.5.13.** Precizați originalul funcției  $F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}$ , unde  $n$  este un întreg pozitiv.

**Soluție.** Funcția  $F(p)$  satisface condițiile din a doua teoremă de dezvoltare. Folosind dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii a funcției

$$e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^k}, \quad |p| > R > 0,$$

stabilim că dezvoltarea în serie Laurent în jurul originii a funcției  $F(p)$  este

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{p^{n+k+1}}, \quad |p| > R > 0,$$

raza  $R$  a cercului în exteriorul căreia au loc aceste dezvoltări fiind oricând de mică dorim. Punctul de la infinit este pentru această funcție un punct ordinar.

Conform celei de a doua teoremă de dezvoltare, originalul funcției  $F(p)$  este

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} t^{n+k}.$$

Această funcție poate fi pusă în legătură cu funcțiile lui Bessel de speța întâi și de ordin întreg  $J_n(t)$ . Mai precis, se poate arăta că

$$f(t) = \sqrt{t^n} J_n(2\sqrt{t}) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \right).$$

În cazul particular  $n = 0$ , se obține că funcția original corespunzătoare  $f(t)$  coincide cu funcția rezultată din compunerea funcției Bessel de speța întâi și de ordin zero  $J_0(u)$  cu funcția  $u = 2\sqrt{t}$ . ■





# Capitolul 12

## ME–12. Aplicații ale transformării Laplace

### 12.1 Integrarea ecuațiilor diferențiale

Să considerăm problema determinării funcției  $x(t)$ ,  $t > 0$ , care verifică ecuația diferențială liniară de ordinul  $n$  cu coeficienți constanți, neomogenă

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (12.1)$$

și condițiile inițiale

$$x(0+) = x_0, \quad x'(0+) = x_1, \quad x''(0+) = x_2, \dots, x^{(n-1)}(0+) = x_{n-1}, \quad (12.2)$$

unde  $f(t)$  este o funcție dată, iar  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sunt  $n$  numere date.

Soluția generală a ecuației omogene asociate

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

este o sumă de funcții de forma

$$e^{\alpha t} [P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t],$$

unde  $P(t)$  și  $Q(t)$  sunt polinoame. Deci, funcția  $x(t)$ , nulă pentru  $t < 0$ , care verifică ecuația omogenă și condițiile inițiale (12.2), este o funcție original împreună cu derivatele sale de orice ordin. În general nu putem afirma același lucru pentru ecuația (12.1) datorită prezenței funcției  $f(t)$ .

În cele ce urmează, vom presupune că  $f(t)$  este un original și că funcția  $x(t)$ , care verifică ecuația (12.1) și condițiile inițiale (12.2), îndeplinește condițiile impuse originalelor, împreună cu derivatele lor până la ordinul  $n$ . Notăm

$$X(p) = \mathcal{L}x(t), \quad F(p) = \mathcal{L}f(t).$$

Datorită proprietăților de liniaritate a transformatei Laplace, din ecuația (12.1) deducem

$$a_0 \mathcal{L}x^{(n)} + a_1 \mathcal{L}x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \mathcal{L}x' + a_n \mathcal{L}x = \mathcal{L}f(t). \quad (12.3)$$

Conform egalității (11.22) și ținând seama de condițiile inițiale (12.2), avem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x^{(n)}(t) &= p^n X(p) - (x_0 p^{n-1} + x_1 p^{n-2} + \cdots + x_{n-2} p + x_{n-1}), \\ \mathcal{L}x^{(n-1)}(t) &= p^{n-1} X(p) - (x_0 p^{n-2} + x_1 p^{n-3} + \cdots + x_{n-2}), \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{L}x''(t) &= p^2 X(p) - (x_0 p + x_1), \\ \mathcal{L}x'(t) &= p X(p) - x_0, \\ \mathcal{L}x(t) &= X(p). \end{aligned}$$



și se mai poate scrie

$$(p^2 + \omega^2)X(p) = \omega + \frac{p^2 + \omega^2}{p + \lambda}.$$

Deducem

$$X(p) = \frac{1}{p + \lambda} + \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Folosind rezultatele din Exemplul 11.3.2 și Exercițiul 11.5.1 determinăm originalul funcției  $X(p)$

$$x(t) = e^{-\lambda t} + \sin \omega t,$$

funcția astfel găsită fiind soluție a problemei Cauchy date. ■

## 12.2 Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare

Transformata Laplace se poate aplica și sistemelor de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Vom lua ca exemplu, sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x + b_0 y'' + b_1 y' + b_2 y = f(t) \\ \alpha_0 x'' + \alpha_1 x' + \alpha_2 x + \beta_0 y'' + \beta_1 y' + \beta_2 y = \varphi(t) \end{cases} \quad (12.5)$$

și condițiile inițiale

$$x(0+) = x_0, \quad x'(0+) = x_1; \quad y(0+) = y_0, \quad y'(0+) = y_1. \quad (12.6)$$

În ipoteza că  $f(t)$  și  $\varphi(t)$  sunt funcții original și că funcțiile  $x(t)$ ,  $y(t)$  care verifică sistemul (12.5) și condițiile inițiale (12.6) sunt, de asemenea, funcții original împreună cu primele două derivate, aplicăm transformata Laplace celor două ecuații (12.5) obținând astfel sistemul operațional

$$\begin{cases} (a_0 p^2 + a_1 p + a_2)X(p) + (b_0 p^2 + b_1 p + b_2)Y(p) = F(p) + \\ \quad + x_0(a_0 p + a_1) + x_1 a_0 + y_0(b_0 p + b_1) + y_1 b_0, \\ (\alpha_0 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_2)X(p) + (\beta_0 p^2 + \beta_1 p + \beta_2)Y(p) = \Phi(p) + \\ \quad + x_0(\alpha_0 p + \alpha_1) + x_1 \alpha_0 + y_0(\beta_0 p + \beta_1) + y_1 \beta_0, \end{cases}$$

unde am notat, ca de obicei,

$$\mathcal{L}x(t) = X(p), \quad \mathcal{L}y(t) = Y(p), \quad \mathcal{L}f(t) = F(p), \quad \mathcal{L}\varphi(t) = \Phi(p).$$

Din acest sistem se deduc funcțiile  $X(p)$ ,  $Y(p)$ . Soluția problemei este sistemul de funcții

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}X(p), \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}Y(p).$$

**Exercițiul 12.2.1.** Să se determine funcțiile  $x(t)$  și  $y(t)$  care verifică sistemul

$$\begin{cases} x'' + 2x' + x + y'' + y' + y = 1 \\ 2x' + 2x + y'' + 2y' = 2t \end{cases}$$

și condițiile inițiale

$$x(0+) = 0, \quad x'(0+) = 2; \quad y(0+) = 1, \quad y'(0+) = -2.$$

**Soluție.** Sistemul operațional corespunzător este

$$\begin{cases} (p^2 + 2p + 1)X(p) + (p^2 + p + 1)Y(p) = \frac{1}{p} + p + 1 \\ (2p + 2)X(p) + (p^2 + 2p)Y(p) = \frac{2}{p^2} + p. \end{cases}$$

Scăzând a doua ecuație din prima și simplificând cu  $p - 1$ , obținem sistemul echivalent

$$\begin{cases} (p + 1)X(p) - Y(p) = \frac{p + 2}{p^2} \\ 2(p + 1)X(p) + (p^2 + 2p)Y(p) = \frac{p^3 + 2}{p^2}. \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este

$$X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 2p + 2}, \quad Y(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{p + 1}{p^2 + 2p + 2}.$$

Deoarece trinomul  $p^2 + 2p + 2$  are rădăcini imaginare, vom scrie

$$X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p + 1)^2 + 1}, \quad Y(p) = -\frac{1}{p^2} + \frac{p + 1}{(p + 1)^2 + 1}.$$

Originalele acestor funcții sunt

$$x(t) = t + e^{-t} \sin t, \quad y(t) = -t + e^{-t} \cos t$$

și cu aceasta problema Cauchy este rezolvată. ■

## 12.3 Integrarea unor ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili

În cele expuse mai sus, am arătat cum metoda operațională transformă problema integrării unei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți, cu condiții inițiale date, în problema rezolvării unei ecuații algebrice. Se obține astfel imaginea  $X(p)$  a soluției  $x(t)$ . Dificultățile de calcul sunt legate de determinarea originalului  $x(t)$ , cunoscută fiind imaginea sa.

Această metodă poate fi extinsă și pentru unele ecuații diferențiale liniare cu coeficienți variabili. Aplicând transformarea Laplace ecuației date, aceasta se transformă uneori tot într-o ecuație diferențială, care se poate întâmpla să se integreze mai ușor.

Să considerăm, de exemplu, ecuația diferențială liniară

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (12.7)$$

în care coeficienții  $a_k$  sunt polinoame în  $t$

$$a_k = \alpha_{k0} t^r + \alpha_{k1} t^{r-1} + \dots + \alpha_{kr-1} t + \alpha_{kr}$$

Ecuația (12.7) conține în membrul stâng termeni de forma

$$\begin{cases} x, & tx, & t^2x, \dots \\ x', & tx', & t^2x', \dots \\ x'', & tx'', & t^2x'', \dots \\ \dots \\ x^{(n)}, & tx^{(n)}, & t^2x^{(n)}, \dots \end{cases} \quad (12.8)$$

Presupunem că  $f(t)$  și funcția necunoscută  $x(t)$ , împreună cu derivatele sale până la ordinul  $n$  inclusiv, sunt originale. Aplicând transformarea Laplace ecuației (12.7), va trebui să calculăm imaginile funcțiilor (12.8). Pentru aceasta folosim egalitățile (11.22) și (11.28). Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}x &= X(p), \quad \mathcal{L}(tx) = -X'(p), \quad \mathcal{L}(t^2x) = X''(p), \dots \\ \mathcal{L}x' &= pX(p) - x(0+), \quad \mathcal{L}(tx') = -[pX(p)]', \quad \mathcal{L}(t^2x') = [pX(p)]'', \dots \\ \mathcal{L}x'' &= p^2X(p) - [px(0+) + x'(0+)], \quad \mathcal{L}(tx'') = -[p^2X(p)]' + x(0+), \dots\end{aligned}\tag{12.9}$$

dacă se aplică transformarea Laplace în ecuația (12.7) și se folosesc relațiile (12.9) se obține ca ecuație operațională tot o ecuație diferențială liniară

$$A_0X^{(r)} + A_1X^{(r-1)} + \dots + A_rX = \Phi(p).$$

Ordinul acestei ecuații este cel mult  $r$ , unde  $r$  este cel mai mare dintre gradele polinoamelor  $a_k$ . Coeficienții  $A_0, A_1, \dots, A_r$  în număr uneori mai mic decât gradul ecuației inițiale, sunt polinoame în variabila  $p$ .

**Exercițiul 12.3.1.** Să se determine soluția ecuației diferențiale

$$tx'' + x' + x = 0$$

care satisface condițiile inițiale  $x(0+) = x_0$ ,  $x'(0+) = x_1$ .

**Soluție.** Avem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(tx'') &= -p^2X'(p) - 2pX(p) + x_0, \\ \mathcal{L}x' &= pX(p) - x_0.\end{aligned}$$

Obținem ecuația operațională

$$p^2X'(p) + (p-1)X(p) = 0$$

a cărei soluție generală este

$$X(p) = C \frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}},$$

$C$  fiind o constantă arbitrară.

Observăm că, în conformitate cu Exercițiul 11.5.13, originalul său este

$$x(t) = CJ_0(2\sqrt{t}),$$

unde  $J_0(\tau)$  este funcția lui Bessel de speța întâia și de ordinul zero

$$J_0(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2k}.$$

Constanta  $C$  se determină folosind condițiile inițiale. Avem

$$x(t) = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{(k!)^2}, \quad x'(t) = C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{kt^{k-1}}{(k!)^2}.$$

Condițiile inițiale dau

$$x(0+) = C = x_0, \quad x'(0+) = -C = x_1.$$

Rezultă că cele două condiții inițiale nu pot fi date arbitrar. Va trebui să avem  $x_0 = -x_1$ . Presupunând această condiție îndeplinită, soluția problemei este  $x(t) = x_0 J_0(2\sqrt{t})$ . Faptul că cele două condiții inițiale nu pot fi independente se poate explica amintind că ecuația de tip Bessel de forma celei din enunț are soluția

generală  $x(t) = A J_0(2\sqrt{t}) + B Y_0(2\sqrt{t})$ , unde  $Y_0(t)$  este funcția lui Bessel de speța a doua, cu proprietatea  $\lim_{\tau \rightarrow 0} |Y_0(\tau)| = \infty$ .

Pentru a fi îndeplinită ultima condiție trebuie să luăm  $B = 0$ . Soluția ecuației, cu condiții inițiale date, se construiește numai cu primul termen

$$x(t) = A J_0(2\sqrt{t})$$

și pentru determinarea constantei  $A$  este suficientă doar o condiție inițială. ■

## 12.4 Integrarea unor ecuații cu derivate parțiale

Să considerăm ecuația liniară

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma u = \varphi(x, t), \quad (12.10)$$

unde  $a, b, \alpha, \beta, \gamma$  sunt funcții numai de  $x$ , continuu pe un interval  $[0, l]$ .

Se pune problema determinării soluției  $u(x, t)$  a acestei ecuații pentru

$$(x, t) \in [0, l] \times (0, \infty),$$

care satisface condițiile inițiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \quad (\forall) x \in [0, l] \quad (12.11)$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} \left[ A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial t} + C u \right]_{x=0} &= h(t) \\ \left[ A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 u \right]_{x=l} &= k(t) \end{cases} \quad (12.12)$$

unde  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  sunt constante, iar  $h(t)$  și  $k(t)$  funcții date.

Vom presupune că  $h(t)$  și  $k(t)$  sunt funcții original. Fie  $H(p)$  și  $K(p)$  imaginile lor. De asemenea, presupunem că  $\varphi(x, t)$  este un original în raport cu  $t$  și notăm

$$\Phi(x, p) = \mathcal{L}\varphi(x, t) = \int_0^\infty \varphi(x, t) e^{-pt} dt.$$

În ipoteza că soluția  $u(x, t)$  a problemei, precum și derivatele sale parțiale de primele două ordine satisfac în raport cu  $t$  condițiile impuse funcțiilor original oricare ar fi  $x \in [0, l]$ , putem aplica transformarea Laplace ecuației (12.10) și condițiilor (12.12). Deoarece  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  nu depind de  $t$ , avem

$$a \mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma \mathcal{L} u = \Phi(x, p). \quad (12.13)$$

De asemenea,

$$\begin{cases} \left[ A \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + B \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + C \mathcal{L} u \right]_{x=0} &= H(p) \\ \left[ A_1 \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \mathcal{L} u \right]_{x=l} &= K(p) \end{cases} \quad (12.14)$$

pentru că integrarea în raport cu  $t$  și înlocuirile  $x = 0$ ,  $x = l$  sunt operații independente.

Avem

$$\mathcal{L} u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt = U(x, p),$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}(x, p),$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-pt} dt = \frac{d^2 U}{dx^2}(x, p).$$

Am notat derivatele funcției  $U(x, p)$  în raport cu  $x$  cu  $\frac{dU}{dx}(x, p)$ ,  $\frac{d^2 U}{dx^2}(x, p)$  deoarece, în cele ce urmează,  $p$  figurează ca un parametru în raport cu care nu avem de derivat. Pe de altă parte, în conformitate cu (11.22) și ținând seama de condițiile inițiale (12.11), avem

$$\begin{cases} \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= pU(x, p) - f(x), \\ \mathcal{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= p^2 U(x, p) - [p f(x) + g(x)]. \end{cases}$$

Introducem în (12.13) și (12.14). Obținem ecuația operațională

$$a \frac{d^2 U}{dx^2} + b \frac{dU}{dx} + cU = d, \quad (12.15)$$

unde

$$c = \alpha p^2 + \beta p + \gamma, \quad d = \Phi(x, p) + (\alpha p + \beta)f(x) + \alpha g(x),$$

și condițiile la limită

$$\begin{cases} \left[ A \frac{dU}{dx} + (Bp + C)U \right]_{x=0} &= H(p) + Bf(0+) \\ \left[ A_1 \frac{dU}{dx} + (B_1 p + C_1)U \right]_{x=l} &= K(p) + B_1 f(l) \end{cases} \quad (12.16)$$

Ecuația operațională (12.15) este o ecuație diferențială ordinară liniară cu coeficienți funcții de  $x$  și de parametrul  $p$ . De obicei, integrarea acestei ecuații cu condițiile (12.16) este o problemă mai simplă decât problema inițială. Fie  $U(x, p)$  soluția ecuației (12.15) care verifică egalitățile (12.16). Soluția problemei inițiale va fi originalul acestei funcții,

$$u(x, t) = \mathcal{L}U(x, p).$$

**Observația 12.4.1.** În cazul când ecuația este de tip parabolic, nu trebuiesc date două condiții inițiale și două condiții la limită.

**Exercițiul 12.4.1.** Să se determine soluția  $u(x, t)$  a ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \sin \omega t,$$

unde  $A, a$  și  $\omega$  sunt constante reale, care satisface condițiile inițiale

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell]$$

și condițiile la limită

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

**Soluție.** În ipoteza că soluția  $u(x, t)$  a problemei și derivatele sale parțiale de primele două ordine satisfac în raport cu  $t$  condițiile impuse funcțiilor original, oricare ar fi  $x \in [0, \ell]$ , se poate aplica transformarea Laplace ecuației date și condițiilor la limită. Se obține ecuația operațională

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - p^2 U(x, p) = -\frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}$$



cu condițiile la limită

$$U(0, p) = 0, \quad U(\ell, p) = 0,$$

unde

$$U(x, p) = \mathcal{L}u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-pt} dt.$$

Soluția generală a ecuației operaționale este

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{A\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)}.$$

Din condițiile la limită se determină  $C_1$  și  $C_2$ , după care rezultă că

$$U(x, p) = \frac{A\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} - \frac{A\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} \cdot \frac{e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}(x-\ell)}}{1 + e^{\frac{p}{a}\ell}}.$$

Soluția problemei la limită și cu condiții inițiale date va fi

$$u(x, t) = \mathcal{AL}^{-1} \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} - \mathcal{AL}^{-1} \left[ \frac{\omega}{p^2(p^2 + \omega^2)} \cdot \frac{e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}(x-\ell)}}{1 + e^{\frac{p}{a}\ell}} \right].$$

Rămâne acum să determinăm inversele prin transformata Laplace a funcțiilor de mai sus. Aceasta se poate face folosind formula lui Mellin–Fourier. ■

## 12.5 Rezolvarea unor ecuații integrale

În cele ce urmează vom da două tipuri de ecuații integrale care pot fi rezolvate prin metode operaționale.

Prima ecuație are forma

$$Ax(t) + B \int_0^t x(\tau)k(t-\tau)d\tau = Cf(t), \quad (12.17)$$

în care  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt constante, iar  $f(t)$  și  $k(t-\tau)$  sunt funcții cunoscute. Funcția necunoscută este  $x(t)$  și figurează și sub semnul de integrare. De aceea egalitatea (12.17) se numește *ecuație integrală*. Funcția  $k(t-\tau)$  se numește *nucleul ecuației integrale* și în general este o funcție de două variabile,  $k(t, \tau)$ . Deci, putem spune că ecuația (12.17) este un caz particular al ecuației

$$Ax(t) + B \int_0^t x(\tau)k(t, \tau)d\tau = Cf(t),$$

în care nucleul  $k(t, \tau)$  este o funcție de două variabile.

Să presupunem că funcțiile  $f(t)$ ,  $k(t)$  și funcția necunoscută  $x(t)$  sunt originale. Notăm

$$\mathcal{L}f(t) = F(p), \quad K(p) = \mathcal{L}k(t), \quad X(p) = \mathcal{L}x(t).$$

Conform egalității (11.47) din Teorema 11.5.9 (Borel), avem

$$\mathcal{L} \int_0^t x(\tau)k(t-\tau) d\tau = X(p)K(p).$$

Deci, aplicând transformata Laplace, ecuația integrală (12.17) se transformă în egalitatea

$$[A + BK(p)]X(p) = CF(p) \quad (12.18)$$

care se numește *ecuația operațională* corespunzătoare ecuației integrale (12.17).

Din aceasta se deduce

$$X(p) = \frac{CF(p)}{A + BK(p)}.$$

Soluția ecuației integrale (12.17) este originalul acestei funcții.

**Exercițiul 12.5.1.** Să se rezolve ecuația integrală

$$x(t) - 2\omega \int_0^t x(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau = \lambda \cos \omega t.$$

**Soluție.** Ecuația operațională corespunzătoare este

$$\left(1 - \frac{2\omega^2}{p^2 + \omega^2}\right)X(p) = \lambda \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Rezultă

$$X(p) = \lambda \frac{p}{p^2 - \omega^2} = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{p - \omega} + \frac{1}{p + \omega} \right).$$

Soluția ecuației integrale este originalul acestei funcții,

$$x(t) = \lambda \cosh \omega t.$$

Pentru determinarea rezultatului s-a ținut cont de faptul că originalul fracțiilor simple de mai sus sunt respectiv funcțiile  $e^{\lambda t}$  și  $e^{-\lambda t}$ . ■

Cea de a doua ecuație integrală căreia i se poate aplica metoda operațională este

$$Ax(t) + B \int_0^t x(\tau)x(t - \tau) d\tau = Cf(t). \quad (12.19)$$

Ecuația operațională corespunzătoare este

$$BX^2(p) + AX(p) - CF(p) = 0. \quad (12.20)$$

Soluțiile acestei ecuații algebrice sunt imaginile soluțiilor ecuației integrale.

**Exercițiul 12.5.2.** Să se determine o soluție a ecuației integrale

$$-x(t) + \frac{1}{2} \int_0^t x(\tau)x(t - \tau) d\tau = \cos t.$$

**Soluție.** Aplicând teoria de mai sus, se obține ecuația operațională

$$X^2(p) - 2X(p) - \frac{2p}{p^2 + 1} = 0,$$

care are soluțiile

$$X(p) = \frac{\sqrt{1 + p^2} \pm p}{\sqrt{1 + p^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Dacă din cele două soluții alegem

$$X(p) = \frac{-p + \sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}},$$

atunci originalul ei este

$$x(t) = J_1(t) - J_0(t)$$

unde  $J_0, J_1$  sunt funcțiile Bessel de speța întâi: prima, de ordin zero; a doua, de ordin unu. Funcția original  $x(t)$  este o soluție a ecuației integrale date. ■

## 12.6 Calculul unor integrale improprii

Arătăm pe un exercițiu cum se utilizează transformata Laplace pentru calculul unor integrale improprii.

**Exercițiul 12.6.1.** *Să se calculeze integralele improprii:*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^2} dx; \quad I = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx; \quad I = \int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x} dx.$$

**Soluție.** Pentru calculul primei integrale considerăm integrala improprie depinzând de parametrul  $t$

$$I_1(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2} dx,$$

căreia îi aplicăm transformata Laplace. Avem

$$\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{\sin^3 tx}{x^2} dx \right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx \int_0^\infty (\sin^3 tx) e^{-pt} dt.$$

Integrala din interior este

$$\mathcal{L}\sin^3 tx = \frac{3}{4}\mathcal{L}\sin tx - \frac{1}{4}\mathcal{L}\sin 3tx = \frac{3}{4} \frac{x}{p^2 + x^2} - \frac{1}{4} \frac{3x}{p^2 + 9x^2}.$$

Înlocuind această valoare a integralei din interior și efectuând schimbarea de variabilă  $x^2 = u$ , găsim

$$\mathcal{L}I_1(t) = 3 \int_0^\infty \frac{1}{(p^2 + u)(p^2 + 9u)} du.$$

Valoarea acestei integrale se determină imediat și se găsește

$$\mathcal{L}I_1(t) = \left( \frac{3}{4} \ln 3 \right) \frac{1}{p^2} \implies I_1(t) = \frac{3t}{4} \ln 3$$

de unde, luând  $t = 1$ , se deduce  $I = \frac{3}{4} \ln 3$ .

Pentru calculul celei de a doua integrale se procedează analog considerând funcția  $I_1(t) = \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$  căreia îi aplicăm transformarea Laplace. Avem

$$\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{\cos tx}{1+x^2} dx \right) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \int_0^\infty (\cos tx) e^{-pt} dt.$$

Integrala din interior este transformata Laplace a funcției  $\cos tx$  care se știe că este  $\mathcal{L}\cos tx = \frac{p}{p^2 + x^2}$  astfel că putem scrie  $\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{p}{p^2 + x^2} dx$ . Valoarea acestei integrale se poate determina fie folosind descompunerea în fracții simple, fie utilizând teorema reziduurilor. Se găsește

$$\mathcal{L}I_1(t) = \frac{\pi}{2(p+1)} \implies I_1(t) = \frac{\pi}{2} e^{-t} \implies I = \frac{\pi}{2e}.$$

Pentru a treia integrală, pornind de la integrala  $I_1(t) = \int_0^\infty \frac{\sin tx^3}{x} dx$  se ajunge la  $\mathcal{L}I_1(t) = \int_0^\infty \frac{x^2}{p^2 + x^6} dx = \frac{\pi}{6p}$  și de aici la valoarea  $I = \frac{\pi}{6}$  a integralei date. ■